

# 単杭の水平挙動解析に用いる 砂の3次元構成則の検討

若井明彦<sup>1</sup>・鵜飼恵三<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 博(工) 群馬大学助手 工学部建設工学科 (〒376 群馬県桐生市天神町1-5-1)

<sup>2</sup>フェロー会員 工博 群馬大学教授 工学部建設工学科 (〒376 群馬県桐生市天神町1-5-1)

砂地盤中に立込まれた単杭の室内水平載荷実験結果を3次元弾塑性FEMにより予測することを試みた。砂地盤は弾完全塑性体と仮定し、降伏規準と塑性ポテンシャルを変えたいくつかのケースについて解析を行った。解析で得られた杭頭荷重-変位関係や、地盤内の各位置の要素の応力径路に基づく検討から、各構成則の特性が杭基礎の水平挙動に与える影響を調べた。その結果、関連流れ則は非関連流れ則に比べて大きめの荷重値を与えること、また降伏規準にMohr-Coulomb式、塑性ポテンシャルにDrucker-Prager式を用いた混合モデルは、両者をともにMohr-Coulomb式とした場合の解と、ともにDrucker-Prager式とした解の中間的な解を与えることなどの特徴が明らかになった。

**Key Words :** constitutive equation, elasto-plastic, finite element method, horizontal load, sand, single pile, three-dimensional

## 1. はじめに

地盤の破壊と変形とを一貫して追跡しようとする立場から、杭基礎の水平挙動予測に3次元弾塑性FEMを適用する研究が増加している。筆者らは以前に単杭の室内水平載荷試験結果を3次元弾塑性FEMにより再現し得ることを報告<sup>1)</sup>したが、その中で砂地盤の3次元構成則の選択が解析結果を大きく左右する結果が得られた。

砂地盤に弾完全塑性体と仮定した3次元弾塑性FEMにより杭基礎の水平解析を行った既往の主な研究において、用いられた砂の3次元構成則を列挙する。降伏規準、塑性ポテンシャルともにDrucker-Prager式を採用し関連流れ則を適用したモデル(木村<sup>2)</sup>, Trochanisら<sup>3)</sup>)。降伏規準ならびに塑性ポテンシャルとしてMohr-Coulomb式の近似曲面(拡張Drucker-Prager式)を提案し、非関連流れ則を適用したモデル(Brownら<sup>4)</sup>)。降伏規準にMohr-Coulomb式、塑性ポテンシャルにDrucker-Prager式を採用し非関連流れ則を適用したMC-DP混合モデル(若井・鵜飼<sup>1)</sup>)。いずれもせん断強度の拘束圧依存性を考慮した、主応力空間内で錐形の降伏曲面を有するモデルである。

本論文では砂地盤を対象とした各構成則の特性が、単杭の水平挙動へ与える影響をFEMにより比較検討した。

対象とした構成則は、降伏規準と塑性ポテンシャルとともにDrucker-Prager式としたモデル、ともにMohr-Coulomb式としたモデル、そしてMC-DP混合モデルの三種類である。以前に筆者らが行った単杭の解析<sup>1)</sup>においては、これら三モデルを比較すると、Mohr-Coulomb, MC-DP, Drucker-Pragerの順に、同一変位時に対する杭頭荷重が小さくなるという結果が得られた。これは以前に田中<sup>5)</sup>が砂地盤の支持力に関する同様の解析で得た結果と同じ傾向である。

本論文においては、地盤反力の発生機構を地盤内各点の要素の応力状態に着目して調べ、各構成則の降伏曲面と応力径路との関係を明らかにした。特に他のモデルと比較した場合にMC-DPモデルが有する利点を明確にした。

## 2. 解析の概要

本解析は単杭の室内水平載荷試験を再現したものである。乾燥した砂地盤中にアルミニウム製の中空円筒杭を立て、杭頭部を回転自由で水平載荷した。解析で対象としたケースの模型杭の諸元は杭径50mm, 肉厚1.5mm, 杭長1750mmである。地表面から50mm突出した杭頭部に載荷した。

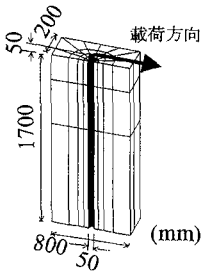


図-1 解析メッシュ図。

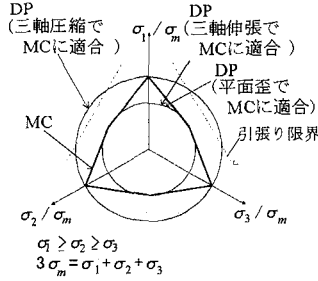


図-2  $\pi$  平面上の MC と DP の比較 ( $\phi = 42^\circ$ )。 (DP については、MC にフィットさせる際に前提とする応力状態を変えた3ケース)。

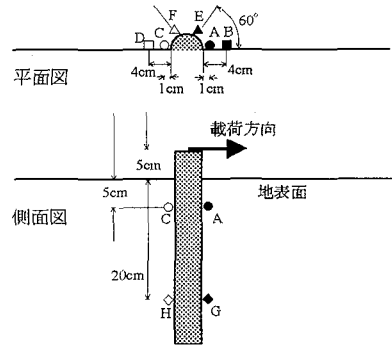


図-3 解析における地盤内の応力径路の出力点位置。

表-1 対象とした解析ケース (砂地盤の構成則)。

ケース番号	降伏規準	塑性ポテンシャル	$\psi$ と $\phi$ の関係	MC に DP をフィットさせる応力状態
EL	弾性	-	-	-
MD1	MC	DP	$\psi = \phi - 30^\circ$	平面歪
MD2	MC	DP	$\psi = \phi$	平面歪
MM1	MC	MC	$\psi = \phi - 30^\circ$	-
DD1	DP	DP	$\psi = \phi - 30^\circ$	平面歪
DD2	DP	DP	$\psi = \phi - 30^\circ$	三軸伸張

以下に解析の概要を述べる。数式などの詳細は文献<sup>9)</sup>を参照されたい。

### (1) 材料定数

砂地盤の材料定数を決定するため、実験に用いた砂 (平均的な相対密度を72%に調整した小名浜砂<sup>10)</sup>) の排水三軸圧縮試験<sup>11)</sup>から、弾性係数  $E_{50}$  と内部摩擦角  $\phi$  を求めた。その結果、 $E_{50}$  は拘束圧  $p$  の平方根にほぼ比例し、次式で表された。

$$E_{50} = E_0 \sqrt{\frac{p}{p_0}} \quad (E_0 = 19.8 \text{ MPa}, \quad p_0 = 98 \text{ kPa}) \quad (1)$$

模型実験の応力レベルを考えると低拘束圧下の三軸試験が必要となるが、試験装置の都合上、実験よりもやや大きな応力レベルの試験結果を外挿することで低拘束圧下の定数を推定した。解析では式 (1) で  $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$  を用いることで、 $E_{50}$  は深さの平方根に比例すると仮定した。ここに  $\sigma_1, \sigma_3$  はそれぞれ最大、最小主応力である。水平静止土圧係数  $K_0 = 0.5$  と仮定した。 $\phi$  は拘束圧によらずほぼ一定であったため、解析上も深さによらず  $42^\circ$  とした。杭と地盤との境界部には、両者間のすべりを表現するための薄い要素 ( $\phi = 25^\circ$ ) を挿入した。

### (2) 解析ケース

解析に用いた有限要素メッシュを図-1に示す。適切なメッシュ粗度の検討は文献<sup>12)</sup>で行った。

対象とした解析ケース一覧を表-1に示す。砂地盤の構成則のみを操作した。MD2以外では砂のダイレイタンシー角  $\psi = \phi - 30^\circ$  (非関連流れ則) とした。MM1のMohr-Coulomb規準 (MC-MC) は  $\pi$  平面上的の特異点近傍で降伏曲面を丸めるための特殊な補正を施したものである。これに対しMC-DPモデルは、応力径路が特異点近傍に到達するのを防ぐため田中<sup>9)</sup>により提案されたものである。

DD2以外のケースでは、Drucker-Prager式 (DPと略) をMohr-Coulomb式 (MCと略) にフィットさせる際に平面歪状態を前提とした。DP式をMC式にフィットさせる際の応力状態として、他に三軸圧縮 ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) や三軸伸張 ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ) 状態が考えられる<sup>9)</sup>。図-2に本解析の砂地盤のように  $\phi = 42^\circ$  のもとの、各応力状態を前提にMC式にフィットさせたDP式を示し、MC式と比較する。図から分かるように、三軸圧縮状態のもとでフィットさせると  $\phi > 36.9^\circ$  の場合に降伏曲面内に引張り領域が生じてしまい<sup>9)</sup>実情に合わない。従って本研究ではDP式を降伏規準に用いる場合、三軸圧縮状態を前提にフィットさせたケースは解析しなかった。 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は主応力で  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  と仮定した。

### (3) 応力径路の出力点位置

本研究では載荷中の地盤内各点の応力径路を調べる。応力径路の出力点位置を図-3に示す。杭頭の載荷方向は図に向かって右方向である。出力点は杭の水平抵抗に大きく寄与と思われる杭周辺の8点 (A~H) とした。地表面から5cmの深さにおいて杭の周囲6点、15cmの深さではA点の直下に位置するG点とC点の直下のH点の2点とした。平面図においてA, E, F, C点はいずれも杭表面からの距離が1cmの点で、杭軸と各点とを結ぶ線分が載荷方向となす角は、この順にそれぞれ0, 60, 120, 180 $^\circ$  である。BおよびD点は載荷方向に対してそれぞれ杭の正面と背面に位置し、杭表面からの距離が4cmの点である。

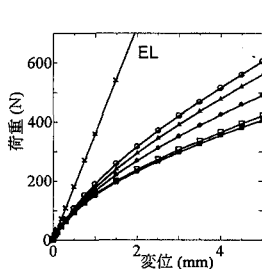


図4 各ケースの杭頭荷重-変位曲線。

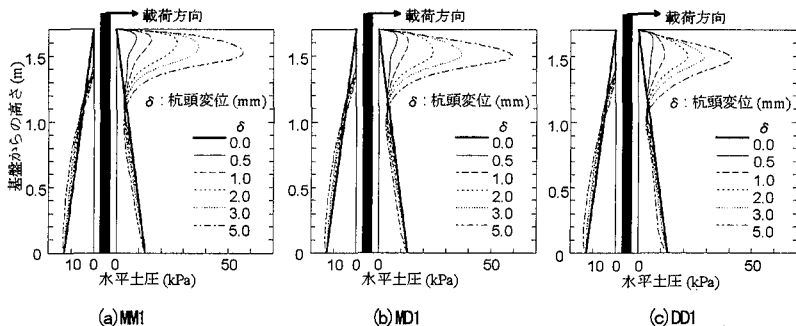


図5 各ケースの杭表面に作用する水平土圧分布の変化。

### 3. 解析結果と考察

杭頭の最大水平変位量は5mm (杭径の10%) とした。各ケースの解析結果を示し、各構成則と水平抵抗の発生機構との関係を、地盤内各点の応力径路に基づいて考察する。なお以下の一部は文献1)と重複する。

#### (1) 杭頭の荷重-変位曲線

各ケースの杭頭荷重-変位曲線を図-4に示す。 $\psi = \phi - 30^\circ$  と仮定した4ケースを比較すると、MM1 (MC-MC)、MD1 (MC-DP)、DD2 (DP-DP)、DD1 (DP-DP)の順に、同一変位時に対する杭頭荷重が小さくなるのが分かる。DD1とDD2の差はきわめて小さいが、これは図-2において両者の降伏曲面がほとんど等しいことに対応している。DP-DPを用いると荷重値が小さめに評価されることが分かる。

$\psi = \phi$  としたケースMD2の荷重値は、同じくMC-DPモデルで $\psi = \phi - 30^\circ$  としたケースMD1より大変形時で2割程度大きな値をとることが分かる。本論文では省略するが、MC-MCやDP-DPについて同様の検討を行った結果、やはり同じ傾向が得られた。一般に関連流れ則( $\psi = \phi$ )は非関連流れ則( $\psi \neq \phi$ )に比べて、荷重値が大きめに評価される。

#### (2) 杭表面に作用する水平土圧分布の変化

MM1、MD1、DD1の3ケースについて、荷重中の杭表面の水平土圧分布の変化を図-5に示す。荷重方向に対して正面と背面のみについて示した。図中で $\delta$ は杭頭変位量を表す。DD1はMM1と比較して土圧分布の最大位置の深くなるのがより早い。平面歪状態や三軸伸張状態を前提にDPをMCにフィットさせた場合には、MCに比べて杭の水平抵抗に大きく寄与する受働側表層地盤の強度が小さめに評価されることが確認された。なおMD1はMM1とDD1の中間的な傾向を示している。MD1とMM1の相違点は両者の塑性ポテンシャルである。地盤の抵抗特性が降伏規準だけでなく塑性ポテンシャルの形状に大きく影響されることが確認された。

以上の力学的機構の解明には、地盤内各点の応力径路の追跡が有効であると考えられる。以下、図-5の各点における荷重中の応力径路を基に議論を進める。

#### (3) MC-DPモデル (ケースMD1) の応力径路

まずMD1について、各位置の応力径路を図-6に示す。終点の杭頭変位量は5mmである。図-6(a)は $\tau_{oct} - \sigma_{oct}$  関係、図-6(b)は $\pi$  平面上の径路を示したものである。図-6(a)、(b)では初期応力点を矢印で示した。図-6(a)では $\sigma_{oct}$  が0→40kPaの範囲とその拡大図(0→3kPa)の2種類を図化した。図-6(b)では $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  なる各主応力をそれぞれ平均主応力 $\sigma_m$ で除して正規化した。ここで応力点は図のように中心角 $60^\circ$ の領域内に限定される。図-6(c)は荷重中の最大主応力 $\sigma_1$ の方向の変化を示したものである。水平面内、鉛直面内についてそれぞれ荷重方向、鉛直方向となす角 $\alpha, \beta$ で表した。図-6(a)と(b)において降伏曲面を一点鎖線で示したが、MCはLode角によって $\tau_{oct} - \sigma_{oct}$  平面上の降伏線の傾度が異なるため、図-6(a)では三軸圧縮と三軸伸張状態の強度を示した。本解析の砂地盤は $c = 0$ のため、図-6(b)に見られるように $\sigma_m$ で除して正規化した降伏線は、 $\pi$  平面上では応力レベルによらず唯一の線で描ける。

図-6(a)より、受働側の地盤(図中の黒点)は荷重により $\sigma_{oct}$  が急激に増加することが分かる。特に杭近傍のA、G点ではその増加が著しい。 $\sigma_{oct}$  の増加により生ずる体積圧縮変形は、本解析のような弾完全塑性モデルにおいては弾性変形であることから、これらの点ではせん断強度だけでなく、弾性係数の適切な評価が重要である。一方、杭からやや離れたB点や、杭の近傍でありながら荷重方向と $60^\circ$ の方向角をなす位置E点での $\sigma_{oct}$  増加は相対的に小さい。このことは杭基礎の水平抵抗が杭の前面側でごく近傍の地盤の特性に大きく影響されることを示唆している。またA、G点を比較して、G点の応力の方がより大きくなるのは、図-5の土圧の最大位置が表層部よりやや深い位置で生じる現象に対応している。なお主働側の各点では荷重とともに $\sigma_{oct}$  が減少する。杭を挟んでG点の反対側に位置するH点では減少が特に著しい。

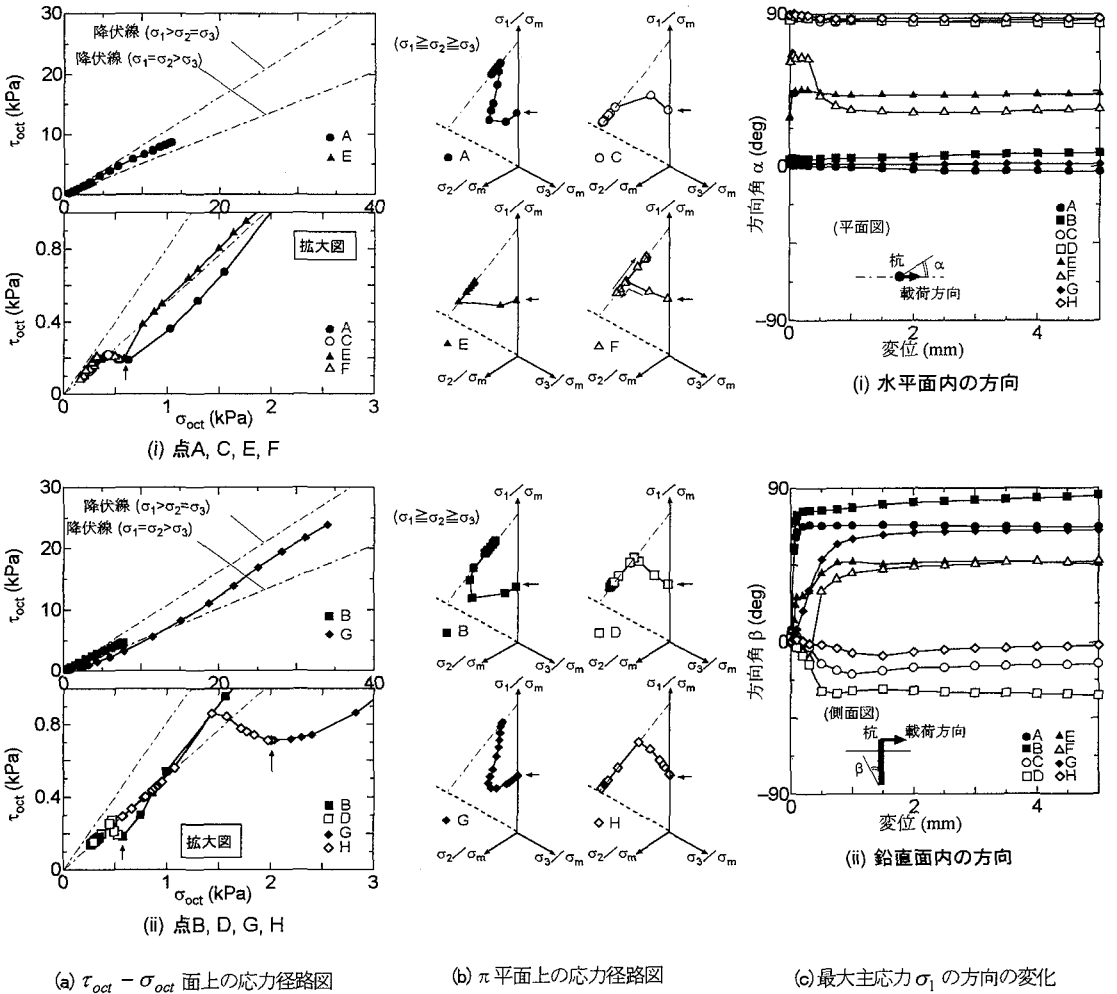


図-6 MD1 における地盤内各点の応力経路と主応力回転。

図-6(b)より、 $\pi$  平面上の応力経路について考察する。受働側各点では初め  $\sigma_2$  の増加が目立ち、応力点が三軸伸張側へ接近する。その後  $\sigma_1$  の増加が卓越し降伏、Lode角がほぼ一定のまま  $\sigma_{oct}$  のみが増加して行く。初めに三軸伸張側へ近づくのは図-6(c)で示されるように、载荷初期に  $\beta$  が大きく回転することと関連する。初期状態では  $\sigma_1$  は鉛直方向であるが、载荷とともに水平応力成分が増加し受働状態となるためである。このような主応力の回転の考慮は今後の課題である。図-6(b)で降伏後に応力点があまり移動しなくなるのは、MC-DPモデルの塑性ポテンシャルがDPであるためである。後でMC-MCとの比較を行い、違いを明らかにする。

主働側各点では、初期から相対的に  $\sigma_3$  の減少が目立つ。また降伏後にはF点を除いたすべての点で徐々に三軸伸張側へ応力点が移動する傾向が見られる。 $\beta$  が負へ

転じた点の回転量は正へ転じた点のそれより絶対値としては小さいが、これは杭を挟んで前面に受働域、背面に主働域が発達したためである。図-6(c)における载荷中の  $\alpha$  の値は、杭の前面、背面の点がそれぞれ  $0^\circ, 90^\circ$ 、载荷方向に対して斜め前方、後方の2点は  $45^\circ$  程度でほぼ一定であった。

次節以降では、他の各ケースの応力経路図をケースMD1と比較することで、各構成則の特徴を明らかにする。

#### (4) MC-DP (ケースMD1) と、MC-MC (ケースMM1) およびDP-DP (ケースDD1) との比較

図-7にMM1、図-8にDD1の点A,C,E,Fの応力経路を示す。DD1は降伏規準がDPのため  $\tau_{oct} - \sigma_{oct}$  図中の降伏線は唯一つである。まず点A,E,Fについての  $\pi$  平面上の応力経路に着目する。MM1の各点は降伏後にMD1と比べて、応力

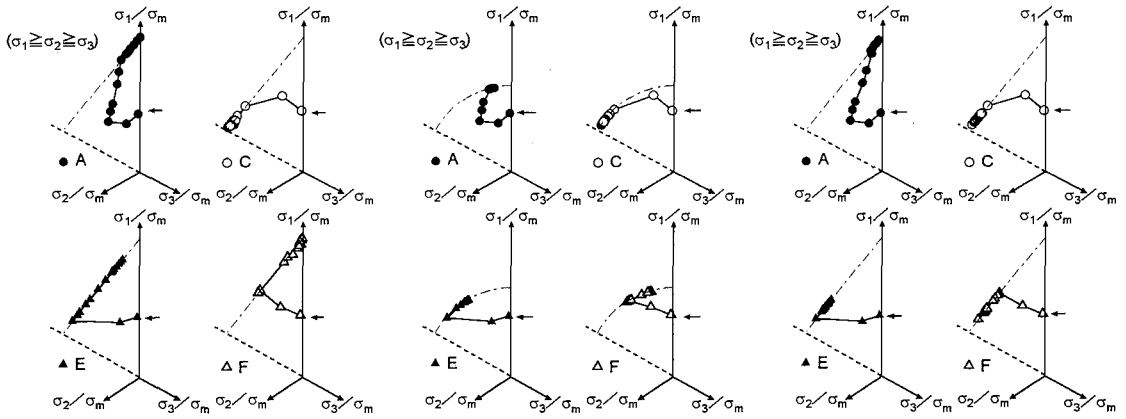


図-7 MM1 の応力経路.

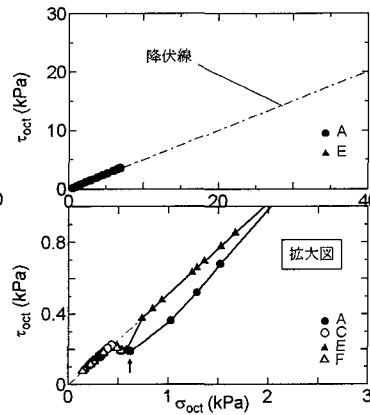
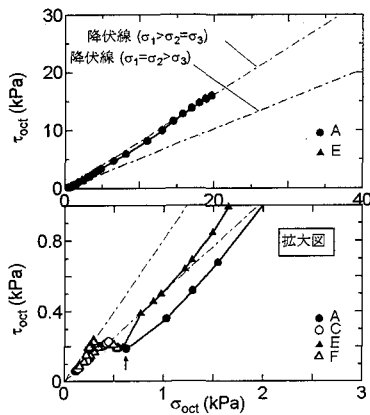


図-8 DD1 の応力経路.

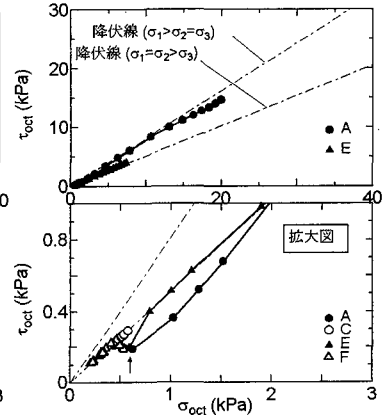


図-9 MD2 の応力経路.

点が三軸圧縮線（特異点）に早く近づいて行く傾向がある。これが田中<sup>9)</sup>が指摘した、非関連流れ則を適用したMC-MCモデルの一つの特徴である。なお精度良く特異点近傍の処理を行うにはコーナ理論<sup>9)</sup>などを適用する必要があるが、今回は単純化のため特異点近傍の降伏曲面を丸める補正を施しただけである。従って、ここで得た解には若干の誤差が含まれている可能性がある。特異点の処理法が解析結果へ影響するのを回避するためには、やはりMC-DPモデルが優れている。

一方、DD1の各点の $\pi$ 平面上的の径路は降伏後にほとんど応力点が移動せず、MD1とはほぼ同じ傾向である。MD1の塑性ポテンシャルがDD1と同じくDP式であることから、降伏後に応力点が降伏曲面上を移動する径路は、塑性ポテンシャルの特性に大きく影響を受けることが確認された。なおDD1は一点鎖線で示したように、MC式を用いた他のケースに比べて三軸圧縮側の強度が小さいため、A点がきわめて早く降伏線に到達し、結果として杭頭荷重が小さめになったと考えられる。

$\tau_{oct} - \sigma_{oct}$  平面上の応力経路を調べると、MM1でA点の径路の終点の $\sigma_{oct}$ は20kPaに達している。同じ値がMD1では14kPa、DD1では7kPaである。MM1は三軸圧縮側に強度の余裕があるため杭前面の地盤反力が大きくなり、図-4で見たように大きな杭頭荷重を与える。これは図-5の土圧分布で受働側表層部の土圧が他の2ケースより大きい傾向と一致する。

以上をまとめると次のようになる。MC-MCは特異点処理に問題を有する。また、MCにフィットする際に三軸伸張ないし平面歪状態を前提とした場合のDP-DPは、極端に小さな荷重値を与える欠点がある。三軸圧縮状態を前提にフィットすると、降伏曲面内に引張り領域が生じてしまい、いずれにせよDP-DPは実情に合わない。MC-DPにはこれらの欠点がなく、二種類のモデルの中間的な解を与えるため、砂の3次元構成則として有効である。

(5) MC-DPモデルで  $\psi = \phi - 30^\circ$  (ケースMD1) と  $\psi = \phi$  (ケースMD2) の場合の比較

図-9にMD2の点A,C,E,Fの応力径路を示す。  $\pi$  平面上の径路について、A点は降伏前にMD1に近い径路をたどるものの、降伏後はMM1のように徐々に三軸圧縮線へ近づく傾向を示す。なおF点が降伏後に三軸伸張側へ移動するのは他のケースに見られない傾向である。  $\tau_{oct} - \sigma_{oct}$  平面上においては、A点はMM1の結果に似た径路を進み、終点での  $\sigma_{oct}$  がMM1とほぼ同じ約20kPaである。しかしMM1に比べてE点(荷重方向に対し斜め前面の点)の  $\sigma_{oct}$  増加が大きく、終点で比較するとMM1の場合の2倍程度の値を有している。杭の荷重前面側の広い範囲で地盤反力が発揮されることが関連流れ則の特徴であり、これが大きな杭頭荷重値を与えると考えられる。地盤の破壊・変形挙動を適切に表現するには  $\psi < \phi$  とした非関連流れ則が必要であることが示された。

#### 4. 結論

本論文で得られた知見を簡単にまとめる。

- (1) 弾完全塑性モデルでは体積圧縮変形が弾性変形であることを考えれば、  $\sigma_{oct}$  が増加した杭近傍受働側地盤では、応力レベルを考慮した適切な弾性係数の評価が望ましい。
- (2) 応力点が降伏曲面上を移動する際には、塑性ポテンシャルの特性が結果に大きく影響する。
- (3) MC規準(DP規準)は相対的に三軸圧縮側の強度が大きい(小さい)ため、より大きな(小さな)杭頭荷重を与える。
- (4) 通常のMC-MCは特異点処理が解に誤差を生む危険

性がある。DP-DPは、場合によって極端に小さな荷重値を与えたり、もしくは降伏曲面内に引張り領域を生じたり、いずれにせよ不適切である。MC-DPにはこれらの欠点がなく、砂の3次元構成則として有効である。

- (5) 地盤の挙動を適切に表現するには  $\psi < \phi$  とした非関連流れ則が必要である。

謝辞：本研究にあたり貴重なご助言を頂いた(株)建設技術研究所の五瀬伸吾氏に深く謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) 若井明彦, 鶴飼恵三: 単杭の水平荷重挙動に関する模型実験と解析, 土木学会論文集, No.517/III-31, pp.159-168, 1995.
- 2) 木村亮: 水平力を受ける群杭の挙動に関する基礎的研究, 京都大学学位請求論文, 1993.
- 3) Trochanis, A.M., Bielak, J. and Christiano, P.: Three-dimensional nonlinear study of piles, *Proc. ASCE*, Vol.117, No. GT3, pp.429-448, 1991.
- 4) Brown, D.A. and Shie, C.F.: Numerical experiments into group effects on the response of piles to lateral loading, *Computers and Geotechnics*, Vol.10, pp.211-230, 1990.
- 5) 田中忠次: 有限要素法による変形・安定解析, わかりやすい土質力学原論, 土質工学会, 第1回改訂版, pp.109-154, 1992.
- 6) 田中忠次, 鶴飼恵三, 河邑眞, 阪上最一, 大津宏康: 地盤の三次元弾塑性有限要素解析, 丸善, pp.56-61, 1996.
- 7) Bishop, M.A.: The strength of soils as engineering materials, *Geotechnique*, Vol.16, No.2, pp.91-128, 1966.
- 8) 富田佳宏: 数値弾塑性力学, 養賢堂, pp.131-137, 1990.

(1997. 6. 9 受付)

## INVESTIGATIONS OF THE THREE-DIMENSIONAL CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR SAND USED IN ANALYSES ON LATERAL BEHAVIOR OF SINGLE PILE

Akihiko WAKAI and Keizo UGAI

A model test for laterally loaded single pile embedded in sand and their 3-D FE analyses have been carried out. In the analyses the sand was assumed to be an elasto-perfectly plastic material, and several 3-D constitutive equations for sand were investigated. In each case, the stress paths of the ground were output and the interaction between the pile and the ground was discussed in detail from a viewpoint of mechanics. It is shown that the 3-D constitutive equation should be selected carefully in such analyses.