

固体一流体混合体の均質化理論における 漸近挙動としての粘弾性構成則

寺田賢二郎¹・伊東孝²・菊池昇³

¹ 正会員 Ph.D 東北大学講師 工学部土木工学科 (〒980-8579 仙台市青葉区)

² 正会員 工博 豊田工業高等専門学校助教授 環境都市工学科 (〒471-0067 愛知県豊田市)

³ Ph.D ミシガン大学教授 工学部機械工学及び応用力学科 (Ann Arbor, MI48109, USA)

本論文では、固体と液体からなる混合体に対して均質化法を適用し、微視的な力学パラメータを設定することによって、粘弾性体の力学挙動が漸近挙動として得られることを示す。微視的なスケールにおける方程式の解が全体構造物の漸近挙動を支配する特性を表わすことから、既存の粘弾性力学理論の微視的スケールでの物理的および力学的考察が可能となることに加えて、粘弾性体に対する初期値・境界値問題における初期条件を数学的に矛盾なく導出することができる。したがって、この種の混合体の粘弾性力学特性が、数値解析によるシミュレーションによって示され、工学問題に対する均質化法によるアプローチの適用性が示唆される。

Key Words: viscoelasticity, asymptotic behaviors, homogenization method, solid-fluid mixtures

1. はじめに

いわゆる土木材料の中には、異種の材料が微視的なレベルで混ざり合った、いわゆる混合体 (mixture) が多く存在し、その複雑な力学挙動は構造物の設計・解析を困難なものにしている。特に固体と液体からなる混合体とみなせる場合には、個々の構成要素の持つ構成関係が全く異なることに起因して、問題は更に深刻である。この場合、複合材料の力学におけるRVE法などの考え方^{1),2)}を拡張するだけでは不十分であり、体積比理論³⁾あるいは混合体理論⁴⁾などのマクロ的な力学的洞察をもってその力学特性を評価してきた。しかしながら、土木構造物の設計・解析における、混合体材料の力学特性の重要性を考えると、微視的なスケールでの力学挙動をその定式化に導入することが、内包される現実の物理現象を見間違えないために必要であるといえる。

70年代後半に急速な発展を見せた均質化理論^{5),6),7)}は、応用関数解析を基調とした純粋の数学理論であるが、定式化において扱う対象は物理の問題である場合が多く、特に力学の分野においては上述のような複雑な力学挙動に対する研究成果が数多く報告されている。しかしながら、それらは数学的な対象としての興味に終始する場合が多く、応用を重んじる工学においては、静的な線形弾性問題などのごく単純な場合⁸⁾を除いて、殆どの成果が応用されないままにある。特に固体と液体からなる混合体の、材料としての工学的な

重要性からも、その均質化法の工学的応用を検討する価値は十分にあると考えられる。

勿論、固体-液体混合体のための均質化法の理論は、数学的には完結した議論^{9),10),11)}である。とくに構成材料に対して構成則を与える際の漸近展開形の取り方についての特徴は、この特殊な混合体を典型例として紹介されており、著者らが文献¹²⁾で示した定式化はその一例でもある。しかし、そのような漸近展開形の取り方の物理的意味や、得られる均質化された方程式が工学的あるいは力学的にどのような意味を持つのかなどを明確にした記述は皆無であり、工学分野においてその適用を図るためにまだ検討すべき問題が数多く存在する。特に、構造物の設計を考えれば、当然数値解析による検証の必要性は免れず、そのためには初期および境界条件を含む離散化可能な式として与えておくことが必須である。そのような議論のなかで、古典的なあるいは従来の力学の枠組みで通常使われてきた力学・数学モデルに対して、微視構造を陽に考慮することのできる均質化法が新たな解釈を与えることは確かである。

本研究では、液体の粘性が大きな役割を果たす固体-液体の混合体の準静的な変形に対して均質化法を適用することで、漸近挙動として得られる初期値・境界値問題の支配方程式を導き、工学的な考察を加える。文献¹²⁾での定式が、Biot¹³⁾の導いた3次元線形圧密方程式であったのに対して、本論文での漸近展開の取り方は線形粘弾性体のための方程式を与えることを示

すとともに、その力学的な意味付けを行う。また、均質化法の理論の枠組みにおいて既存の粘弾性体の力学理論にマイクロメカニクス的な解釈を与えるとともに、力学的に妥当な初期条件を設定できることを示す。後に示す数値解析においては、これらの考察を踏まえながら、幾つかの数値シミュレーションを示すことで、工学的な応用のための技術的な側面を議論するとともにその適用性も検討する。

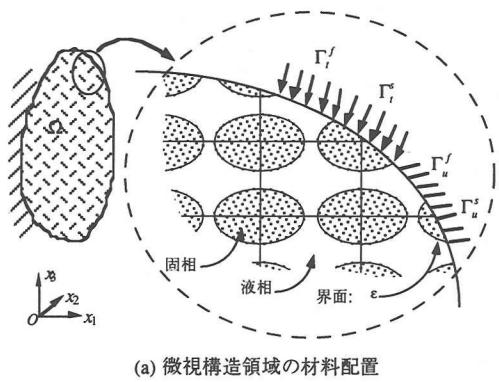
2. 固体一液体の混合体の均質化法

ここでは、微視構造内に固体と液体が共存するような混合体に対して均質化法を適用することで、全体構造物のための初期値・境界値問題の支配方程式を導出する。均質化法の数学的理論としては、ほとんど自明な結論を示すことになるが、工学分野においてその力学的考察は試みられたことがなく、数値解析可能なレベルまでかみ砕いた定式化を行った例もない。文献12)の結果同様、ここでの議論には均質化法の定式化に力学的な視点を付加することになるが、この種の漸近挙動を調べるのに特に重要な、漸近展開における「パラメータ」の役割に焦点を当てることにする。

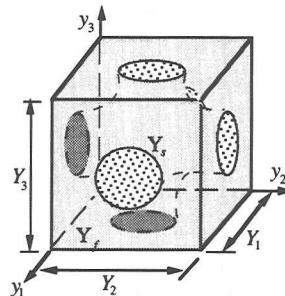
(1) 漸近挙動

固体と液体からなる混合材料を考え、それぞれの相は幾何学的な分布が知れているものとする。いま、その混合体の全体構造として、3次元空間内の領域 Ω^e を占め、なめらかな境界 $\partial\Omega^e$ を持つようなものを考える。このとき、材料を代表する構造の単位は周期的に広がっており、全体構造物に比べて非常に小さい、すなわち微小であると仮定する。この代表体積要素(Representative Volume Element; RVE)の代表長さを l とし、全体構造物のそれを L とおくと、全体構造と微視構造の相対的な比 $\varepsilon = l/L$ が定義できる。これを用いて混合体の領域をあらためて Ω^ε と書いておくとともに、微視的な不均質性を表すために今後 Ω^ε 内の変数に対しても添字 ε を付けて表記することにする(図-1参照)。

さて今、 $y = x/\varepsilon$ となるようなスケール y を微視構造領域 Y に対して導入すると、全体構造についてのスケール x と同等の精度で Y 内の変数の微小な変化に対応することができるようになる。ここでは便宜的に y を微視的スケール、 x を巨視的スケールと呼ぶことにする。考える混合体の微視構造は周期的な繰り返しによって全体を構成できることから、この1単位はユニットセルと呼ばれており、一辺が εY_i ($i=1,2,3$)であるような代表体積要素は力学的にも妥当な境界条件を有することになる(図-1(b))。また、ユニットセルあるいは



(a) 微視構造領域の材料配置



(b) ユニットセル

図-1 混合体の周期的な微視構造とユニットセル

RVE領域 Y の幾何性状およびそこで定義される変数がスケール y に関して周期的であることを Y -periodicであると言うこととする。こうして、我々が考えている力学の問題を支配する方程式の Y -periodicな変数は、この2変数 x と y を用いて表されることになる。

このような前提のもとに、均質化法に利用される2変数表示による漸近展開法は、ユニットセル(微視構造の1単位)の全体構造物に対する相対的な大きさ ε をパラメータに据る未知変数の漸近展開形を用い、各オーダーの応答を分離することでその力学挙動を知ろうとするものである。均質化法の数学理論では、そのパラメータ ε の極限をとることによって得られる支配方程式を、その力学挙動と同一視して漸近挙動と呼んでいる。

(2) 支配方程式

固体一液体混合体からなる全体構造物が静的なつり合い状態にあるとき、平衡方程式は

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + \rho^\varepsilon f_i = 0 \quad \text{in } \Omega^\varepsilon \quad (1)$$

で与えられ、一般的な境界条件、

$$u_i^\varepsilon = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^{\epsilon} n_j = \hat{t}_i \text{ on } \Gamma, \quad (3)$$

と次に述べる構成式とともに境界値問題の支配方程式を構成することができる。ここで、 σ_{ij}^{ϵ} は真応力、 $\rho^{\epsilon} f_i$ は ρ^{ϵ} を密度としたときの物体力、 \hat{t}_i は変位境界 Γ_u に与えられる強制変位、 \hat{t}_i は応力境界 Γ_f に作用する表面力である。こうして定義できる境界値問題は静的なつり合い問題とみなすことができ、次の構成式に関する仮定と併せて液体の流れは慣性項の影響が無視できる定常 Stokes 流を考えていることになる。

構成式を導入するために、混合体を構成する固体と液体についての次の仮定を設けることとする：

仮定 1：構成する固体部分は線形弾性体を仮定し、全ての部分が弾性的に結合している多孔質体とみなせる。

仮定 2：液体は、単一の圧縮性 Newton 流体からなり、熱力学的な影響は無視できる。

ここで圧縮性 Newton 流体としたのは、後の数値解析を容易にするためのものであり、定式化の本質に制限を加えるものではないことを断っておく。また、固相と液相のそれぞれが占める領域をそれぞれ Ω_s^{ϵ} 、 Ω_f^{ϵ} とし、そこで定義される変数を固相と液相とで区別したい場合には添字 s と f を付けて表示するものとする。こうして固体および液体のそれぞれの応力 (σ_{ij}^{ϵ} と $\sigma_{ij}^{f\epsilon}$) と変形との関係式は、次の单式で表すことができる：

$$\sigma_{ij}^{\epsilon}(x) = b_{ijkh}^{\epsilon}(x)\varepsilon_{kh}(u^{\epsilon}) + c_{ijkh}^{\epsilon}(x)\varepsilon_{kh}\left(\frac{\partial u^{\epsilon}}{\partial t}\right) \quad (4)$$

ここで、

$$b_{ijkh}^{\epsilon}(x) = \begin{cases} E_{ijkh}(x) & \text{in } \Omega_s^{\epsilon} \\ \frac{1}{3} K^f \delta_{ij} \delta_{kh} & \text{in } \Omega_f^{\epsilon} \end{cases} \quad (5)$$

$$c_{ijkh}^{\epsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_s^{\epsilon} \\ 2\mu^{\epsilon} \left(\delta_{ik} \delta_{jh} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kh} \right) & \text{in } \Omega_f^{\epsilon} \end{cases} \quad (6)$$

であるが、式中の定数および変数についての説明は以下で行う。

ε_{kh} は固体あるいは液体の変位ベクトルであり、 ε_{kh} は x に関する勾配の対象成分をつくる微分演算子として捉え、 $\varepsilon_{kh}(u^{\epsilon})$ の場合、

$$\varepsilon_{kh}(u^{\epsilon}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{\epsilon}}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^{\epsilon}}{\partial x_k} \right) \quad (7)$$

という微小ひずみを表す。また、 μ^{ϵ} は液体の粘性係数、 δ_{ij} は Kronecker デルタ・シンボルであり、 K^f は体積弾

性係数であるが、圧力を p^{ϵ} 、音速を c としたとき

$$c^2 \rho^f = -\frac{1}{3} K^f \quad (8)$$

$$p^{\epsilon} = c^2 \rho^f \delta_{kh} \varepsilon_{kh}(u^{\epsilon}) \quad (9)$$

なる関係にあることが知られている^{14),15)}。一方、 E_{ijkh} は次の正値対称性を満たす弾性係数テンソルである：

$$E_{ijkh} = E_{jikh} = E_{jihk} = E_{khij} \quad (10)$$

$$E_{ijkh} \varepsilon_{ij}(u^{\epsilon}) \varepsilon_{kh}(u^{\epsilon}) \geq \alpha \varepsilon_{ij}(u^{\epsilon}) \varepsilon_{ij}(u^{\epsilon}) \quad \forall \alpha > 0 \quad (11)$$

これらの材料定数は Y 内では断片的な定数となるが、変位などの変数と同じく Y -periodic な関数である。

このようにして、考えているつり合い問題の弱形式表現は、

$$\begin{aligned} b^{\epsilon}(u^{\epsilon}, w^{\epsilon}) + c^{\epsilon}\left(\frac{\partial u^{\epsilon}}{\partial t}, w^{\epsilon}\right) \\ = \int_{\Omega^{\epsilon}} \rho^{\epsilon} f \cdot w^{\epsilon} dx + \int_{\Gamma_f} \hat{t} \cdot w^{\epsilon} ds \quad \forall w^{\epsilon} \in V \end{aligned} \quad (12)$$

と書き表される。ここで、 $w^{\epsilon} \in V$ は、齊次の幾何学的境界条件を満たす許容関数であり、双一次形式

$$\begin{cases} b^{\epsilon}(u^{\epsilon}, w^{\epsilon}) = \int_{\Omega^{\epsilon}} b_{ijkh}^{\epsilon} \varepsilon_{ij}(u^{\epsilon}) \varepsilon_{kh}(w^{\epsilon}) dx \\ c^{\epsilon}(u^{\epsilon}, w^{\epsilon}) = \int_{\Omega^{\epsilon}} c_{ijkh}^{\epsilon} \varepsilon_{ij}(u^{\epsilon}) \varepsilon_{kh}(w^{\epsilon}) dx \end{cases} \quad (13)$$

は、ノルム

$$\|v^{\epsilon}\|_V^2 = \int_{\Omega^{\epsilon}} \varepsilon_{ij}(v^{\epsilon}) \varepsilon_{ij}(v^{\epsilon}) dx \quad (14)$$

について完備な関数空間 $H^1(\Omega^{\epsilon})$ の部分空間、

$$V = \left\{ v \mid v \in H^1(\Omega^{\epsilon}), v|_{\Gamma_u} = 0 \right\} \quad (15)$$

において定義されている。ただし、この二つの双一次形式は単独では強圧的 (coercive) ではないが、その和はそうであることを $\mu^{\epsilon} > 0$ および式 (10) と (11) から示すことができ、このことは式 (12) を固相と液相について同時に（つまり連成させて）解くことを要請するものである^{14),15)}。勿論、固体と液体の界面 Σ^{ϵ} でも適合条件が成り立っているが、今の場合式 (12) 中には陽には現れない。

ここまで定式化は、著者らの文献 12) におけるものと本質的に同じであるが、材料定数の大きさの設定によって得られる漸近挙動は全く異なるものになり得る¹⁶⁾。次節に述べるように、この設定は先に導入したパラメータ ϵ を介して行われるので、漸近展開法による均質化理論と力学との密接な関係が明示されることになる。

(3) 2変数表示による漸近展開とパラメータ

固相についての変位関数の漸近展開は、

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t) &= \underline{u}_i(\mathbf{x}, t) \\ &= \underline{u}_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \dot{u}_i^1(\mathbf{x}, y, t) + \varepsilon \dot{u}_i^2(\mathbf{x}, y, t) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

として問題はないが、液体はその流れによって固相に對してせん断力を作用し得るので注意が必要である。本節では、このパラメータ ε の役割を力学的観点から述べることにする。

文献 12)において著者らは、固相と流相との界面の力学的な相互作用に関して次の仮定を設けた：

液体の粘性の影響は小さく、巨視的にみると液体が接触面を通して固体に粘性の作用によって生じるせん断力は無視できる。

そこでは、巨視的にみると粘性項における不均質性の影響が漸近的に消散すべきであるので $\mu^\varepsilon = \varepsilon^2 \mu$ として定式化を進めた。これによって、流体の RVE 内での速度の漸近展開形は、

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t) &= \dot{\underline{u}}_i(\mathbf{x}, y, t) \\ &= \underline{\dot{u}}_i^\varepsilon(\mathbf{x}, y, t) + \varepsilon \dot{u}_i^1(\mathbf{x}, y, t) + \varepsilon \dot{u}_i^2(\mathbf{x}, y, t) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

となることが示された。これはつまり、 ε の零次のオーダーの流速（下線部）が x と y 両方の関数となり、流速が漸近的にも RVE 内で分布することを意味する。これに対して、

仮定 3：液体の粘性の影響は比較的大きく、巨視的にみても液体は粘性の作用によって接触面を通して固体にせん断力を伝える。

と仮定する。これは、全体構造と微視構造の代表長さがそれぞれ L と l で与えられるときの Reynolds 数をそれぞれ R_L , R_l とすると、 $R_L \approx \varepsilon^2 R_l$ として捉えられ、さらになる次元解析的な関係式、

$$\mu^\varepsilon \approx \frac{\rho_f^\varepsilon V L}{R_L} = \frac{[FT]}{R_L [L^2]} = \frac{[FT]}{\varepsilon^2 R_L [(l/\varepsilon)^2]} \approx \frac{\rho_f v l}{R_l} = \mu \quad (18)$$

を通して $\mu^\varepsilon = \mu$ と等価であることがわかる。つまり、巨視的にみて限りなく零に近い流れを想定していることになる。これらの考察から、流体の流速は固体（弹性体）の変位と同様に、

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t) &= \dot{\underline{u}}_i(\mathbf{x}, y, t) \\ &= \underline{\dot{u}}_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \dot{u}_i^1(\mathbf{x}, y, t) + \varepsilon \dot{u}_i^2(\mathbf{x}, y, t) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

と漸近展開されることが分かる。すなわち、流速の零次のオーダー（二重下線部）は y に無関係な、構造物の巨視的あるいは平均的な挙動を表すことになる。こ

のことは、液体の運動（あるいは変形）が固体と同オーダーであることを意味し、変形に際して RVE 境界からの液体の出入りが無いことを要請するものもある。したがって、この定式化では質量保存を考慮する必要がなく、固体とまったく同じ手続きで均質化を行うことができる。ただし、固体と液体の構成式は全く異なるものであり、前者の応力はひずみに比例し、後者はひずみ速度に比例する。ここに、この連成力学挙動の特徴があるのであり、定式化上も困難が生じてくる。

以上より、 ε は微視構造の相対的な大きさを表すだけでなく、漸近挙動としての力学挙動をも左右する重要なパラメータであると言える。Babuska^{17), 18)} は、このパラメータが物理現象と密接な関わりを持つことを最初に主張し、その役割になぞって「効果パラメータ（effective parameter）」と呼んだ。ただし、これは数学的な意味あいよりむしろ完全に物理的、とくに力学的な洞察によって設定されるべきものである。

(4) 均質化方程式—混合体の漸近挙動

以上の設定のもとに、実際の固体—液体の混合体の漸近挙動、すなわち均質化方程式を導くことにする。そのために、元の仮想仕事式 (12) に現れる任意関数 w_i^ε についても同様の漸近展開を行う。ただし、文献 12) では圧力についても漸近展開が施されたが、今の場合、式 (4) からも分かるように液体の応力は完全にその流速の漸近展開から導出できるので、この時点で漸近展開を施す必要はないことを注意しておく。また、2変数を用いていることによる導関数の連鎖則は、

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{\Omega'} := e_{ij}(\mathbf{v}) = e_{x,ij}(\mathbf{v}) + \frac{e_{y,ij}(\mathbf{v})}{\varepsilon} := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right)_{\Omega \times Y} \quad (20)$$

となり、ひずみなどの従属的な変数が漸近展開されることになる。すなわち、微小ひずみの漸近展開は、

$$e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = e_{ij}^0 + \varepsilon e_{ij}^1 + \dots \quad (21)$$

で与えられ、応力が $\mu^\varepsilon = \mu$ を考慮した構成式を通して

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}, y, t) = \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, y, t) + \varepsilon \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, y, t) + \dots \quad (22)$$

と展開できる。ここで用いたひずみの記号は、変位ベクトル u_i^I ($I=0, 1, \dots$ は ε のオーダー) に対して

$$e_{ij}^I = \frac{1}{2} (e_{x,ij}(u^I) + e_{x,ji}(u^I)) + \frac{1}{2} (e_{y,ij}(u^{I+1}) + e_{y,ji}(u^{I+1})) \quad (23)$$

などと定義してある。ただし、これらの展開形がはじめに独立な未知変数の漸近展開を出発点としていることと、構成式内の効果パラメータの介在が関与した結果であることを重ねて注意しておく。

これらすべての漸近展開形の変数を式(12)に代入すると、 ε^2 および、 ε^{-1} のオーダーは、 $u_i^0 = u_i^0(x)$ から自動的に満足されることが示される。また、高次の項は、最終的に漸近挙動として現れないで、ここでは零次のオーダーだけを書き下すと、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} \right) dx \\ & + \int_{\Omega} c_{ijkh} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} \right) dx \quad (24) \\ & = \int_{\Omega} \rho f_i w_i^0 dx + \int_{\Gamma_i} \hat{t}_i w_i^0 ds \quad \forall w_i^0 \in V, w_i^1 \in V \times V_Y \end{aligned}$$

である。ただし、ここで V_Y は局所周期性を満たす関数の空間で、

$$V_Y = \{v | v \in H_{loc}^1(\Omega), v; Y\text{-periodic}, \langle v \rangle = 0\} \quad (25)$$

と定義してあり、 $\langle \bullet \rangle$ は領域 Y 内における体積平均を表す。また、境界条件は、

$$\begin{cases} u_i^0 + \varepsilon u_i^1 = \hat{u}_i & \text{on } \Gamma_u \\ \sigma_{ij}^0 n_j = \hat{t}_i & \text{on } \Gamma_t \end{cases} \quad (26)$$

としておいて差し支えない。

さて、 w_i^1 は任意に設定できるので、式(24)において $w_i^1 = w_i^0(x)$ と選ぶことによって、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega} c_{ijkh} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \quad (27) \\ & = \int_{\Omega} \rho f_i w_i^0 dx + \int_{\Gamma_i} \hat{t}_i w_i^0 ds \quad \forall w_i^0 \in V \end{aligned}$$

という巨視的方程式が得られ、これを元の式(24)に戻すことによって微視的方程式が、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx \quad \forall w_i^1 \in V_Y \\ & + \int_{\Omega} c_{ijkh} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

と得られる。

均質化法の次のステップは、巨視的および微視の方程式をそれぞれ $V(\Omega)$ と $V_Y(Y)$ の関数のみからなるものに変換することである。通常、これは式の線形性を利用して行われるが、今の場合式(27)と(28)の2項目に現れる時間に関する微分演算子 $\partial/\partial t$ が存在することによって、首尾良く分離できないことが分かる。そこで、Laplace 変換によってこの微分演算子を定数 $\lambda > 0$ に置き換えて考えることにする。すなわち、式

(27) と (28) の Laplace 変換形はそれぞれ、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkh} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial \tilde{u}_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \quad \forall w_i^0 \in V \text{ and } \forall \lambda > 0 \\ & + \lambda \int_{\Omega} c_{ijkh} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial \tilde{u}_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & - \int_{\Omega} c_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right)_{0+} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \rho f_i w_i^0 dx + \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_i} \hat{t}_i w_i^0 ds \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkh} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial \tilde{u}_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \quad \forall w_i^1 \in V_Y \text{ and } \forall \lambda > 0 \\ & + \lambda \int_{\Omega} c_{ijkh} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial \tilde{u}_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \\ & - \int_{\Omega} c_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right)_{0+} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

で与えられる。ただし、式中 $\tilde{\bullet}$ は変数 \bullet の Laplace 変換、 $\bullet|_{0+}$ は載荷直後の初期状態の値を示している。この式を注意深く観察すると、対応原理が成り立つことが分かり、線形弾性体に対する均質化法の定式と同様の変数の分離が行えることになる。

a) 微視的スケールの方程式

を考えている問題の Y -periodic な特性関数 $\pi_i^{kh} \in V_Y$ の Laplace 変換が、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijlm} \frac{\partial \pi_i^{kh}(y; \lambda)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy + \lambda \int_{\Omega} c_{ijlm} \frac{\partial \pi_i^{kh}(y; \lambda)}{\partial x_m} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \\ & = \int_{\Omega} b_{ijlh} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy + \lambda \int_{\Omega} c_{ijlh} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy = 0 \quad \forall w_i^1 \in V_Y, \lambda > 0 \end{aligned} \quad (31)$$

および

$$\int_{\Omega} b_{ijlm} \frac{\partial \pi_i^{kh}(y, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy + \lambda \int_{\Omega} c_{ijlh} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy = 0 \quad (32)$$

$$\forall w_i^1 \in V_Y, \lambda > 0$$

の解として求められるならば、式(30)の解は

$$\begin{aligned} u_i^1(x, y, t) &= -\pi_i^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \\ &+ \pi_i^{kh}(y, 0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} + c_i^1(x) \end{aligned} \quad (33)$$

の Laplace 変換で与えられることが分かる。ここで、 $c_i^1(x)$ は y について任意の定数であり、演算記号 “*” は Boltzman の畳み込み積分記号で、任意の 4 階のテンソル $q_{ijkl}(t)$ に対して畳み込み積分が、

$$q_{ijkl}(t) * \frac{\partial u_k^0(t)}{\partial x_h} = \int_0^t q_{ijkl}(t-s) \frac{\partial u_k^0(s)}{\partial x_h} ds \quad (34)$$

と定義してある。実際、式(33)のLaplace変換を式(30)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkl}(y) \frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx + \lambda \int_{\Omega} c_{ijkl}(y) \frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx \\ & - \int_{\Omega} b_{ijlm}(y) \frac{\partial \tilde{\pi}_l^{kh}(y; \lambda)}{\partial y_m} \frac{\partial \tilde{u}_k^0(x)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx \\ & - \lambda \int_{\Omega} c_{ijlm}(y) \frac{\partial \tilde{\pi}_l^{kh}(y; \lambda)}{\partial y_m} \frac{\partial \tilde{u}_k^0(x)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} b_{ijlm}(y) \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx = 0 \\ & + \int_{\Omega} c_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dx = 0 \quad \forall w_i^1 \in V_Y, \forall \lambda > 0 \end{aligned} \quad (35)$$

となり、式(31)と(32)が得られる。ここで、式(31)を次のように書き換えることで、線形弾性体の均質化法との対応原理が成り立つことがわかる⁷⁾：

$$\int_Y a_{ijlm} \frac{\partial \tilde{\pi}_l^{kh}(y; \lambda)}{\partial x_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy = \int_Y a_{ijkl} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \quad (36)$$

$\forall w_i \in V$ and $\forall \lambda > 0$

ここで、 $a_{ijlm} = b_{ijlm} + \lambda c_{ijlm}$ とおいてある。

次に、式(31)と(32)の左辺最終項を消去して1つの式に書き換えると、

$$\begin{aligned} & \int_Y b_{ijlm}(y) \frac{\partial \tilde{\pi}_l^{kh}(y; \lambda)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \quad \forall w_i \in V_Y \text{ and } \forall \lambda > 0 \\ & + \lambda \int_Y c_{ijlm}(y) \frac{\partial \tilde{\pi}_l^{kh}(y; \lambda)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \\ & = \int_Y b_{ijkl}(y) \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy - \int_Y b_{ijlm}(y) \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \end{aligned} \quad (37)$$

が得られ、左辺第2項の変換による初期項

$$\int_Y c_{ijlm}(y) \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \quad (38)$$

を考慮して、逆変換を施すと、

$$\begin{aligned} & \int_Y b_{ijlm}(y) \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, t)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dx \\ & + \int_Y c_{ijlm}(y) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \pi_l^{kh}(y, t)}{\partial y_m} \right) \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dx \\ & + \delta(t) \int_Y b_{ijlm}(y) \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dx \quad \forall w_i \in V_Y \\ & + \delta(t) \int_Y c_{ijlm}(y) \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dx = \delta(t) \int_Y b_{ijkl} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \end{aligned} \quad (39)$$

が得られる。ここで、 $\delta(t)$ はDiracのデルタ関数¹⁹⁾である。最終的に次の微視的スケールの方程式を得る：

$$\begin{aligned} & \int_Y (b_{ijlm} + c_{ijlm}) \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy = \int_Y b_{ijkl} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \\ & \forall w_i \in V_Y \quad (t=0+) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \int_Y b_{ijlm} \frac{\partial \pi_l^{kh}(y, t)}{\partial y_m} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \quad \forall w_i \in V_Y \quad (t>0+) \\ & + \int_Y c_{ijlm} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \pi_l^{kh}(y, t)}{\partial y_m} \right) \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

ここで示した微視的スケールの方程式と文献12)での定式化におけるそれとの重要な違いとしては、固相と液相の連続な特性関数が Y 内の單一方程式から得られることと、時間の関数でもあることが挙げられる。また、ここでの定式化で特に注意すべき点として、 $\pi_l^{kh}(y, 0+)$ が変位の単位を持つことと、時間に対して独立であることが挙げられる。したがって、式(40)は、線形弾性体に対して特性関数を与える方程式と全く同じ形をしていることからも明らかのように、瞬間的な(単位) 弾性応答を求めようというものである。この $\pi_l^{kh}(y, 0+)$ を初期値として式(41)が各時間における単位応答を与えるのである。さらに、あとで言及するように、 $\pi_l^{kh}(y, t)$ の定義域が x に対して独立であることは、この種の材料の力学特性に関して特に重要な意味を持っている。

b) 巨視的スケールの方程式

巨視的スケールの方程式(29)についても同様に、式(33)のLaplace変換を代入することで変数の分離が可能になる。分離した後に逆変換を行うと、全体構造物の漸近挙動を表す式として次の最終的な巨視的スケールの方程式を得ることになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijlm}^H \frac{\partial u_l^0(x, t)}{\partial x_m} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} g_{ijkl}^{bh}(0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega} c_{ijlm}^H \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_l^0(x, t)}{\partial x_m} \right) \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} g_{ijkl}^{bh} * \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & - \int_{\Omega} g_{ijkl}^{ch} * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \right) \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & - \int_{\Omega} g_{ijkl}^{ch}(0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & = \int_{\Omega} \rho^H f_i w_i^0 dx + \int_{\Gamma_i} \hat{f}_i w_i^0 dx \quad \forall w_i^0 \in V \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、

$$\rho^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho dy = \frac{|Y_s|}{|Y|} \rho^s + \frac{|Y_f|}{|Y|} \rho^f \quad (43)$$

$$b_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y b_{ijkl} dy = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ijkl} dy + K^f \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{|Y_f|}{|Y|} \quad (44)$$

$$c_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_{ijkl} dy = \frac{|Y_f|}{|Y|} 2\mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (45)$$

$$g_{ijkl}^{bh}(t) = \frac{1}{|Y|} \int_Y b_{ijlm} \frac{\partial \pi_l^{bh}(t)}{\partial y_m} dy \quad (46)$$

$$g_{ijkl}^{ch}(t) = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_{ijlm} \frac{\partial \pi_l^{ch}(t)}{\partial y_m} dy \quad (47)$$

である。ただし、式中の $| \bullet |$ は領域 \bullet の体積を表し、文献12)でも紹介した、領域 Ω と Y の積分を分離するための公式が用いられていることに注意されたい。

(5) 局所化と均質化構成方程式

混合体の微視的な応力は、漸近展開式(22)の ε^0 のオーダーのものである。すなわち、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(x, y, t) &= b_{ijlm}(y)(\varepsilon_{x,lm}(u^0) + \varepsilon_{y,lm}(u^1)) \\ &+ c_{ijlm}(y) \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{x,lm}(u^0) + \varepsilon_{y,lm}(u^1)) \text{ in } Y \times \Omega \end{aligned} \quad (48)$$

であるので、やはりこのLaplace変換式に式(33)のLaplace変換を代入して逆変換をとると、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(x, y, t) &= b_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} - g_{ijkl}^b(y, 0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \\ &- g_{ijkl}^b(y, t) * \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} + c_{ijkl}(y) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \right) \\ &- g_{ijkl}^c(y, 0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} + g_{ijkl}^c(y, t) * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

という局所化された力学応答として微視的応力が、 $t \geq 0+$ に対して得られる。ここで新たに、

$$g_{ijkl}^b(y, t) = \begin{cases} E_{ijlm} \frac{\partial \pi_l^{bh}(y, t)}{\partial x_m} & \text{in } Y_s \\ \frac{1}{3} K^f \delta_{ij} \delta_{lm} \frac{\partial \pi_l^{bh}}{\partial x_m} & \text{in } Y_f \end{cases} \quad (50)$$

$$g_{ijkl}^c(y, t) = \begin{cases} 0 & \text{in } Y_s \\ 2\mu \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{lm} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \pi_l^{ch}}{\partial x_m} \right) & \text{in } Y_f \end{cases} \quad (51)$$

と定義している。

均質化された構成関係は、式(42)からも導出できるが、微視的応力(49)の体積平均として捉えると、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(x, y, t) &= b_{ijlm}^H \frac{\partial u_l^0(x, t)}{\partial x_m} - g_{ijkl}^{bh}(0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \\ &- g_{ijkl}^{bh}(y, t) * \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} + c_{ijlm}^H \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_l^0(x, t)}{\partial x_m} \right) \\ &- g_{ijkl}^{ch}(0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} + g_{ijkl}^{ch}(t) * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

となる。明らかにこの式は線形粘弾性体のものと認識でき、この構造物の漸近挙動を司るものである。

3. 均質化法定式の考察

(1) 特性関数

均質化法の微視的方程式から得られる特性関数には、複合材料の力学におけるRVE法的な解釈を与えることができる。すなわち、特性関数はそれぞれ独立な単位ひずみに対する応答関数であり、ユニットセルの変形(変位)を表している。線形弾性体に対するそれとの類推から、この考え方は上で得られるような時間的に推移する特性関数であってもここで示した定式化に容易に拡張できる。しかし、より重要なことは、先に述べたとおりその Y -periodicな関数が巨視的スケール x に対して無関係であることである。つまり、全体構造物に荷重が作用し、変形が始まると、微視構造は全体構造のいたる場所で、しかもそこでの変形に無関係に同じ単位力学応答特性を有するのである。これが、マイクロメカニクス的な観点からみた線形粘弾塑性材料の力学特性であり、実際この考察は問題の線形性の結果であることは言うまでもない。

また、3節で示した定式化のなかで特性関数に関する最も重要な考察は、先に述べたとおり、その初期値 $\pi_l^{ch}(x, 0+)$ が、載荷直後の全体構造物の弾性変形特性を与えることである。この点に関しては初期条件の設定との関わりから次に述べることにする。

(2) 粘弾性問題における初期条件

この種の混合体の均質化法において最も重要な特徴は、均質化された問題の初期条件を調べることによって明らかになる。以下、ここではこの点について考察することにする。

いま、簡単のために $t=0-$ においては両相の速度が零であるとする。当然、そのときのそれらの Y 内での体積平均も零なので、 $t=0+$ においても変形の初速度を与えることはできない。しかし、全体構造物の載荷直後($t=0+$)の変形速度は、純粹に与えられる外荷重に依存していることがわかる(全体構造物に強制変位などの拘束を与える場合も同様)ので、変形状態か

ら初期の変形速度も評価する必要があるといえる。このことは、初期における弾性的な変形は液相の粘性によって妨げられ、以降の変形のきっかけになるという固相と液相の連成作用を意味している。

つまり、載荷直後に変形と変形速度を同時に求めねばならないが、通常の粘弾性体の初期値・境界値問題の定式化は、連成問題として扱っていないため、そのような要求は起こらない反面、一般に初期変形の取り扱いが困難になっている。しかしながら、均質化法による定式化の場合、特性関数 $\pi_i^{th}(x)$ の初期値が単位ひずみと、単位時間における単位ひずみに対する応答特性を表すことから、全体構造物の初期変形速度は、載荷直後を単位時間としたときの変形と解釈することができる。したがって、変形および速度の初期状態を求めるには単位時間で評価すればよく、巨視的スケールの方程式(42)は変位と速度を同一視して解くことになる。

ここでの考察では、数学的あるいは力学的にも奇異な解釈を与えたが、数学的に厳密な均質化の手続きを踏んだ結果であり矛盾はない。実際、初期の弾性変位が大きければ初期変形の速度も大きいことは、力学的にも妥当であり、これまで曖昧であった粘弾性体の解析における初期条件の設定法に関して一石を投じるものと考えられる。

(3) Biot の圧密方程式との比較^{12),13)}

先の効果パラメータの意味から、均質化法によって得られた粘弾性構成則は Biot の定式が支配する力学挙動の極限であると位置づけることはできない。粘性の作用、つまり液体と固体の界面でのせん断力の大きさは、あくまで変数に漸近展開を施す際にパラメータ ε でコントロールされるのであって、微分方程式で表された支配方程式の漸近挙動同士を横並びに議論すべきではない。

しかしながら、両物理現象が、載荷の初期の段階では液体の等方的な応力が支配的で、それが徐々に固相に移行していくという現象であることに違いはない。言い換えると、動きの遅い液体による混合体材料全体の変形の遅延という点で、両者は等価である。したがって、全体構造物のどの境界からも液体の出入りがない場合でも、ユニットセルの境界において液体の出入りがあるならば、Biot の導いた式が支配するところの圧密現象であり、全く出入りを許さない場合に限って粘弾性挙動であると区別することができる。

また、後で示す数値解析例からも分かるとおり、相当大きな粘性を持った固体-液体の混合システムでなければ、粘弾性挙動とはみなすことはできない。実際、油や水銀などの粘性であってもここで示した定式化に

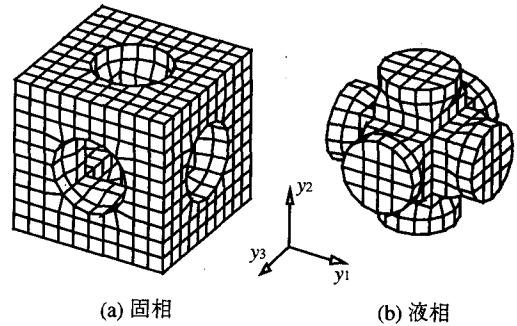


図-2 ユニットセルの有限要素解析モデル

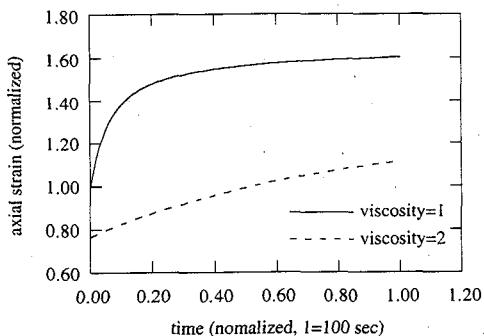
は小さすぎ、常識的には液体とみなせない程大きな粘性を有している必要がある。土木材料ではアスファルトやグラウトといったもの、複合材料では固化する前のエポキシ樹脂などがそれにあたると考えてよい。しかしながら、そのような材料を液体として扱う際には、線形性の要請、すなわち Newton 流体であるための条件などを加味した上で工学的な応用を考えていく必要がある。

4. 数値解析

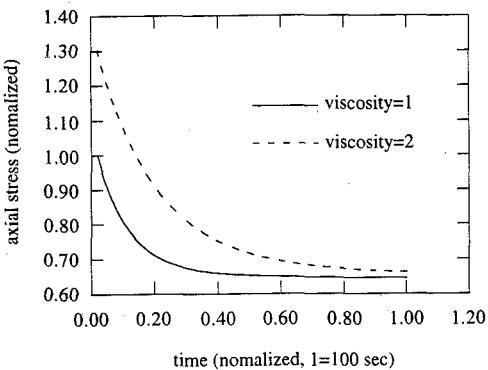
3 節の均質化法によって得られた、固体-液体混合体のための支配方程式を離散化し、数値解析を行う。ここでは通して同じ材料定数を用いることとし、固相については Young 率と Poisson 比がそれぞれ 30 GPa と 0.30、液相については粘性と体積弾性率がそれぞれ $1.5 \times 10^3 \text{ MPa}\cdot\text{s}$ と $1.5 \times 10^3 \text{ MPa}$ としてある。ユニットセル（液相の体積比：26%）の有限要素モデルとしては、図-2 に示すようなもの（8 節点六面体要素）を用い、時間に関する離散化は完全陰解法によるものとする。

載荷後の全体構造物の変形は、均質化方程式(42)からもわかるように、観察したいすべての時間において式(46)と(47)で与えられる均質化材料定数が既知である必要がある。また、局所化応力についても時間的に変化する特性関数を用いて評価されるので、均質化定数と同じく離散データとして保存しておく必要がある。すなわち、時間に関して離散化された微視的スケールの方程式を解き、均質化定数を評価すると同時に特性変位とともにファイルに保存し、後で参照できるようにしておかねばならないのである。したがって、時間の離散化はどの方程式を解くのに際しても同じ時間幅で行うようにしておくのが実際的であると言える。

特性関数を求めるための方程式(40)と(41)をあらかじめ計算しておくのは、先の考察でも述べたとおり、問題が線形であることにも起因している。また、微視構造の解析モデルの大きさによっては特性関数の時間



(a) 一様引張に対するクリープ応答



(b) 一様引張に対する応力緩和
図 -3 全体構造物の漸近挙動

と空間の離散データを保存するために相当大きなディスク容量を必要とするので、問題のモデル化には注意が必要である。更に、ここでは離散化方程式を示すことはしないが、先に考察したとおり、均質化された問題の初期速度が初期変位としなければ解析不可能であることにも注意されたい。

(1) 粘弾性力学挙動—クリープおよび応力緩和

ここでは、粘弾性体の特徴的な変形特性であるクリープと応力緩和の現象を均質化法の定式をもとにシミュレートすることにする。全体構造物としては、1次元的な一様引張が生じるようなものを用意し、100MPaの載荷に対する同方向のひずみ成分と、引張方向のひずみ成分0.2%を与えたときの同方向の応力成分を計算してみた。この際、全変形を要する時間は100秒に設定してある。

それぞれの計算結果を図-3に示す。ただし、図では液体の粘性の影響をみるために、先に用意した粘性係数 $1.5 \times 10^3 \text{ MPas}$ の2倍の大きさのものについての結果とともに示してあり、時間、応力、ひずみともに小さい方の粘性のものから得られる初期値、つまり弾性応

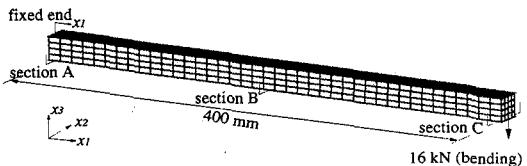


図 -4 はり状の3次元全体構造物

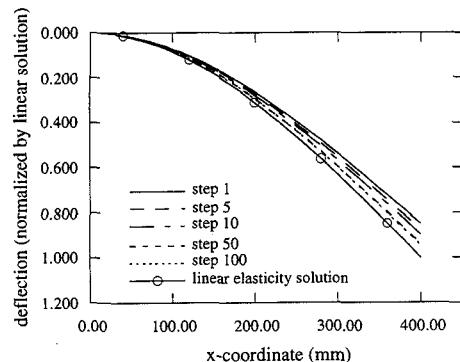


図 -5 変形（たわみ）曲線の時間的推移

答で正規化している。また、蛇足ではあるが各線は各時間でその傾きがあらかじめ計算されたものであることを思い出して頂きたい。図から明らかのように、微視構造内に存在する液体の粘性が、全体構造物の漸近挙動であるクリープと応力緩和の応答に対して陽に影響している様子が観察できる。均質化法がRVEであるユニットセル内での個々の構成材料の力学挙動を厳密に評価している結果であるといえる。

(2) 3次元混合体の曲げ数値実験

図-4に示されているように、固体-液体混合体からなるはり状の3次元構造物を考え、先端に x_3 の負の向きに荷重を16 kN加えて曲げを生じさせる。自重を無視し、100秒間の変形の推移を計算したが、全体構造の変形としては至る箇所でクリープ変形を生じると考えてよい。

クリープ変形の様子を見るために、図-5にはある時間経過したときのこの構造物のたわみ曲線をプロットしたもののが示されている。また、比較のために、ユニットセルの液相（体積比：26%）の液体を抜いたもの、つまり多孔質な弹性体を想定したときのたわみ曲線もプロットしてある。先のクリープの数値解析例(1)と同様に、初期の段階での大きな変形速度と、時間が経つにつれてある変形状態に収束する様子がわかる。さらに、その収束する変形状態は、液体がないものとした多孔質体のそれに近いといえるが、これは変形の最終段階では液体の受け持つ応力が非常に小さくなること

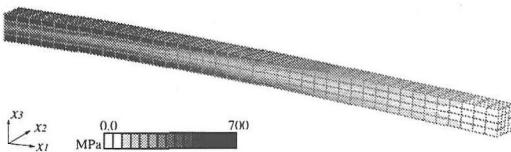


図 -6 von-Mises 応力分布

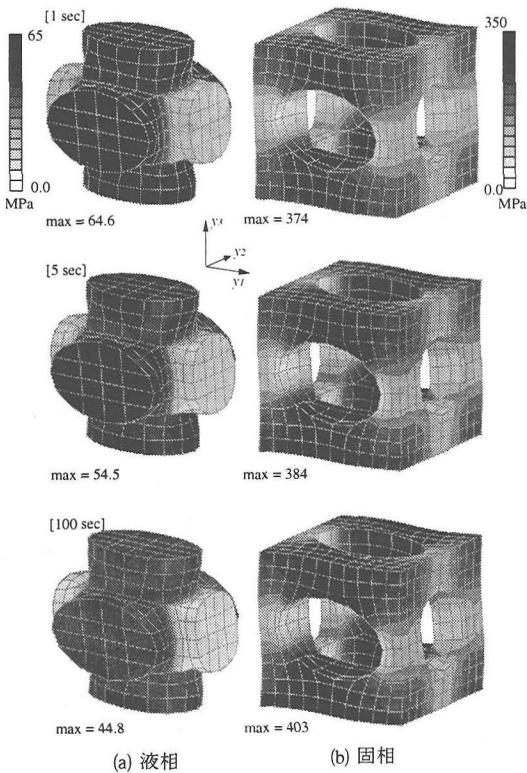


図 -7 局所化 von-Mises 応力のユニットセル内分布

に依ると考えられる。ただし実際は、最終変形状態の液相は等方応力だけは受け持つうるはずなので、図-5において両者が重なることはない。

さて、均質化法によって定式化したときの最大の利点ともいえる局所化の過程に移ることにする。ここでの局所化とは、全体構造物の中のある点を選んで、そこでのひずみ値と Y 内に空間的に分布する特性関数とから微視的応力を式(49)から算出することである。図-6 は 100 秒経過後の von-Mises 応力の分布を示すが、いま、図-4 で定義されている Section A 内で最大の応力を示す有限要素を選んで、そこでのひずみ値を局所化に用いることにする。

図-7 には 1, 5, 100 秒後におけるユニットセル内の固相と液相の von-Mises 応力の分布を示す。文献 12) の結果との大きな違いとして、液相の応力は等方応力

(つまり圧力) 以外にせん断応力の成分が残留していることに注意されたい。また、逆に同様な傾向として、液相に分布していた応力が、時間が経つにつれて固相に移行していく様子が観察できる。ただし、液相の応力はすべて消散するわけではなく等方応力成分は、全体構造物の最終変形時にも残留することは上述した通りである。

このように、固体-液体混合体材料の変形特性を微視構造での分布状態から算出し、全体構造物の力学応答を漸近挙動として評価し、そして更に微視構造内で局所化された応力の分布を求めるという一連の均質化法の手続きが完了したことになる。ただし、言うまでもなくここで示した例は単なる数値シミュレーションであるので、文献 12) と同様の考察になるが、実際の工学の問題に対して適用していくにはまだ多くの検討・議論が必要である。均質化理論による定式化とその数値解およびその解法について、実験的事実との比較・検討を行うことで既存の工学理論を補完し、拡充していくべきであろう。

5. 結語

固体-液体からなる混合体の力学挙動を、均質化理論によって漸近挙動として導き、工学的ないし力学的な考察を与えた。周期的な微視構造を仮定し、効果パラメータを含む構成関係を仮定することで、均質化された支配方程式として粘弾性体のそれを得るとともに幾つかの力学的な知見を得ることができた。また、数値解析によって、この混合体の Global-Local 的な特性をもった変形をシミュレートし、工学的な応用に向けた考察を行った。

マクロ的な力学的洞察によって導かれた古典的な粘弾性構成則が、均質化法によって微視的な構造の特徴を力学的に評価したものとして得られ、そのマイクロメカニクス的な視点からの材料特性が明らかにされた。特に、微視的スケールの方程式の $t=0+$ における解が、混合体材料の載荷直後に示す弾性変形についての特性関数であり、変位と速度の双方の単位をもつことは、漸近挙動としての粘弾性体の支配方程式の初期速度が初期の弾性変位と同一視できることを保証するものであった。このことは従来の力学の枠組みからは結論づけることは不可能であるといえ、均質化法の Global-Local 的な視点を工学分野に応用しようとしたことで初めて可能になった事実であるといえる。これは、考えている特殊な微視構造および材料の配置から得られた結果ではあるが、他の粘弾性挙動を議論する際にもなんらかの力学的洞察を与え得るものと期待できる。さらに、本論文で導いた初期値を含む変分法に

基づく弱形式の定式化は、数値解析を可能にし、この種の混合体の材料としての設計および全体構造物としての設計に際しての Global-Local 解析の可能性を示唆したといえる。

数値解析においては、固体－液体混合体の全体構造物の準静的な変形挙動のシミュレートすることができた。ただし、解析における巨視的な材料特性、すなわち、均質化材料定数はユニットセル領域で定義された固体と液体それぞれの幾何学的な広がりの影響を加味したものであった。また、巨視的な変形に対する応答としてユニットセル内での局所的な変形および応力が得られたが、均質化法の定式が与える支配方程式は、それぞれが互いに微視的および巨視的スケールによって関連づけられているので、これらの有限要素解析による数値解は、数学的にも力学的にも妥当なものであると結論づけることができる。

最後に、均質化理論およびその数値解析解は、固体－液体からなる混合体の力学特性に対する既存のアプローチに取って代わるべきものではないが、工学的な立場からそれらを補完し、可能ならば拡充していく方向でその適用性を議論していくべきであるという主張を結語とする。

参考文献

- 1) Hashin, Z. : Analysis of Composite Materials - A survey. *J. Appl. Mech.*, Vol.50, pp.481-505, 1983.
- 2) Christensen, R.M. : *Mechanics of Composite Materials*, New York, Wiley-Interscience, 1979.
- 3) de Boer, R. and Ehlers, W. : A Historical Review of the Formulation of Porous Media Theories, *Acta Mechanica*, Vol. 74, pp.1-8, 1988.
- 4) Green, A. E. and Naghdi, P. M. : Note on Mixtures, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol.6 pp.631-635, 1968.
- 5) Benssousan, A., Lions, J.L. and Papanicoulau, G. : *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam, North-Holland, 1978.
- 6) Lions, J.-L. : Introductory Remarks on Asymptotic Analysis of Periodic Structures, *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics*, Pitman, Boston, pp.205-215, 1979.
- 7) Sanchez-Palencia, E. : *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 8) Duvaut, G. and Nuc, M. : A New Method of Analysis of Composite Structure, *Ninth European Rotor Craft Forum*, Paper No.88, Stresa, Italie, 1983..
- 9) Lévy, T. : Acoustic Phenomena in Elastic Porous Media, *Mech. Res. Comm.*, Vol.4, pp.253-257, 1977.
- 10) Sanchez-Hubert, J. and Sanchez-Palencia, E. : Acoustic Fluid Flow through Holes and Permeability of Perforated Walls, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol.87, No. 2, pp.427-453, 1982.
- 11) Burridge, R. and Keller, J. B. : Poroelasticity Equations Derived from Microstructure. *J. Acoustical Society of America*, Vol.70, No.4, pp.1140-1146, 1981.
- 12) 寺田賢二郎, 伊東 勇, 菊池 昇: 固体－液体混合体に対する均質化法の工学的考察, 土木学会論文集, 投稿中.
- 13) Biot, M. A. : General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *J. Appl. Phys.*, Vol.12, pp.154-164, 1941.
- 14) Lévy, T. : Propagation of Waves in a Fluid-Saturated Porous Elastic Solid, *Int. J. Engrg. Sci.*, Vol.17, pp.1005-1014, 1979.
- 15) Sanchez-Hubert, J. : Asymptotic Study of the Macroscopic Behaviour of a Solid-Liquid Mixture, *Math. Meths. Appl. Sci.*, Vol.2, pp.1-11, 1980.
- 16) Lévy, T. : Fluids in Porous Media and Suspension, *Homogenization Techniques for Composite Media*, Sanchez-Palencia, E. and Zaoui, A., eds., Springer-Verlag: Berlin, pp.63-119, 1987.
- 17) Babuska, I. : Homogenization Approach in Engineering, *Comput. Meths. Appl. Sci. Engrg.*, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems 134, Lions, J.-L. and Glowinski, R. eds., Springer-Verlag, Berlin, pp.137-153, 1976.
- 18) Babuska, I. : The Computational Aspects of the Homogenization Problem, *Comput. Meths. Appl. Sci. Engrg.*, Lecture Note in Mathematics 704, Lions, J. -L. and Glowinski, R. eds., Springer-Verlag, Berlin, pp.309-316, 1979.
- 19) Tschoegl, N. W. : *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1989.

(1997.3.13 受付)

VISCOELASTIC CONSTITUTIVE LAW AS AN ASYMPTOTIC BEHAVIOR IN THE HOMOGENIZATION METHOD FOR SOLID-FLUID MIXTURES

Kenjiro TERADA, Takashi ITO and Noboru KIKUCHI

The mechanical behaviors of solid-fluid mixtures are characterized by using the homogenization method which is based on the method of two-scale asymptotic expansions. The asymptotic behavior reflects the features of periodic microstructures where the constitutive relations for solid and fluid phases are separately defined and is recognized as that for linear viscoelasticity. The result is due to the present choice of the so-called effective parameters and clarifies the roles of individual phases in the mechanical behaviors of an overall structure. In addition to the new interpretation about the initial conditions for viscoelasticity problems, the present developments and several numerical simulations will provide insight into variety of engineering problems regarding to solid-fluid coupled systems.