

# ハイアラーキ要素による有限要素解析の効率化

林 正<sup>1</sup>・山中素直<sup>2</sup>・加瀬部 弘<sup>3</sup>・佐藤敏亮<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部 環境・建設系(〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

<sup>2</sup>工修 滋賀県庁(〒520-0044 滋賀県大津市京町四丁目1番1号)

<sup>3</sup>工修 島根県庁(〒690-0887 島根県松江市殿町1番地)

<sup>4</sup>学生員 工修 長岡技術科学大学大学院工学研究科 建設工学専攻(〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

*p*法による有限要素法において、計算効率に優れたハイアラーキ要素を提案する。要素の定式化に用いる関数は、内挿関数の必要条件を満たす最も簡単な多項式であり、高次の多項式およびその導関数を漸化式で与えることができる。また、二重積の積分値を公式の形で求めることができる。四辺形、三角形と六面体要素及びこれらの要素に対する特異要素を定式化し、写像、次数低減積分法、高次自由度の選択法などの数値計算手法を提案する。

**Key Words :** Hierarchic element, Plate bending, 3-D stress analysis, Quadrilateral, triangular and hexahedral elements, Singular element.

## 1. まえがき

橋梁のような長大構造物に対する有限帯板法<sup>1)</sup>の計算効率性に着目して、この要素に節点自由度を付加した節点帯板法を開発した<sup>2)~4)</sup>。また、ソリッド要素について節点プリズム法を提案し<sup>5)</sup>、実構造物規模の解析モデルを用いてこれらの要素の実用性と精度を確かめている。パラメータ写像の手法<sup>6)</sup>によりこれらの要素を任意形状の要素に変換することもできるが、節点帯板法では高精度の解を得るために幅方向に多数の中間節点を設けているので、複雑な構造物の立体解析では節点の配置が面倒である。そこで、側辺上の中間節点を取り除き、この辺上でも変位を級数展開したものがハイアラーキ要素である。

ハイアラーキの概念は有限要素法でも用いられており<sup>7),8)</sup>、隅角節点の自由度に対する低次の変位関数に節点なし自由度を付加した高次の変位関数を用いることによって解の精度を改善する方法(いわゆる*p*法)である。したがって、要素の細分化を行わずに高精度の解が得られる利点がある。

ハイアラーキ要素では、 $C^0$ 級多項式の関数列の各項を順次に形状関数に用いることによって、低次から高次までの変位関数が得られるので、一連の要素族を容易に求めることができる。有限要素解の精度は形状関数に依存するが、多項式を用いる有限要素法では要素の自由度数、したがって多項式の次数が同じであれば同じ精度の解が得られる。しかし、数値計算では丸め誤差が生じるので、剛性行列の条件数が小さくなる多項式が数値計算に適している。また、2次元要素の形状関数は関数列の二重積で与えられ、3次元要素では三重

積になるので、関数列の次数が同じであっても多重積で与えられる全ての項を使用するか否かによって種々の要素が得られる。すなわち、解の収束性が保証される関数の完全性を満たす最小の自由度を用いる場合(このときの形状関数は完全多項式である)から、全ての高次項を用いる場合までが考えられる。このために、ハイアラーキ要素に関する研究では、種々の関数列が提案されてその性質が調べられている<sup>9)~15)</sup>。

形状関数に直交関数を用いれば剛性行列の条件数が良くなることから、ハイアラーキ要素ではLegendre多項式を含む関数列が多く用いられている<sup>8)~11)</sup>。Babuškaら<sup>10)</sup>は2次元要素に種々の形状関数を用いた場合の剛性行列の条件数を調べて、節線自由度と節面自由度(内部自由度)の形状関数が連成して条件数が大きくなること、したがって全ての節面自由度を用いる要素よりも上述の最小自由度の要素の方が条件数が小さいことを示した。また、Chebyshev多項式<sup>12)</sup>やLagrange多項式<sup>13)</sup>も用いられている。EdgarとSurana<sup>14)</sup>はこれらの3つの多項式について条件数を調べ、Legendre多項式の場合が条件数は最も小さく、Lagrange多項式の場合が最も大きくなることを示した。しかし、有限要素解の精度は条件数のみで決まるものではなく、Gaussの消去法などの直接法とCG法などの反復法によって条件数による影響は異なる。この他に、三角形要素において直交性のあるJacobi多項式が用いられている<sup>15)</sup>。

有限要素法では形状関数の選択が重要であり、関数の性質によって計算効率は異なってくる。形状関数は、完全性を満たすことは当然なことであるが、その他に、形状や次元の異なる要素(例えば三角形要素と六面体要

素)間の適合性を満たすこと、形状がいびつな要素に対しても条件数が悪化しないこと、積分演算が容易なこと、プログラミングに適していることなどが要求される。また、高次関数を用いて要素分割を粗くするハイアラーキ要素では集中荷重に対する収束性が悪くなるので、h法を用いる従来のFEM要素より厳しい条件が必要になる。これらの全ての条件に対して最適な形状関数を求めるることは極めて困難なことであるが、満足されない条件が多くなるほど実用的価値は低くなる。

形状関数が簡単な場合にはプログラミングが容易になり、計算時間は短くなる。この観点から、Lagrange多項式は奇数項と偶数項に分けて与えられるが、最も簡単な式である。また、三角形要素に適用した場合でも簡単である<sup>7)</sup>。本論文では計算効率に主眼点において、さらに簡単な多項式を提案する。この多項式は文献2)で示したものであるが、これをハイアラーキ要素に用いて2次元と3次元の形状関数を誘導する。

この多項式(これをハイアラーキ多項式と呼ぶことにする)は、関数列とその導関数を漸化式で与えることができる所以プログラミングに適している。また、直交性はないが、式が簡単であるので数値計算などの計算量は少なく、次数低減積分も含めた積分公式を陽な形で求めることができる。数値計算では、正方形、三角形、六面体要素や台形要素、縮退要素に用いた場合の条件数を調べて、先に述べた高次項の適切な選び方にについて検討する。さらに、集中荷重に対しては特異要素<sup>6)</sup>を用いてハイアラーキ要素における効果を調べる。なお、条件数を求めるためには固有値計算が必要であるが、消去演算中のビボットを用いる方法<sup>17)</sup>は計算時間が短くて極めて良好な近似条件数が得られることを示す。

ハイアラーキ要素法では要素形状を正確に表すために三角関数などを写像関数に用いる混合関数法<sup>8)</sup>が用いられるが、本論文では変位に対する形状関数を写像関数に用いるハイアラーキ写像を使用する。この手法ではデカルト座標値と異なるハイアラーキ座標値を使用するが、計算は通常のアイソパラメトリック写像と同じであるのでプログラミングは簡単である。この手法により、親要素に1～3個の1/4写像点を用いて特異要素を導くことができる。

## 2. 四辺形要素

### (1) 一般化変位

四辺形要素として、図-1に示す4節点及び要素境界線上に節線①～④を持つ要素を用いる。また、図中の( )は、正規化された要素座標系( $\xi, \eta$ )の座標値である。節点と節線の変位成分は、中央面上の要素デカル

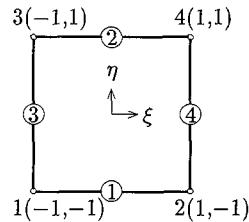


図-1 四辺形要素

表-1 四辺形要素の一般化変位

節点・節線自由度				節面自由度
1	2	3	4	
$d_{00}$	$d_{10}$	$d_{01}$	$d_{11}$	
$d_{l0}$	$d_{l1}$	$d_{0m}$	$d_{1m}$	$d_{lm}$

ト座標系( $x, y, z = 0$ )の座標軸方向の並進変位 $u, v, w$ と $x, y$ 軸まわりの回転角 $\theta_x, \theta_y$ とし、これらの任意の変位成分を $d$ で表す。これらの各変位成分に対する一般化変位には、節点自由度と、節線上で変位を級数展開したときの係数(節線自由度)を用いる。さらに、高次要素では要素内で各変位成分を二重級数展開したときの係数である節面自由度(内部自由度)を一般化変位に加える。定式化の便宜上、これらの一般化変位には二重添字を用いて $d_{lm}$ で表す。

節点・節線・節面番号と添字の対応関係を表-1に示す。なお、表-1では $l, m$ は2以上とする。

### (2) 変位関数

図-1の変域 $[-1, 1]$ で正規化された要素座標系( $\xi, \eta$ )を用いて、要素の変位 $d$ を級数展開した変位関数を次式で仮定する。

$$d(\xi, \eta) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M N_{lm}(\xi, \eta) d_{lm} \quad (1)$$

ここに、

$$N_{lm}(\xi, \eta) = f_l(\xi) \cdot f_m(\eta) \quad (2)$$

$f_l$ は次式で与えられるハイアラーキ多項式で、高次項と $\xi$ に関する導関数 $f'_l$ は漸化式で求められる。

$$f_l(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi) & (l=0) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) & (l=1) \\ (1-\xi^2)\xi^{l-2} & (l \geq 2) \end{cases} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{ll} f_{l+1} = \xi f_l & (f_2 = 1 - \xi^2) \\ f'_{l+1} = \xi f'_l + f_l & (f'_2 = -2\xi) \end{array} \right\} \quad (l \geq 2) \quad (4)$$

$f_m(\eta)$ は式(3)の $\xi$ を $\eta$ に置き換えた関数である。

式(1)において $L = M = 1$ を用いると、変位関数はFEMの双一次要素と一致し、同様に展開項数を2項用いると双二次要素となる。また、式(1)で4項用いると、節点帶板要素の10節点要素<sup>2)</sup>において3項用いた場合

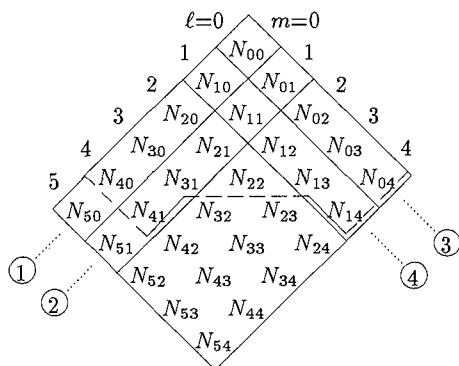


図-2 形状関数の階層図

表-2 三角形要素の一般化変位

節点・節線自由度			節面自由度
1	2	3	
$d_{100}$	$d_{010}$	$d_{001}$	
$d_{0m1}$	$d_{10n}$	$d_{l10}$	$d_{lmn}$

に一致する(形状関数は異なるが、変位場の次数は同じなので同一の解が得られる)。

図-2は、節線①、②に展開項数を5項、③、④に展開項数を4項用いて、内部自由度を長方形状にとった場合の形状関数の階層図で、節点、節線及び内部自由度に用いる形状関数を実線で区分している。また、節線の交点は図-1の隅角点に対応している。展開項数の選び方は各節線において独立であるので、任意の次数(項数)の遷移要素を極めて容易に定式化することができる。

式(3)の多項式  $f_l, f_m$  の次数は  $f_0$  は一次、その他は添字  $l, m$  に等しく、添字の和は形状関数  $N_{lm}$  の次数  $p$  に一致する。したがって、図-2で最高次の  $N_{54}$  は9次式である。高次の節面自由度の選択方法については6.(4)で説明する。

### 3. 三角形要素

#### (1) 一般化変位

三角形要素では3節点と3本の節線①～③を持つ要素を用いる。節点と節線に図-3のように番号を付ける。また、図中の( )は、面積座標系  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  の座標値である。変位成分は四辺形要素と同じで、これらの任意の変位成分  $d$  に対する一般化変位には三重添字を用いて  $d_{lmn}$  で表す。節点・節線・節面番号と添字の対応関係を表-2に示す。なお、表-2では  $l, m, n$  は1以上とする。

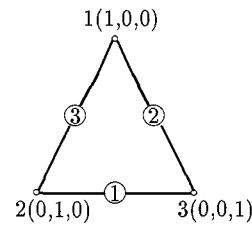


図-3 三角形要素

#### (2) 変位関数

要素座標に面積座標  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  を用いて、各変位成分  $d$  の変位関数を次式で仮定する。

$$d(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{lmn}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d_{lmn} \quad (5)$$

ただし、3つの添字の和は式(8)の多項式の次数を越えないものとする。

形状関数  $N_{lmn}$  は3つの多項式の積で与える。

$$N_{lmn}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = a f_l(\xi_1) \cdot f_m(\xi_2) \cdot f_n(\xi_3) \quad (6)$$

$$f_k(\xi_i) = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 2\xi_i(2\xi_i - 1)^{k-1} & (k \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

式(6)の右辺の係数  $a$  は節点自由度のみ  $1/2$ 、他の自由度では1とする。式(7)の第2式は四辺形要素との適合性を満たすように選んだ関数である。 $f_k$  についても式(4)と同様な漸化式が得られる。

#### (3) 形状関数

式(6)の形状関数  $N_{lmn}$  の次数  $p$  は次式で与えられる。

$$p = l + m + n \quad (p \geq 1) \quad (8)$$

式(6)の3つの関数の全ての組合せは面積座標  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  の従属性から互いに独立ではなく、例えば以下のような従属関係がある。

$$\left. \begin{aligned} N_{100} + N_{010} + N_{001} &= N_{000} \\ N_{121} + N_{112} + N_{211} &= -N_{111} \\ N_{232} + N_{223} + N_{322} &= -N_{222} \\ N_{343} + N_{334} + N_{433} &= -N_{333} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、

$$N_{000} = 1, \quad N_{100} = \xi_1, \quad N_{010} = \xi_2, \quad N_{001} = \xi_3 \quad (10)$$

一般化変位を完全多項式の項数に等しい数だけ選ぶと、式(5)の変位関数で表される要素の変位場はFEMの三角形要素と同じように完全  $p$  次多項式で与えられる。

図-4は、節線①～③に展開項数を10項用いた場合の形状関数の階層図で、節点、節線及び節面自由度

表-3  $p = 7$  の形状関数  $N_{lmn}$  の選択

$l$	$m$	$n$	$l \times m \times n$
1	1	5	5
1	2	4	8
1	3	3	9
2	2	3	12

に用いる形状関数を実線で区分している。節点と節線自由度の形状関数は一意的に定められて互いに独立であり、また節面自由度の形状関数と従属関係はない。

しかし、ある次数  $p$  の節面自由度の形状関数の組合せは、完全  $p$  次多項式の項数よりも多く、そのため一意的には定まらない。また式(9)で示したように、高次の節面自由度の形状関数には、それより低次の節面自由度の形状関数と従属関係にあるものが含まれ、選択方法によっては従属関係が生じる。そこで、式(8)を考慮した独立な組合せの中から、積分計算の効率も考慮し、形状関数  $N_{lmn}$  の次数  $p (= l + m + n)$  において  $(l \times m \times n)$  を最小にする組合せを選んだのが図-4の関数である。

例えれば  $p = 7$  の場合、形状関数は表-3のような選び方があるが、 $(l \times m \times n)$  の小さい方から  $N_{115}$  と  $N_{124}$  を選択することにする。なお、ここでは  $l, m, n$  の順序は考えない。一般式を階層図の下に示す。

4次、7次、10次の節面自由度の形状関数は、形状関数の対称性を保持するために、3次の形状関数  $N_{111}$ （または、6次の  $N_{132}$ 、9次の  $N_{153}$ ）を捨てて、4次の  $N_{211}$ （または7次の  $N_{421}$ 、10次の  $N_{631}$ ）の形状関数を用いればよい。

また、6次では  $N_{132}$  の代わりに  $N_{222}$ 、9次では  $N_{153}$  の代わりに  $N_{333}$  を用いてもよいが、積分計算の効率は悪化するので用いない。

## 4. 六面体要素

### (1) 一般化変位

三次元応力解析には、六面体のソリッド要素を用いる。この要素では図-5に示すように、8個の隅角点を節点  $1 \sim 8$ 、12本の稜線を節線  $① \sim ⑫$ 、6つの面を節面  $1 \sim 6$  とする。また、図中の（ ）は、正規化された要素座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  の座標値、表に節面の位置（番号）を節点番号で示した。

要素の変位成分は、 $x, y, z$  軸方向の並進変位をそれぞれ  $u, v, w$  とする。これらの各変位成分に対する一般化変位には、節点自由度、節線自由度と節面自由度を用いる。さらに高次要素では、体積自由度（内部自由度）を一般化変位に加える。任意の変位成分  $d$  に対する一般化変位には三重添字を用いて  $d_{lmn}$  で表す。節線、節面、体積自由度の番号と添字との対応関係を表-4に示

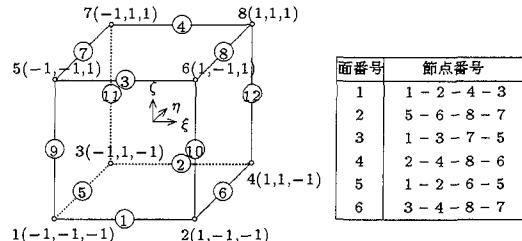


図-5 六面体要素

表-4 六面体要素の一般化変位

番号	節線自由度					
	1,2	3,4	5,6	7,8	9,10	11,12
奇数	$d_{100}$	$d_{101}$	$d_{0m0}$	$d_{0m1}$	$d_{0n0}$	$d_{01n}$
偶数	$d_{110}$	$d_{111}$	$d_{1m0}$	$d_{1m1}$	$d_{1n0}$	$d_{11n}$
番号	節面自由度			体積自由度		
	1,2	3,4	5,6	$d_{lmn}$		
奇数	$d_{lm0}$	$d_{l0n}$	$d_{0mn}$	$d_{lmn}$		
偶数	$d_{lm1}$	$d_{l1n}$	$d_{1mn}$	$d_{lmn}$		

す。なお、表中の  $l, m, n$  は 2 以上である。

### (2) 変位関数

図-5の要素において、変域  $[-1, 1]$  で正規化された要素座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  を用いて、要素の任意の変位成分を次に示す変位関数で仮定する。

$$d(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{lmn}(\xi, \eta, \zeta) d_{lmn} \quad (11)$$

ここに、

$$N_{lmn}(\xi, \eta, \zeta) = f_l(\xi) f_m(\eta) f_n(\zeta) \quad (12)$$

$f_l(\xi), f_m(\eta), f_n(\zeta)$  は式(3)で与えられるハイアラーキー多项式である。

形状関数の階層図は、図-2に示す二次元要素の階層図を 6 面組合せ、あらたに体積自由度を加えた直方体形状になる。

## 5. 剛性方程式

### (1) 2次元要素

四辺形要素と三角形要素に共通な定式化を用いるために、式(1)と式(5)の一般化変位を同じ記号  $d_i$  で表す。ここに添番号  $i$  は採用する展開項数に応じて、適当な順（例えば、節点、節線、節面自由度の順）で付けるものとする。

$d_i$  に対する形状関数を  $N_i$  で表して、式(1)または式(5)を次のようにおく。

$$d = \sum_{i=1}^I N_i d_i \equiv \mathbf{f}^T \mathbf{d} \quad (13)$$

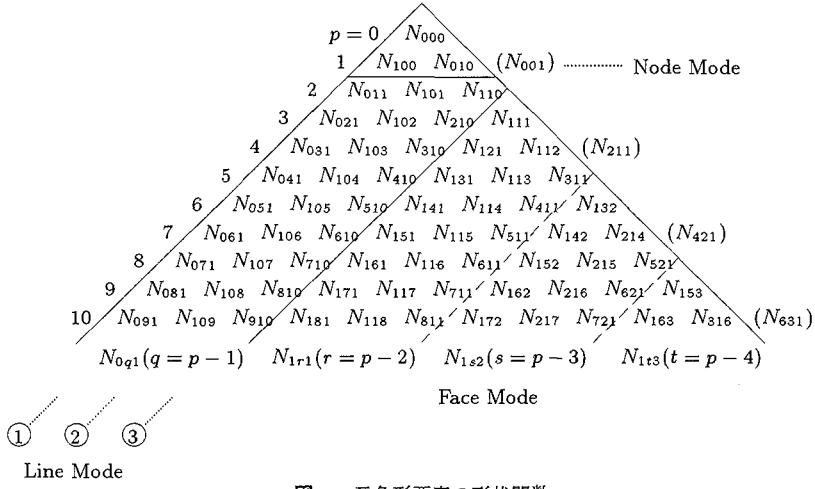


図-4 三角形要素の形状関数

ここに,  $I$  は  $d_i$  の自由度数で,  $(\cdot)^T$  は転置を表す. 形状関数ベクトル  $\mathbf{f}$  と一般化変位ベクトル  $\mathbf{d}$  は次式で与えられる.

$$\mathbf{f} = \{N_1, N_2, \dots, N_I\}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_I\}^T \quad (15)$$

板の曲げ解析に Mindlin 理論を用いると, 平板に生じるひずみ成分を次式のように表すことができる<sup>2)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= g_1^T u + z g_1^T \theta_y, \quad \varepsilon_y = g_2^T v - z g_2^T \theta_x \\ \gamma_{xy} &= g_2^T u + g_1^T v + z(g_2^T \theta_y - g_1^T \theta_x) \\ \gamma_{yz} &= g_2^T w - f^T \theta_x, \quad \gamma_{zx} = g_1^T w + f^T \theta_y \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \theta_x, \theta_y$  は式(15)に各変位成分の一般化変位を用いたものである. また,  $\mathbf{g}_i$  は次式の偏導関数ベクトルである.

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \quad (17)$$

面内と曲げの一般化変位ベクトルを  $\mathbf{d}_p, \mathbf{d}_b$ , これらの変位に対する一般化力を  $\mathbf{q}_p, \mathbf{q}_b$ , 荷重ベクトルを  $\mathbf{p}_p, \mathbf{p}_b$  とすると, 平面応力解析と曲げ解析に対してそれぞれ次の剛性方程式が得られる.

$$[\mathbf{k}_p] \mathbf{d}_p = \mathbf{q}_p + \mathbf{p}_p \quad (18)$$

$$[\mathbf{k}_b] \mathbf{d}_b = \mathbf{q}_b + \mathbf{p}_b \quad (19)$$

ここに,

$$\mathbf{d}_p = \{u^T, v^T\}^T, \quad \mathbf{d}_b = \{w^T, \theta_x^T, \theta_y^T\}^T \quad (20)$$

$$\mathbf{k}_p = \iint D_p [\mathbf{B}_p] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (21)$$

$$\mathbf{k}_b = \iint [D_b \mathbf{B}_b + D_s \mathbf{B}_s] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_p = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{G}_{11} + \lambda \mathbf{G}_{22} & \nu \mathbf{G}_{12} + \lambda \mathbf{G}_{21} \\ sym. & \mathbf{G}_{22} + \lambda \mathbf{G}_{11} \end{array} \right] \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_b = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ & \mathbf{G}_{22} + \lambda \mathbf{G}_{11} & -\nu \mathbf{G}_{21} - \lambda \mathbf{G}_{12} \\ & sym. & \mathbf{G}_{11} + \lambda \mathbf{G}_{22} \end{array} \right] \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_s = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{22} & -\mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ & \mathbf{F} & \mathbf{O} \\ & sym. & \mathbf{F} \end{array} \right] \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{ij} &= \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j^T, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{g}_i \mathbf{f}^T \quad (i, j = 1, 2) \\ \mathbf{F} &= \mathbf{f} \mathbf{f}^T \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1-\nu}{2}, \quad D_p = \frac{Et}{1-\nu^2} \\ D_b &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_s = \frac{5}{6} G t \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$\mathbf{O}$  は零行列で, 各小行列の大きさは  $(I \times I)$  である. また,  $E$  はヤング係数,  $G$  はせん断弾性係数,  $\nu$  はボアソン比,  $t$  は板厚,  $|\mathbf{J}|$  は2次元の Jacobian である. 面積座標では,  $\xi, \eta$  に  $\xi_1, \xi_2$  を用いる.

荷重ベクトル  $\mathbf{p}$  は, 式(14)の形状関数ベクトル  $\mathbf{f}$  を用いて有限要素法の標準的な方法で求めることができる.

## (2) 3次元要素

2次元要素と同様に, 六面体ソリッド要素の一般化変位ベクトル  $\mathbf{d}_s$  を次式のように表す.

$$\mathbf{d}_s = \{u^T \quad v^T \quad w^T\}^T \quad (28)$$

ここに,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  の各成分は  $u_i, v_i, w_i$  である.

仮想仕事の原理により,  $\mathbf{d}_s$  に対応する六面体要素の剛性行列  $\mathbf{k}_s$  は次式のようになる.

$$\mathbf{k}_s = \iiint [A] |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (29)$$

ここに,

$$A = \frac{E}{D_o} \begin{bmatrix} G_{11} & 2\nu G_{12} & 2\nu G_{13} \\ & G_{22} & 2\nu G_{23} \\ & & G_{33} \end{bmatrix}$$

$$+ G \begin{bmatrix} G_{00} & G_{12}^T & G_{13}^T \\ & G_{00} & G_{23}^T \\ & & G_{00} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\left. \begin{array}{l} G_{ij} = g_i g_j^T \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ G_{00} = G_{11} + G_{22} + G_{33} \end{array} \right\} \quad (31)$$

$$D_o = 2(1+\nu)(1-2\nu) \quad (32)$$

$g_i (i = 1, 2, 3)$  は式(14)の  $f$  をそれぞれ  $x, y, z$  で偏微分したものである.

## 6. 数値計算法

### (1) ハイアラーキ写像

2次元要素のパラメトリック写像は、一般的に次式で与えられる。

$$x = \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(\xi, \eta) \cdot x_i, \quad y = \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (33)$$

ここに、 $\hat{N}_i$  は写像関数、 $(x_i, y_i)$  は要素の形状を定めるために用いる写像点  $i$  のデカルト座標値である。

有限要素法では、通常  $\hat{N}_i$  には Serendipity や Lagrange 要素族の形状関数が用いられるが、これらの関数はハイアラーキ要素の形状関数と異なるので、変位と形状の補間で関数を使い分けなければならない。そこで、数値計算を容易にするために、式(2)と同じ形状関数  $N_i$  を用いた次式のハイアラーキ写像を用いる。

$$x = \sum_{i=1}^N N_i(\xi, \eta) \cdot \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^N N_i(\xi, \eta) \cdot \hat{y}_i \quad (34)$$

ここに、 $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  はデカルト座標値ではないので、ハイアラーキ座標値と呼ぶことにする。 $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  は  $(x_i, y_i)$  を変換して以下のようにして求める。

式(34)に点  $i$  のデカルト座標値  $(x_i, y_i)$  とその点の正規化された座標値  $(\xi_i, \eta_i)$  を代入すると、 $\hat{x}_i, \hat{y}_i$  に関してそれぞれ  $N$  元の連立 1 次方程式が得られる。これを解いて  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  が求められる。例えば、8 節点 Serendipity 要素に対応した 2 次曲線要素では次の値が得られる。

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_i & (i = 1 \sim 4) \\ x_i - (x_j + x_k)/2 & (i = 5 \sim 8) \end{cases} \quad (35)$$

ここに、 $i = 1 \sim 4$  は要素の隅角点、 $i = 5 \sim 8$  は隅角点  $j, k$  の中間にある辺上の点とする。したがって、点  $i$  が点  $j, k$  の中点の場合には  $\hat{x}_i = 0$  である。 $\hat{y}_i$  も式(35)と同様な式で与えられる。6 節点の三角形要素でも式(35)と同じ式が得られる。

三次元要素も同様な手法でハイアラーキ写像ができる、また辺上に中間写像点が 2 点ある場合(3 次曲線)や 3 点ある場合(4 次曲線)なども同様に式(34)を解けばハイアラーキ座標値が求まる。

### (2) 解析積分

#### a) 長方形要素の剛性行列

任意形状の要素では、式(26)の 6 つの行列を数値積分で求めなければならないが、長方形要素では以下のようによく簡単に求めることができる。

式(20)の一般化変位ベクトルの成分を級数項  $(u_i, v_i)$ 、 $(w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})$  の順序に並べ換えて、式(21), (22)の剛性行列をそれぞれ級数項ごとの小行列に分割すると、第  $(i, j)$  小行列を次式のように表すことができる( $i, j = 1, 2, \dots, I$ )。

$$k_{p,ij} = D_p \begin{bmatrix} k_{11} + \lambda k_{22} & \nu k_{12} + \lambda k_{21} \\ \nu k_{21} + \lambda k_{12} & k_{22} + \lambda k_{11} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$k_{b,ij} = D_b \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & k_{22} + \lambda k_{11} & -\nu k_{21} - \lambda k_{12} \\ O & -\nu k_{12} - \lambda k_{21} & k_{11} + \lambda k_{22} \end{bmatrix} \\ + D_s \begin{bmatrix} k_{11} + k_{22} & -k_{20} & k_{10} \\ -k_{02} & k_{00} & O \\ k_{01} & O & k_{00} \end{bmatrix} \quad (37)$$

ここで、 $i, j$  成分の形状関数を

$$N_i = f_l(\xi) f_m(\eta), \quad N_j = f_{l'}(\xi) f_{m'}(\eta) \quad (38)$$

とするとき、 $k_{ij}$  は次式のようなハイアラーキ多項式の積分値である。

$$\left. \begin{array}{ll} k_{11} = G_{ll'} F_{mm'}, & k_{22} = F_{ll'} G_{mm'} \\ k_{12} = H_{ll'} \bar{H}_{mm'}, & k_{21} = \bar{H}_{ll'} H_{mm'} \\ k_{10} = H_{ll'} F_{mm'}, & k_{01} = \bar{H}_{ll'} F_{mm'} \\ k_{20} = F_{ll'} H_{mm'}, & k_{02} = F_{ll'} \bar{H}_{mm'} \\ k_{00} = F_{ll'} F_{mm'} & \end{array} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_{ll'} = \frac{l_\xi}{2} \int_{-1}^1 f_l(\xi) f_{l'}(\xi) d\xi \equiv f_{ll'} l_\xi \\ G_{ll'} = \frac{2}{l_\xi} \int_{-1}^1 g_l(\xi) g_{l'}(\xi) d\xi \equiv \frac{g_{ll'}}{l_\xi} \\ H_{ll'} = \int_{-1}^1 g_l(\xi) f_{l'}(\xi) d\xi \equiv h_{ll'} \\ \bar{H}_{ll'} = \int_{-1}^1 f_l(\xi) g_{l'}(\xi) d\xi \equiv \bar{h}_{ll'} \quad (= h_{l'l}) \end{array} \right\} \quad (40)$$

$$g_i(\xi) = \frac{df_i}{d\xi} \quad (41)$$

$f_{ll'}, g_{ll'}, h_{ll'}, \bar{h}_{ll'}$  は無次元の積分値であり、 $l_\xi/2$  は 1 次元の Jacobian で、 $l_\xi$  は  $\xi$  軸に平行な要素の辺長である。なお、添字は  $\xi$  について  $l, l'$  であるが、 $\eta$  については  $m, m'$  である。

ハイアラーキ要素では形状関数が要素座標  $(\xi, \eta)$  の変数分離形で与えられるので、2 次元積分を 2 つの 1 次

元積分の積で求めることができる。式(40)の3つの無次元積分値を付録の表-Iに示す。

数値計算では、展開項数  $L, M, N$  の最大項数について式(40)の3つの無次元積分値を一度求めておけば、全ての直線要素、長方形要素、直方体要素に共通して用いることができる。この場合の剛性行列の計算時間はわずかであり、数値積分を用いる場合の数分の一から数十分の一になる。

### b) 三角形要素の面積分

三角形要素の剛性行列も式(36), (37)と同じ形の式で表される。式(38)に式(6)の形状関数を用いると、式(39)の  $k_{ij}$  は式(7)の  $f_k(\xi_i)$  と  $\xi_i$  に関する導関数の面積分で与えられる。被積分関数を整理すると、 $k_{ij}$  は次の積分値の和で求められる。

$$I = \int_A \xi_1^q \xi_2^r \xi_3^s (2\xi_1 - 1)^L (2\xi_2 - 1)^M (2\xi_3 - 1)^N dA \quad (42)$$

ここに、 $q, r, s, L, M, N$  は非負の整数である。

直線要素では、積分値  $I$  は面積座標に関する既知の積分公式を用いて求めることができるが、このためには被積分関数を  $\xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c$  の形で表す必要があり、べき指数  $a, b, c$  とこの項にかかる係数は  $(2\xi_i - 1)^n$  を二項展開した式の三重積をさらに展開して得られるのでプログラムはかなり複雑になる。また、高次要素では  $L, M, N$  の値が大きくなるので( $n$  の最大値は  $2p - 4$ ,  $p$  は形状関数の最高次数), 積分をする時間が飛躍的に増大する。そこで、二項展開を避けた積分公式を求める。これを付録 II に示す。

### (3) 次数低減積分法

Mindlin 要素による曲げ解析では、shear locking を防ぐために次数低減積分を用いる。2次元要素の低減積分は節点帯板法の研究<sup>2)</sup>から、せん断剛性行列  $B_s$  の中の最高次の関数の積分においてガウス積分点を1点少なくすればよいことが解っており、ハイアラーキ棒要素についてこの手法の妥当性を理論的に確かめている。

$\xi$  と  $\eta$  に関する最高次の関数は、式(25)の  $B_s$  のなかで最高次である式(40)の  $f_{LL}$  と  $f_{MM}$  であるから、この項のみを低減積分する。低減積分値  $f_{kk}^*$  を表-I に示す。

完全積分値  $f_{kk}$  に対する低減積分値  $f_{kk}^*$  の比は、表-I の値より  $k = 5$  の場合で 0.87 ( $k = 6$  で 0.94) である。低減積分は節面自由度を長方形状にとった場合には、剛性行列のなかの最高次数の要素のせん断剛性のみに行うので、高次要素では低減積分の影響はほとんど現れなくなる<sup>13)</sup>。

### (4) 高次項の選択と条件数

図-2の形状関数の階層図で4次の完全多項式は破線

より上の17項で与えられる。 $l = 5$  の節線自由度の項  $N_{50}, N_{51}$  は隣接要素との適合性を満たすために必要な項である(図-2は遷移要素の例である)、節面自由度には完全多項式に対して11項の余分な高次項が含まれている。六面体要素ではさらに多くの高次項が節面自由度と体積自由度に存在する。

有限要素解析では、従来、これらの高次項を省略した Serendipity 要素族の方が計算効率がよいといわれていたが、高次関数を用いるハイアラーキ要素では高次項が解の精度に影響する。しかし、まえがきで述べたように、高次項を用いると剛性行列の条件数が悪化するので、内部自由度に含まれる高次項の適切な選び方を考慮する必要がある。

完全多項式の次数は、最低次の節線自由度の次数(一般的には、4本の節線自由度数は異なる)によって定まるので、この最低次数(すなわち、最小自由度数)を基準として、図-2の各行の同じ次数の内部自由度を順次に加えていく選択方法を検討する。図-2の場合では、4次式から9次式までの6通りの選び方がある。

数値計算で問題となる丸め誤差は、内部自由度の縮約演算のときに生じるので、条件数の変化は内部自由度のみの剛性行列について調べる。すなわち、節点と節線の要素周辺自由度の剛性は他の要素の剛性とともに構造全体の剛性行列に組み込まれるので、要素単独の全自由度の剛性行列の条件数を調べてみてもあまり意味がないと考えられる。

消去演算における丸め誤差の影響は、解の推定有効桁数を  $S_C$ 、計算機の精度を  $t$  桁とするとき次式で与えられる<sup>16)</sup>。

$$S_C = t - \log_{10}(\lambda_{\max}/\lambda_{\min}) \quad (43)$$

ここに、 $\lambda_{\max}$  と  $\lambda_{\min}$  は行列の最大・最小固有値であり、( ) の比が行列の条件数である。

一方、消去演算プログラムでは必ずピボットの値を照査するので、固有値の代わりに最大と最小のピボットの値  $p_{\max}, p_{\min}$  を用いて推定有効桁数  $S_P$  を求めてみる<sup>17)</sup>。

$$S_P = t - \log_{10}(p_{\max}/p_{\min}) \quad (44)$$

なお、 $S_P$  を求める計算時間は  $S_C$  の場合に比べて無視できるほど短い。

## 7. 数値計算例

ハイアラーキ要素法における数値計算の効率性に関して、数値的な検討を要する高次項の選択方法と集中荷重に対する解の収束性について調べる。

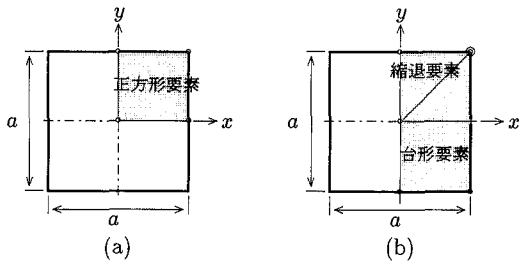


図-6 正方形板の解析

表-5 正方形要素における高次項の影響

<i>m</i>	<i>p</i>	<i>IF</i>	<i>DOF</i>	<i>S<sub>C</sub></i>	<i>S<sub>P</sub></i>	<i>w</i>	$\sigma_x$
4	4	1	17	14	14	-5.13	20.78
	5	3	19	13	13	-0.13	-0.67
	6	6	22	11	11	0.05	-0.01
	7	8	24	10	10	0.04	0.55
	8	9	25	10	10	0.05	0.76
	5	3	23	13	13	0.01	-6.24
5	6	6	26	12	12	0.11	1.53
	7	10	30	10	10	0.05	0.42
	8	13	33	10	10	0.05	-0.17
	9	15	35	9	9	0.05	-0.04
	10	16	36	9	9	0.05	0.05
	6	6	30	12	12	0.10	1.91
6	7	10	34	11	11	0.05	-0.57
	8	15	39	10	10	0.05	0.06
	9	19	43	9	9	0.05	0.15
	10	22	46	8	9	0.05	-0.08
	11	24	48	7	8	0.05	-0.03
	12	25	49	7	8	0.05	0.01
7	7	10	38	11	11	0.05	-0.63
	8	15	43	10	11	0.05	0.26
	9	21	49	9	9	0.05	-0.14
	10	26	54	8	9	0.05	-0.03
	11	30	58	8	8	0.05	0.06
	12	33	61	7	7	0.05	-0.03
	13	35	63	6	7	0.05	-0.01
	14	36	64	6	6	0.05	0.01

## (1) 高次項と精度

### a) 四辺形要素

図-6に示す正方形板の曲げ解析について検討する。ハイアラーキ多項式の適応性を調べるために、図(a)の1/4領域を1要素とする正方形要素と、図(b)のように1/2領域を2要素に分割した台形要素と縮退要素を用いる。図(b)はいびつな要素の例で、縮退要素は板の隅角点で2つの節点が重合している。したがって、重合点(図中の二重丸)は特異点である。計算では板厚比*t/a*を1/100、ポアソン比を0.3とする。また、すべての節線での展開項数を同一(*l*=*m*)にしている。

表-5は図-6(a)の正方形要素について、形状関数の最高次数*p*を完全多項式の次数(*p*=*m*)から最高次の長方形状(*p*=2*m*、図-2を参照)まで用いたときの計算結果である。IFは1変位成分当たりの内部(節面)自

表-6 台形要素における高次項の影響

<i>m</i>	<i>p</i>	<i>IF</i>	<i>DOF</i>	<i>S<sub>C</sub></i>	<i>S<sub>P</sub></i>	<i>w</i>	$\sigma_x$
4	4	1	17	14	14	-15.77	-17.18
	5	3	19	13	13	-1.76	5.01
	6	6	22	11	12	-0.01	4.77
	7	8	24	10	11	0.15	4.45
	8	9	25	10	10	0.17	4.81
	5	3	23	13	13	-2.41	-3.02
5	6	6	26	12	12	0.08	6.16
	7	10	30	10	11	0.08	-0.43
	8	13	33	10	10	0.06	-1.40
	9	15	35	9	10	0.05	-1.10
	10	16	36	9	9	0.06	-1.03
	6	6	30	12	12	-0.03	9.27
6	7	10	34	11	11	0.07	-1.58
	8	15	39	10	10	0.08	0.10
	9	19	43	9	9	0.05	0.24
	10	22	46	8	9	0.05	-0.11
	11	24	48	8	8	0.05	-0.07
	12	25	49	7	8	0.05	0.00
7	7	10	38	11	11	0.07	-2.18
	8	15	43	10	11	0.08	0.28
	9	21	49	9	9	0.04	-0.19
	10	26	54	8	9	0.05	-0.10
	11	30	58	8	8	0.05	0.08
	12	33	61	7	8	0.05	-0.05
7	13	35	63	6	7	0.05	0.01
	14	36	64	6	6	0.05	0.02

由度数、DOFは要素の総自由度数(成分)、*S<sub>C</sub>*と*S<sub>P</sub>*は式(43)、式(44)の推定有効桁数で*t*=16桁としている。表より、推定有効桁数は多項式の項数*m*には無関係で最高次数*p*のみに依存し、*p*の増加とともに減少している。文献10),11),14)では、条件数は*m*の変化に対して最低次(最小自由度数)と最高次(長方形状)の場合について調べられており、条件数の採り方も異なるので単純に比較することができない。そこで、表とは別な補足計算結果から判断すると、条件数が最良のLegendre多項式に比べて10次まではほぼ同じで、12~14次で1~3桁ほど悪い。しかし、Lagrange多項式よりは10次で5桁以上良い。

表-6,7は、図-6(b)の台形要素と縮退要素についての結果である。台形要素は文献14)でも調べられており、Legendre多項式やChebyshev多項式では正方形要素に比べて条件数はやや悪くなっているが、本論文で提案した多項式は正方形要素と同じで、この程度の要素のゆがみには影響されないことが分かる。縮退要素では条件数が悪くなるのは当然であるが、それでも正方形要素に比べて1~2桁悪い程度である。これらの要素でも推定有効桁数は*p*のみに依存している。なお、*S<sub>P</sub>*は*S<sub>C</sub>*の非常によい近似値であることが分かる。

次に、消去演算後の精度を調べてみる。表-5~7の*w*と $\sigma_x$ は、図-6で四辺単純支持した板に満載等分布荷重*q*が作用したときの解析解<sup>18)</sup>に対する板の中央点の

表-7 縮退要素における高次項の影響

$m$	$p$	$IF$	$DOF$	$S_C$	$S_P$	$w$	$\sigma_x$
4	4	1	17	11	11	-15.77	7.96
	5	3	19	11	11	-1.76	2.80
	6	6	22	10	10	-0.01	7.69
	7	8	24	9	10	0.15	5.14
	8	9	25	9	9	0.17	4.57
5	5	3	23	10	10	-2.41	3.13
	6	6	26	10	10	0.08	7.42
	7	10	30	9	10	0.08	-0.93
	8	13	33	9	9	0.06	-1.38
	9	15	35	8	9	0.05	-0.93
	10	16	36	8	8	0.06	-0.82
6	6	6	30	10	10	-0.03	9.87
	7	10	34	9	10	0.07	-1.75
	8	15	39	9	9	0.08	0.24
	9	19	43	8	8	0.05	0.09
	10	22	46	7	8	0.05	-0.04
	11	24	48	7	7	0.05	-0.02
	12	25	49	6	7	0.05	0.00
7	7	10	38	9	9	0.07	-1.81
	8	15	43	9	9	0.08	0.22
	9	21	49	8	8	0.04	-0.20
	10	26	54	7	8	0.05	-0.02
	11	30	58	7	7	0.05	0.03
	12	33	61	6	7	0.05	-0.08
	13	35	63	5	6	0.05	0.01
	14	36	64	5	5	0.05	0.01

たわみと応力の誤差(%)を示したものである。 $p$  が大きくなると剛性行列の条件数が悪化して、推定有効桁数が減少しているにも拘わらず  $w$  と  $\sigma_x$  の誤差は小さくなっている。また、内部自由度数が最小の場合( $p = m$ )には、総自由度数 DOF が同一な他の場合に比べて精度が悪く、特に台形要素と縮退要素では顕著である。

表に示した誤差は 1 点のみに着目しているために振動しているので、自由度の選び方に関して明確なことがいえない。そこで、最高次数が同じ場合と、総自由度数が同じ場合の  $y$  軸上の応力分布を図-7に示す。○印は解析解である。図から、ある程度の展開項数(本計算例では  $m = 4 \sim 5$  項)を用いて  $p$  を大きくした場合に最も精度のよい値が得られ、総自由度数が同じでもそれに含まれる形状関数の最高次数  $p$  が低いときには精度は劣ることが分かる。また、図には示していないが、いずれの場合でも全ての内部自由度を用いれば精度は良くなる。以上のことから、同じ自由度数に対して  $p$  が最も高次になる長方形状に自由度を選ぶのが計算効率がよいといえる。

境界条件のみを変更して、周辺固定支持にした場合の応力分布を図-8に示す。固定支持板では単純支持板より  $m, p$  とも多く採らなければならないので、総自由度数はかなり多くなる。その結果、図-7ほど  $p$  による違いは認められないが、自由度の選択について同じことがいえる。

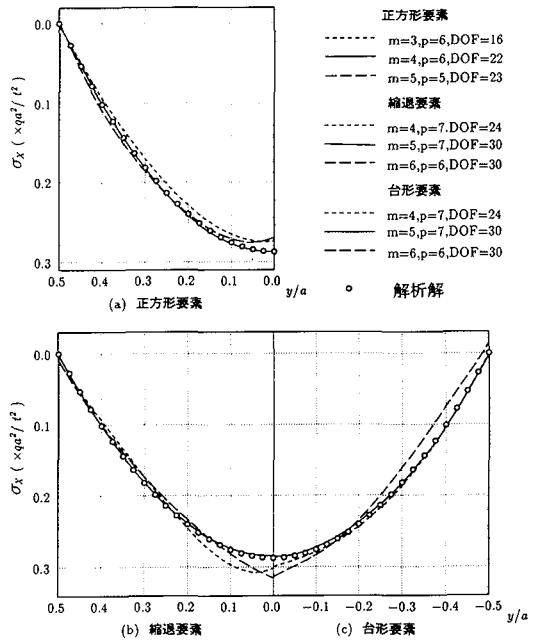


図-7 単純支持された正方形板の応力

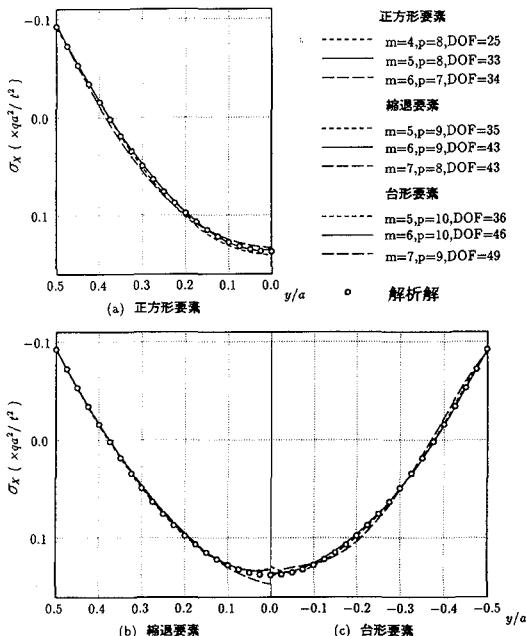


図-8 固定支持された正方形板の応力

## b) 三角形要素

三角形要素では、内部自由度の選び方は 1 通りで、常に完全多項式になる。正三角形要素について曲げ解析の剛性行列の条件数を調べると、正方形要素の  $p = m$  の場合と同じ  $S_C$  の値が得られることから性質はよいといえる。また、単純支持の正三角形板に満載等分布

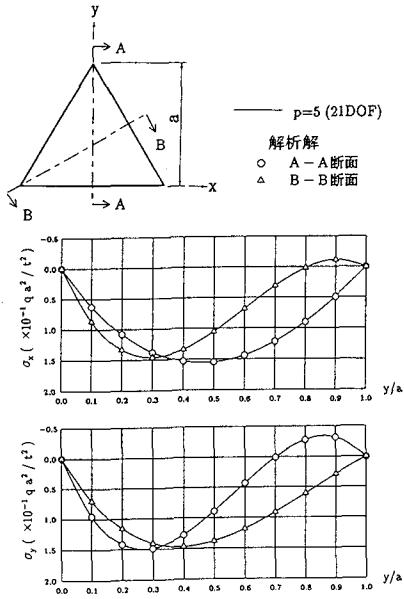


図-9 単純支持された正三角形板の応力

荷重が作用する場合に1要素で計算したたわみと応力の誤差は、4項(すなわち4次式)用いた場合には板の中央点で40~50%であるが、5項用いると全領域で解析解<sup>18)</sup>と5~7桁一致する値が得られた。このときの応力図を図-9に示す。これは、解析解の変位場が5次式で与えられているためと考えられる。

### c) 六面体要素

立方体の六面体要素について3方向の展開項数を同一にした場合の剛性行列の条件数は、平板と同様に最高次数 $p$ のみに依存する結果が得られた。ただし、同じ次数に対して推定有効桁数は表-5の値よりやや大きくなる。これを、後程説明するBoussinesqの問題に用いた結果では、展開項数によらず最高次数が低いほど解の精度は悪くなる。したがって、六面体要素でもすべての自由度を用いるのがよい。

a),c)の結果より、Serendipityタイプの高次項の選び方は最も精度が悪く、条件数が悪化してもすべての自由度を用いる方が効率がよい。また、この場合には同じ総自由度数に対して周辺自由度数が少ないので、構造全体解析の次元数が小さくなることからも計算効率がよいといえる。ただし、悪条件行列に対して敏感な反復法を用いる場合には、さらに検討が必要である。

## (2) 集中荷重の問題

集中荷重が作用する場合には、荷重作用点で特異性が生じるために、この点で変位をTaylor展開することができない。有限要素法では特異点問題に対して種々

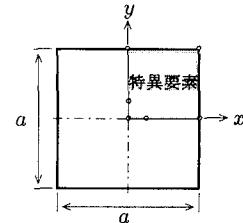


図-10 特異要素

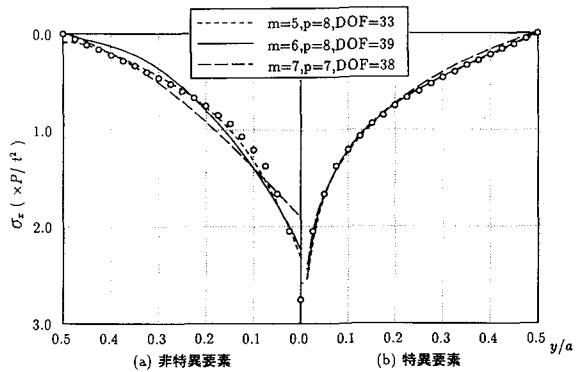


図-11 集中荷重による単純支持正方形板の応力

の方法が開発されており<sup>19)</sup>、応力集中箇所では細かい要素分割が用いられる。

集中荷重に対してはハイアラーキ要素による解の収束性が悪く、高次の関数を用いると要素内で応力が振動することがある。荷重作用点の近傍で要素を分割すれば振動を抑えることはできるが、 $p$ 法の特徴が活かされない。そこで、本文では1/4写像点を用いる特異要素を使用する。

### a) 集中荷重が作用する平板

集中荷重 $P$ が正方形板の中央に作用する場合を考える。この場合には、図-10に示すように、要素の2辺上の1/4点に写像点を設ける。ハイアラーキ写像では、式(35)より辺の中点のハイアラーキ座標値はゼロになるので、残りの2辺上に写像点を設ける必要はない。

四辺単純支持の場合について、図-6(a)の要素と特異要素による $y$ 軸上の応力 $\sigma_z$ を図-11に示す。図(a)の通常の非特異要素では応力は収束していないが、図(b)の特異要素ではよい値が得られている。図(b)で総自由度数DOFが同じであれば最高次数が大きい方( $p = 8$ の実線)がわずかながら精度がよい。

図-6(b)の縮退要素も特異要素であるので、この問題では板の中央点で節点を重合させる。計算結果は省略するが、正方形特異要素と同様に解の収束性は改善される。

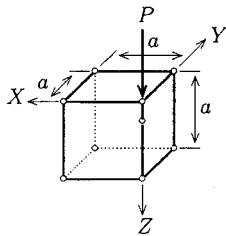


図-12 Boussinesq の問題

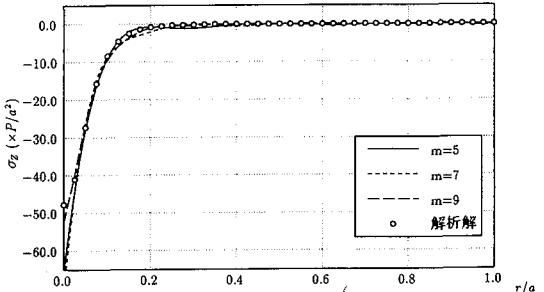
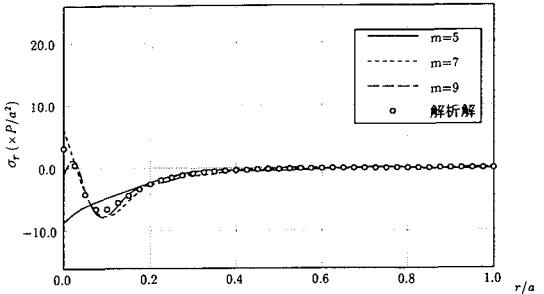


図-14 特異要素による応力

以上の問題は種々のFEM要素で解かれているが、要素分割を行うh法に比べて、p法では要素上の任意な点で滑かな応力分布が得られる。

## 8. 結論

ハイアラーキ要素を用いた有限要素法において、数値計算の効率化を図る手法を研究した。線形応力解析の結果から、プログラミング作業も考慮して以下のことがいえる。

- (1) 過去に報告されている関数よりも簡単な形状関数を提案した。
- (2) 関数列の性質は Legendre 多項式より悪いが、Lagrange 多項式よりもかなりよい。
- (3) 関数列は漸化式で与えられ、積分公式も得られるので数値計算に適している。
- (4) 高次項の選び方は、関数列の積で与えられるすべての項を用いるのが最も効率が良い。
- (5) ハイアラーキ写像の手法は簡単で、1/4写像点を用いた特異要素は集中荷重による応力の収束性を改善する。
- (6) 偶角点も含めた要素上の任意点の応力を、平滑化手法を用いて求めることができる。

以上の結論は、構造解析の基礎となる線形解析の限られた問題について得られたものであるので、今後、種々の問題に適用して本解析法の実用性を確かめたい。

終りに、条件数に関して有益な資料を提供して頂いた函館高専の渡辺 力君に謝意を表する。

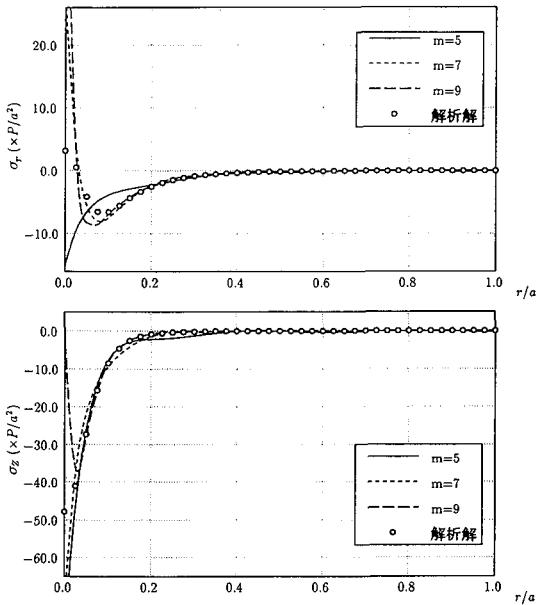


図-13 非特異要素による応力

### b) Boussinesq の問題

Boussinesq の問題を六面体要素を用いて計算する。半無限体の1/4領域を立方体の1要素でモデル化し、図-5の8節点要素と図-12に示すZ軸上に1/4写像点を1点設けた特異要素を用いる。境界条件には、対称条件の他に荷重載荷点以外の節点に解析解<sup>20)</sup>から得られる変位を強制変位として与える。

本計算例では3方向の展開項数を同一にして、関数列の三重積で与えられるすべての自由度を採用する。計算結果は軸対称性を考慮して円筒座標系( $r, \theta, Z$ )で表示する。 $\nu = 0.3$ として、 $m = 5, 7, 9$ 項用いたときの $(\theta, Z) = (\pi/4, a/10)$ における応力 $\sigma_r, \sigma_z$ を図-13, 14に示す。図中の○印は解析解である。

図-13の通常の要素による値は、特異点( $r = Z = 0$ )直下で応力は振動しており、項数(すなわち関数の次数)を上げるほど激しくなる。図-14の特異要素では5項の場合に全体的にゆるく振動しているが、項数を増やすれば次第に収束している。

表-I 二重積の線積分値

$(i, j)$	0	1	2	3	4	5	$j \geq 2$
$f_{ij}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{35}$
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$f_{0j} = \frac{(-1)^j}{(s^2 - 1)} + 1$
	2			$\frac{8}{15}$	0	$\frac{8}{105}$	$f_{1j} = \frac{1}{(s^2 - 1)}$
	3				$\frac{8}{105}$	0	$f_{ij} = \frac{8}{t(t^2 - 4)}$
	4					$\frac{8}{315}$	$(t = \frac{i+j-1}{3, 5, \dots})$
	5					$\frac{8}{693}$	
$g_{ij}$	0	1	-1	$O$			$O$
	1		1	$O$			
	2			$\frac{16}{3}$	0	$\frac{16}{15}$	$g_{ij} = \frac{16(2ij - 3t - 6)}{t(t^2 - 4)}$
	3				$\frac{16}{5}$	0	$(t = \frac{i+j-3}{1, 3, \dots})$
	4					$\frac{176}{105}$	
	5					$\frac{368}{315}$	
$h_{ij}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{15}$	$h_{ij} = (-1)^i \frac{2}{1-j^2}$
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	
	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{15}$	0	$h_{ij} = \frac{8(i-j)}{t(t^2 - 4)}$
	3	0	0	$\frac{8}{15}$	0	$-\frac{8}{105}$	$(t = \frac{i+j-2}{3, 5, \dots})$
	4	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	0	$\frac{8}{105}$	0	
	5	0	0	$\frac{8}{35}$	0	$\frac{8}{315}$	
$f_{ii}^*$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{24}{1225}$	$\frac{40}{3969}$	$f_{ii}^* = \frac{2k(k+1)}{(4k^2-1)^2} \left( \begin{matrix} k=i-1 \\ 2 \leq i \leq 5 \end{matrix} \right) + 1$

\*1)  $s = 2[(j+1)/2]$ , [ ] : ガウス記号

\*2) 6次以上の低減積分値を簡単な式で表すことができない。

$$f_{66}^* = \frac{8 \times 13}{3 \times 77^2}, \quad f_{77}^* = \frac{8 \times 251}{3 \times 429^2}, \quad f_{88}^* = \frac{8 \times 12371}{(45 \times 143)^2}, \quad f_{99}^* = \frac{8 \times 91159}{3 \times (85 \times 143)^2}$$

## 付録 I ハイアラーキ多项式の積分値

式(40)の積分値と非零要素の計算式を表-Iに示す。添字 $(i, j)$ は $\xi, \eta, \zeta$ に対してそれぞれ $(l, l'), (m, m'), (n, n')$ である。また、 $f_{ii}^*$ は $f_{ij}$ の対角要素に対する低減積分値である。

## 付録 II 三角形要素の面積分

式(42)は、6つの非負の整数をパラメータとする積分値である。これに変数変換

$$1 - 2\xi_i = t_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{II.1})$$

を行って次式のように表す。

$$\begin{aligned} I[q, r, s, L, M, N] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{q+r+s+1} \Delta \int_{-1}^1 \int_{-t_1}^1 (1-t_1)^q (1-t_2)^r (1-t_3)^s \\ &\quad \times (-t_1)^L (-t_2)^M (-t_3)^N dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

ここに、 $\Delta$ は三角形要素の面積である。また、 $t_i$ には $\xi_i$ と同様な従属関係がある。

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1 \quad (\text{II.3})$$

積分公式を汎用的な式で求めるために次の基本積分値 $J$ を定義する。

$$\begin{aligned} J[L, M, N] &= \int_{-1}^1 \int_{-t_1}^1 (-t_1)^L (-t_2)^M (-t_3)^N dt_1 dt_2 \\ &= (-1)^{M+N} \sum_{k=0}^M \frac{M!N!}{(M-k)!(N+k+1)!} \\ &\quad \times \left( \frac{1+(-1)^\alpha}{\alpha-1} - \frac{1+(-1)^\beta}{\beta-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

ここで、

$$\alpha = L + M - k + 2, \quad \beta = L + N + k + 3 \quad (\text{II.5})$$

積分値 $I$ は、 $J$ を用いて次式で求められる。

$$\begin{cases} I[q, 0, 0, L, M, N] = \left(\frac{1}{2}\right)^{q+1} \sum_{i=0}^q {}_q C_i J[L+i, M, N] \\ I[0, r, 0, L, M, N] = \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1} \sum_{i=0}^r {}_r C_i J[L, M+i, N] \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

ここに,  ${}_rC_i$  は二項係数である. さらに高次の積分は次の漸化式で求める.

$$\begin{aligned} I[q, r, 0, L, M, N] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{q+r+1} \Delta \sum_{i=0}^q {}_qC_i \left( \sum_{j=0}^r {}_rC_j J[L+i, M+j, N] \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^q \sum_{i=0}^q {}_qC_i I[0, r, 0, L+i, M, N] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^r \sum_{i=0}^r {}_rC_i I[q, 0, 0, L, M+i, N] \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} I[q, r, s, L, M, N] &= \left(\frac{1}{2}\right)^s \sum_{i=0}^s {}_sC_i I[q, r, 0, L, M, N+i] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^r \sum_{i=0}^r {}_rC_i I[q, 0, s, L, M+i, N] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^q \sum_{i=0}^q {}_qC_i I[0, r, s, L+i, M, N] \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

積分値は  $(q, L), (r, M), (s, N)$  を組にして順序を変更しても値は同じであるから次式が成り立つ.

$$I[q, r, s, L, M, N] = I[s, q, r, N, L, M], \quad \text{etc.} \quad (\text{II.9})$$

特別な場合として,  $I$  の定義式より衆知の積分公式が得られる.

$$I[q, r, s, 0, 0, 0] = 2\Delta \frac{q!r!s!}{(q+r+s+2)!} \quad (\text{II.10})$$

以上が一般的な積分公式である. この積分公式ではパラメータの採り方によって演算回数が異なることと, 高次の積分では漸化式を繰り返し用いるので, 式を変形して効率的な計算方法を求める.

基本積分値  $J$  もパラメータ  $L, M, N$  の順序に依らないことから, 式 (II.4) の総和をとるパラメータに最小値  $K$  を用いて式を変形する.

$$\begin{aligned} J[L, M, K] &= (-1)^{M+K} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{K!M!}{(K-k+1)!(M+k)!} \\ &\times \left( \frac{1+(-1)^\alpha}{\alpha-1} - \frac{1+(-1)^\beta}{\beta-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

ここに,

$$\alpha = L + K - k + 3, \quad \beta = L + M + k + 2 \quad (\text{II.12})$$

$$K = \min(L, M, N) \quad (\text{II.13})$$

式 (II.11) の  $L, M$  は,  $K$  に用いたパラメータと異なるパラメータとする.

次に, 形状関数  $N_{lmn}$  の次数  $p$  を10次以下とすると, 式 (42) におけるパラメータは図-40の階層図より次の値をとることがわかる(このために,  $l, m, n$  の少なくとも1つは1以下とする).

$$q, r, s = 0 \sim 2, \quad K = 0 \sim 2 \quad (\text{II.14})$$

表-II  $H(k)$

q	r	s	$H(k)$
0	0	0	$A_0$
1	0	0	$A_1$
2	0	0	$A_2$
1	1	0	$kA_1 - B_1$
2	1	0	$kA_2 - B_2$
2	2	0	$k(k+1)A_2 - 2kB_2 - B_3$

なお,  $p \leq 8$  のときには  $K = 0$  と 1,  $p \leq 5$  のときには  $K = 0$  のみである.

したがって, パラメータ  $q, r, s$  について 0, 1, 2 の場合の式を求めておくと便利である. 最小値  $K$  に対するパラメータを  $s$  として,  $s = 0$  と  $s = 1, 2$  の場合に分けて式を求める.  $s = 0$  の場合には  $I$  を次式のように表す.

$$\begin{aligned} I[q, r, s = 0, L, M, K] &= (-1)^{M+K} \left(\frac{1}{2}\right)^{q+r+1} \\ &\times \Delta \sum_{k=1}^{K+1} \frac{K!M!}{(K-k+1)!(M+r+k)!} [H(k)] \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

ここに,  $H(k)$  には表-IIに示す式を用いる. なお,  $q < r$  のときには,  $q$  と  $r$  及び  $L$  と  $M$  を交換する.

$s = 1, 2$  の場合には次式で計算する.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} I[q, r, 1, L, M, K] &= \frac{1}{2} I[q, r, 0, L, M, K] \\ &+ \frac{1}{2} I[q, r, 0, L, M, K+1] \\ I[q, r, 2, L, M, K] &= \frac{1}{4} I[q, r, 0, L, M, K] \\ &+ \frac{1}{2} I[q, r, 0, L, M, K+1] \\ &+ \frac{1}{4} I[q, r, 0, L, M, K+2] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

式 (II.15), (II.16) を用いて剛性行列の計算に必要な積分値を求めることができる.

表-IIの記号は次のとおりである.

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a}{\alpha-1} - \frac{b}{\beta-1} \\ A_1 &= \frac{a}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{b}{\beta(\beta-1)} + \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta} \\ A_2 &= 2 \left( \frac{a}{\alpha(\alpha^2-1)} - \frac{b}{\beta(\beta^2-1)} + \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta} \right) \\ B_1 &= 2b \frac{M+1}{\beta^2-1} \\ B_2 &= \frac{4(M+1)}{\beta(\beta+2)} + \frac{2\beta+1}{\beta(\beta+2)} B_1 \\ B_3 &= 4 \frac{M+2}{\beta+3} B_1 \\ a &= 1 + (-1)^\alpha, \quad b = 1 + (-1)^\beta \end{aligned}$$

## 参考文献

- 1) Cheung,Y.K.:*Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976.
- 2) 林 正,坂口隆紀:Mindlin節点帶板要素による厚板と薄板の曲げ解析, 土木学会論文集 No.459/I-22, pp.93 ~ 101, 1993.
- 3) 林 正,渡辺 力:節点帶板法による薄肉構造物の立体解析, 構造工学論文集 Vol.41A, pp.435 ~ 442, 1995.
- 4) 林 正,渡辺 力:節点帶板法による薄肉構造物の座屈解析, 土木学会論文集 No.525/I-33, pp.17 ~ 26, 1995.
- 5) 林 正,小林亨市:節点プリズム法による3次元応力解析, 土木学会論文集, No.450/I-20, pp.95~101, 1992.
- 6) Zienkiewicz,O.C. and Taylor,R.L.:*The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.1, McGraw-Hill, pp.150~203, 1987.
- 7) 同上 6) の pp.139~148.
- 8) Szabo,B. and Babuška,I.:*Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
- 9) Szabo,B.A. and Sahrmann,G.J.:Hierarchic plate and shell models based on p-extension, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.26, pp.1855~1881, 1988.
- 10) Babuška,I., Griebel,M. and Pitkäraanta,J.:The problem of selecting the shape functions for a p-type finite element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.28, pp.1891~1908, 1989.
- 11) Babuška,I. and Elman,H.C.:Performance of the h-p version of the finite element method with various elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.36, pp.2503~2523, 1993.
- 12) Vijayakar,S.M., Busby,H.R. and Houser,D.R.:Finite element analysis of quasi-prismatic bodies using Chebyshev polynomials, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.24, pp.1461~1477, 1987.
- 13) Surana,K.S. and Sorem,R.M.:p-Version hierarchical three dimensional curved shell element for elastostatics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.31, pp.649~676, 1991.
- 14) Edgar,N.B. and Surana,K.S.:On the conditioning number and the selection criteria for p-version approximation, *Comput. & Struct.*, Vol.60, No.4, pp.521~530, 1996.
- 15) Webb,J.P. and Abouachra,R.:Hierarchical triangular elements using orthogonal polynomials, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.38, pp.245~257, 1995.
- 16) 前出8) の pp.166~167.
- 17) 林 正,浜田政則:数値計算法, 新体系土木工学 1, 技報堂出版, pp.135 ~ 136, 1983.
- 18) Timoshenko,S.P. and Krieger,S.W.:*Theory of Plates and Shells*, 2nd Ed., McGraw-Hill, pp.313~314, 1959.
- 19) 鶴津久一郎ほか共編:有限要素法ハンドブック I, 基礎編, 培風館, pp.416~421, 1981.
- 20) 秋山成興:弾性体の力学, 新体系土木工学 6, 技報堂出版, pp.179~183, 1979.

(1997.4.10 受付)

## EFFICIENT HIERARCHICAL ELEMENTS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS

Masa HAYASHI, Motonao YAMANAKA, Hiroshi KASEBE and Toshiaki SATOH

Efficient hierarchical elements are presented for the p-version of the finite element method. The shape functions of the elements are expressed by simple polynomial series based on the p-approximation concept and the polynomials and those derivatives are given in the form of recurrence formulas, respectively. Furthermore, integral formulas for the stiffness matrices of regular elements are given in the explicit forms.

In this paper, quadrilateral, triangular and hexahedral elements are formulated for plane stress, plate bending and three dimensional stress analysis, and singular elements could be derived easily from those elements by the use of hierarchical mapping technique and show superior convergence for concentrated loading.