

混合補間要素を用いた非圧縮粘性流れ解析 のための高精度安定化有限要素法

樺山和男¹・猪股 渉²

¹正会員 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)
²正会員 工修 東京ガス(株) 商品技術開発部(〒230-0045 神奈川県横浜市鶴見区末広町1-7-7)

本論文は、流速双1次/圧力区分0次(Q1/P0)の混合補間要素を用いた、非圧縮粘性流れ解析のための高精度安定化有限要素法の提案を行うものである。本手法は、空間の離散化に対してSUPG法と圧力安定化行列を用い、時間の離散化に対しては修正準陰解法を用いるものである。本手法は、従来提案されている代表的な安定化有限要素法であるGLS法やSUPG/PSPG法と理論的に等価であり、それらに比べてより簡便に安定化が図れ、かつ高精度で計算効率に優れた手法であることを、代表的な数値解析例に対する比較計算により示している。

KeyWords : *incompressible Navier-Stokes flows, Q1/P0 mixed finite element method, SUPG method, pressure stabilization matrix, modified semi-implicit method*

1. はじめに

近年、超長大橋や超高層ビルなど構造物の大型化が進む中で、構造物周辺での風の流れの挙動や構造物に働く流体力を正確に評価することが益々重要となっている。これまで、これらの評価法としては、主として風洞実験が用いられてきたが、近年の計算機性能および計算技術の飛躍的な進歩により、数値計算により評価の一部を行うことが可能となり、多くの数値計算手法が提案されている。これらの数値計算手法のほとんどは、構造格子を基本とする有限差分法、非構造格子を基本とする有限体積法や有限要素法のいずれかに基づいている。本論文では、任意形状への適合性及び境界条件の処理に優れており、複雑形状を有する実際問題の解析に有効となり得る有限要素法に着目する。

非圧縮粘性流れの基礎方程式であるNavier-Stokes方程式を有限要素法により解く際に、数値解が不安定に振動する場合がある。その主な原因としては、次の二つの点が挙げられる。原因の一つ目は、高Reynolds数流れになった場合の移流項の卓越に起因し、通常のGalerkin法では有限差分法の中心差分と等価となるため、数値解は不安定に振動する。従って、これを防ぐためには移流項に対し何らかの安定化(風上化)を施す必要がある。原因の二つ目は、流速・圧力の補間関数の組み合わせが下限上限条件(inf-sup condition, またはBabuška-Brezzi condition)を満たさない場合であり、この場合には、解が安定に求まる保証はない¹⁾⁻³⁾。

本論文は、定式化やプログラミング等の取り扱いが容易な流速双1次/圧力区分0次(Q1/P0)要素を用

いた、非圧縮粘性流れ解析のための高精度で計算効率に優れた安定化有限要素法の提案を行うものである。前記の数値不安定性を取り除く方策として、移流項の卓越による数値不安定性に対しては、SUPG(streamline upwind/Petrov-Galerkin)法^{4),5)}を適用することにより安定化を図るものとする。また、下限上限条件を満たさない事による数値不安定性に関しては、従来の安定化有限要素法から導かれる圧力の安定化に寄与するPSPG(pressure stabilizing/Petrov-Galerkin)項と等価な圧力安定化行列(pressure stabilization matrix:PSM)^{6),7)}を導入する。また、時間積分法としては、修正準陰解法¹²⁾(MSI(modified semi-implicit)法)を適用する。これらの手法は、いずれも単体としては既存の手法であるが、これらを組み合わせることにより安定で高精度な手法となり得る。

本論文では、提案する組み合わせ手法(SUPG/PSM+MSI法)が従来提案されている代表的な安定化有限要素法であるGLS(Galerkin least squares)法^{8),9)}やSUPG/PSPG法¹⁰⁾と理論的に等価であり、Q1/P0要素のための安定化有限要素法となることを示すとともに、計算効率の向上化(省メモリー化と高速化)法について述べる。そして、本手法の数値流体解析手法としての有効性を検討するために、いくつかの代表的な数値解析例に対して、本手法と従来提案されている種々の安定化の手法および時間積分法との比較を行った。なお、数値解析例としては、ベンチマーク問題として孤立渦問題及びCavity内流れ問題を、また3次元高Reynolds数流れ問題への適用性および有効性の確認として円柱周りの流れ解析を取り上げた。

2. 基礎方程式と境界条件

非圧縮粘性流れの場を支配する基礎方程式は、Navier-Stokesの運動方程式(1)と連続式(2)で表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \frac{1}{Re} u_{i,jj} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 $,_i$ は i 方向の偏微分、 u_i は i 方向の速度成分、 p は圧力、 $Re (=UD/\nu)$ は Reynolds 数、 Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域を示す。また、このときの境界条件は、

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_g \quad (3)$$

$$\left(-p \delta_{ij} + \frac{1}{Re} u_{i,j} \right) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_h \quad (4)$$

で表される。ここで、 n_j は境界外向き単位法線ベクトル、 δ_{ij} は Kronecker の δ 、 Γ_g と Γ_h はそれぞれ、 Dirichlet(g) と Neumann(h) の境界条件が与えられる境界を示す。

3. Q1/P0要素のための安定化有限要素法

有限要素法における安定化法として、いくつかの手法が提案されている。代表的な方法としては、時間積分の精度を2次及び3次と高めることにより、風上化の効果を得る BTD 法¹³⁾ や Taylor-Galerkin 法¹¹⁾ がある。また、風上側の重みを増すことにより風上化を行う Petrov-Galerkin 型の手法が数多く提案されている⁴⁾⁻¹⁰⁾。中でも SUPG 法^{4),5)} は、テンソル型の人工拡散係数により、流れ方向にのみ人工拡散を付加させる高精度な手法として広く用いられている。しかし、これらの方法は移流の卓越に対してのみの安定化であり、下限上限条件による制限を回避できないため、用いる要素によっては圧力振動が発生する。**Fig.1** は、代表的な四角形要素に対して、それぞれが下限上限条件を満足するか否かを示したものである。図中、○印が流速の評価点、×印が圧力の評価点を示す。従って、流速と圧力を共に双1次で補間する Q1/Q1 要素や、本論文で用いる流速を双1次、圧力を区分0次で補間する Q1/P0 要素は、この条件を満足しないことになる。

そこで、近年、前記の二つの数値不安定性を同時に克服することを目的として、SUPG 法に改良を加えた安定化有限要素法である GLS 法^{8),9)} や SUPG/PSPG 法¹⁰⁾ などが開発されている。それらの方法は、SUPG 法により得られる項の他に、さらに新たな安定化の項(PSPG 項)を導入した形となっており、その結果、SUPG 項により移流の卓越に対しての安定化、 PSPG 項により下限上限条件の回避を実現している。しかし、GLS 法による定式化に Q1/P0 要素を用いる場合は、高次微分項を考慮できないために結局 SUPG 法に帰着し、 PSPG 項が表現されないことになる。そのため何らかの形で

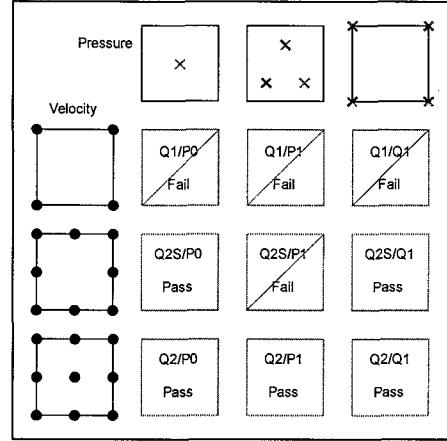


Fig.1 Finite element mesh for incompressible N-S flow

PSPG 項を表現する必要があり、本論文では PSPG 項と同じ意味合いを持つ圧力安定化行列を適用することとする。

(1) SUPG 法による移流卓越に対する安定化

一つ目の問題点、移流卓越による数値不安定性に対しては、 SUPG 法を適用することにより安定化を図ることとする。 SUPG 法では、 Galerkin 法の重み関数 w_i に要素間で不連続な関数 δ_i を付加させた次のような重み関数を用いる。

$$w_i + \delta_i, \quad \delta_i = \tau u_j w_{i,j} \quad (5)$$

τ は時間の次元を持つ上流化パラメーターであり、要素サイズ h を流速 $\|u_i^h\|$ で割った値を基本とし様々な与え方が提案されている^{4),5),10)}。最近では、要素ごとに決められる要素 Reynolds 数

$$Re_u = \frac{\|u_i^h\|}{2\nu} \quad (6)$$

の関数で与えられているものがほとんどであり、本論文でも同様に次のように与えている²¹⁾。

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\left(\frac{2 \|u_i^h\|}{h} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \\ &= \frac{h}{2 \|u_i^h\|} \left(1 + \left(\frac{1}{Re_u} \right)^2 \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 ν は渦動粘性係数、 h は要素サイズである。 h の定義としては、ここでは簡単のため要素の面積と同じ面積を持つ円の直径を与えている。

運動方程式(1)に対しては SUPG 法による重み関数 $w_i + \delta_i$ を、連続式(2)に対しては Galerkin 法による重み関数 q を適用することにより弱形式を導くと次のよ

うになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{i,j} \left(-p \delta_{ij} + \frac{1}{Re} u_{i,j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \delta_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \frac{1}{Re} u_{i,jj} \right) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_h} w_i \left(-p \delta_{ij} + \frac{1}{Re} u_{i,j} \right) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 δ_i の要素間での不連続性を考慮し、 δ_i の掛けた部分は部分積分を行わないで計算する。これにより、Q1/P0要素を用いた定式化では、SUPG項(第4項)のうち圧力項と拡散項は考慮されないことになる。弱形式(8)において、Q1/P0要素を用いて流速を双1次、圧力を区分0次で補間すると次のような有限要素方程式が導かれる。

$$M \frac{\partial u_i}{\partial t} + K(u_j) u_i - C p + \frac{1}{Re} S u_i = \mathbf{o} \quad (9)$$

$$C^T u_i = \mathbf{o} \quad (10)$$

ここで、 M , K , S , C , C^T はそれぞれ質量、移流、拡散、勾配、発散行列であり、質量行列と移流行列に関しては[Galerkin項]+[SUPG項]という二つの行列から構成されている。これらの係数行列の積分方法として、数値積分に代わり解析的な積分公式を用いることにより高速化を図っている¹⁴⁾。この方法は、Jacobianの行列式のみを1点求積法により求め、残りの部分を解析的に計算することにより、係数行列の積分を効率よく行えるというものである。

(2) 圧力安定化行列による下限上限条件の制限に対する安定化

二つ目の問題点、下限上限条件の制限に対しては、圧力安定化行列を適用することにより安定化を図ることとする。圧力安定化行列を導くために、運動方程式(1)と連続式(2)を有限要素法により直接離散化した際に構成される連立1次方程式を考える。離散化された連立1次方程式は陽解法・陰解法とともに次のような形で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{n+1} \\ \Delta t p^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_i^n \\ \mathbf{o} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{B} は陽解法を用いた場合は集中化質量行列 \mathbf{M}_L 、陰解法の場合は移流拡散行列 $[\mathbf{M}+\mathbf{K}+\mathbf{S}]$ となる。また、 b_i^n は運動方程式の既知項をまとめたものである。

この連立1次方程式において係数行列の右下部の0が問題となり、流速・圧力の補間関数の組合せによっては方程式が正則にならずに圧力振動が生じる。それを避けるために、右下の0行列部分にPSPG法により生成さ

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fig.2 2-D mesh to explain the stabilization matrix

れる項と同じ意味合いを持つ拡散型の行列 \mathbf{D} を導入するというのが圧力安定化行列の考え方である。Hughesらの Global jump^{2),6)}を発展させ、水上は以下のような安定化行列を提案した⁷⁾。

いま、その安定化行列を Fig.2 のような9の要素からなる2次元メッシュの場合の要素5について示すと、

$$\begin{aligned} \sum_k D_{5k} p_k &= a_5 a_2 (p_5 - p_2) + a_5 a_4 (p_5 - p_4) \\ &\quad + a_5 a_6 (p_5 - p_6) + a_5 a_8 (p_5 - p_8) \\ &= a_5 \{(a_2 + a_4 + a_6 + a_8)p_5 \\ &\quad - a_2 p_2 - a_4 p_4 - a_6 p_6 - a_8 p_8\} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで、 a_i は要素 i ごとに決められる安定化パラメーターで次のように与えている。

$$a_i = \alpha \sqrt{(C^T B_d^{-1} C)_{ii}} \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{B}_d は行列 \mathbf{B} の対角部であり、 α は安定化の度合いを決める無次元パラメーターである。本論文中では、 α の値は数値実験により安定性を確認し、2次元の場合は0.1、3次元の場合は0.25を用いている。

この圧力安定化行列がQ1/P0要素のためのPSPG項となり、SUPG法と併用することによりQ1/P0要素のための安定化有限要素法(SUPG/PSM法)が導かれる。この手法はSUPG/PSPG法と同様に安定化項が構成されることにより、二つの問題点を同時に克服できることになる。また、他の安定化有限要素法と比べて定式化・プログラミングがより簡便に行える手法である。

4. 修正準陰解法による時間方向離散化

SUPG/PSM法により空間離散化された運動方程式(9)と連続式(10)の時間積分法としては、修正準陰解法¹²⁾を適用する。修正準陰解法では、運動方程式に関して流速を陽的、圧力を陰的に、連続式に関しては陰的に取り扱うことにより次のような式を導出する。

$$\frac{M_c u_i^{n+1} - M_c u_i^n}{\Delta t} + K(u_j^n) u_i^n \quad (14)$$

$$- M_c M_L^{-1} C p^{n+1} + \frac{1}{Re} S u_i^n = \mathbf{o}$$

$$C^T u_i^{n+1} + \mathbf{D} \Delta t p^{n+1} = \mathbf{o} \quad (15)$$

ここで、 M_c は Consistent な質量行列、 M_L は集中化質量行列、 D は先に述べた圧力安定化行列である。なお、離散化された運動方程式(9)において、通常得られる圧力項 Cp^{n+1} に $M_c M_L^{-1}$ を掛けて近似するのが Gresho らの修正準陰解法の特徴となっている。この近似により得られた式(14)は、さら以下のように書き換えることができ、移流項・拡散項に関しては Consistent な質量行列、圧力項に関しては集中化質量行列というように二種類の質量行列を用いて解くことになる。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + M_c^{-1} K(u_j^n) u_i^n \quad (16)$$

$$- M_L^{-1} C p^{n+1} + \frac{1}{Re} M_c^{-1} S u_i^n = \mathbf{o}$$

以上により得られた運動方程式と連続式に対する有限要素方程式(14), (15)を連立することにより、次のような連立1次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_c - M_c M_L^{-1} C \\ C^T \\ D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{n+1} \\ \Delta t p^{n+1} \\ \mathbf{o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_i^n \\ \mathbf{o} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 b_i^n は運動方程式の既知項をまとめたものであり

$$b_i^n = M_c u_i^n - \Delta t \left(K(u_j^n) u_i^n + \frac{1}{Re} S u_i^n \right) \quad (18)$$

となっている。式(17)において、記憶容量低減のために圧力の部分を掃き出すと、次のような圧力の Poisson 方程式を導くことが出来る。

$$(C^T M_L^{-1} C + D) \Delta t p^{n+1} = -C^T M_c^{-1} b_i^n \quad (19)$$

ここで、圧力の離散化に先の近似を用いたため、Poisson 方程式(連続式)を解く際には集中化した質量行列 M_L 、右辺の既知項(運動方程式)を解く際には Consistent な質量行列 M_c 、というように二種類の質量行列を矛盾なく用いることが可能となる。この点が通常の準陰解法との違いであり、通常の準陰解法では式(19)の右辺項も集中化質量行列により解かれる。

なお、圧力の Poisson 方程式を解く際には Element-by-Element 共役勾配法(SCG 法)¹⁵⁾を用いている。この方法は、共役勾配法によって Poisson 方程式を解く際に毎ステップ行う以下の繰り返し計算

$$\omega = (C^T M_L^{-1} C) \phi \quad (20)$$

を全体行列を組み立てないで C の要素行列 C^e を用いて以下のように段階的に行うというものである。これにより、記憶容量の低減および計算の高速化が可能となる。

$$\theta = \sum_e (C^e \phi) \quad (21a)$$

$$\varphi = M_L^{-1} \theta \quad (21b)$$

$$\omega = \sum_e (C^{eT} \varphi) \quad (21c)$$

ここで、要素行列 C^e は 2 次元計算では各方向に 4 つの成分を持つ行列(列ベクトル)であり、式(21c),(21b),(21c)を解くには 1 要素あたり 8 成分(3 次元計算の場合は 24 成分)を記憶させるだけでよい。従って、問題が大規模になっても要素数に比例しただけの記憶容量で計算が行えるため、大規模計算に対して有効な方法であると言える。

5. GLS 法との対応関係

ここでは、本論文で提案する Q1/P0 要素のための安定化有限要素法である SUPG/PSM 法と、代表的な安定化有限要素法である GLS 法を対比させることにより各安定化項の効果を示すこととする。GLS 法^{8),9)}は SUPG 法を発展させた安定化有限要素法であり、以下のように、安定化の項が運動方程式(1)と連続式(2)の最小 2 乗形式になるような重みを与えることにより弱形式を導く。

$$\int_{\Omega} w_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} w_{i,j} \left(-p \delta_{ij} + \frac{1}{Re} u_{i,j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_m \left(\underbrace{\frac{\partial w_i}{\partial t}}_{(4-1)} + \underbrace{u_j w_{i,j}}_{(4-2)} + \underbrace{q_{,i}}_{(4-3)} - \underbrace{\frac{1}{Re} w_{i,jj}}_{(4-4)} \right)$$

$$\cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \frac{1}{Re} u_{i,jj} \right) d\Omega$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_c (w_{j,j} u_{i,i}) d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_h} w_i \left(-p \delta_{ij} + \frac{1}{Re} u_{i,j} \right) n_j d\Gamma \quad (22)$$

ここで、 τ_m , τ_c はそれぞれ運動方程式、連続式に対するパラメーターであり、次のように与えている²¹⁾。

$$\tau_m = \left(\left(\frac{2 \| u_i^h \|}{h} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (23)$$

$$\tau_c = \lambda \| u_i^h \| z \quad (24)$$

ここで、 λ , z はそれぞれ

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (25)$$

$$z(Re_u) = \begin{cases} Re_u/3, & 0 \leq Re_u \leq 3 \\ 1, & 3 < Re_u \end{cases} \quad (26)$$

としている。 Re_u は要素 Reynolds 数であり、SUPG 法の場合と同様に式(6)に従って与える。

式(22)において第4項と第5項が安定化の効果を生むわけであり、特に重要な働きをする第4項は以下のようない効果を与える。

4-1項: 通常重み関数 w_i は時間 t の関数ではないので, $\partial w_i / \partial t$ は 0 となる. 時間方向にも有限要素法を適用する Space-time 法¹⁶⁾で離散化する場合のみ時間の関数 $w_i(t)$ となり, この項を考慮できる.

4-2項: SUPG 項.

4-3項: PSPG 項. この項が連続式に加わることにより, 下限上限条件の制限により生じる圧力振動を回避できるようになる. しかし, Q1/P0 要素の場合, 圧力を区分 0 次で補間しているためにこの項は 0 となる. このため, 本手法では圧力安定化行列を導入している.

4-4項: 2 次以上で流速を補間しない場合は考慮できない. したがって, Q1/Q1(P1/P1) 要素や Q1/P0 要素を用いる場合は 0 となる.

これらの中でも重要な意味を持つ項は, 4-2 項(SUPG 項)と 4-3 項(PSPG 項)であり, この二つの項がそれぞれ移流の卓越, 下限上限条件による数値振動を押さえる役割を果たす. 要するに, この二つの項により安定化が可能になるわけであり, この点に着目したのが SUPG 法と PSPG 法を併用させる SUPG/PSG 法である. 同様に本論文で提案する SUPG/PSM 法もこの二つの項と等価な項を構成することにより安定化が図れる手法となっている.

6. 数値解析例

本論文で提案した, Q1/P0 要素のための安定化有限要素法の有効性を検討するために, ベンチマーク問題として孤立渦問題及び Cavity 内流れ問題を, また 3 次元高 Reynolds 数流れ問題への適用性, 有効性の確認として円柱周りの流れ解析を取り上げる.

(1) 孤立渦問題

最初のベンチマーク問題として, 孤立渦問題⁵⁾を取り上げる. この問題の目的は, 本論文で提案する SUPG/PSM+MSI 法と他の様々な安定化法, またそれに適用する時間積分法がどの程度の精度を有するかを比較検討することにある. Fig.3 に示すように正方形領域を 20 分割し, 初期条件を $u_\theta = \{ 5r \text{ for } r < 0.2, 2 - 5r \text{ for } 0.2 < r < 0.4, 0 \text{ for } r > 0.4 \}$ とする $Re=10^8$ の渦を強制的に発生させる. 流れが非粘性に近いので数値解が初期条件を保つ手法ほど, 減衰の少ない高精度な手法であると言える. そこで各手法により無次元時間 $t=3$ まで解析を行い, その際にどの程度解が初期条件を保持しているかを確かめることにより各手法の散逸誤差の比較を行った. なお, 解析に用いる安定化法と時間積分法は Table 1 に示すような 9 種類の組合せを用いた. また, 時間刻み幅 Δt は陽解法である修正準陰解法

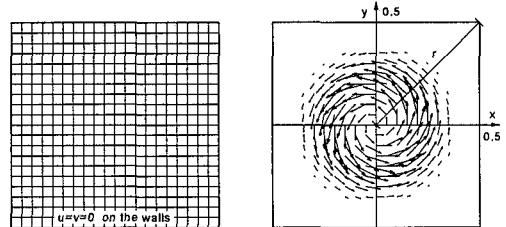


Fig.3 Finite element mesh and initial condition

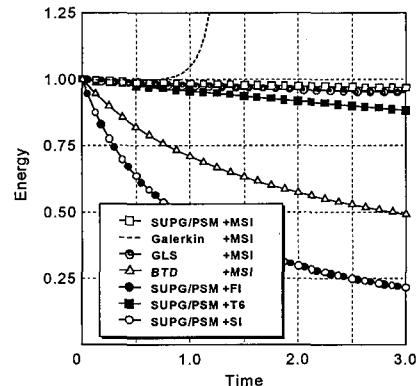


Fig.4 Time history of kinetic energy

Table 1 Comparison of kinetic energy at $t = 3$

	Space	Time	Energy at $t=3$
Exact solution			
1.	SUPG/PSM	MSI	1.000
2.	Galerkin	MSI	over flow
3.	GLS	MSI	0.949
4.	BTD	MSI	0.491
5.	TG	MSI	0.491
6.	SUPG/PSM	FI	0.214
7.	SUPG/PSM	CN	0.215
8.	SUPG/PSM	T6	0.883
9.	SUPG/PSM	SI	0.218

(MSI 法) を適用する場合の限界値となる 0.025(Courant 数=0.5) を用いて全ケースの解析を行った.

Fig.4 に運動エネルギー (全要素の運動エネルギーの総和を初期条件のそれで基準化したもの) の時刻歴を示す. また, Table 1 に, $t=3$ の時の運動エネルギーの値を, Fig.5 に同じく $t=3$ の時の渦度の鳥瞰図を示す. これらの結果から, SUPG/PSM 法の時間積分に修正準陰解法を適用した本手法と, T6 formulation を適用した場合, また GLS 法による結果が初期の渦の形状とピーク値を最もよく保ち, 減衰を押さえているのが分かる. しかし, Gresho らの提案している修正準陰解法の元来の形である, BTD 法に修正準陰解法を適用した場合の結果は初

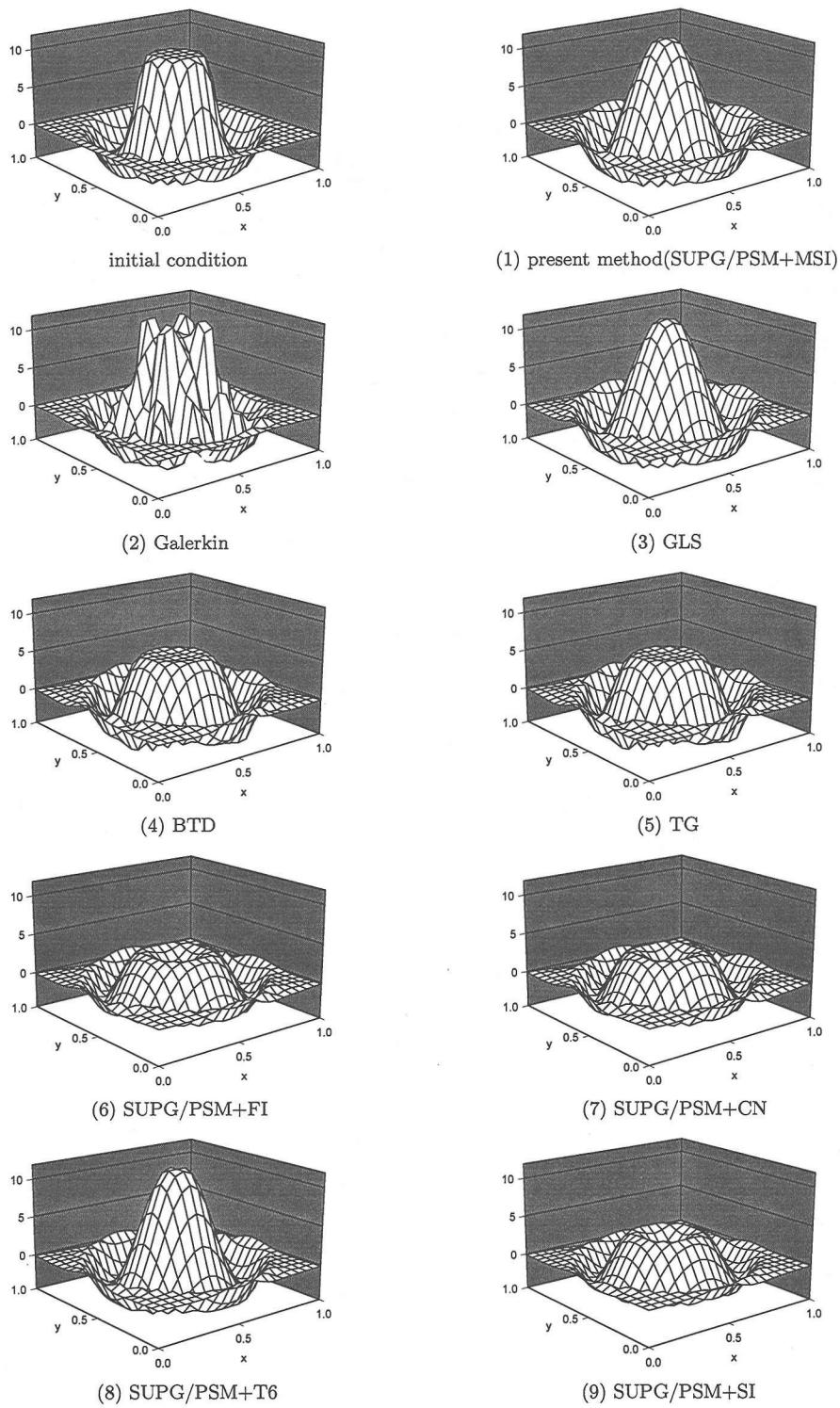


Fig.5 Comparison of vorticity at $t = 3$

Table 2 Comparison of computational time

	Δt (Δt_{\max})	Step	CPU time	CPU time /step
MSI	0.025	4000	116sec	0.029sec
SI	0.025	4000	95sec	0.024sec
FI	0.025	4000	5002sec	1.251sec
	(5.0)	20	62sec	3.100sec
CN	0.025	4000	5202sec	1.301sec
	(5.0)	20	50sec	2.500sec
T6	0.025	4000	4944sec	1.236sec
	(0.1)	1000	1296sec	1.296sec

期形状を良く保ってはいるものの、著しい解の減衰がみられる。また、Table 1に示すようにBTD法とTaylor-Galerkin法(TG法)による結果は同値となることから、TG法におけるTaylor展開の3次の項の解析結果に与える影響は非常に少ないと言える。また、SUPG/PSM法の時間積分に完全陰解法(FI法)やCrank-Nicolson法(CN法)、一般的な準陰解法(SI法)を適用した場合は解が大幅に減衰している。また、Galerkin法では安定な計算が行えていないことが分かる。なお、SUPG/PSM法とGLS法により得られた解がほとんど一致している理由は、先の定式化で示したようにQ1/P0要素を用いた場合は両手法間で導かれる項にさほど差がなく、GLS法により付加される連続式の最小2乗項の影響が小さいことによると言える。

Table 2に計算効率に対する検討として、SUPG/PSM法に適用した各時間積分法に関して、1).最大の時間刻み幅 Δt_{\max} 、2).1ステップあたりに要する計算時間(Silicon Graphics社のIndy R4400による)、3).無次元時間 $t=100$ までに要する計算時間、を示す。このような非定常問題での Δt は解析精度にも影響を与るために、ただ単に大きくすれば良いというものではない。しかし、解析精度は別として総解析時間だけを考えた場合は、 Δt を大きくとれる完全陰解法が他の陰解法や準陰解法と比べて有利であることが分かる。一方で、準陰解法は陰解法に比べ1ステップあたりの計算時間は圧倒的に短いために、完全陰解法と同程度の総解析時間で済み、これも有効な時間積分法になり得る。また、高精度な陰解法T6 formulationは、 Δt_{\max} を大きく取れないと、陰解法の利点を生かしきれずに多大な解析時間を必要とすることが分かる。

以上より、SUPG/PSM法が散逸誤差の最も少ない高精度な安定化有限要素法であることが確認できた。しかし、適用する時間積分法によって精度が大きく左右され、適切な時間積分法と組み合わせてはじめて高精度な安定化法となる事も明らかとなった。比較計算の結果、修正準陰解法(MSI法)とT6 formulationを適用した場合に高精度な安定化法となることが示された。中

でも、MSI法は計算効率に関しても十分に優れた時間積分法と言え、SUPG/PSM法と組み合わせる本手法(SUPG/PSM+MSI法)が高精度で計算効率に優れた手法となることが明らかとなった。

(2) Cavity 内流れ問題

孤立渦問題において、SUPG/PSM法が最も散逸誤差の少ない手法であることが示された。しかし、SUPG/PSM法は用いる時間積分法によって、減衰の度合いが大きく異なることも分かった。そこで、ここではより一般的なベンチマーク問題であるCavity内流れを取り上げ、SUPG/PSM法に対して孤立渦問題で適用した各種時間積分法を適用して、解析精度の比較を行った。ここでは、正方形Cavity内を16分割、及び32分割する二種類の不等分割した有限要素メッシュを用いて解析を行うこととする。そしてSUPG/PSM+MSI法の解析精度の信頼性、また同時に有限要素メッシュに対する解の依存性について、Ghiaらの結果¹⁷⁾と比較を行うことにより検討を行う。計算条件として $Re=1000$ 、時間刻み幅 Δt は16分割メッシュで0.02、32分割メッシュでは0.01として、定常結果が得られるまで解析を行った。

Fig.6に、定常状態での鉛直中心線上の水平方向流速の分布を示す。図中、○印がGhiaら¹⁷⁾の結果であり、破線が16分割、実線が32分割の結果である。図より、孤立渦問題の結果と同様に、MSI法及びT6 formulationにより得られた結果は、粗い有限要素メッシュを用いた場合でも、Ghiaらの結果と良い一致を示していることが分かる。また、これらの結果はGLS法による結果とほぼ一致しており、本手法とGLS法との理論の等価性を裏付けるものとなっている。また、SI法、FI法およびCN法は、孤立渦問題の結果と同様に減衰が大きい結果となっている。

以上の結果より、Cavity内流れ問題においても提案するSUPG/PSM+MSI法の有効性が確認された。また、孤立渦問題(初期条件で強制的に対流を与える初期値問題)で散逸誤差の大きい手法はCavity内流れ問題(境界条件で強制的に対流を与える境界値問題)においても減衰の大きな結果を与えることが明らかとなった。

(3) 3次元円柱周りの高 Reynolds 数域に至る流れ

孤立渦問題及びCavity内流れ問題という代表的なベンチマーク問題において、本手法(SUPG/PSM+MSI法)の有効性が明らかになった。そこでここでは、3次元高 Reynolds 数流れ問題への有効性の確認として、円柱周りの流れを取り上げ、計算によって得られた特性値と実験値²⁰⁾との比較を行った。また、あわせて2次元解析と3次元解析との結果の差異についても検討した。

2次元解析に用いる有限要素メッシュはFig.7に示す

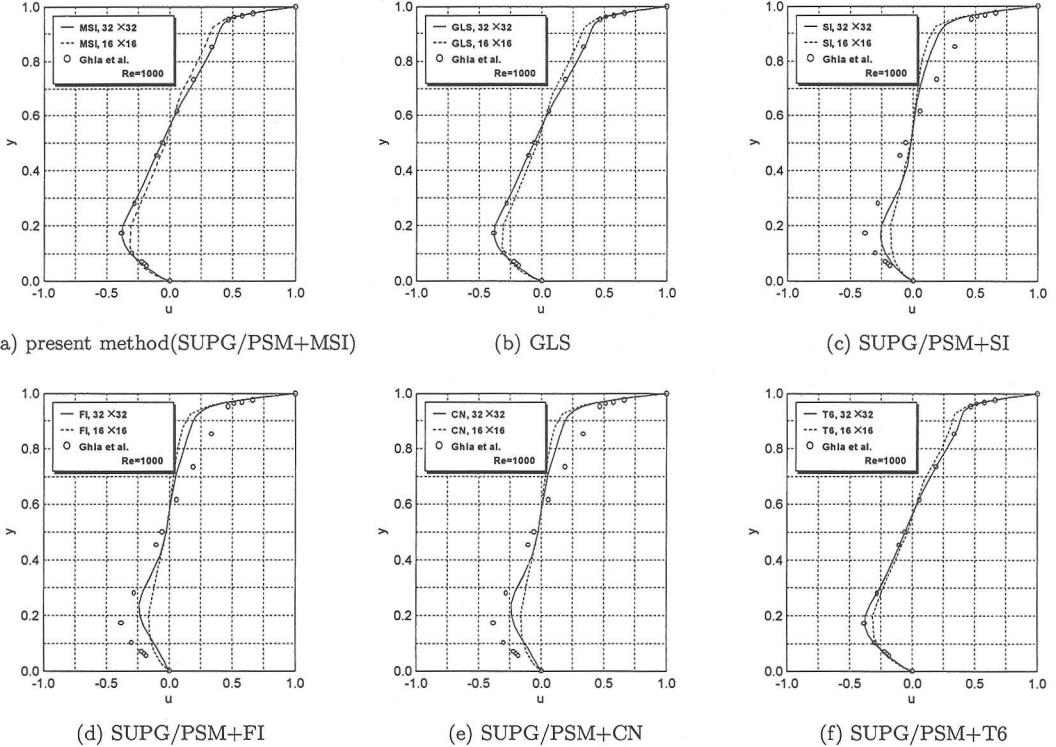


Fig.6 Comparison of computed horizontal velocity at central section

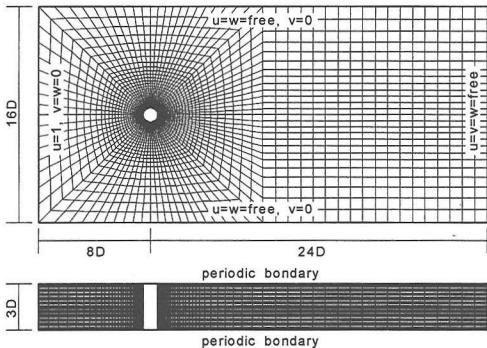


Fig.7 Finite element idealization

のような節点総数4,270、要素総数4,166のものである。周方向に86分割、半径方向に45分割したものであり、半径方向の最小メッシュ幅 h_{\min} は円柱の直径 D に対して $0.006D$ となっている。3次元解析を行う際には、Fig.8のように2次元の有限要素メッシュをスパン方向に長さ $H=3D$ として60等分割したものを用いた。なお、境界条件についても、Fig.7に示している。閉塞率を含む水平方向及び鉛直方向の解析領域の設定については、その差異が計算結果に影響を及ぼさないことを確認して決定し

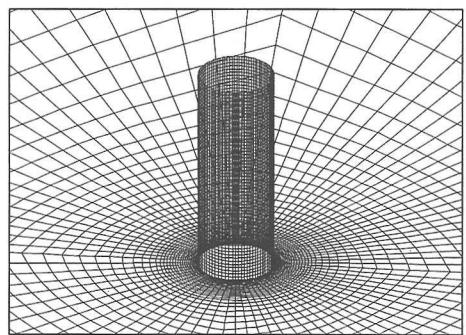
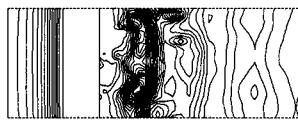
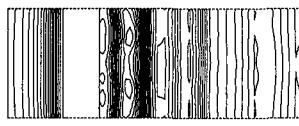
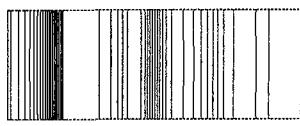
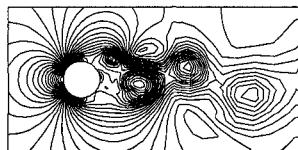
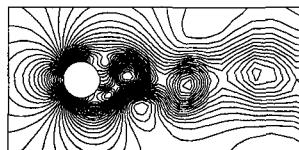
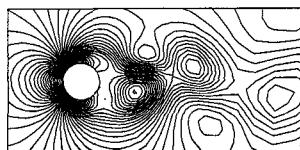
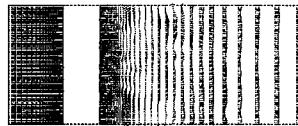
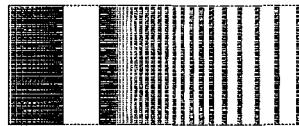
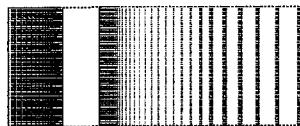
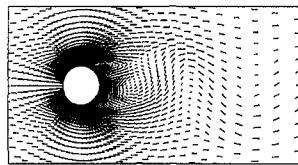
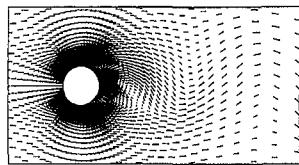
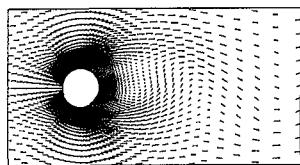


Fig.8 Finite element mesh around a cylinder

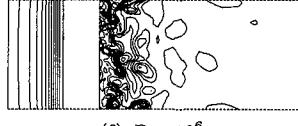
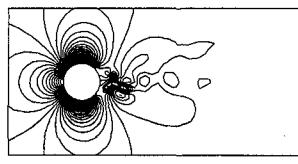
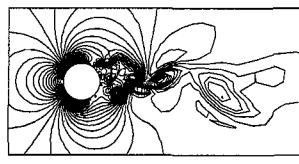
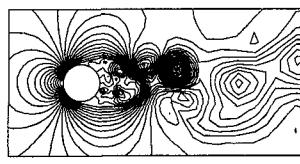
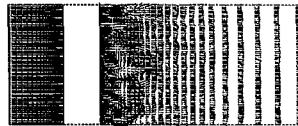
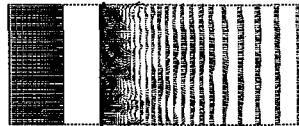
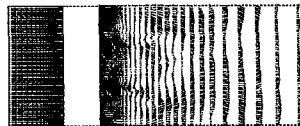
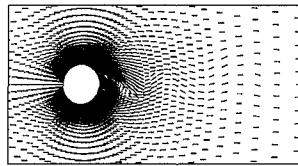
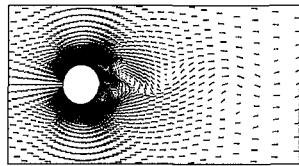
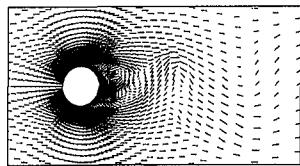
た¹⁸⁾。スパン方向のメッシュ幅は $0.05D$ 、節点総数は4,270×61=260,470、要素総数は $4,166 \times 60 = 249,960$ くなっている。計算条件として、 $Re=10^2 \sim 10^6$ 、 $\Delta t=0.005$ とし、すべて同一の有限要素メッシュを用いて解析を行った。なお、3次元解析の初期値としては2次元計算において十分発達し、準定常性が得られている解析結果($t=150$)を60層に積み重ねたものを用いた。また、より効率よく解析を行うために計算の初期($150 \leq t \leq 151$)に搅乱を加えることとし、円柱を軸方向に速度



(a) $Re=10^2$

(b) $Re=10^{2.5}$

(c) $Re=10^3$



(d) $Re=10^4$

(e) $Re=10^5$

(f) $Re=10^6$

Fig.9 Computed velocity and pressure at central section

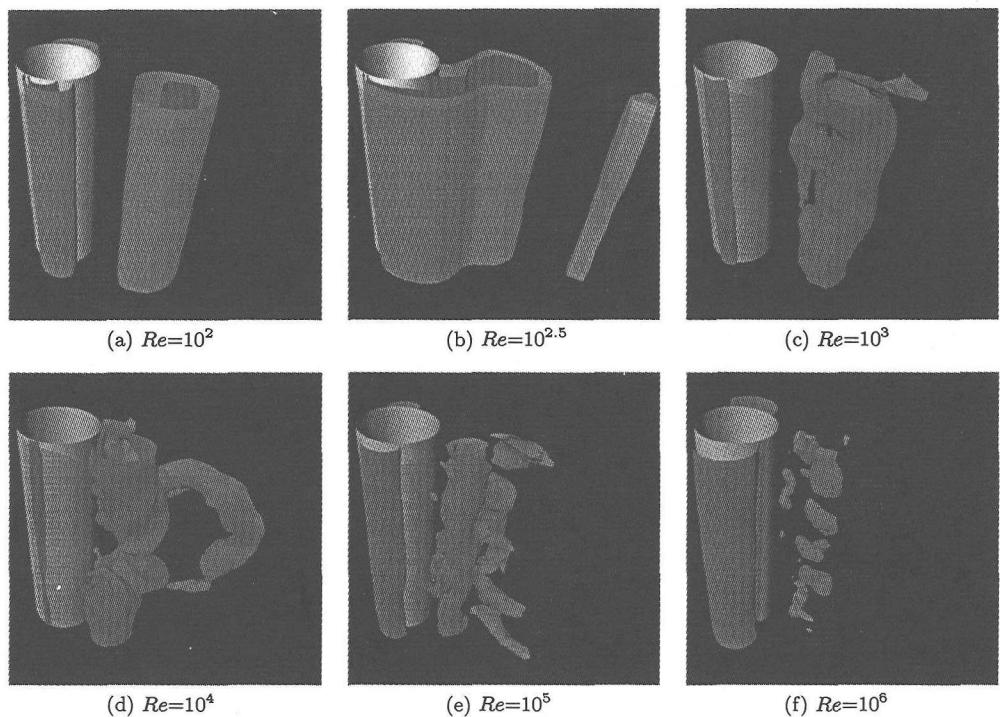


Fig.10 Iso-contour of pressure

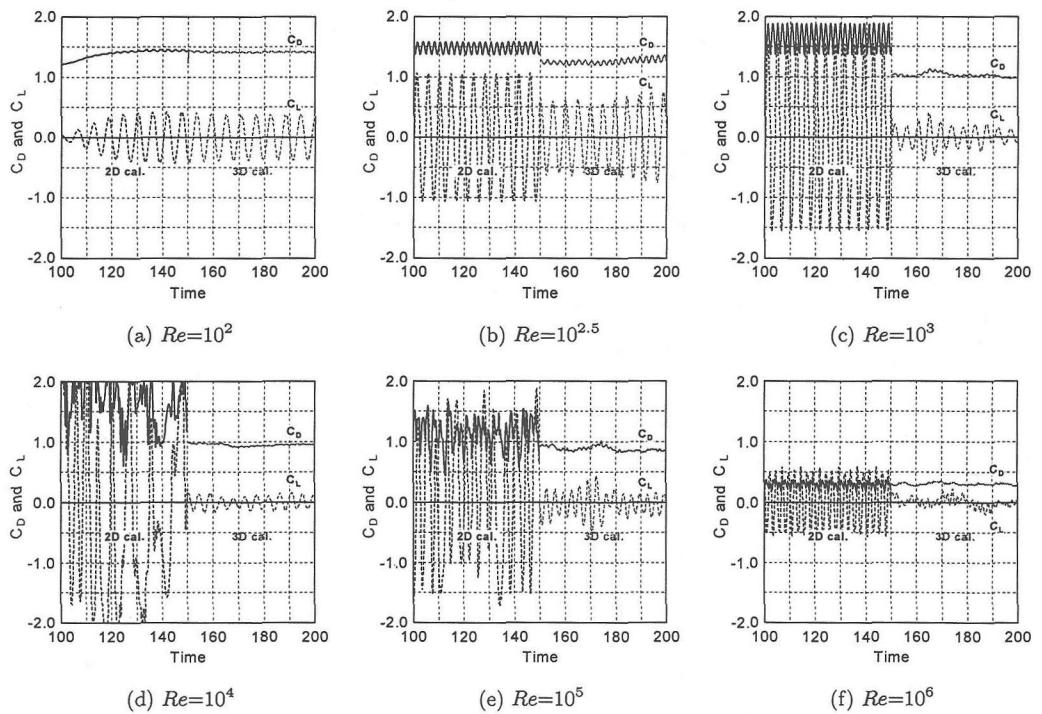


Fig.11 Time history of drag coefficient and lift coefficient

$$w(t) = 0.02 \times (1 - \cos(2\pi t)) \quad (27)$$

で動かした。これにより、より早く3次元性を捉えることができ計算時間の短縮が図れた¹⁹⁾。なお、円柱のスパン方向には周期境界条件

$$u_i(*, *, z + H, *) = u_i(*, *, z, *) \quad (28)$$

を課している。

Fig.9に3次元解析結果として、中心断面($z=1.5$, $y=0.0$)における流速ベクトル、圧力分布を示す。また、その際の圧力の等値面図を**Fig.10**に、抗力係数 C_D 、揚力係数 C_L の時刻歴を**Fig.11**に併せて示している(2次元解析により得られた結果($100 \leq t \leq 150$), 3次元解析により得られた結果($150 \leq t \leq 200$))。これらの結果より、 $Re=10^2$ では3次元性の見られない完全な2次元流れとなっており、抗力、揚力係数も2次元、3次元解析の間でほとんど同値となっているのが分かる。しかし、 $Re=10^{2.5}$ より若干の3次元性が現れ始め、 $Re=10^3 \sim 10^4$ では3次元性が強まるとともに、大幅な抗力係数、揚力係数の変動振幅の低下が見られる。これは渦構造に3次元性が現れることに起因するエネルギーの縦方向への散逸により、2次元解析で現れる大規模渦が大幅に減衰していることが主な原因と考えられる。 $Re=10^5$ からは渦のスケールがかなり小さくなるとともに、揚力係数の振動振幅の大幅な低下は見られるが抗力係数の低下があまり起こらないようになる。 $Re=10^6$ では渦の剥離点が明らかに後方に移動しており、渦のスケールに合わせて後流幅が狭まっているのが伺える。

Fig.12に各 Reynolds 数における抗力係数の平均値と実験値²⁰⁾との比較を示す。 $Re=10^3 \sim 10^4$ での結果を見ると先に示したよう2次元解析と3次元解析との間で顕著な差異が見られ、2次元解析では実験値との一致は得られていない。しかし、3次元解析を行うことにより抗力係数が大幅に減少し実験値と良い一致を示していることが分かる。本解析で用いた有限要素メッシュは $Re=10^4$ 程度までは境界層を分割できており、この結果、 $Re=10^4$ 程度までは3次元解析を行った場合に、実験値との比較においても良く対応したものと考える。また、**Fig.13**の Strouhal 数の平均値の実験値との比較においても、 $Re=10^4$ 程度までは実験値と定量的に良い一致を示していることが分かる。 $Re=10^5 \sim 10^6$ の超臨界域での Reynolds 数において、解析結果をより定量的に評価するためには、境界層をより細かく分割した有限要素メッシュを用いるか、もしくは乱流モデルの導入等の方策が必要となると言える。しかし、抗力係数の低下現象や Strouhal 数の増加現象などは明確に捉えられており、定性的には実験値と良い一致を示している。なお、計算時間は1ステップあたり約30秒(DEC

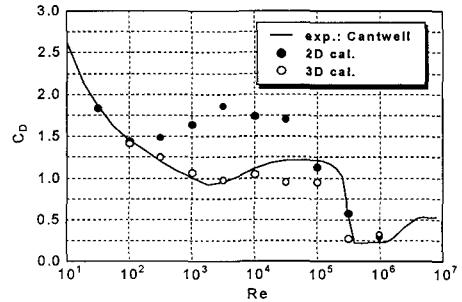


Fig.12 Comparison of drag coefficient

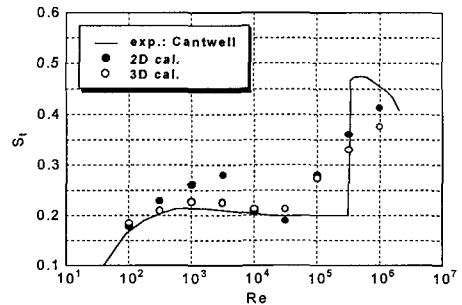


Fig.13 Comparison of Strouhal number

Alpha21164(300MHz) であった。

7. おわりに

本論文では、低次の混合補間要素である、流速双1次/圧力区分0次で補間する Q1/P0 要素を用いた、非圧縮粘性流れ解析のための安定化有限要素法(SUPG/PSM+MSI法)の提案を行った。そして、本手法の数値流体解析手法としての有効性を示すために、本手法と他の安定化有限要素法との比較を定式化及び解析結果の両面から行い、また時間積分法に関しても様々な方法を取り上げ比較検討を行った。本論文により得られた結論を示すと、以下のようになる。

(1) SUPG 法と圧力安定化行列を併用する SUPG/PSM 法は、代表的な安定化有限要素法である GLS 法や SUPG/PSPG 法と理論的に等価であり、また、それらの手法と比べてより簡便に安定化を図れる手法であることが示された。

(2) SUPG/PSM 法の時間積分法に修正準陰解法を適用する方法(SUPG/PSM+MSI 法)が他の時間積分法を適用する場合と比べて高精度かつ計算効率が良いことが明らかになった。また、有限要素メッシュへの依存性が少なく、粗い有限要素メッシュを用いた場合でも他の手法に比べて高精度である事も確認された。

(3) 係数行列の作成に解析的積分法を、また圧力ボアソン方程式の解法にはElement by Element 共役勾配法(SCG法)を用いることにより、大幅な省メモリー化と高速化が実現された。

(4) 円柱周り流れの解析において、本手法の3次元問題への適用性と有効性が示された。特に、メッシュ分割が境界層を表現している $Re=10^4$ 程度までは得られた特性値は実験値と定量的にもよい一致を示した。

謝辞： 本研究を進めるにあたり、(株)NK-EXA 水上昭氏には大変貴重なご意見を頂きました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M. : A new finite element formulation for CFD : V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition : A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59, pp.85-99, 1986.
- 2) Hughes, T.J.R. and Franca, L.P. : A new finite element formulation for CFD:VII. The stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 65, pp.85-96, 1987.
- 3) 渡辺浩志, 久田俊明：混合型有限要素解の安定条件の数値解析, 日本機械学会論文集(A編), 61巻583号, pp.168-175, 1995.
- 4) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 87, pp.364-384, 1991.
- 5) Tezduyar, T.E., Mittal, S. and Shih, R. : Time-accurate incompressible flow computations with quadrilateral velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 79, pp.71-86, 1990.
- 6) Silvester, D.J. and Kechkar, N. : Stabilized bilinear-constant velocity-pressure finite elements for the conjugate gradient solution of the stokes problem, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 79, pp.71-86, 1990.
- 7) 水上昭 : Q_1-P_0 要素による FEM 流れ解析のための安定化行列, 第8回数値流体シンポジウム論文集, pp.647-650, 1994.
- 8) Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Hulbert, G.M. : A new finite element formulation for CFD : VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73, pp.173-189, 1989.
- 9) Franca, L.P. and Frey, S.L. : Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp.209-233, 1992.
- 10) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R. : Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95, pp.221-242, 1992.
- 11) Donea, J. : A Taylor-Galerkin Method for convective transport problems, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 20, pp.101-119, 1984.
- 12) Gresho, P.M. and Chan, S.T. : On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix, Part 1: Theory, Part 2: Implementation, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 11, pp.587-620, pp.621-659, 1990.
- 13) Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. and Upson, U.D. : A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1: Theory, Part 2: Applications, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4, pp.557-598, pp.619-640, 1984.
- 14) Mizukami, A. : Integration formulas for a 4-node isoparametric element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59, pp.111-121, 1986.
- 15) 水上昭 : Element-by-Element PCG法のベクトル化と流れ解析への応用, 第2回計算力学シンポジウム論文集, pp.1-6, 1988.
- 16) Shakib, F. and Hughes, T.J.R. : A new finite element formulation for CFD : IX. Fourier analysis of space-time galerkin/least-squares algorithms, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 87, pp.35-58, 1991.
- 17) Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T. : High-Re solutions for incompressible flow usig the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. physics*, 48, pp.387-411, 1982.
- 18) 原田太一, 猪股渉, 横山和男 : 安定化有限要素法による非圧縮粘性流れ解析における適切な解析領域設定の検討, 土木学会第52回年次学術講演会概要集, 1-B, pp.8-9, 1997.
- 19) 茂里一紘, 土井康明, 上岡孝志 : 2次元円柱まわりの3次元流れの数値シミュレーション, 第4回数値流体シンポジウム報文集, pp.503-506, 1990.
- 20) Cantwell, B. and Coles, D. : An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, 136, pp.321-374, 1983.
- 21) Kalro, V. and Tezduyar, T. : Parallel finite element computation of 3D incompressible flows on MPPs. In Habashi, W. , editor, *Solution Techniques for Large-Scale CFD Problems.*, 1995.
- 22) Tamura, T. and Kuwahara, K. : Direct finite difference computation of turbulent flow around a circular cylinder, *Proc. Int. Symp. of Comput. Fluid Dynamics, Nagoya*, pp.701-706, 1989.
- 23) 猪股渉, 横山和男 : 安定化有限要素法による非圧縮性流れ解析, 第10回数値流体シンポジウム論文集, pp.334-335, 1996.
- 24) Inomata, W. and Kashiyama, K. : Stabilized finite element method for high Reynolds number flows, *The 2nd Asian Comput. Fluid Dynamics Conf., Tokyo*, pp.313-318, 1996.

(1997. 5. 15 受付)

STABILIZED FINITE ELEMENT METHOD FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUID FLOWS USING LOW-ORDER MIXED INTERPOLATIONS

Kazuo KASHIYAMA and Wataru INOMATA

A stabilized finite element method based on the Q1/P0 element is presented for the analysis of incompressible viscous fluid flows. A pressure stabilization matrix(PSM) for the Q1/P0 element is introduced to avoid the occurrence of the checkerboard pressure mode. Also, SUPG formulation is employed to improve the numerical stability and accuracy. For the temporal discretization, a modified semi-implicit scheme(MSI) is applied. The pressure poisson equation system is solved by the Element-by-Element conjugate gradient method. The present method is shown to be an accurate and efficient tool for the analysis of incompressible viscous fluid flows.