土木学会論文集 No. 591／I-43, 111-123, 1998. 4

陰的２段過程の超安定高精度時間積分法とNavier-Stokes方程式解法への適用

吉田　裕[1]・袁　文平[2]・魚地征一郎[3]

[1]正会員　工博　東京工業大学教授　大学院情報理工学研究科（〒152　東京都目黒区大岡山2-12-1）
[2]工修　東京工業大学大学院情報理工学研究科博士後期課程（同上）
[3]正会員　工修　東日本旅客鉄道(株)（研究当時　東京工業大学大学院修士課程学生）

時間に関する１階の連立常微分方程式に帰着する解析対象系の，極めて大きな固有値に対応する評価精度を抜本的に改良した，陰的２段階過程の直接時間積分法を提案するものである．陰的な解法であるが，要する係数マトリックスの構造は，原系のものと同じ構造で，その記憶法に関するプログラム上の利点を損なうことはない．２段階の解法であるが，積分計算の前半部と後半部における係数マトリックスは同じになり，後半部は，前進，後退代入計算だけで計算を進めることができる．自己出発型であり，パラメータの選択によって異なった特性を実現することができる，汎用性も備えている．Navier-Stokes有限要素方程式に，適用して解法を構成し，その実効性を検証したものである．

Key Words : stepwise time integration, implicit two step algorithm, super stable, first-order initial value problem, large nonlinear system, Navier-Stokes equation

１．はじめに

現象を支配する方程式が，時間に関する１階の微分方程式系に帰着される問題は，工学，理学の各分野に，広範囲に存在する．空間を離散化して得られる，時間に関する１階の連立常微分方程式を対象とする直接時間積分法は，それぞれの現象を解析するための要となるために，この問題に関わる研究成果は，古くから各分野に積まれてきている[1)~4)]．特に，有限要素法に代表される数値解析法が急速に進歩，普及した'70年代に，精力的に研究がなされ[5)~10)]，現在広く用いられている積分法の基礎が固められた経緯がある．

現在では，各種非線形現象を対象とする汎用解析システムが普及し，大規模な問題の解析が，実用レベルで広く行われるようになってきている．いうまでもなく，時間方向に逐次積分していくための解式は近似式であり，その近似精度は，採られる積分時間間隔の大きさに依存する．特に非線形解析の場合には，非線形項の収束計算過程などに，解の信頼度が厳しく影響する．大次元の問題では，対象とする系の固有値が非常に広い幅で分布するので，必然的に，解法に採用される直接積分法の特性に関わる，固有値の大きな領域における評価精度が，解析の安定性や得られる解の信頼度に決定的な影響を与えることになる場合が多くなる．

直接積分法の多くは，小さな時間増分で解析することを前提に成り立っており，対象とする系の固有値との相対で，大きな時間増分に対応する，積分法の評価精度に関しては，解析者側の暗黙の了解事項として用いられているのが普通である．しかし，汎用システムによる場合などでは，このような了解事項が明確に認識されることなく，解析が実行されている場合も多く見受けられる．

本論文は，特に非線形解析過程の完成度の向上を目指して，積分法の特性に関わる，解析の対象とする系の，極めて大きな固有値に対応する領域における評価精度を改善する手立てを探り，現実化した，直接時間積分法について報告するものである．無条件に安定な積分法としての陰解法を基礎とする，２段階の積分法として，具体化したものである．ここに，その誘導過程を説明し，基本的な特性を明らかにするとともに，具体的な数値解析結果に基づいて，その実効性を検証する．

その概要は，数値解析法シンポジウムなど[11),12)]において発表したが，その後，パラメータの選択により，いくつかの異なった特性を包含する積分法として，一般化したものである．非線形解析の対象として代表的な，Navier-Stokes方程式を対象とする有限要素法による解析過程に，この積分法を適用して解法を構成し，検証解析を行い，１階の連立常微分方程式の直接時間積分法としての纏まりを付けて，ここに発表するものである．

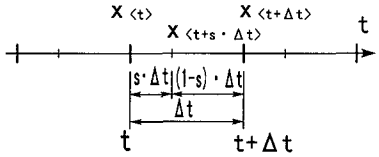


図-1　一つの時間増分の前半部と後半部

2．陰的２段階時間積分法の構成

（1）基本構想

空間を離散化して得られる，時間に関する１階の連立常微分方程式（式(1)）を時間方向に積分するための積分漸化公式を対象として，既存の公式との相対で，安定性および信頼性の向上を意図するものである．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}=\bar{\mathbf{f}},\qquad \dot{\mathbf{x}}=d\mathbf{x}/dt \tag{1}$$

ここに提起する積分漸化式に至る過程で念頭に置いた，基本的な事項は下記の諸点である．

自己出発型で，無条件に安定であることを要件とするために，陰的な公式を対象とする．また，目的に対する可能性の判断から，特性の選択の幅を広くするために，１時間増分 Δt を，前半部 $s\cdot\Delta t$ と後半部 $(1-s)\cdot\Delta t$ に分割して，２段階で積分するアルゴリズムを検討する（図－1）．その上で，計算効率に関わる負担を回避するために，積分計算の前半部と後半部における係数マトリックスは同じものを用いることができるような解式を目指す，などである．

以下に，提案する２段階時間積分法の内容を，具体的に説明する．

（2）積分計算の前半部 $(t\rightarrow t+s\cdot\Delta t)$ に用いる解式

前半部における，対応する積分時間間隔は $s\cdot\Delta t$ である．基礎とするものは，時間に関する微分項の分布を線形分布と仮定して得られる，次式である．

$$\mathbf{x}_{<t+s\cdot\Delta t>}=\mathbf{x}_{<t>}+\frac{s\cdot\Delta t}{2}\cdot\left\{\dot{\mathbf{x}}_{<t+s\cdot\Delta t>}+\dot{\mathbf{x}}_{<t>}\right\} \tag{2}$$

パラメータ α_1 を導入して基礎式を変形した，次式を用いて，式(2)における微分項 $\dot{\mathbf{x}}_{<t+s\cdot\Delta t>}$ を消去する．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}}_{\langle t+s\cdot\Delta t\rangle}+(1+\alpha_1)\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}_{\langle t+s\cdot\Delta t\rangle}-\alpha_1\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}_{\langle t\rangle}=\bar{\mathbf{f}}_{\langle t+s\cdot\Delta t\rangle} \tag{3}$$

式(2)における微分項 $\dot{\mathbf{x}}_{<t>}$ は，自己出発型が要件であることから，次式を用いて消去する．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}}_{<t>}+\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}_{<t>}=\bar{\mathbf{f}}_{<t>} \tag{4}$$

その結果，積分計算の前半部に用いる解式として，次式が得られる．

$$\left[\mathbf{M}+\kappa_1\cdot\Delta t\cdot\mathbf{K}\right]\cdot\mathbf{x}_{<t+s\cdot\Delta t>}=\left[\mathbf{M}-(s-\kappa_1)\cdot\Delta t\cdot\mathbf{K}\right]\cdot\mathbf{x}_{<t>}+\frac{s\cdot\Delta t}{2}\cdot\left\{\bar{\mathbf{f}}_{<t+s\cdot\Delta t>}+\bar{\mathbf{f}}_{<t>}\right\} \tag{5}$$

ここに，$\kappa_1=\dfrac{1+\alpha_1}{2}\cdot s$ である．

（3）積分計算の後半部 $(t+s\cdot\Delta t\rightarrow t+\Delta t)$ に用いる解式

後半部に対応する積分時間間隔は $(1-s)\cdot\Delta t$ である．ここでも，微分項を線形分布と仮定して得られる次式を基礎とする．

$$\mathbf{x}_{\langle t+\Delta t\rangle}=\mathbf{x}_{\langle t+s\cdot\Delta t\rangle}+\frac{1-s}{2}\cdot\Delta t\cdot\left\{\dot{\mathbf{x}}_{\langle t+\Delta t\rangle}+\dot{\mathbf{x}}_{\langle t+s\cdot\Delta t\rangle}\right\} \tag{6}$$

式(6)における微分項 $\dot{\mathbf{x}}_{<t+\Delta t>}$ を，パラメータ α_2 を導入して基礎式を変形した，次式を用いて消去する．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}}_{<t+\Delta t>}+(1+\alpha_2)\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}_{<t+\Delta t>}-\alpha_2\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}_{\langle t+s\cdot\Delta t\rangle}=\bar{\mathbf{f}}_{\langle t+\Delta t\rangle} \tag{7}$$

また，微分項 $\dot{\mathbf{x}}_{<t+s\cdot\Delta t>}$ は，式(3)を用いて消去する．

その結果，積分計算の後半部に用いる解式として，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{M}+\kappa_2\cdot\Delta t\cdot\mathbf{K}\right]\cdot\mathbf{x}_{<t+\Delta t>}&=\left[\mathbf{M}-\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\kappa_1}{s}\right)\cdot(1-s)-\kappa_2\right\}\cdot\Delta t\cdot\mathbf{K}\right]\cdot\mathbf{x}_{\langle t+s\cdot\Delta t\rangle}\\&\quad-\left(\frac{1}{2}-\frac{\kappa_1}{s}\right)\cdot(1-s)\cdot\Delta t\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}_{<t>}\\&\quad+\frac{1-s}{2}\cdot\Delta t\cdot\left\{\bar{\mathbf{f}}_{<t+\Delta t>}+\bar{\mathbf{f}}_{<t+s\cdot\Delta t>}\right\}\end{aligned} \tag{8}$$

ここに，$\kappa_2=\dfrac{1+\alpha_2}{2}\cdot(1-s)$ である．

（4）２段階積分公式としての特性評価

前半部および後半部のそれぞれに，式(5)および式(8)を適用して構成される，２段階積分法としての積分作用素は，１自由度系を対象として，次のように表わすことができる．

$$H=\frac{1+(\kappa_1+\kappa_2-1)\cdot Z+\left\{\kappa_1\cdot\kappa_2-s\cdot\kappa_2+s\cdot(1-s)/2\right\}\cdot Z^2}{(1+\kappa_1\cdot Z)\cdot(1+\kappa_2\cdot Z)} \tag{9}$$

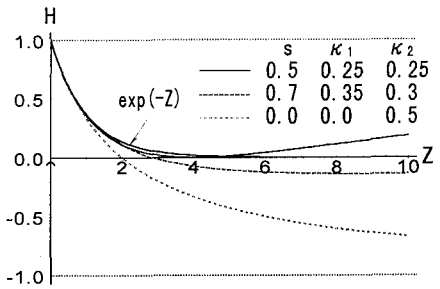


図-2　パラメータの組み合わせによって得られる，いろいろな特性

ここに，$x_{(t+\Delta t)} = H \cdot x_{(t)}$ であり、$Z = \omega \cdot \Delta t$ である．

パラメータの組み合わせによって得られる，特徴的な特性曲線を，理論曲線と比較して示したものが図-2である．解式の誘導過程から容易に判断されるように，$s = 0$ または $s = 1$ をとる場合は，通常の単段の陰的スキームに該当するので，その特性はよく知られているところである．

例えば，$s = 0$，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ （$\kappa_1 = 0$，$\kappa_2 = 1/2$）の場合は，Crank-Nicolson 法そのものの特性を示していることになる．この場合は，$Z \to \infty$ で，$H \to -1$ である．また，$s = 1/2$，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ （$\kappa_1 = \kappa_2 = 1/4$）の場合は，$\Delta t$ を半分にとり，Crank-Nicolson 法によって，2ステップの計算を行うことと同等である．したがって，この場合の積分作用素は，$Z \to \infty$ で，$H \to 1$ をとることになる．

（5）要する係数マトリックスの構造とその記憶法について

解析の要になるのは，疎な係数マトリックスで表わされる大規模な連立1次方程式を解く過程であり，スカイライン記憶法に基づく Crout 法などが，一般的に用いられている解法である．採られる解法に対応して，係数マトリックスにおける非零要素の位置に関わる，カラムの高さに関する指標など，付加的な評価が必要になり，プログラミングを複雑にする結果に繋がる．

対象とする原系（式（1））の係数マトリックス**M**および**K**の構造を，解析に際して与えられる要素データに基づいて評価することは容易であり，その評価過程は，既に確立されているところである．時間積分法の評価精度を高めるために採られる，高次のスキームに基づく解析においては，$\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K}$ を評価することなどが必要になる．このような場合には，当然，原系の係数マトリックス**M**および**K**の構造を引き継ぐことができなくなる．その上，係数マトリックスの構造を評価する過程が格段に複雑になり，プログラミングに，桁違いに大きな負担がかかることになる．

ここに提案する積分法に要する係数マトリックス（式(5)および式(8)の左辺）は，原系の係数マトリックス**M**および**K**，そのもので構成される．したがって，その記憶法に関する，プログラム上の利点を損なうことはない．

3．特性に期する条件に基づいて決定されるパラメータと各種積分法

（1）Zの小さい領域の評価精度を重視して決定されるパラメータと2段階積分法 I

積分作用素（式(9)）は，理論解 $\exp(-Z)$ との対応で具有すべき次の2つの条件は，既に満たしている．

$$H|_{Z=0} = \exp(0) = 1 \qquad (10)$$

$$dH/dZ|_{Z=0} = -\exp(0) = -1 \qquad (11)$$

また，次の条件を満たしている．

$$dH/dZ|_{Z=\infty} = 0 \qquad (12)$$

ここでは，式(10)，(11) に加えて，下記の3つの条件に基づいて，式(9) に導入されている3つのパラメータ（s，κ_1，κ_2）を決定する．

まず，評価精度の向上を計る条件として，次の条件を考慮する．

$$d^2H/dZ^2|_{Z=0} = \exp(0) = 1 \qquad (13)$$

式(13) に対応する条件式は，次のように与えられる．

$$\kappa_1 + (1-s)\cdot\kappa_2 + s\cdot(1-s)/2 = 1/2 \qquad (14)$$

式(14) を考慮すると，式(9)は次のように書き改められる．

$$H = \frac{1+(\kappa_1+\kappa_2-1)\cdot Z + \{\kappa_1\cdot\kappa_2 - (\kappa_1+\kappa_2)+1/2\}\cdot Z^2}{(1+\kappa_1\cdot Z)\cdot(1+\kappa_2\cdot Z)} \qquad (15)$$

また，2段階の解式における前半部（式(5)）と後半部（式(8)）に要する係数マトリックスが等しくなるように，次の条件を課す．

$$\kappa_1 = \kappa_2 \qquad (16)$$

$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ として，$H(Z)$ は次のように表わされる．

$$H = \frac{1+(2\cdot\kappa-1)\cdot Z + (\kappa^2 - 2\cdot\kappa + 1/2)\cdot Z^2}{(1+\kappa\cdot Z)^2} \qquad (17)$$

ここでは，Zが小さい領域の評価精度を，さらに向上させるための条件として，次の条件を考慮する．

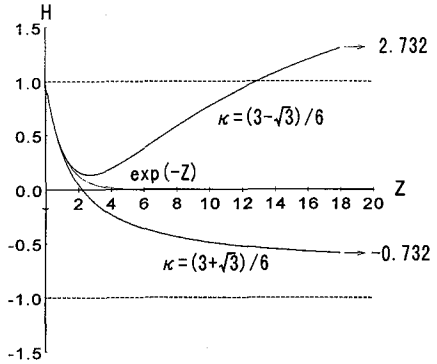


図-3　Zの小さい領域の評価精度を重視して得られる，積分法の特性

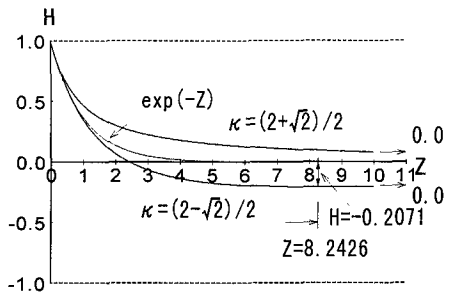


図-4　Z→∞でH→0となる条件を重視して得られる，積分法の特性

$$d^3H/dZ^3|_{Z=0} = -\exp(0) = -1 \qquad (18)$$

式(18) に対応する条件式は，次のように与えられる．

$$\kappa^2 - \kappa + 1/6 = 0 \qquad (19)$$

式(19) より，κ の値が次のように定まる．

$$\kappa = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \qquad (20)$$

式(20) に得られた，κ に関する2つの値のそれぞれを式(17) に代入して得られる，積分作用素の特性曲線 H(Z) を，図-3に示す．

無条件に安定であるための要件を考慮して，κ は次の値をとるものとする．

$$\kappa = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \qquad (21)$$

提起する積分法は，式(5)および 式(8)における右辺の評価を含めた，具体的な解法のアルゴリズムである．右辺を評価するために必要となるパラメータ s は，式(21) に得られた結果を，式(14) に代入して，次のように定めることができる．

$$s = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{39 + 24\sqrt{3}}}{6} \qquad (22)$$

式(22) に得られた，2つの s の値の，何れの値をとる場合でも積分計算は成立し，2段階の計算によって，得られる結果は同じになる．しかし，s が負の値をとる場合には，式(5)および式(8)の右辺に存する，時刻 $t+s\cdot\Delta t$ における外力項に対応して，積分計算の出発時に，負の時刻の外力項の評価が必要になり，具体的な計算を実行する上で不都合を生ずる．

したがって，パラメータ s は，次の値をとるものとする．

$$s = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{39 + 24\sqrt{3}}}{6} \cong 1.2073 \qquad (23)$$

式(5)および 式(8)に，式(21)および 式(23)によって定まるパラメータの値を考慮して構成される2段階の時間積分法を，積分法Ⅰとよぶことにする．

(2) Z→∞でH→0となる条件を重視して決定されるパラメータと2段階積分法ⅡおよびⅢ

式(13)および 式(16)に示した条件を考慮して，式(17)のように得られた H(Z) を踏まえるものとする．ここでは，積分法Ⅰの誘導に際して考慮した式(18)の条件に換えて，次の条件を考慮して，パラメータ κ を決定する．

すなわち，Z→∞における積分作用素 H の値を 0 とする．

$$H(Z \to \infty) = \frac{\kappa^2 - 2\cdot\kappa + 1/2}{\kappa^2} = 0 \qquad (24)$$

式(24)の条件から，κ の値が次のように定まる．

$$\kappa = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \qquad (25)$$

式(25)に得られた，κ に関する2つの値のそれぞれを式(17) に代入して得られる，積分作用素の特性曲線 H(Z) を，図-4に示す．なお，$\kappa = (2-\sqrt{2})/2$ に対応する特性曲線おいて，負の値をとる領域の極値は，Z = 8.2426 における，$H_{min} = -0.2071$ である．

式(5) および式(8) の右辺を評価するために必要となるパラメータ s は，式(25)に得られた結果のそれぞれを，式(14) に代入して定めることができる．ここでは，式(23) に関連して述べた理由で，s としては正の値をとる方を選ぶものとする．

次のように，2組のパラメータの値の組み合わせを設定することができる．

その１つは，

$$\kappa = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad (26)$$

$$s = \frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{15-10\sqrt{2}}}{2} \cong 0.6702 \qquad (27)$$

の組み合わせである．式(5)および 式(8)に，式(26)および 式(27)によって定まるパラメータの値を考慮して構成される２段階の時間積分法を，**積分法Ⅱ**とよぶことにする．

もう１つの組み合わせは，

$$\kappa = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad (28)$$

$$s = \frac{-1-\sqrt{2}+\sqrt{15+10\sqrt{2}}}{2} \cong 1.4921 \qquad (29)$$

である．式(5)および 式(8)に，式(28)および 式(29)によって定まるパラメータの値を考慮して構成される２段階の時間積分法を，**積分法Ⅲ**とよぶことにする．

（３） Calahan のスキームについて

図-３における，$\kappa = (3+\sqrt{3})/6$ に対応する特性曲線 $H(Z)$ は，式(21)を式(17)に代入して，次のように示される．

$$H = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot Z-\frac{1}{6}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot Z^2}{\left[1+\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{\sqrt{3}}{3})\cdot Z\right]^2} \qquad (30)$$

式(30) は，単段の陰的高次スキームとして知られる，Calahan のスキームの特性と完全に同じものである．比較のために，Calahan のスキームの誘導過程の概要を示す[13]．

Calahan のスキームは，２階の微分項を取り込んで得られる，次式の仮定に基づいて誘導される．

$$\mathbf{x}_{\langle t+\Delta t\rangle} = \mathbf{x}_{\langle t\rangle} + \Delta t\cdot\left[\alpha\cdot\dot{\mathbf{x}}_{\langle t\rangle} + (1-\alpha)\cdot\dot{\mathbf{x}}_{\langle t+\Delta t\rangle}\right] + \frac{1}{6}\cdot(\Delta t)^2\cdot\left[(3\cdot\alpha-1)\cdot\ddot{\mathbf{x}}_{\langle t\rangle} + (3\cdot\alpha-2)\cdot\ddot{\mathbf{x}}_{\langle t+\Delta t\rangle}\right] \qquad (31)$$

式(31)から，次の関係式が得られる．

$$\left[1+(1-\alpha)\cdot Z-\frac{1}{6}\cdot(3\cdot\alpha-2)\cdot Z^2\right]\cdot\mathbf{x}_{\langle t+\Delta t\rangle} = \left[1-\alpha\cdot Z+\frac{1}{6}\cdot(3\cdot\alpha-1)\cdot Z^2\right]\cdot\mathbf{x}_{\langle t\rangle} \qquad (32)$$

式(32)の左辺の [ ] 内が，完全な２乗の形になるための条件から，$\alpha = \pm\sqrt{3}/3$ が決まる．さらに，無条件に安定であるための条件から，α は次のように定められる．

$$\alpha = -\sqrt{3}/3 \qquad (33)$$

上述の過程を経て得られる，Calahan のスキームの積分作用素 $H_C(Z)$ は，次のように示される．

$$H_C = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot Z-\frac{1}{6}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot Z^2}{\left[1+\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{\sqrt{3}}{3})\cdot Z\right]^2} \qquad (34)$$

式(32)のように，左辺に Z^2 の項が現れる，高次のスキームに基づく具体的な解析においては，一般的には，$\mathbf{K}\cdot\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{K}$ を評価することが必要になる．それに対して，式(34)の分母が完全な２乗の形になる，Calahan のスキームによる場合には，$\mathbf{M}$ と $\mathbf{K}$ によって構成される同一の係数マトリックスのもとでの求解過程を，２回繰り返す解法に帰着させることが可能になる．

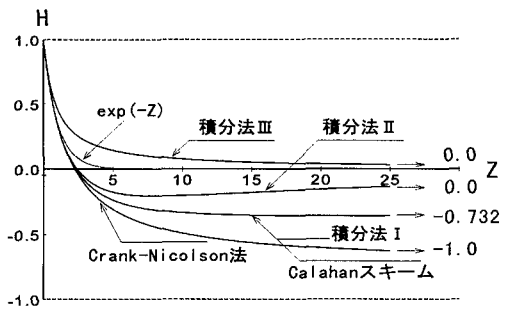


図-５　提案する積分法Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの特性の比較

（４） 提案する陰的２段階積分法の特性に関するまとめ

上述の誘導過程を経て得られた，積分法Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの特性曲線を，Crank-Nicolson 法の特性と比較して示したものが，**図-５**である．

いずれの積分公式においても，$Z(=\omega\cdot\Delta t)$ の小さな領域において，それなりの精度で正しい解を評価することは，当然である．したがって，時間方向の解析における要点は，時間増分 Δt を小さく採ることにつきることになる．一方で，空間の離散化の近似精度は対象領域の分割の細かさに依るが，信頼度の向上を期して，空間の分割を細かくすればする程，対象とすることになる方程式系に，ω の大きな，高次の成分が取り込まれることになるので，Δt のとり方には自ずから限界が生ずる．したがって，大規模な系を対象とする，時間方向の解析においては，必然的に，踏まえている直接時間積分法の，$Z(=\omega\cdot\Delta t)$ の極めて大きな領域における評価特性が，解

析過程における解の振舞いや得られる解の信頼性に，大きな影響を及ぼすことになる．

特に，非線形解析においては，漸次得られる解を，対象とする方程式系に取り込みながら，解析を進めることになるので，基礎とする時間積分法の評価特性が解に及ぼす影響は，一段と厳しいものになる．

以下に，Navier-Stokes 方程式を対象とする，有限要素法による解析を例にして，具体的な解析結果に基づいて，非線形現象の時間方向の解析における時間積分法の特性の影響について議論し，提案する時間積分法の有効性を実証する．

4．検証解析の対象とする有限要素 Navier-Stokes 方程式

(1) 対象とする微分方程式系

検証の対象とする問題は，下記の微分方程式系で記述される，2次元非圧縮性粘性流れ場の非定常解析である．

すなわち，Navier-Stokes 方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=b_i+\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (35)$$

に，次式で与えられる，**応力-ひずみ速度関係式**

$$\sigma_{ij}=-p\cdot\delta_{ij}+\lambda\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\cdot\delta_{ij}+\mu\cdot\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (36)$$

を採用して得られる，流速 v_i と圧力 p を変数として記述される運動方程式，および圧力 p と密度 ρ によって，$c^2=dp/d\rho$ と定義される，音速 c を導入して，圧力と流速で記述される**連続の条件式**

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v_k\cdot\frac{\partial p}{\partial x_k}+\rho\cdot c^2\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0 \quad (37)$$

を対象とする．ここでは，密度の変化 $\Delta\rho$ は密度 ρ の値そのものに比べて小さい（$\Delta\rho \ll \rho$）ものとして，密度および音速は定数にとるものとする．b_i は物体力，μ は粘性係数である．第2粘性係数 λ は，Stokes の仮定に基づく，$\lambda=-(2/3)\cdot\mu$ を用いる．δ_{ij} は Kronecker のデルタ関数である．

境界条件は，流速が規定される境界 Γ_u および力が規定される境界 Γ_σ のそれぞれに対して，次のように与えられる．

$$v_i=\bar{v}_i \qquad \text{on } \Gamma_u \quad (38)$$

$$\sigma_{ij}\cdot n_j=\bar{t}_i \qquad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (39)$$

ここに，n_j は方向余弦である．

(2) 重み付き残差法に基づいて導出される有限要素方程式

運動方程式 (式(35))に対しては，流速分布を重み関数とし，連続条件式 (式(37))に対しては，圧力分布を重み関数として，得られる重み付き残差原理に基づく，通常の有限要素方程式の導出過程を採る[14)～17)]．要素は，2次元の四辺形アイソパラメトリック要素である．流速分布に対しては，4つの隅点のそれぞれに，節点流速 u_i，v_i（$i=1\sim4$）を導入して，要素内の分布を，基準座標 ξ，η に関する $\xi\cdot\eta$ の項を含む，1次の関数で補間する，通常の過程に基づいている．

圧力分布に対しては，変数を要素内の重心の位置に定義して，要素内で一定として補間する．圧力変数を要素内部に定義することにより，解析対象領域の境界上に，圧力変数が現れることがなくなるので，この場合には，圧力に関する境界条件を直接的に考慮する必要はなくなる[18)，19)]．

上記の過程を経て，有限要素方程式が，次のように導出される．

$$\mathbf{M}_u\cdot\dot{\mathbf{u}}+\left[\tilde{\mathbf{K}}_u(\mathbf{u})+\mathbf{K}_u\right]\cdot\mathbf{u}+\mathbf{K}_p\cdot\mathbf{p}=\mathbf{F}_u \quad (40)$$

$$\mathbf{M}_p\cdot\dot{\mathbf{p}}+\mathbf{K}_c\cdot\mathbf{u}+\tilde{\mathbf{K}}_p\cdot\mathbf{p}=\mathbf{0} \quad (41)$$

ここに，$\mathbf{u}$ は節点流速のベクトル，$\mathbf{p}$ は各要素内で定義される圧力変数のベクトルである．また，$\dot{\mathbf{u}}=d\mathbf{u}/dt$，$\dot{\mathbf{p}}=d\mathbf{p}/dt$，$t$ は時間，である．各係数マトリックスは，式(35)，(36)および 式(37)における，それぞれの項に対応して導出されるマトリックスである．

特に，式(40) における $\tilde{\mathbf{K}}_u$ は，対流項 $v_k\cdot(\partial v_i/\partial x_k)$ に対応するマトリックスで，流速の関数である．実際の解析においては，これの扱いは要点となるので，$\tilde{\mathbf{K}}_u(u)$ として，流速の関数であることを明記している．なお，この $\tilde{\mathbf{K}}_u$ に関しては，通常は，重み関数の選択，積分点の移動など，に関わる風上要素や人工粘性項の導入が計られるのが普通であるが，ここでは，一切，付加的な技巧は導入せず，上述の補間関数のもとで直接的に誘導される係数マトリックスを，そのまま採用する．

本来，$v_k\cdot(\partial p/\partial x_k)$ に対応する，式(41) における $\tilde{\mathbf{K}}_p$ も流速の関数となるものであるが，圧力を要素内で一定とする補間に基づいているので，ここでは零となる．式(40)における $\mathbf{K}_p$ は，流速変数の数を行数とし，圧力変数の数を列数とするマトリックスである．式(41)における $\mathbf{K}_c$ は，$\mathbf{K}_c=-\rho\cdot c^2\cdot\mathbf{K}_p^T$ の関係にある．

(3) 提案する時間積分法の適用

式(40), (41) に得られた，運動方程式と連続条件式をまとめて，次のように表わすことができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_u(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_c & \tilde{\mathbf{K}}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{42}$$

前述したように，式(42)における $\tilde{\mathbf{K}}_p$ は，ここでは $\mathbf{0}$ となる．これは，ここで採った，圧力の補間の仕方に依る結果であり，一般的には，$\mathbf{0}$ になるとは限らないので，式(42) においては，$\tilde{\mathbf{K}}_p$ と記している．

式(42)を，次式のように書き，有限要素 Navier-Stokes 方程式とよぶことにする．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = \bar{\mathbf{f}} \tag{43}$$

式(43)は 式(1)に対応するものであり，式(43)を，上述した2段階積分法の前半部の解式 (式(5))および後半部の解式 (式(8)) に適用して，有限要素N-S方程式の解法を構成することができる．

式(5)および 式(8)に導入されているパラメータの内，κ_1，κ_2 については $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ として，κ と s の値については，式(21)と (23), 式(26)と (27), 式(28)と (29), のそれぞれの組み合わせを採用するとき，積分法 I，II，IIIのそれぞれに対応することになる．

以下に，積分法 I，II，IIIを適用して得られる解析結果を，一般に広く採用されている Crank-Nicolson 法を適用して得られる結果と対比して，時間増分のとり方，要素分割の仕方，非線形項の扱いの影響など，実際の解析に伴う基本的な要因が，それぞれの時間積分法に固有の特性のもとで，解析結果に及ぼす影響について議論し，ここに提案する積分法の完成度を検証する．

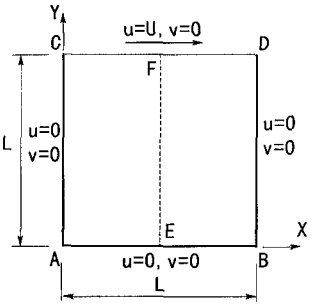


図-6 解析対象

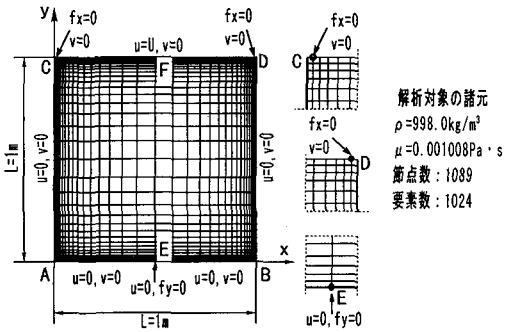


図-7 要素分割と境界条件

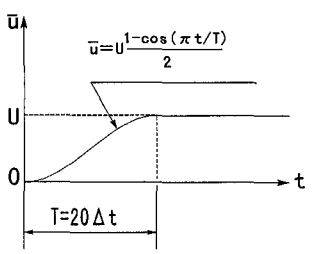


図-8 初期条件を設定する際の立ち上げ方

5. 正方形キャビティ内を循環する流れの問題を対象とする検討

(1) 解析対象と前提として踏まえた諸条件

対象とする問題は，図-6に示すような，正方形領域を囲む 3つの壁面(A-B, A-C, B-D)上の流速を固定し，上辺(C-D)を一定速度 U で運動させることによって，領域内に循環流が形成される問題である．隅点(C, D)における条件に対する対処の仕方や圧力の基準に関わる条件の設定の仕方に関しては，議論の余地が残る[20]が，解法そのものに矛盾がないかぎり，ある程度の要素分割とそれなりに小さな時間増分のもとで解析を行うことによって，容易に妥当な解を得ることができるものである．単純な境界形状を有する基礎的な問題として，古くから解析法を検証するための対象とされ，多くの数値例が報告されてきている[21)~25)]．

解法に採られる，時間積分法に固有の特性 H(Z)，$Z = \omega \cdot \Delta t$ が解析結果に及ぼす影響は，要素分割の仕方(系を構成する ω の分布に対応する) および時間増分 Δt のとり方に依存するが，ここでは，図-7に示した要素分割を採用し，境界条件および粘性係数μ，密度ρ などの諸値は，要素図の中に示したように与えるものとして，Δt のとり方の違いで，積分法の特性に関わる条件の違いを代表させる．

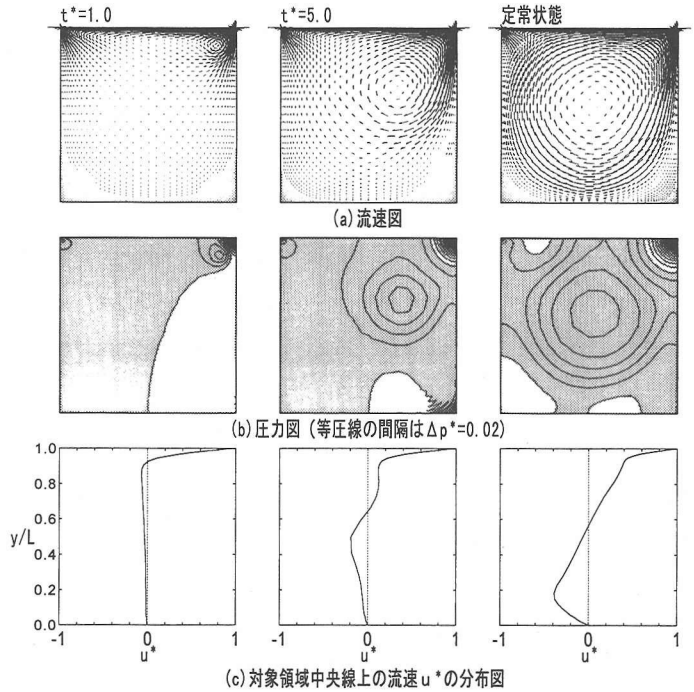


図-９　時間とともに流況が変化する様子(Re=1000)

正方形領域の１辺の長さＬを基準として，Reynolds数Re(= U·L / (μ / ρ)) = 1,000 の場合を対象とするが，まず，連続の条件を満たす初期条件を次のように設定する．すなわち，上辺の流速を，小さな時間増分（無次元時間 t^*(= t / (L / U)) に関する時間増分 $\Delta t^* = 0.005$）のもとで，静止した状態から所定の速度Ｕまで，図-８に示すように，20 ステップで滑らかに立ち上げ，得られた流速および圧力の分布を初期条件とする．したがって，以下に示す解析結果における経過時間などの時間は，この時刻を基準とする時間である．

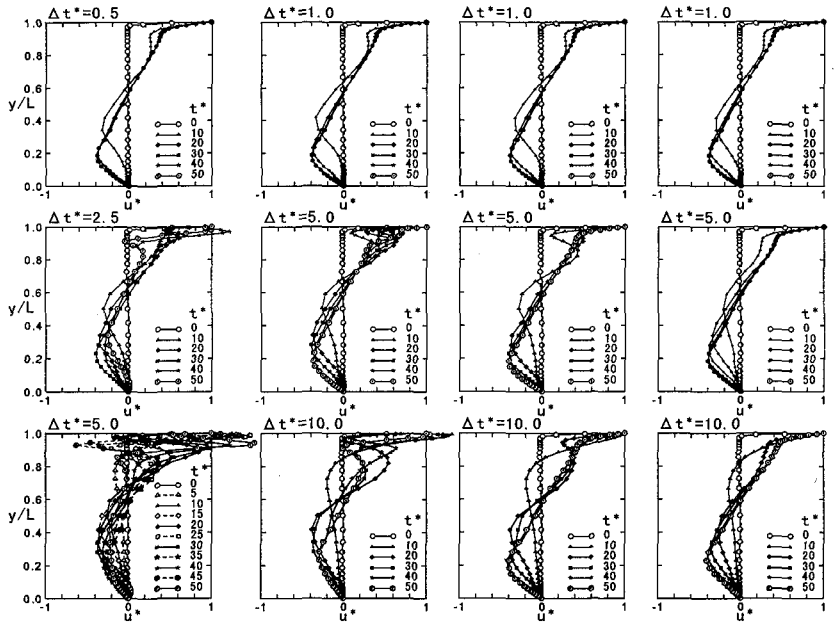
（２）時間増分のとり方が解析結果に及ぼす影響

提案する積分法Ⅰ,Ⅱ,Ⅲのそれぞれ，および Crank-Nicolson 法に基づいて構成した解法によって，時間増分を $\Delta t^* = 0.1$，Crank-Nicolson 法に関しては $\Delta t^* = 0.05$，にとって解析して得られた，時間とともに流況が変化する様子を，流速図，圧力図（領域下辺中央の Ｅ点を基準(p = 0) として，無次元圧力 p^* (= p / (ρ·U²)) で描いた等圧力線図）および対象領域の中央線（図-６におけるE-F)上の，ｘ方向の流速（無次元流速 u^*(= u / U)) の分布図として示したものが，図-９である．時間増分が小さい場合には，解法に踏まえている積分法の違いによらず同じ結果が得られるので，図は１つだけにしている．

時間増分 Δt^* を 1.0，5.0，10.0 の ３種類の大きさにとり，対象としている解法のそれぞれによって解析した結果における，対象領域の中央線上の流速 u^* の分布の時間変化を比較して，図-10 に示す．なお，提案する積分法は２段階の解法であるため，Crank-Nicolson 法に基づく解法による場合には，時間増分を設定値の半分にとって解析した結果を比較の対象としている．図-10 における，$\Delta t^* = 10.0$ に相当する Crank-Nicolson 法の結果には，このことに対応して得られた $\Delta t^* = 5.0$ 刻みの結果も併せて記入している．

図中に，結果のそれぞれに対応する経過時間を記入しているが，時間増分を大きくとるにしたがって，解法に踏まえている時間積分法の特性の違いが，解析結果に大きく影響するようになることが分かる．特に，時間増分 $\Delta t^* = 10.0$ の場合においては，Crank-Nicolson 法および積分法Ⅰ(特性は，Calahan のスキームに対応する）に基づく解法によって得られた解析結果の，上辺に隣接する節点の流速に，上辺に与えた流速 Ｕを越える流速が現れている．

対流項に対応する非線形項 (式(42))における $\tilde{\mathbf{K}}_u(u)$) の扱い方は，結果に影響する大きな要因となるが，ここでは，時刻 ｔから ｔ+Δｔへの積分計算に用いる係数マトリックスに，時刻 ｔにおいて得られた流速によって評価される対流項をとり込んで，積分漸化計算を進める方法をとっている．



(a) Crank-Nicolson 法　(b) 積分法 I　(c) 積分法 II　(d) 積分法 III

図-10　時間増分の取り方に関する解析結果の比較（対象領域中央線上の流速 u^* の分布）

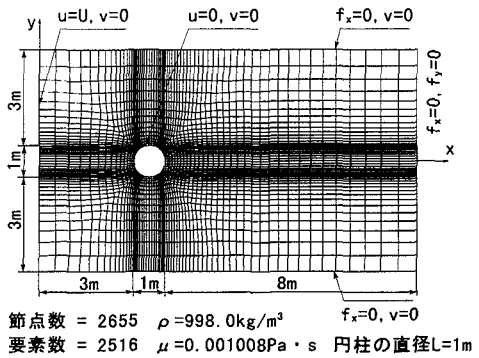


図-11 要素分割および解析に踏まえた諸条件

時間増分 Δt^* を 10.0 にとり，Crank-Nicolson 法および積分法 I に基づく解法によって，この先の計算を続けた場合には，解が発散してしまう．このことは，上述のような非線形項の評価法をとる限り，基礎とする積分法が無条件に安定なものであっても，非線形解析においては，安定ではなくなる場合があることを示している．

ここで対象としている問題は，正方形領域内の，定常解に向かう，簡単なものであり，この問題に対しての $\Delta t^* = 10.0$ は，並外れて大きな時間増分と認識される．しかし，通常対象とすることになる問題は，これに比べれば，相当に大規模なものである．対象が大規模になればなる程，系の固有値の幅が限りなく大きくなり，必然的に，Z ($= \omega \cdot \Delta t$) の大きな領域の評価特性が，解析結果に影響を及ぼすことになる．

積分法の特性に，Z が小さい領域の評価精度を確保して，$Z \to \infty$ で $H \to 0$ となる条件を課して構成された，提案する積分法 II および積分法 III の意義は，明らかである．

6．円柱背後に周期的に発生する Kármán 渦を対象とする解析

(1) 解析対象および踏まえた諸条件

一様流れの中に置かれた円柱の背後に，周期的に発生する Kármán 渦を対象とする．解析に用いた要素分割および境界条件を，図-11 に示す．物性値などの諸元は，図中に示したとおりである．

解析対象領域の幅に対して，円柱の直径が 1/7 という大きな領域を占めるが，図-11 中に明記したように，領域の上下の辺に課す境界条件は，$f_x = 0$，$v = 0$ である．したがって，解析によって得られる，対応する辺上の流速 u は，平均流速に近い値をとるものである．

ここでは、対象領域の左辺に与えた x 方向の流速 U および円柱の直径 L を基準として，Reynolds 数 $Re = 100$ の場合を対象とする．

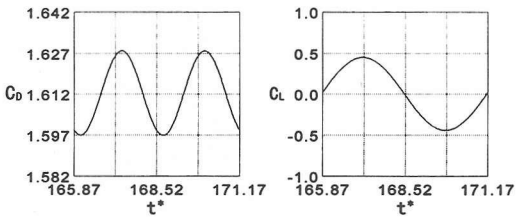


図-12　抗力係数および揚力係数の時間変動

（2）提案する積分法Ⅱによる，小さな時間増分もとでの解析結果

解析対象は，Re＝100 の遅い流れである．この場合には，小さな時間増分のもとで解析する限り，積分法の如何によらず，概ね妥当な解が得られる．

提案する積分法Ⅱに基づいて構成された解法によって得られた，円柱背後の，渦の発生，移動にともなって変化する解が，安定な周期性を保つようになった状態における，抗力係数 C_D および揚力係数 C_L の時間変動を，図-12 に示す．静止した状態を初期条件として，大きな時間増分で解析し，周期的に変動する解に達した後，無次元時間に関する時間増分 $\Delta t^* = 0.02$ のもとで解析を継続して，得られた結果である．図中に記入した時間 t^* は，経過時間である．抗力および揚力は，円柱周上の節点の反力に基づいて評価している．

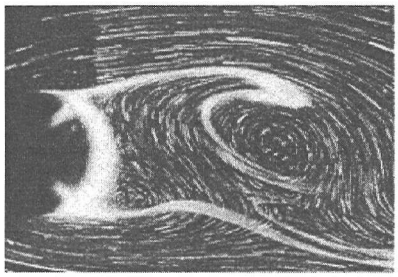
この時間領域における，C_D の平均値は 1.612，C_L の極大値は 0.446 であり，Strouhal 数 S_t は 0.189 である．

図-13 は Taneda によって可視化された Re＝100 の場合の流況[26]（図-(a)）と，解析によって得られた対応する流速分布（図-(b)）を，比較して示したものである．解析領域に課した境界条件の影響などが判別できるように，図-(c) に対象領域全体の流速図を示し，図中に，図-(b)に対応する領域を記した．

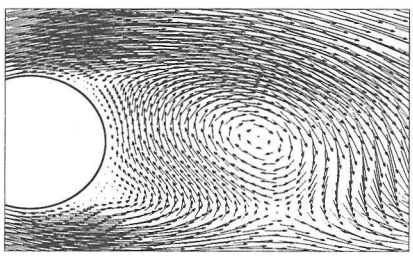
揚力が，上向きの最大値，0 および下向きの最大値をとる時点における，解析によって得られた流速および圧力の分布を，図-14 に示した．

この解析で基礎としている主題の積分法は，陰的な2段階の解法であるが，積分計算の前半部と後半部に要する係数マトリックスは完全に同じものである．したがって，後半部は，前進縮約および後退代入計算だけで計算を進めることができるものである．

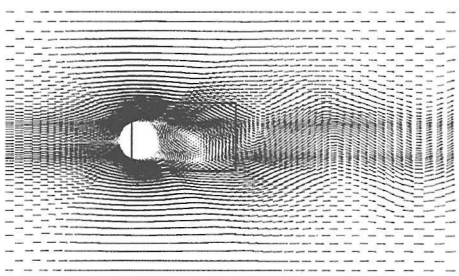
要する計算時間は，未知変数ベクトルにおける，**u**，**v** に対する **p** の配置などに関わる，係数マトリックスの構造の最適化，プログラミングに採られる技巧，使用するコンピュータのアーキテクチャなど，多くの要因の影響を受ける．したがって，一般性があるものではないが



(a) Taneda によって可視化された流況(Re=100)[26]



(b) 提案する積分法Ⅱによる解析結果(Re=100)



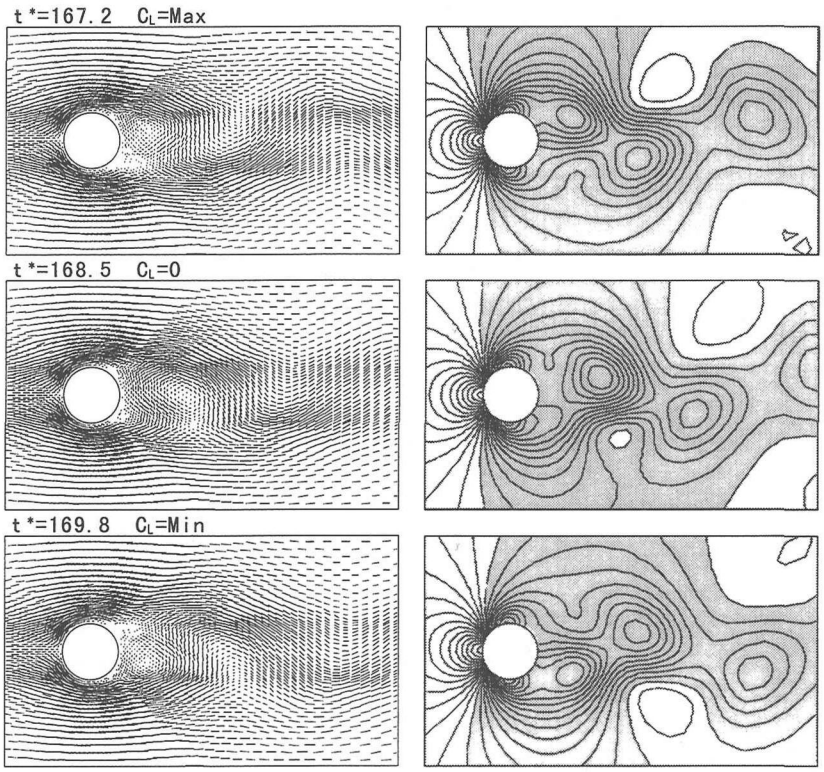
(c) 解析によって得られた対象領域全体の流速図

図-13　Taneda によって可視化された流況[26]と解析結果との比較（ Re＝100 ）

表-1　積分計算の前半部と後半部に要した計算時間

	係数マトリックスの作成	LDU 分解	前進縮約後退代入計算
前半部の計算（秒）	53.8	32.3	2.2
後半部の計算（秒）	—	—	2.2

参考のために，この解析における積分計算（1 step）の前半部と後半部に要した計算時間を，表-1 に示す．用いたコンピュータは，東工大情報センターの CRAY C916 である．この場合には，後半部の計算に要した計算時間は，前半部の計算に要した計算時間の，約 2.5％である．



(a) 流速図　　(b) 圧力分布（等圧線の間隔は $\Delta p^* = 0.05$）

図-14　揚力が，上向きの最大値，0，下向きの最大値をとる時点の流速および圧力分布

(3) 時間増分の大きさに対応して，積分法の特性が解に及ぼす影響

時間増分を大きくとった場合に，解法の基礎とする時間積分法の特性の違いが，得られる解にどのように影響するかを知るために，規則的な周期的変動を繰り返す揚力が0となる時点における，小さな時間増分のもとで得られた解を初期条件として，時間増分のとり方を変えて解析した結果を示す．すなわち，揚力の変動周期 T^* に対して，時間増分を，$\Delta t^* = (1/32)\cdot T^*$ にとり，提案する積分法Ⅰ，Ⅱ，Ⅲのそれぞれによって解析して得られた，抗力係数および揚力係数の時間変動を，小さな時間増分，（$\Delta t^* \cong (1/250)\cdot T^*$）のもとでの解析結果と比較したものが，図-15 である．揚力が1/2周期，変動する間の流速および圧力の変化を図-14 に示したが，この揚力の半周期が抗力の変動周期に相当する．このような，現象の大きな変化を伴う，抗力の1周期あたりの積分区間の数が 16 であり，相当大きな時間増分で解析していることになる．

図-15 に示した解においては，積分法の如何によらず，時間増分を大きくとることが，抗力，揚力を大きく評価する結果につながっている．渦の発生，移動などの現象の変化に対応する解は，対流項 $\tilde{\mathbf{K}}_u(u)$ の評価法に大きく依存するので，この特徴は，この解法で採っている，前述の，対流項の評価の仕方が相当に影響した結果である．

積分法ⅠおよびⅡによって得られた結果と積分法Ⅲによる結果では，抗力，揚力の大きさや周期の伸びに見られる，特徴が大きく異なっている．この違いは，図-5に示した，積分法ⅠおよびⅡの特性と積分法Ⅲの特性に関わる評価誤差が，正解 $\exp(-Z)$ を挟んで，正と負に別れることに起因しているものと考えられる．

積分法Ⅰによる結果と積分法Ⅱによる結果との間には，大きな差異は見られない．このことは，$Z(=\omega\cdot\Delta t)$ の小さな領域における，積分法ⅠとⅡの特性が非常に近いことから判断して，ここで対象としている現象が，$Re = 100$ の遅い流れであるために，ここで採った時間増分のもとでの解が，大勢において，Z の小さな領域に相当する評価で，決まっているためであると考えられる．

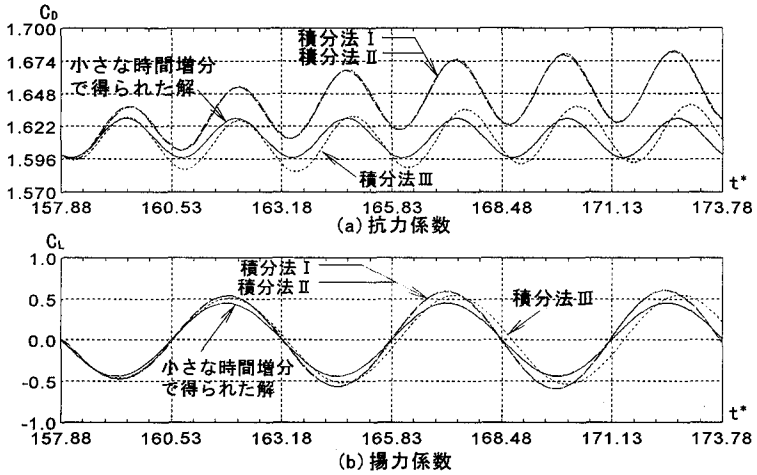


図-15　時間増分のとり方が，得られる解に及ぼす影響

7．おわりに

以上に，時間に関する１階の連立常微分方程式を対象とする逐次積分計算に際して，特に大規模な問題の解析において，必然的に遭遇することになる問題点を克服するために，解析対象系の極めて大きな固有値に対応する評価特性を抜本的に改良した，陰的２段階直接時間積分法を提案した．その上で，これを Navier-Stokes 有限要素方程式に適用して解法を構成し，その実効性を検証した．

ここに提案した積分法は，連立１次方程式の求解過程を必要とする，陰的な解法であるが，逐次積分計算に要する係数マトリックスの構造は，対象とする原系の係数マトリックスと同じ構造であり，その記憶法に関する，プログラム上の利点を損なうことはない．また，２段階の解法であるが，積分計算における前半部と後半部における係数マトリックスは，完全に同じものとなり，後半部は，前進縮約，後退代入計算だけで計算を進めることができるので，要する付加的な計算時間は，ごく僅かなものである．

この積分法は，時間増分の小さな領域における評価精度を確保した上で，時間増分の極めて大きな領域における評価精度を根本的に改善したものである．自己出発型であり，パラメータの選択によって，いくつかの異なった特性を実現することができるなど，汎用性も併せて備えている．

特に非線形解析においては，非線形項の評価過程に，解の信頼度が大きく影響を及ぼし，解析を困難にする場合が多い．非線形現象を対象とする解析システムの完成度の向上に，ここに提案した積分法が大きく貢献し得るものと判断している．

参考文献

1) Calahan, D.A. : *Computer-Aided Network Design* (Revised Edition), Chap. 9: Advanced Numerical Techniques in Transient Analysis, McGraw-Hill, Inc., pp. 217-257, 1972.
2) Lapidus, L. and Seinfeld, J.H. : *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chap. 6: Numerical Integration of Stiff Ordinary Differential Equations, Academic Press, Inc., pp. 267-293, 1971.
3) Fried, I. : *Numerical Solution of Differential Equations*, Chap. 8: Equation of Heat Transfer, Academic Press, Inc., pp. 158-192, 1979.
4) Hughes, T.J.R. : *The Finite Element Method*, Chap. 8: Algorithms for Parabolic Problems, Prentice-Hall, Inc., pp. 459-489, 1987.
5) Zienkiewicz, O.C. and Lewis, R.W. : An Analysis of Various Time-Stepping Schemes for Initial Value Problems, *Int. J. Earthq. Engng. Struct. Dyn.*, vol. 1, pp. 407-408, 1973.
6) Trujillo, D.M. : The Direct Numerical Integration of Linear Matrix Differential Equations Using Padé Approximations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 9, pp. 259-270, 1975.
7) Wood, W.L. and Lewis, R.W. : A Comparison of Time Marching Schemes for the Transient Heat Conduction Equation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 9, pp. 679-689, 1975.
8) Hogge, M.A. : Integration Operators for First Order Linear Matrix Differential Equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 11, pp. 281-294, 1977.
9) Argyris, J.H., Vaz, L.E. and Willam, K.J. : Higher Order Methods for Transient Diffusion Analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 12, pp. 243-278, 1977.

10) 吉田 裕, 藤原 亨, 野村卓史：熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム, 土木学会論文報告集, 第313号, pp. 23-36, 1981.
11) 吉田 裕, 魚地征一郎, 榎 裕二：熱伝導型方程式を対象とする2段階高精度直接時間積分法, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第18巻, pp. 307-312, 1994.
12) 吉田 裕, 袁 文平, 岩崎宏和：熱流体有限要素方程式を対象とする陰的2段階直接時間積分法, 日本応用数理学会平成8年度年会講演予稿集, pp. 228-229, 1996.
13) Calahan, D.A. : A Stable, Accurate Method of Numerical Integration for Nonlinear Systems, *Proc. IEEE*, vol. 56, p. 744, 1968.
14) Zienkiewicz, O.C. : *The Finite Element Method* (3rd edn.), Chap. 22 : Flow of Viscous Fluids , Some Special Problems of Convective Transport, pp. 607-644, 1977.
15) Norrie, D.H. and de Vries, G. : A Survey of the Finite Element Applications in Fluid Mechanics, *Finite Elements in Fluids* (eds. R.H. Gallagher, et al.), vol. 3, Chap. 21, John Wiley and Sons, pp. 363-396, 1978.
16) 川原睦人：有限要素法流体解析, 日科技連出版社, 1985.
17) 吉田 裕：有限要素法による流れ解析の基礎, 有限要素法の基礎(矢川元基 他編), 第6章, 朝倉書店, pp. 127-147, 1994.
18) Yoshida, Y. and Nomura, T. : A Transient Solution Method for the Finite Element Incompressible Navier-Stokes Equations, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 5, pp. 873-890, 1985.
19) 吉田 裕, 野村卓史, 菅野良一：非定常非圧縮粘性流れの有限要素方程式の解法, 土木学会論文集, 第351号／II-2, pp. 59-68, 1984.
20) 吉田 裕, 野村卓史：矩形キャビティ内流れ問題の解析における境界条件に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第342号, pp. 125-134, 1984.
21) Burggraf, O.R. : Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows, *J. Fluid Mech.*, vol. 24, pp. 113-151, 1966.
22) Bozeman, J.D. and Dalton, C. : Numerical Study of Viscous Flow in a Cavity, *J. Comp. Phys.*, vol. 12, pp. 348-363, 1973.
23) Tuann, S.Y. and Olson, M.D. : Review of Computing Methods for Recirculating Flows, *J. Comp. Phys.*, vol. 29, pp. 1-19, 1978.
24) Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Brooks, A. : Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation, *J. Comp. Phys.*, vol. 30, pp. 1-60, 1979.
25) Lee, R.L., Gresho, P.M. and Sani, R.L. : Smoothing Techniques for Certain Primitive Variable Solutions of the Navier-Stokes Equations, *Int. J. for Numer. Meth. In Engng.*, vol. 14,pp. 1785-1804, 1979.
26) Taneda, S. : Flow Visualization, *Recent Studies on TURBULENT PHENOMENA*(edit. by T. Tatsumi, H. Maruo and H. Takami), Association for Science Documents Information, pp. 1-23, 1985.

(1997. 4. 14 受付)

A FAMILY OF HIGHLY ACCURATE SUPERSTABLE TIME INTEGRATION ALGORITHMS OF IMPLICIT TWO STEP AND THEIR APPLICATION TO SOLUTION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

Yutaka YOSHIDA, Wen-Ping YUAN and Seiichiro UOCHI

Many physical systems give rise to large systems of simultaneous ordinary differential equations, the magnitudes of the eigenvalues of which vary greatly. The problem associated with such systems referred as stiff present the most serious numerical stability and accuracy problems, especially in the nonlinear systems.

A family of implicit two step time integration algorithms are presented in this paper. They are unconditionally stable and highly advanced for stiff systems where it is necessary to require accuracy for both large and small eigenvalues. Numerical examples relate to Navier-Stokes equations are shown to illustrate the features of the method. An ultimate basis for comparison is accuracy.