

# 広範囲な Reynolds 数域での円柱まわりの 2 次元及び 3 次元数値流体解析

丸岡 晃<sup>1</sup>・太田 真二<sup>2</sup>・平野 廣和<sup>3</sup>・川原 瞳人<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 工修 中央大学大学院理工学研究科土木工学科専攻(〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

<sup>2</sup>正会員 工修 三井造船(株) 鉄構建設事業本部(〒559 大阪市住之江区柴田谷 1-1-57)

<sup>3</sup>正会員 工博 中央大学助教授 総合政策学部(〒192-03 東京都八王子市東中野 742-1)

<sup>4</sup>正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

本論文では、広範囲な Reynolds 数域での円柱まわりの流れを数値流体解析手法により 2 次元及び 3 次元解析を行った。円柱まわりの流れの性状を把握し、実験結果と比較することによって数値流体解析の有効性を検討した。また、3 次元解析において軸方向領域及び層分割の検討を行った。流れ場は、非圧縮性粘性流れを仮定し、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式により表現される。解析手法としては、時間方向の離散化に陰的解法を適用し、空間方向の離散化に同次補間を用いた有限要素法を適用した。2 次元解析では、Reynolds 数域を  $Re = 10^1 \sim 10^6$ 、3 次元解析では、Reynolds 数域を亜臨界域である  $Re = 10^2 \sim 10^4$  と設定した。

**Key Words :** two dimensional numerical flow analysis, three dimensional numerical flow analysis, circular cylinder, finite element method

## 1. はじめに

風工学において、最も基本的な断面の一つである円柱まわりの流れは、Reynolds 数の変化により、剥離点の位置や、Karman 渦列の放出に代表される様々な流れのパターンを作り出すことが知られている。この流れ場の物理的なメカニズムを解明することは、剥離点が定まりにくい形状を有する物体まわりの流れの流体力学的问题を扱うことに大きく貢献すると考えられる。

この種の問題は、周知の通りこれまでに多くの実験が行われており、豊富な実験データの蓄積がなされている<sup>1)~4)</sup>。また、数値流体解析の分野においても、解析結果と実験結果とを比較することによって、解析手法の妥当性を検証する例題として取り上げられ、数多くの数値解析例が報告されている<sup>5)~8), 11), 13)~15)</sup>。ところで、従来の数値流体解析で円柱まわりなどの流れを解析する場合、通常 2 次元解析が試みられてきた。この最大の理由の一つは、3 次元解析を扱った場合には非常に多くの計算機容量と計算時間が要求されるため、大規模な計算は困難であったからである。また、比較すべき風洞実験が、部分断面を取り出した流れの 2 次元性を考慮した実験であった。これと比較することから、数値解析でも平面のみを考慮した 2 次元解析が主として行われていた。しかし、実際に実験が行われている空間は 3 次元空間であるので、2 次元平面の解析では、実験の条件に即していない。

一方、近年の電子計算機の高性能化ならびに低価格

化に伴って、高度で詳細な数値流体解析が手軽に行えるようになってきた。その一方で、詳細な解析を行う場合、2 次元解析では定量的な面で実験結果と差が生じることが指摘されるようになってきた<sup>7), 11), 14)</sup>。例えば、円柱まわりの流れの解析では、亜臨界域と呼ばれる Reynolds 数が約  $Re = 10^2 \sim 10^4$  付近で抗力係数が実験結果に比べて大きな値を示すことである。この原因として色々なことが考えられるが、まず第一に挙げられることは、円柱まわりの流れでは、Reynolds 数が約  $Re = 190$  以上になると、主流方向と直角の円柱軸方向にも流れが生じる<sup>1)</sup> からであり、2 次元解析ではこの特性を捕らえられないことによると推定される。ここで生じる流れは、一般に軸方向流と呼ばれる 3 次元的な流れであり、2 次元解析ではこの特性を捕らえられないことは自明のことである。その他の原因として、高 Reynolds 数の場合の乱流のモデル化の問題や解析手法の誤差の問題なども考えられるが、流れを 2 次元平面内に拘束して軸方向流を考慮していないことが、流体力を過大評価している主要な原因であると考えられる。

以上のような背景から、本論文では軸方向流の発生が円柱に作用する流体力にどのような影響を及ぼしているかということに関して焦点を絞り、これを考察することを目的とする。本論文では、流れ場は非圧縮性粘性流れを仮定し、基礎方程式には非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いることとする。なお、ここでは乱流モデルは用いない。解析手法としては、時間方向の離散化には安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用

し、移流項と発散項を変形することによって安定化項を含む時間方向の離散式を導出する。その導出された式の空間方向の離散化に Galerkin 法に基づく有限要素法を適用する。本論文で導出した手法は、著者ら<sup>12)</sup>が開発した有限要素法の解析手法である IBTD(Improved Balancing Tensor Diffusivity) 法と FS(Fractional step) 法を組み合わせた IBTD+FS 法とまったく同様の手法となる。本解析手法は、同次補間を用いることができ、陰的解法であるが、対称行列の手法であることから、安定性、計算容量、計算効率に優れている。また、数値的な散逸誤差と位相誤差を小さく見積もることのできる高効率な手法となる。

具体的には、まず 2 次元解析により、Reynolds 数をパラメータとして  $Re = 10^1 \sim 10^6$  の範囲で同一の解析手法で解析を行い、各 Reynolds 数の違いによる流れの挙動を検討し、解析結果と実験結果の比較を行う。これにより流れの Reynolds 数依存性の定性的な面に着目するとともに、3 次元解析との比較のためのデータの蓄積を行う。さらに、2 次元解析の適用可能な範囲を考察する。次に、2 次元解析結果に基づき、3 次元性が顕著になると考えられる亜臨界域である  $Re = 10^2 \sim 10^4$  での 3 次元解析を行う。このような手順により、本論文では、3 次元解析により発生する軸方向流の確認を行い、3 次元解析結果と 2 次元解析結果の比較を行っている。また、既往の風洞実験結果とも比較を行うことで、3 次元数値流体解析の有効性の検討を行う。

ところで、Reynolds 数が高くなるにつれて、3 次元解析結果においても、実験結果と一致しないことが報告されている<sup>13)</sup>。この原因の一つとして、円柱軸方向長さ及び層分割が、その Reynolds 数の流れに対して不適切であるということが考えられる。また、平面方向の要素分割についても改善が必要であると考えられる。3 次元解析でのモデル化の軸方向長さ及び層分割の決定は、平面方向の分割より、その解に大きく依存してくると推定される。そのため、本論文では、 $Re = 10^{3.5} (3.16 \times 10^3)$  の流れを取り上げ、円柱軸方向長さ及び層分割をパラメータとして 3 次元解析を行い、その複雑な流れ場を捕らえるための最適な円柱軸方向長さ及び層分割の検討を行う。

以上の解析により、円柱まわりの広範囲な Reynolds 数領域での 2 次元及び 3 次元解析結果の比較から、軸方向流の発生を確認することができ、これが剥離を伴う流れの場合、円柱に作用する流体力に大きく影響することがわかった。さらに、3 次元解析結果において、流体力学的見地から実験結果と定量的な一致が得ることができた。本論文では、これらの得られた結果を報告する。

## 2. 解析手法

### (1) 基礎方程式

流れ場を非圧縮性粘性流れと仮定すると、基礎方程式は、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式により記述され、無次元化することによって、以下の運動方程式と連続式によって表現することができる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}, p$  は流速と圧力、 $\mathbf{f}$  は外力項、 $\nu$  は  $1/Re$ 、 $Re$  は Reynolds 数を表す。

### (2) 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用する。運動方程式 (1) に 2 次精度となる Crank-Nicolson 法を適用し、連続式 (2) は完全陰的に表す。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{f} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{n+1/2} = (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1})/2$  であり、移流項の非線形項は、移流速度を既知流速  $\mathbf{u}^n$  により近似する。

### (3) 安定化項を含む時間方向の離散式の導出

空間方向の離散化には、有限要素法を適用するが、式 (3), (4) に Galerkin 法を用いると、運動方程式の移流項が中心差分型となるため、高 Reynolds 数の解析で不安定になりやすいことが知られている。また、流速と圧力の補間関数に異なった次数を用いる混合補間を行わないと安定な解析が行えない。そこで、本論文では、運動方程式の離散化に、移流項の不安定性を解消する働きをする安定化項を含む手法を用いる。また、連続式の離散化に、流速と圧力の補間関数に同次補間が可能な安定化項を含む手法を用いる。

まず、式 (3), (4) の移流項と発散項は、陽的部分と増分の形に分けると以下のように変形できる。

$$\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \frac{1}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^n + \nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \quad (6)$$

式 (5), (6) の増分の形のところに、時間方向に離散化した運動方程式 (3) の時間微分項を代入することによって、時間微分を空間微分に置き換える。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} &= \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} \\ &\quad - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{f} \} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= \nabla \cdot \mathbf{u}^n \\ &\quad - \Delta t \nabla \cdot \{\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} \\ &\quad - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{f}\} \quad (8)\end{aligned}$$

式(7),(8)を式(3),(4)の移流項と発散項に代入し直すと、移流項と発散項を陽的に表すことができ、以下の安定化項を含む時間方向の離散式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} &+ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \nabla p^{n+1/2} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} \\ &- \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \{\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} \\ &- \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{f}\} = \mathbf{f} \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}^n - \Delta t \nabla \cdot \{\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} \\ - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{f}\} = 0 \quad (10)\end{aligned}$$

上式の左辺最終項が、空間方向の離散化に同次補間を用いたGalerkin法を適用した場合に、移流項と発散項を安定化させる効果を持つ。

#### (4) 重み付き残差方程式

流速と圧力の重み関数と試行関数の同次補間である四角形要素のQ1Q1要素や三角形要素のP1P1要素の補間による近似関数をそれぞれ $w_h, q_h, u_h, p_h$ とする。式(9),(10)のGalerkin法による重み付き残差方程式は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \mathbf{f}_h \right\} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \{-p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2}\} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla w_h \\ \cdot \{\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2} + \nabla p_h^{n+1/2} - \mathbf{f}_h\} d\Omega \\ = \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \{-p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2} \\ - \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^n (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)\} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^n d\Omega \\ + \int_{\Omega} \Delta t \nabla q_h \cdot \{\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2} + \nabla p_h^{n+1/2} - \mathbf{f}_h\} d\Omega \\ = - \int_{\Gamma} q_h \{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (12)\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位テンソルであり、式(11)の左辺第3項と式(12)の左辺第2項が安定化項である。この項は、粘性項が含まれるがQ1Q1要素やP1P1要素を用いた場合、2階微分なので消去される。

運動方程式(11)には未知圧力 $p_h^{n+1/2}$ が、連続式(12)には未知流速 $\mathbf{u}_h^{n+1/2}$ がそれぞれ含まれることから、式(11)と式(12)は、連立して解くこととなる。ここでは、式(12)の未知の流速 $\mathbf{u}_h^{n+1/2}$ を陽的に近似( $\mathbf{u}_h^{n+1/2} \rightarrow \mathbf{u}_h^n$ )することによって、式(12)から圧力を求め、その

圧力を用いて式(11)から流速を求める方法を用いている。また、移流項と発散項が、陽的に示されており、式(11),(12)の代数方程式を導いた際の行列の形が対称行列となる。

#### (5) 本解析手法の特徴

本手法は、筆者ら<sup>12)</sup>が提案した有限要素法の解析手法であるIBTD(Improved Balancing Tensor Diffusivity)法とFS(Fractional Step)法を組み合わせたIBTD+FS法とまったく同様の手法となる。

IBTD法は、時間に関するTaylor展開の2次の項までを考慮し、人工粘性を与える2次精度の手法であるBTD法<sup>5)</sup>を陰的に改良した手法であり、FS法は、圧力Poisson方程式を導くことによって、流速と圧力を分離して解く手法である。また、本手法は、重み関数と試行関数に異なった補間関数を用いるPetrov-Galerkin法<sup>6)</sup>の考えに基づき、導くことも可能である。

本手法の特徴をまとめると、同次補間を用いることができ、陰的解法であるが、対称行列の手法であることから、安定性、計算容量、計算効率に優れている。また、精度面でも2次精度となり、散逸誤差を少なく見積もることができる。さらに、有限要素法特有の時間微分項の空間方向の離散化の際に生じる質量行列があるため、位相誤差も少なく見積もることができる。

### 3. 円柱まわりの流れの解析

円柱まわりの流れに代表される剥離を伴う流れでは、実際には3次元的な流れが存在するため、3次元解析を行う必要があると言われている<sup>7),10)</sup>。まず、ここでは、2次元平面で微細な有限要素分割を行い、乱流モデルを用いない同一の解析手法で、 $Re = 10^1 \sim 10^6$ の広範囲のReynolds数域の2次元解析を行うことによって、円柱まわりの流れを体系的に整理することとする。2次元解析結果を実験結果と比較することによって、Reynolds数依存性の定性的な面と定量的な面が2次元解析でどの程度適用できるかを検討する。次に、円柱まわりの流れの軸方向流に代表される3次元的な流れの存在を確認するために、3次元解析を行なう。3次元解析結果を2次元解析結果ならびに実験結果と比較することによって、3次元解析の有効性について検討する。3次元解析でのReynolds数は、 $Re = 10^2 \sim 10^4$ の亜臨界域としている。ただし、本論文では、乱流モデルなどのモデル化手法を導入していないため、 $Re = 10^4$ 以上の高Reynolds数域では計算機容量の問題から、十分に微細な有限要素分割が行えないと判断し、亜臨界域に限定した。

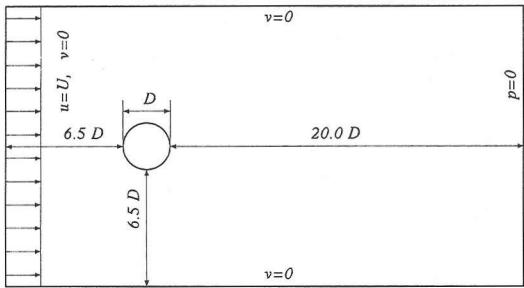


図-1 2次元平面の解析領域と境界条件

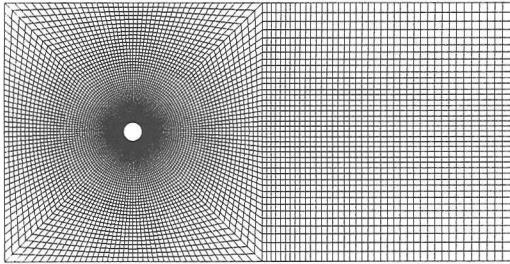


図-2 要素分割(1)

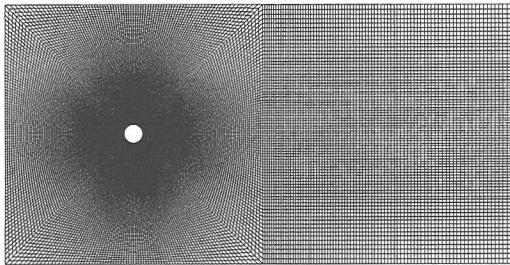


図-3 要素分割(2)

### (1) 解析領域と境界条件

図-1に2次元平面の解析領域と境界条件を示す。2次元平面の解析領域は、円柱直径を  $D$ とした場合、円柱前方と側方を  $6.5D$ 、円柱後方を  $20.0D$ としている。閉塞率は、7.1%である。また、境界条件は、流入境界で一様流速  $U$ 、側面で slip、円柱表面で no-slip、流出境界で圧力  $0$ を規定している。3次元解析における円柱軸方向長さは、2種類の  $1.0D$ と  $2.0D$ としている。また、円柱軸方向の境界条件は、周期境界条件を用いている。解析に用いた有限要素は、すべて四角形要素の Q1Q1 要素である。

### (2) 2次元解析条件

Reynolds 数は、 $Re = 10^1 \sim 10^6$ の範囲であり、 $10^{0.25}$  ピッチに変化させて解析を行なった。ここで、 $10^{0.25} = 1.78$ 、 $10^{0.5} = 3.16$ 、 $10^{0.75} = 5.62$ である。例えば、

表-1 2次元解析における解析条件

有限要素分割	要素分割(1)	要素分割(2)
Reynolds 数 $Re$	$10^1 \sim 10^4$	$10^3 \sim 10^6$
総節点数	11,400	45,200
総要素数	11,200	44,800
周方向分割	160	320
最小分割幅	$0.001D$	$0.0001D$
時間増分 $\Delta t$	$0.02D/U$	$0.01D/U$

表-2 3次元解析における解析条件

解析ケース	1D20	2D40
軸方向長さ	$1.0D$	$2.0D$
軸方向層分割	20	40
総節点数	239,400	467,400
総要素数	224,000	448,000
層分割幅	$0.05D$	$0.05D$

$Re = 10^{2.25}, 10^{2.5}, 10^{2.75}$ なら、それぞれ、 $Re = 1.78 \times 10^2, 3.16 \times 10^2, 5.62 \times 10^2$ となる。表-1に2次元解析における解析条件を示す。 $Re = 10^1 \sim 10^4$ の Reynolds 数域での有限要素分割は、要素分割(1)を用いた(図-2)。また、 $Re = 10^3 \sim 10^6$ の Reynolds 数域での有限要素分割は、より微細な有限要素分割が要求されるため、要素分割(1)より円柱の周方向分割、最小分割幅等を細かくした要素分割(2)を用いた(図-3)。時間増分  $\Delta t$ は、要素分割(1)の場合、 $0.02D/U$ とし、要素分割(2)の場合、 $0.01D/U$ と設定した。

### (3) 3次元解析条件

Reynolds 数は、 $Re = 10^2 \sim 10^4$ の範囲であり、 $10^{0.5}$  ピッチに変化させて解析を行なった。表-2に3次元解析における解析条件を示す。3次元解析の要素分割は、2次元解析で用いた要素分割(1)を円柱軸方向に重ねたものを用いた。円柱軸方向層分割は、軸方向長さを  $1.0D$ のとき 20 層とし、 $2.0D$ のとき 40 層とした。このとき層分割幅は、共に  $0.05D$ となる。ここで、解析ケース名を、軸方向長さを  $1.0D$ とし、軸方向層分割を 20 層としたものを解析ケース 1D20、また、軸方向長さを  $2.0D$ とし、軸方向層分割を 40 層としたものを解析ケース 2D40と呼ぶことにする。時間増分  $\Delta t$ は、要素分割(1)の2次元解析と同じ  $\Delta t = 0.02D/U$ とする。図-4に、解析ケース 2D40 の3次元有限要素要素分割を示す。

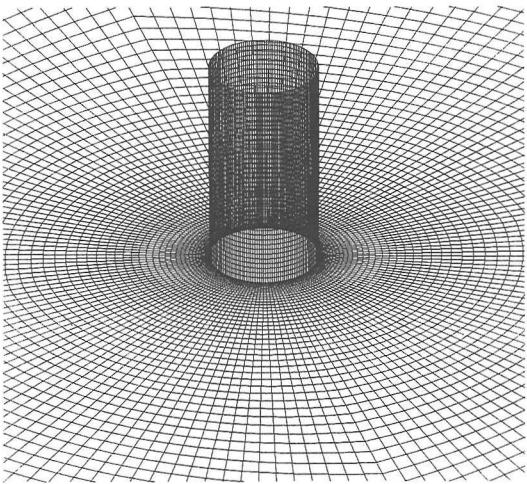


図-4 解析ケース 2D40 の 3 次元有限要素分割

#### (4) 結果及び考察

##### a) 2 次元解析結果

図-5に、2次元解析による圧力分布の Reynolds 数変化を示す。 $Re = 10^1 \sim 10^{1.5}$ では、安定した双子渦が形成され、定常解に収束する。 $Re = 10^{1.75} \sim 10^3$ では、安定した周期的な Karman 渦の発生を見ることができる。特に、 $Re = 10^{1.75}, 10^2$ の場合、円柱側面から離れた剥離せん断層により形成された渦がそのまま後流に放出されている。 $Re = 10^{2.25} \sim 10^3$ の場合、円柱側面で形成された渦が、円柱に沿って円柱後方に移動しながら、大規模な渦に成長し後流に放出されている。このため、円柱後方での圧力の低下が生じている。Reynolds 数を上げるにつれて、渦の成長は顕著になる。 $Re = 10^3$ では、要素分割(1)と要素分割(2)の両者で解析を行ったが、相違は見られなかった。要素分割(1)の  $Re = 10^{3.5}$ では、Karman 渦の放出とそれより小規模の渦(以後、2次渦と呼ぶ。)が不規則に放出され、それが重なりあつた流れとなっている。この2次渦は、円柱側面で形成された渦が、円柱後方で成長する前に放出されたものと考えられる。一方、要素分割(2)では、要素分割(1)ほど2次渦の発生が顕著ではなかった。これは、本解析手法の要素分割(1)に対する数値粘性が不足し、負の粘性効果によって2次渦が形成されたものと考えられる。このようなことから、 $Re = 10^{3.5}$ 以上から、要素分割(1)より微細な有限要素分割を行う必要があると思われる。 $Re = 10^{3.75}, 10^4$ では、カルマン渦と2次渦により形成される流れを示し、2次渦の放出がより活発になる傾向を示している。さらに Reynolds 数を上げた  $Re = 10^{4.25} \sim 10^{4.75}$ では、小規模の渦の放出が見られる。このとき、円柱側面で形成された渦が、円柱後方に移動して大きく成長せず、早期に放出されやすくなる。

なるので、円柱後方での圧力低下が生じていない。また、円柱後方での剥離渦の再付着も見ることができる。 $Re = 10^5 \sim 10^6$ では、小規模の渦が連鎖的に形成される現象が見られる。ここで剥離点の位置は、後方に移動し、また、最も手前の剥離点の位置より後方でも剥離が見られる。渦の中心の圧力は、Reynolds 数の低いものと比較してかなり低いが、中心から離れるとその影響が小さい。そのため、円柱後方での圧力低下が見られない。 $Re = 10^6$ の円柱前方と渦が形成されていない側面の圧力分布を見ると、ポテンシャル流れに近い圧力分布を示す。また、円柱の全面から側面にかけては、ほとんど時間的に変動せず、円柱後方の流れが前方から側面にほとんど影響を及ぼしていない。この Reynolds 数域では、非常に小規模の渦が見られるため、直接計算法で現象を捕らえるには、さらに微細な有限要素分割を行う必要があると考えられる。

##### b) 2 次元解析と 3 次元解析の流れのパターンの比較

図-6は時間平均流線の2次元解析と3次元解析の比較を示す。2次元解析は、全て要素分割(1)による結果を示し、3次元解析は、解析ケース 2D40 である。 $Re = 10^{2.5} \sim 10^{3.5}$ の範囲の2次元解析では、円柱後方に渦が移動する流れとなっているため、円柱をまわり込む流れが強くなっていることが時間平均流線からわかる。これに対し、3次元解析の時間平均流線では、円柱後方に明瞭な双子渦の発生が確認できる。このことから、3次元解析では、円柱後方での流速の変動の少ない淀み域の広がりが大きいことがわかる。

図-7は3次元解析による円柱後方の  $y$  軸方向の渦度  $\omega_y$  が、 $\omega_y = -0.5, 0.5$  の3次元的な等価面図である。円柱軸方向の流れが存在するため、 $y$  軸方向にも渦(以後、縦渦と呼ぶ。)が発生している。Reynolds 数を上げるにつれて、縦渦のスケールが小さくなり、複雑な渦構造を形成していることがわかる。円柱軸方向の流れは、円柱後方の渦の剥離領域内で強く発生していることがわかる。

##### c) 流体力学の Reynolds 数変化

図-8は、抗力係数  $C_d$  と揚力係数  $C_l$  の時刻歴の2次元解析と3次元解析の比較(左:2次元解析・右:3次元解析)を示す。2次元解析は、全て要素分割(1)による結果を示し、3次元解析は、解析ケース 2D40 である。図-9は背圧係数  $C_{pb}$  の Reynolds 数変化の実験結果との比較を示す。ここで実験結果は、Williamson<sup>1)</sup>によるものである。本解析において平均抗力係数  $C_d$  の Reynolds 数変化は、背圧係数とほぼ同様の傾向を示していたため、実験値等の比較を行っていない。また、図-10は Strouhal 数  $St$  の Reynolds 数変化の実験結果との比較を示す。ここで実験結果は、Scherme<sup>2)</sup>によるものである。

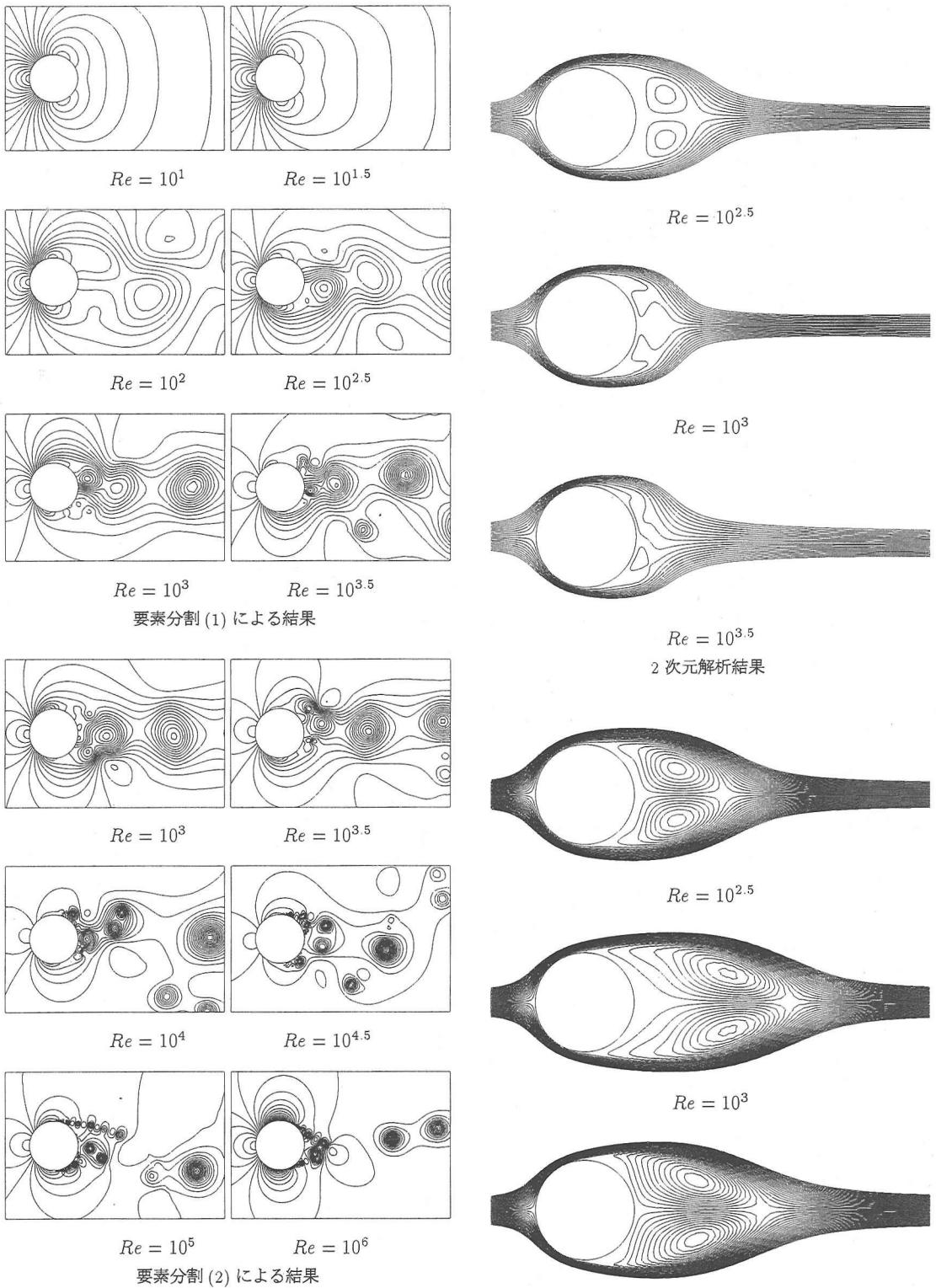
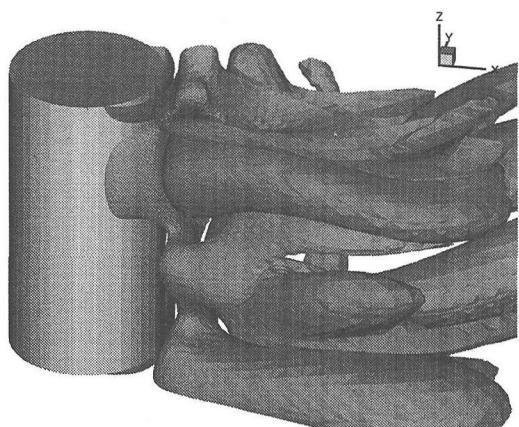
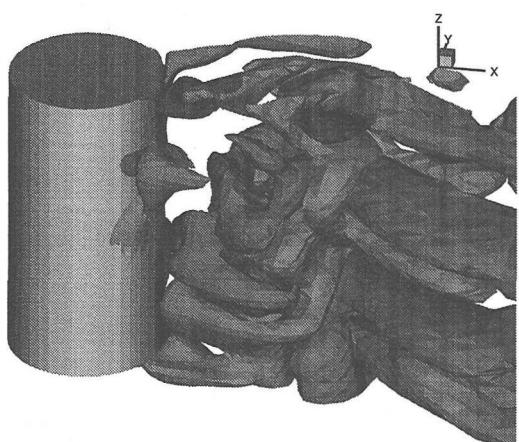


図-5 2次元解析による圧力分布の Reynolds 数変化

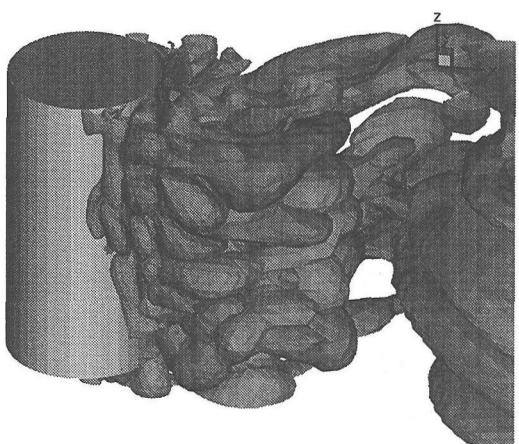
図-6 時間平均流線の2次元解析と3次元解析の比較



$Re = 10^{2.5}$



$Re = 10^3$



$Re = 10^{3.5}$

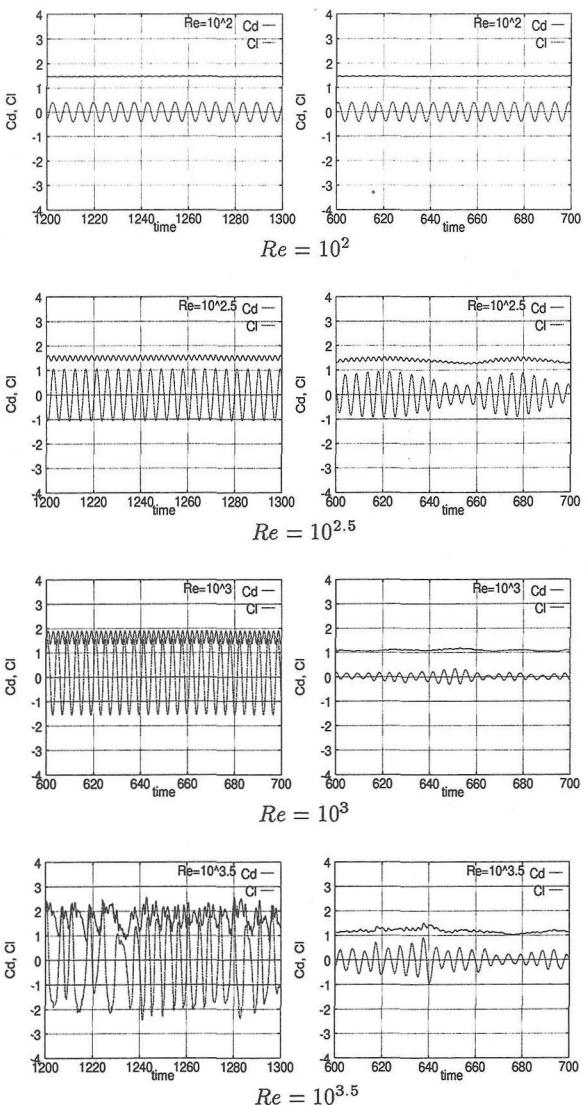


図-8 抗力係数  $C_d$  と揚力係数  $C_l$  の時刻歴の 2 次元解析と 3 次元解析の比較 (左:2 次元解析・右:3 次元解析)

図-7 3 次元解析による円柱後方の  $y$  軸方向の渦度  $\omega_y$  が、 $\omega_y = -0.5, 0.5$  の 3 次元的な等值面図

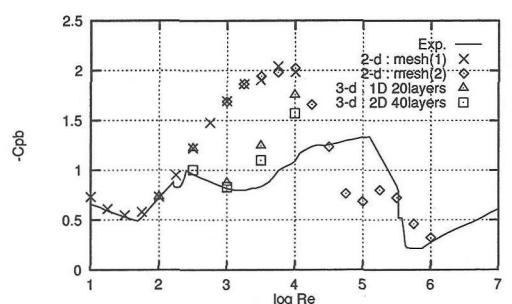


図-9 背圧係数  $C_{pb}$  の Reynolds 数変化の実験結果<sup>1)</sup>との比較

$Re = 10^1 \sim 10^{2.25}$ では、2次元解析はほぼ実験結果と一致している。 $Re = 10^2$ では、3次元解析は2次元解析と同様な結果となっている。これは、この付近のReynolds数では、軸方向流がほとんど生じないためと考えられる。

$Re = 10^{2.5} \sim 10^4$ では、実験結果の背圧係数 $C_{pb}$ の負値は、Reynolds数が高くなるにつれて、 $Re = 10^{3.25}$ 付近まで徐々に低下してから、増加している傾向にある。2次元解析は、 $Re = 10^{2.5} \sim 10^4$ にかけて、背圧係数 $C_{pb}$ の負値が常に増加する傾向があり、Reynolds数が高くなるにつれて、実験結果との差が広がっている。これは、 $Re = 10^{2.5}$ 以降の2次元解析による流れのパターンが、円柱側面で形成された渦が円柱後方で成長し放出される流れとなるが、この渦が円柱軸方向の3次元的な流れがないので拡散せず、過度に成長し流体力を増加させていると考えられる。一方、3次元解析は、 $Re = 10^{2.5}, 10^3$ では、実験結果に沿う様な形でほぼ一致している。ただし、解析ケース1D20の $Re = 10^{2.5}$ の結果は、ほぼ2次元解析と同様の値を示している。これは、 $Re = 10^{2.5}$ のときの縦渦が図-7に示すようなスケールとなるため、円柱軸方向長さ $1.0D$ では、周期境界条件を用いたときの影響が大きいものと考えられる。 $Re = 10^{3.5}, 10^4$ では、2次元解析と比べると、実験結果に近い値を示しているが、若干の差が見られる。この要因は、解析ケース1D20より解析ケース2D40のほうが、実験結果に近い値を示していることから、円柱軸方向長さ及び層分割に問題があると考えられる。また、 $Re = 10^{3.5}$ 以上になると、乱流遷移していることも考えられ、平面方向の分割を細かくするか、乱流モデルなどの導入が必要であると推定される。

図-8を見ると、2次元解析は、 $Re = 10^3$ 以下では、流体力波形が一定の振幅及び周期を示しているのに対し、 $Re = 10^{3.5}$ は、振幅が一定でなくなり、高周波成分が現れている。これに対し、3次元解析は、 $Re = 10^{2.5}$ では、若干の流体力波形にビートが見られる。これは、図-7で示すような規則的な縦渦が発生したためと思われる。 $Re = 10^3, 10^{3.5}$ では、2次元解析と比べて、流体力の振幅が大幅に減少している。さらに、 $Re = 10^{3.5}$ では、2次元解析で発生した高周波成分が無くなり、安定した波形を示している。これは、2次元解析では、 $Re = 10^{3.5}$ になると2次渦の放出が見られるため、流体力波形に高周波成分が含まれる。3次元解析でも、図-7で示すように2次元解析で見られた2次渦と同程度のスケールの不規則な縦渦が円柱後方に見られる。しかしながら、流体力が円柱全体にかかる平均により求まるため、3次元解析では、流体力を求める際に縦渦の影響が平均化され、流体力波形の高周波成分が除去されているものと考えられる。

#### d) $Re = 10^4$ 以上の流体力

図-9の $Re = 10^4 \sim 10^5$ の実験結果<sup>1)</sup>の背圧係数 $C_{pb}$ の負値は、Reynolds数が高くなるにつれて増加しているが、2次元解析は急激に低下している。これは、実験の $Re = 10^5 \sim 10^6$ 付近で起こる剥離せん断層が乱流化し、円柱後方に再付着して流体力を著しく減少させるdrag crisis(抗力崩壊)の現象を示しているものと考えられる。このReynolds数域は、一般に臨界域と呼ばれる、これ以下は亜臨界域、これ以上は超臨界域と呼ばれている。2次元解析でこの臨界域の現象が早期に起こる原因是、計算上では円柱表面の境界層が下流まで継続し、剥離が遅れるため、剥離領域が小さくなつて抗力が低下するものと考えられる。 $Re = 10^5 \sim 10^6$ では、2次元解析は、超臨界域の流れを示していると考えられる。実験の $Re = 10^6$ は、超臨界域であり、 $Re = 10^6$ の背圧係数 $C_{pb}$ は、実験結果とほぼ一致している。これは、 $Re = 10^5$ では、剥離点の位置が、後方に移動するため、剥離領域が狭まる。実際の現象では、剥離領域内で3次元的な流れが顕著に発生すると思われるが、亜臨界域では、剥離領域内での3次元的な流れが、背圧係数 $C_{pb}$ に大きく影響し、背圧係数 $C_{pb}$ の負値を低下させる原因となっている。しかし、超臨界域では、この剥離領域が狭いため、背圧係数 $C_{pb}$ に3次元的な流れが強く影響しにくくなり、2次元解析であっても、円柱後方の過度の圧力低下が見られなくなるためと考えられる。

図-11は、亜臨界域( $Re = 10^4$ )と超臨界域( $Re = 10^6$ )の圧力係数 $C_p$ の実験結果との比較を示す。ここで、exp.(a),(b)は、それぞれCantwell<sup>3)</sup>( $Re = 1.4 \times 10^5$ ), Nakamura<sup>4)</sup>( $Re = 1.7 \times 10^6$ )による実験結果である。解析値と実験結果のReynolds数は、異なっているが、Cantwellの実験は、亜臨界域を示し、Nakamuraの実験は、超臨界域を示しているため、ここでは解析で示された亜臨界域と超臨界域のデータとの比較を行った。亜臨界域の場合、解析結果は、常に実験結果より小さい値を示している。実験によると約 $\theta = 90^\circ$ 以上から、ほぼ一定になるのに対し、2次元解析では円柱後方での圧力の著しい低下が見られる。一方、3次元解析では実験結果より若干低い値を示すが、実験結果と沿うような形で一致している。これは、2次元解析による過度に成長した渦の影響によるものと推定される。超臨界域の場合、 $\theta = 100^\circ$ までは、解析値は実験結果より若干小さく、ポテンシャル流れに近い値となっている。これは解析では流入の乱れを考慮していないためと考えられる。 $\theta = 100^\circ$ を越えるとほぼ一致した波形を示している。

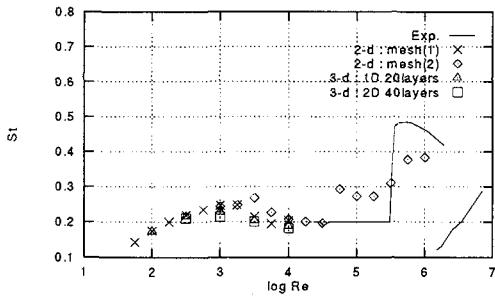


図-10 Strouhal 数  $St$  の Reynolds 数変化の実験結果<sup>2)</sup>との比較

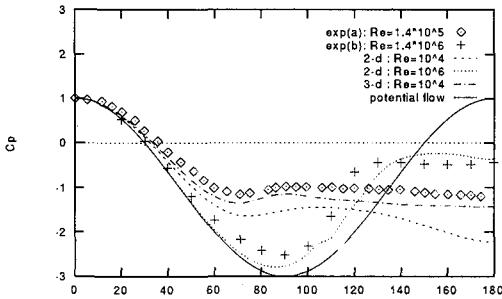


図-11 亜臨界域と超臨界域の圧力係数  $C_p$  の実験結果<sup>3), 4)</sup>との比較

#### 4. 3 次元解析の軸方向長さ及び層分割の検討

2次元解析の実験結果との不一致を解決するため、3次元解析を行い、軸方向流れの発生を確認することができ、流体力の低下を得ることができた。しかし、 $Re = 10^{3.5}$ 以上の流れになると、3次元解析においても、実験結果と一致しない結果となった。この原因の一つとして、円柱軸方向長さ及び層分割がその Reynolds 数の流れに対し、不適切であるということが考えられる。また、平面方向の要素分割や円柱軸方向の境界条件についても改善が必要であると考えられるが、3次元解析における軸方向長さ及び層分割の決定は、平面方向の分割より、解に大きく依存してくると推定される。また、円柱軸方向の境界条件の影響は、円柱軸方向長さを長くすることによって緩和されるものと推定される。そのため、ここでは、円柱軸方向長さ及び層分割に注目し検討を行うものとする。Reynolds 数は、3次元解析においても流体力を過大評価した結果となった  $Re = 10^{3.5}$  とする。 $Re = 10^{3.5}$  の流れ場は、図-7で見られるように、複雑な様相を示している。この流れ場を捕らえるためには、より細かな層分割が必要となってくる。また、周期境界条件を用いているため、円柱軸方向長さが不十分であると、上面の縦渦が下面の縦渦に影響を及ぼすこともあると予想されるため、長い領域を確保する必要がある。しかし、これらの条件の解析を行うには多くの

表-3  $Re = 10^{3.5}$  の解析ケース

層分割幅	軸方向長さ		
	1.0D	2.0D	4.0D
0.1D	1D10	2D20	4D40
0.05D	1D20	2D40	4D80
0.025D	1D40	2D80	

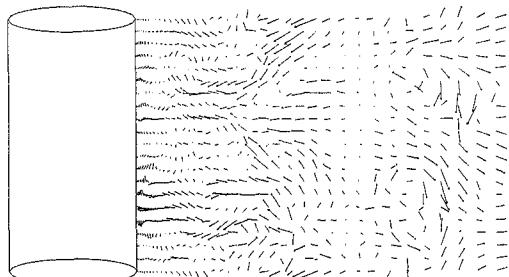
計算機容量と計算時間が要求される。そのため、要素分割(1)を用いて円柱層分割を80層を最大として、円柱軸方向長さ及び層分割についての検討を行った。

#### (1) 解析条件

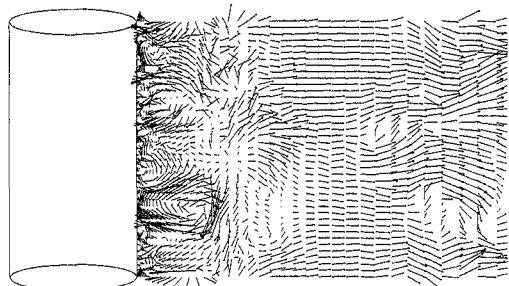
表-3に  $Re = 10^{3.5}$  の解析ケースを示す。円柱軸方向長さは、1.0D, 2.0D, 4.0Dであり、総分割は、最大を80層とした。このとき、層分割幅は、0.1D, 0.05D, 0.025Dとなる。

#### (2) 解析結果及び考察

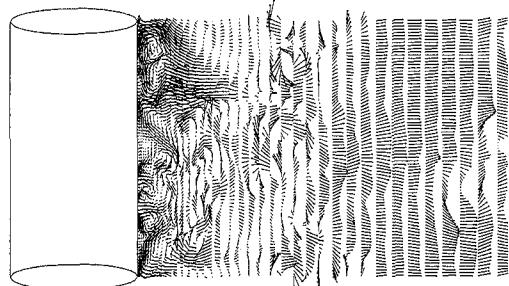
図-12は、軸方向長さ2.0Dのときの各層分割における流速ベクトルを示す。また、図-13は、各軸方向長さ及び層分割における背圧係数  $C_{pb}$  の実験結果<sup>1)</sup>との比較を示す。平均抗力係数  $C_d$  は、背圧係数とほぼ同様の傾向を示した。また、Strouhal 数は、全てのケースで0.2前後になり、大きな変化が見られなかった。図-13によると、軸方向長さを1.0Dに設定した場合は、軸方向の分割幅を細かくすれば背圧係数  $C_{pb}$  の負値が下がる傾向が見られるが、実験結果にはあまり近付かなかつた。これは、円柱直径  $D$  に対して、軸方向長さ1.0Dが不十分であることが考えられ、さらに上下面での周期境界条件の干渉による影響が大きいものと考えられる。さらに、軸方向長さを4.0Dに設定した場合は、1.0Dに設定した同じ分割幅のものよりも背圧係数  $C_{pb}$  の負値が下がり、軸方向長さを長くしたほうが背圧係数  $C_{pb}$  の負値が下がる傾向が得られた。また、1.0D, 4.0Dの層分割幅について見てみると、細かい層分割幅のものほど背圧係数  $C_{pb}$  の負値が下がる傾向を示している。しかし、軸方向長さを2.0Dに設定した場合は、最も粗い層分割幅0.1Dにしたもののが最も下がった。この理由は、粗いメッシュにより解が鈍らされたことによる偶然の低下だと考えられる。図-12を見ると、20層分割(0.1D)では細かい縦渦が捕らえられておらず、層分割幅が粗いことがわかる。それと比べて、40層分割(0.05D), 80層分割(0.025D)に設定した場合には、細かい縦渦が捕らえられていることがわかる。従って、 $Re = 10^{3.5}$  の流れは、層分割幅を0.05D以下にしないと、その微細



解析ケース 2D20



解析ケース 2D40



解析ケース 2D80

図-12 軸方向長さ  $2.0D$  のときの各層分割における流速ベクトル

な渦が捕らえられないと考えられる。また、本論文における最大計算容量である 80 層分割で見た場合、解析ケース 4D80 より解析ケース 2D80 に設定した方が良い結果が得られることがわかる。しかしながら、それでも実験結果と完全の一一致は得られなかった。この原因は、軸方向の分割以外にも、平面方向の分割も改良する必要があると考えられる。

全体的には、細分割したことによる解の信頼性を考慮すると、軸方向長さ  $2.0D$  を 80 分割した時が妥当な層分割であるという結果が得られた。円柱周方向の分割幅は、要素分割(1)では 160 分割していることから、 $0.0196D$  である。軸方向層分割幅  $0.025D$  の場合は、ほ

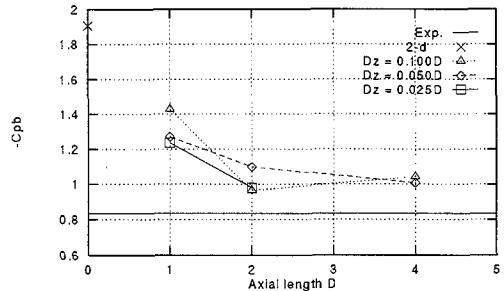


図-13 各軸方向長さ及び層分割における背圧係数  $C_{pb}$  の実験結果<sup>1)</sup>との比較

ぼ周方向の分割幅と同程度であることから、3 次元解析で妥当な解析結果を得るために、軸方向層分割幅を円柱周方向の分割幅程度にする必要があると考えられる。

## 5. おわりに

本論文では、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解析手法に、同次補間を用いた陰的有限要素法を適用した。本解析手法によって、円柱まわりの流れを広範囲の Reynolds 数域にわたる 2 次元解析、また、亜臨界域に限定した 3 次元解析を行なった。さらに、 $Re = 10^{3.5}$  の流れに着目し、3 次元解析における円柱軸方向長さ及び層分割の検討を行なった。主要な解析結果を以下に示す。

- 2 次元解析では、 $Re = 10^{2.25}$  以下の流れは、実験結果とほぼ一致したが、 $Re = 10^{2.5}$  で流体力を過大に評価する傾向があり、実験結果と一致しない。これは、 $Re = 10^{2.5}$  付近が、3 次元的な流れの発生する Reynolds 数の限界であることに起因するものと思われる。
- 3 次元解析を行なうことによって、 $Re = 10^{2.5}$  以上で軸方向流が存在し縦渦を形成する。Reynolds 数が高くなるにつれてより複雑な縦渦を形成する。また、3 次元的な軸方向流の影響は、剥離領域内で最も強い。
- 3 次元解析による流体力を 2 次元解析と実験結果と比べることによって、軸方向流を考慮することが、流体力を低下させる要因となることを確かめた。流体力波形を見ると、Reynolds 数が高い場合、2 次元解析では高周波成分が含まれるが、3 次元解析では高周波成分の含まれない波形を示している。
- 2 次元解析では、実験結果の臨界域より低い Reynolds 数域 ( $Re = 10^{4.25} \sim 10^{4.75}$ ) ではあったが、drag crisis 現象を 2 次元解析により再現することができた。超臨界域である  $Re = 10^6$  の背圧

係数  $C_{pb}$  と圧力係数  $C_p$  は、実験結果とほぼ一致した。2次元解析でも実験結果と良い対応が見られたのは、超臨界域では、剥離点が円柱後方に移動することによって剥離領域が狭まり、3次元的な流れの影響を受けにくくなるためと考えられる。しかしながら、本論文では、 $Re = 10^4$ 以上の Reynolds 数について3次元解析を行っていないので、2次元解析のみからでは、実際の現象を十分に説明することは困難である。Reynolds 数の高い臨界域及び超臨界域の3次元解析は今後の課題である。

- (e) 周期境界条件を用い軸方向長さを限定した3次元解析では、軸方向長さが解析結果に影響を及ぼしている。少なくとも、円柱軸方向長さは、円柱直徑程度では不十分であり、それ以上の軸方向長さをとる必要があると考えられる。
- (f) 本解析の最高レベルである80層分割では、解析ケース 4D80 とするより、解析ケース 2D80 とした層分割幅を細かくした結果の方が実験結果により近付いた。しかしながら、それでも実験結果と完全の一一致は得られなかった。この原因は、軸方向の分割以外にも、平面方向の分割も改良する必要があると考えられる。
- (g) 最も良い結果が得られた解析ケース 2D80 の層分割幅は、 $0.025D$  であり、これは、ほぼ円柱周方向の分割幅と同程度であることがわかった。3次元解析で妥当な解析結果を得るために、軸方向層分割幅を円柱周方向の分割幅程度にする必要があると考えられる。

以上の結果から判断すると、剥離点が定まりにくい形状を有する円柱まわりの流れでは、特に剥離領域が円柱後方に大きく広がる亜臨界域での流れの場合、実際の現象に即した流体力等を得るには、3次元解析が必要であることがわかった。このことから、剥離点の定まりやすい角柱などの bluff body まわりの流れや、並列円柱まわりの流れなどの並列構造物まわりの流れでは、剥離領域が大きく広がりやすく、また、剥離領域内に構造物が置かれているなどの点から、3次元数値流体解析が有効な手段になりうるということが考えられる。

**謝辞：** 本研究の実施にあたり、中央大学大学院の渡邊 茂氏に協力を得た。感謝の意を表す。また、解析には、中央大学情報処理教育研究センター所有の IBM/RS/6000SP(分散メモリー型並列計算機)8台によるパラレル計算を行った。

## 参考文献

- 1) Williamson, C.H.K.: Vortex dynamics in the cylinder wake, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, Vol. 28, pp.477~539, 1996.
- 2) Scheme, G.: On the force fluctuations actioning on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 133, pp.265~285, 1983.
- 3) Cantwell, B. and Coles D.: An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 136, pp.321~374, 1983.
- 4) Nakamura, Y. and Tomonari, Y.: The effects of surface roughness on the flow past circular cylinders at high Reynolds numbers, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 123, pp.363~378, 1982.
- 5) Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. and Upson, C.D.: A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. Part 1 & 2, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 4, pp.557~598 & pp.619~640, 1984.
- 6) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 95, pp.221~242, 1992.
- 7) Tamura, T., Ohta, I. and Kuwahara, K.: On the Reliability of two-dimeisional simulation for unsteady flows around a cylinder-type structure, *J. of Wind Engng. and Indust. Aerodyn.*, Vol. 35, pp.275~298, 1990.
- 8) 中山龍三、大谷裕二、小園茂平：円柱周囲流の差分計算におけるスキーム、境界条件および計算格子の検討、第12回風工学シンポジウム講演概要集、pp.189~194、1992。
- 9) 岡島 厚、上野久儀、六郷 彰：長方形断面柱まわりの流れの数値解析、日本機械学会論文集、B 第 56 卷 522 号、pp.280~288、1990。
- 10) 岡島 厚、小垣哲也、溝田武人：LES,  $k-\epsilon$ , DS 数値解法による角柱の抗力係数とストローハル数、第 50 回土木学会年次学術講演会講演概要集 共通セッション、pp.98~99, 1995.
- 11) 丸岡 晃、太田真二、平野廣和、川原睦人：広範囲な Reynolds 数域での円柱まわりの流れの 2 次元計算、第 14 回風工学シンポジウム講演概要集、pp.193~198、1996。
- 12) 丸岡 晃、太田真二、平野廣和、川原睦人：同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析、構造工学論文集、Vol.43A, pp.383~394, 1997.
- 13) 太田真二、丸岡 晃、平野廣和、川原睦人：亜臨界域における円柱まわりの 3 次元流れの数値流体解析、第 14 回風工学シンポジウム講演概要集、pp.199~204, 1996.
- 14) 泉 元、川田 裕、足立武史、谷口伸行、小林敏雄：円柱周りの 3 次元流动解析(第 1 報 静止円柱の場合)、日本機械学会論文集、B 第 60 卷 579 号、pp.387~388, 1994.
- 15) 泉 元、川田 裕、足立武史、谷口伸行、小林敏雄：円柱周りの 3 次元流动解析(第 2 報 強制振動円柱の場合)、日本機械学会論文集、B 第 62 卷 594 号、pp.434~441, 1996.

(1997. 5. 13 受付)

TWO AND THREE DIMENSIONAL NUMERICAL FLOW ANALYSIS  
AROUND A CIRCULAR CYLINDER  
OVER WIDE RANGE OF THE REYNOLDS NUMBERS

Akira MARUOKA, Shinji OHTA, Hirokazu HIRANO and Mutsuto KAWAHARA

In this paper, two and three dimensional numerical flow analyzes around a circular cylinder over wide range of the Reynolds numbers are performed. Characteristics about flow around a circular cylinder are grasped, and effectiveness of numerical flow analysis is investigated to compare calculation results with experimental results. Investigations about axial domain and layer division in case of three dimensional analysis are performed. Flow field is assumed to be incompressible viscous flow that is described by the incompressible Navier-Stokes equations. A finite element method based on implicit time integration and equal-order interpolation is applied to the discretization method.