

底面摩擦模型実験の個別要素法解析のための 底面摩擦力の定式化

松井幹雄¹・西村和夫²・今田 徹³

¹学生員 工修 東京都立大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒192-03 八王子市南大沢1-1)

²正会員 工博 東京都立大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒192-03 八王子市南大沢1-1)

³正会員 工博 東京都立大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒192-03 八王子市南大沢1-1)

個別要素法は底面摩擦模型実験での崩壊過程を正確に模擬できる可能性を持つ数値解析手法である。本実験において模型要素に作用する底面摩擦力はこの実験固有の重要なファクターである。本論文は円柱形の模型要素に作用する底面摩擦力を個別要素法解析に組み込むための幾つかの定式化を示し、非常に単純な斜面問題に対する実験結果と数値計算結果とを定量的に比較することによって、妥当な定式化を明らかにするものである。また、要素間の摩擦係数が単純な斜面問題を通じて決定できることを示す。

Key Words : base friction model, base friction force, DEM, slope problem

1. はじめに

底面摩擦模型装置は節理性岩盤斜面・地下空洞・トンネル切羽などの崩壊を模擬できる有力な室内模型実験装置の1つであり、節理方向・形状・拘束圧などを変えた実験および観察が手軽に行えるものである。しかし、内部の力の伝達などの計測が難しいため、現象の定性的な把握にとどまることが多く、崩壊時の種々の情報を定量的に捉えることのできる数値解析手法を用いて底面摩擦模型実験をフォローすることが望まれている¹⁾。

個別要素法(以下、DEM)^{2),3)}は様々な崩壊現象を計算機上で模擬できる可能性を持つ数値解析手法であり、形状や条件を自在に設定できるだけでなく、実験や現実の地盤では測定が困難なものでも容易に求められるという利点を持つ。DEM解析においては、計算時間の面で3次元解析より2次元解析の方が圧倒的に有利であり、また、2次元要素形状としては、計算時間の多くを費やす接触判定の容易さの面で円形が有利である。

底面摩擦模型実験を対象とした数値解析として、連続性岩盤模型の実験結果と比較した弾塑性FEM解析例^{4),5)}および多角形断面の模型要素を用いた底面摩擦模型実験に対する多角形DEM解析例^{6)~9)}が報告されている。しかしながら、模型要素の位置や

角度について実験結果と数値解析結果を比べると、模型要素の移動や回転が小さいときはよい対応をしているが、崩壊が進んで模型要素の移動や回転が大きくなるとはっきりした不一致が見受けられる。これは、それらがいずれも2次元重力場として解析しており、本実験固有の重要な特色を無視していることが原因と考えられる。

本実験において、模型要素に作用する底面摩擦力は重要なファクターである。この底面摩擦力は疑似重力方向(底版をスライドさせる方向)だけでなく、疑似重力方向に直角な方向への移動や回転に対する抑止力としても作用するという特色を持つ。従って、重力場において放物線軌道を描く自由落下状態や一定速度で回転している状態は本実験では表現できない¹⁰⁾。現実の地山において崩壊が進展すれば、これらの状態になる場合が少なくないであろうことから、重力場にある現実の崩壊過程の地山挙動に対する本実験の対応性は完全には期待されていないであろう。現実の地山の崩壊過程まで含めた挙動に対する解析が最終目的であるとすれば、従来、本実験を2次元重力場として数値解析することで十分とされていたのは、このことが原因と思われる。

しかし、重力場における崩壊過程の再現性と観測の難しさのため、その数値解析が現実の地山挙動と十分に対応するのかがどうかを検証することは極めて

難しい。これに比べ、本実験とDEM解析結果を比較検討し、DEM解析における仮定や定式化の妥当性を検証することははるかに容易であり、また、その検証したDEM解析において底面摩擦力場を重力場に変えることも容易である。この結果、前述した現実には存在しない疑似重力方向に直角な方向への移動や回転に対する抑止力が影響を与えている本実験結果をどのように実際の挙動に適用し、評価するかが明確になると同時に、その検証したDEM解析において底面摩擦力場を重力場に変えて実際の挙動を模型実験から拡張的に解析することが可能となる。

従って、本実験は現実の崩壊過程を定性的に観察するために用いるだけでなく、崩壊過程に対する数値解析手法の検証のためにも用いるべきであろう。本実験を十分な精度で模擬し得る数値解析手法を確立することは、本実験をフォローする手段を得ることになるだけでなく、重力場における現実の地山挙動を数値解析する際の対応性に関する強い裏付けを得ることにもなる。

底面摩擦模型実験に著者が用いている模型要素の形状は円柱形であり、平面的に見れば円形であるため、2次元円形DEM解析に非常に向いている。そこで、著者らは2次元円形DEMに底面摩擦力を組み込んで、底面摩擦模型実験を模擬した解析を以前行った¹¹⁾。しかし、要素の回転に対する底面摩擦の影響を無視していたため、底面摩擦力に関する定式化は不十分なものであった。

本論文は、上述の位置付けの下、底面摩擦模型実験をフォローする数値解析手法としてのDEM解析を確立することを目的に、底面摩擦力を2次元DEM解析に組み込むための幾つかの定式化を示し、実験結果と数値計算結果とを定量的に比較することによって、妥当な定式化を明らかにするものである。複雑で大規模なモデルよりもむしろ単純なモデルほどより明瞭な定量的比較が可能であると考え、斜面に沿って1つの円要素だけが移動するという極めて単純な条件下で比較を行う。また、要素間の動摩擦係数（以下、単に摩擦係数と呼ぶ）が単純な斜面問題の底面摩擦模型実験とDEM解析を通じて決定できることも併せて示す。本論文では、DEM解析に2次元円要素と直線境界を用いる場合について論じるが、3次元円筒要素と平面要素を用いる場合にも援用できるものである。

2. 底面摩擦模型実験とDEM解析手法

(1) 底面摩擦模型実験の概要

本実験方法の概略図を図-1に示す。水平な底版に

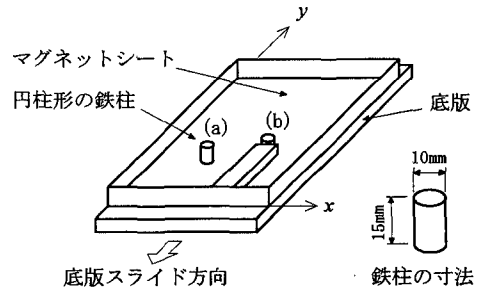


図-1 底面摩擦模型実験の概略図

厚さ1mmのマグネットシートを敷き、その面上に円柱形の鉄柱を立て、底版を一定速度でスライドさせる。マグネットシートは底版表面と鉄柱底面との摩擦が非常に小さいため敷いたものである。マグネットシートは底版表面に接着してあり、一体となって動く。2種類の径の鉄柱を所有しているが、本論文では直径10mm、高さ15mmのものを用いる。

図中の鉄柱(a)のようにマグネットシート上に単に立たせた場合、鉄柱は底版と一緒に一定速度で移動するため、鉄柱に作用する力はない。これに対して、鉄柱(b)のように移動を拘束すれば、マグネットシートと鉄柱底面との摩擦（以下、底面摩擦と呼ぶ）によって、底版スライド方向に疑似的な重力が作用する状態をモデル化できる。本装置は江崎⁹⁾が開発した実験装置と同様のものであるが、磁力のため空気圧を作用させなくても大きな摩擦力と安定した実験結果が得られる。

地盤や岩盤の崩壊を底面摩擦模型実験で模擬する場合、三角形または四角形の平板ブロックや角砂糖などを幾つも配置したり、一面に均質材料を成形するのが一般的である^{5), 10), 12)}。しかし、著者らは主に粒状体のトンネル切羽の安定性を検討するために、円柱形の鉄柱を多数配置することによってモデル化している¹³⁾。従って、亀裂や崩壊の方向性に関して、模型要素の配置法による方向性はあっても、要素形状の方向性はなく、異なる径の要素をランダムに配置することにより、方向性を持たない地盤をモデル化することも可能である。

本装置には、2次元条件に限られると言う制約があり、また、前述したように疑似重力方向の直角方向（疑似水平方向）への鉄柱の移動や回転に対しても摩擦が抑止力として作用してしまうなどの欠点がある。しかし、実験が容易であり、また、現象がゆっくりであるため観察し易いという大きな利点がある。必要ならば、崩壊現象を途中で止めたり、再開することも可能である。

(2) DEM解析手法の概要

DEMは1つ1つの剛体要素の運動方程式を微小時間増分ごとに時間差分近似によって陽的に解いて行く数値解析手法である。1解析ステップ中の要素の移動は、拘束のない加速度運動であり、1要素に作用する力は外力と重力と接触抗力の合力で与えられる。接触抗力は接触している要素間に設けるばねとダッシュポットに生じる要素間の相対変位と相対変位速度で決定される。これらは、図-2に示すように、法線方向と接線方向にそれぞれ並列配置される。要素間の滑りについては、クーロンの摩擦則に従うものとする。

要素に作用している力から時間 t における要素の加速度が次式で算出される。

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= F_x(t)/m \\ \ddot{y}(t) &= F_y(t)/m \\ r\ddot{\theta}(t) &= F_\theta(t)/(m/2) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 \ddot{x} 、 \ddot{y} 、 $\ddot{\theta}$ は要素中心の x 方向並進加速度、 y 方向並進加速度、要素中心回りの回転角加速度（反時計回りを正とする）であり、 F_x 、 F_y 、 F_θ は要素に作用している力の x 方向、 y 方向、要素中心回りの回転 θ 方向の成分を表し、 m および r は要素の質量および半径である。

時間差分近似式は次式に示すように、速度については前進Euler、変位については後退Eulerを用いる。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \ddot{x}(t) \cdot \Delta t \\ x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t+\Delta t) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 \dot{x} 、 x は要素中心の x 方向速度、座標を表し、 Δt は時間増分を表す。 y 方向と回転 θ 方向についても同様の差分近似式を用いる。

3. DEM解析のための底面摩擦力の定式化

底面摩擦模型実験を底版に平行な水平面の2次元場で考えれば、鉄柱に作用する力は他の鉄柱や境界との接触力および底面摩擦力だけである。従って、2次元DEM解析においては、次式が表される。

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{B} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_\theta)^T$ 、 $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_\theta)^T$ および $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_\theta)^T$ はそれぞれ円要素に作用する荷重ベクトル、接触抗力ベクトルおよび底面摩擦力ベクトルであり、右肩添え字 T は転置を表す。

以下に、円要素（半径 r 、質量 m ）に対するこの底面摩擦力ベクトルの5通りの定式化（仮説）を示す。座標軸の方向は図-1に示すように、底版スライ

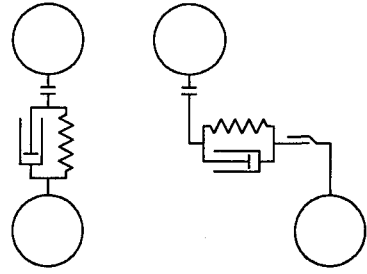


図-2 要素間モデルの模式図

ド方向が $-y$ 軸方向に一致するようにとる。また、この座標系における底版スライド速度ベクトルの y 方向成分を v_B （ $=$ 一定 <0 ）、底面摩擦係数を μ_B 、重力加速度を g とする。

円要素とマグネットシートの間で作用している磁力を求めることは簡単でないため、ここでは磁力を陽な形で表さず、見掛けの底面摩擦係数を大きくとることによって磁力の影響を考慮している。すなわち、1要素に作用する磁力を f_M とし、真の底面摩擦係数を μ'_B とすると、底面摩擦力 f_B を

$$f_B = \mu'_B(mg + f_M) = \mu_B mg \quad (4)$$

と表すことにより、次の関係が成り立つ。

$$\mu_B = \mu'_B \left(1 + \frac{f_M}{mg} \right) \quad (5)$$

(1) 要素の回転に対する摩擦を無視した場合

底面摩擦力は底版と円要素の間の滑りに対して生じることから、DEM解析においても、底版-円要素間の相対滑り速度が生じているときのみ、その反対方向に底面摩擦力ベクトルが作用するものとする。回転に対する底面摩擦効果は無視できるものとするれば、直ちに次式のように定式化できる。

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2}} \mu_B mg \\ B_y &= \frac{-(\dot{y} - v_B)}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2}} \mu_B mg \\ B_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

回転がなく並進方向の相対滑り速度だけが生じている場合、この式(6)は正しいであろう。また、並進方向の相対滑り速度に比べて回転速度が無視できるほど小さい場合も、近似的に十分成り立つであろう。しかし、例えば、並進方向の相対滑り速度がなく回転だけしている場合、底面摩擦が働かないため外力を加えなくても円要素は永久に回転し続けてしまうことになる。

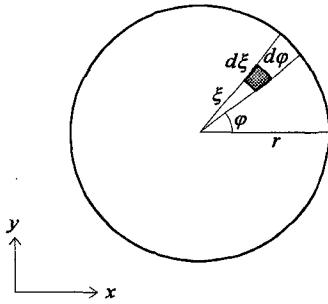


図-3 円要素内の微小領域

(2) 積分型の定式化

円要素が回転しながら移動する場合、底板-円要素間の相対滑り速度ベクトルは円要素内で一定でないため、円要素内の微小領域に対する底面摩擦力ベクトルを積分することによって求める。

図-3に示す微小領域 $d\xi d\varphi$ における相対滑り速度ベクトルの x, y 方向成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= \dot{x} - \dot{\theta}\xi \sin\varphi \\ V &= (\dot{y} - v_B) + \dot{\theta}\xi \cos\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 U および V は底板-微小領域間の相対滑り速度ベクトルの x および y 方向成分を表す。微小領域の質量は $m\xi d\xi d\varphi/\pi r^2$ であるから、この相対滑り速度ベクトルの反対方向に底面摩擦力が作用するとすれば、微小領域に作用する底面摩擦力ベクトルの x, y 方向成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{-U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \mu_B mg \frac{\xi d\xi d\varphi}{\pi r^2} \\ dB_y &= \frac{-V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \mu_B mg \frac{\xi d\xi d\varphi}{\pi r^2} \end{aligned} \quad (8)$$

これらから、底面摩擦力による回転モーメント成分 dM_B を半径 r で除した $dB_\theta = dM_B/r$ は次式で与えられる。

$$dB_\theta = (dB_y \cos\varphi - dB_x \sin\varphi) \xi/r \quad (9)$$

以上を円要素内で積分すれば、底面摩擦力ベクトルが次式で表される。

$$\begin{aligned} B_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{-U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \xi d\xi d\varphi \frac{\mu_B mg}{\pi r^2} \\ B_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{-V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \xi d\xi d\varphi \frac{\mu_B mg}{\pi r^2} \\ B_\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{U \sin\varphi - V \cos\varphi}{\sqrt{U^2 + V^2}} \xi^2 d\xi d\varphi \frac{\mu_B mg}{\pi r^3} \end{aligned} \quad (10)$$

上式の値は相対速度ベクトル $(\dot{x}, \dot{y} - v_B, r\dot{\theta})^T$ が与えられれば数値積分により求めることができる。

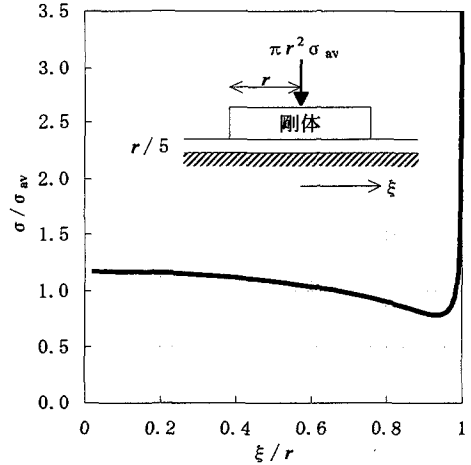


図-4 剛体円盤上載時の弾性体の接地圧分布

著者らは当初、この式が正解と考えた。しかし、後述するように、この式では実験結果に一致させることができないことが分かり、次節に示すような修正が必要と考えられた。

(3) 修正積分型の定式化

マグネットシートと鉄柱底面との接地は近似的に弾性体と剛体円板との接地とみなせる。このとき、その接地圧は接地面内で一定でない¹⁴⁾。図-4は弾性体上に剛体円板を載せたときの、弾性体の接地面近傍の垂直応力分布を示すものである。図中の応力分布は軸対称FEM解析により得られたものであり、 σ_{av} は円板内の平均垂直応力である。弾性体は実験で用いたマグネットシートに対応させるため、ポアソン比を0.47、厚さを1mm(剛体円板の半径の1/5)、その下は剛とし、表面から厚さの1/200のところの垂直応力値を採用した。

接地圧の大きさに応じて、底面摩擦力も変化するであろうから、式(10)は次式のように修正される。

$$\begin{aligned} B_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{-U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \frac{\sigma}{\sigma_{av}} \xi d\xi d\varphi \frac{\mu_B mg}{\pi r^2} \\ B_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{-V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \frac{\sigma}{\sigma_{av}} \xi d\xi d\varphi \frac{\mu_B mg}{\pi r^2} \\ B_\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{U \sin\varphi - V \cos\varphi}{\sqrt{U^2 + V^2}} \frac{\sigma}{\sigma_{av}} \xi^2 d\xi d\varphi \frac{\mu_B mg}{\pi r^3} \end{aligned} \quad (11)$$

ところが、結果を先に述べれば、このような修正を行ってもなお実験結果に一致させることはできないのである。しかし、これらの式がどれだけ実験結果と相違するかを明示することが必要と思われたため、あえて定式化を示したものである。

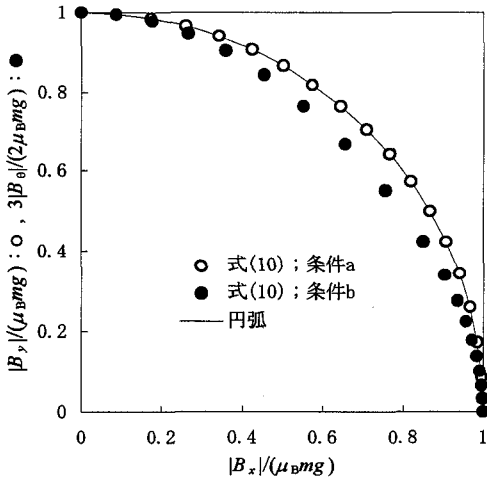


図-5 2通りの条件に対して式(10)から得られる底面摩擦
力ベクトル成分間の関係

$$\begin{cases} \text{条件a} : \dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2 = \text{const.} \neq 0, r\dot{\theta} = 0 \\ \text{条件b} : \dot{x}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \text{const.} \neq 0, \dot{y} - v_B = 0 \end{cases}$$

(4) 独立型の定式化

積分型の式(10)において、円要素の回転速度 $\dot{\theta}$ を0とおくと、式(6)に一致し、逆に、並進方向の相対速度を0とおくと、

$$B_x = B_y = 0, \quad B_\theta = -\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \frac{2}{3} \mu_B mg \quad (12)$$

となる。ここでは、これら並進に対する底面摩擦と回転に対する底面摩擦が独立であるとして、以下の式(13)で表されるものとする。

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2}} \mu_B mg \\ B_y &= \frac{-(\dot{y} - v_B)}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2}} \mu_B mg \\ B_\theta &= -\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} \frac{2}{3} \mu_B mg \end{aligned} \quad (13)$$

(5) 楕円体型の定式化

円要素の回転速度がなく並進方向の相対速度だけが存在する場合の底面摩擦力ベクトルは式(6)で表されると考えられ、円要素の並進方向の相対速度がなく回転速度だけが存在する場合の底面摩擦力ベクトルは式(12)で表されると考えられる。これら2つの場合、式(10)は成り立つ。

前者($\dot{\theta} = 0$)の場合、式(10)または式(6)から得られる底面摩擦力ベクトル成分は次のような円の式

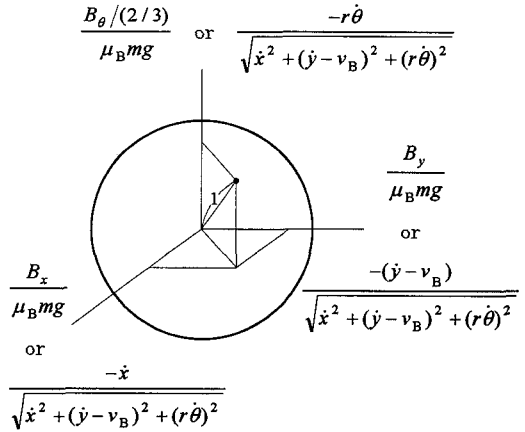


図-6 底面摩擦力ベクトルと相対速度ベクトル

で表される。

$$B_x^2 + B_y^2 = (\mu_B mg)^2, \quad B_\theta = 0 \quad (14)$$

また、 (B_x, B_y) 平面におけるその底面摩擦力ベクトルの方向は $(\dot{x}, \dot{y} - v_B)$ 平面における相対速度ベクトルの反対方向に一致する。

これらのことは図-5に示す白丸でも確認できる。

図中の白丸は、 $\dot{\theta} = 0$ のまま、 $(\dot{x}, \dot{y} - v_B)$ 平面における円弧上で等角度間隔を成す幾つかの点に対応する相対速度ベクトルを与えて式(10)を数値積分して求めた底面摩擦力ベクトルの成分を示すものであり、 (B_x, B_y) 平面における円弧上で等角度間隔を成している。底面摩擦力ベクトル成分の絶対値ではなく成分そのものを座標軸にとれば、負軸側も全く同様となり、底面摩擦力ベクトルの方向は相対速度ベクトルの反対方向に一致する。

一方、 $\dot{y} - v_B = 0$ のまま、 $(\dot{x}, r\dot{\theta})$ 平面における円弧上で等角度間隔を成す幾つかの点に対応する相対速度ベクトルを与え、式(10)を同様に数値積分して求めた底面摩擦力ベクトルの成分を図-5に黒丸で示す(このとき $B_y = 0$)。同図より、この条件下の底面摩擦力ベクトルは $(B_x, B_\theta / (2/3))$ 平面における円弧の一部を内側にへこませた曲線上にあるということ、および、等角度間隔を成さないため底面摩擦力ベクトルの方向は相対速度ベクトルの反対方向に必ずしも一致しないということがわかる。

しかしながら、回転成分がある場合も並進成分だけの場合と同様である(同図中の黒丸は白丸の位置にあるべきである)とする方が調和的であるため、より妥当であると著者らには思われる。そこで、ここでは2つの仮定を立て、その仮定の下に導かれる

別の定式化を示す。

まず第一に、底面摩擦力ベクトルが (B_x, B_y, B_θ) 空間において次のような楕円体の式で表されるものと仮定する。

$$B_x^2 + B_y^2 + \left(\frac{B_\theta}{2/3}\right)^2 = (\mu_B mg)^2 \quad (15)$$

さらに、 $(B_x, B_y, B_\theta)/(2/3)$ 空間における底面摩擦力ベクトルの方向は $(\dot{x}, \dot{y}-v_B, r\dot{\theta})$ 空間における相対速度ベクトルの反対方向に一致するものと仮定する。このとき、両ベクトルの先端は図-6に示す半径1の球面上のある1点に位置することになる。従って、下に示す底面摩擦力ベクトルの式(16)がこれらの仮定から直ちに導かれる。

$$B_x = -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y}-v_B)^2 + (r\dot{\theta})^2}} \mu_B mg$$

$$B_y = -\frac{\dot{y}-v_B}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y}-v_B)^2 + (r\dot{\theta})^2}} \mu_B mg \quad (16)$$

$$B_\theta = -\frac{r\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y}-v_B)^2 + (r\dot{\theta})^2}} \frac{2}{3} \mu_B mg$$

以上に示した5通りの定式化のうち、前の4つは直感的に考え得る全てであろう。最後の式(16)を導くための基本となっている2つの仮定の妥当性は以下で検討される。

4. 底面摩擦力の定式化の妥当性の検討

(1) 直線斜面問題

複雑な実際的な問題で定式化の妥当性を検討しようとする、様々な要因が絡むことにより、真偽がばやける恐れがある。そこで、極めて単純な条件下におけるDEM解析結果と実験結果との比較を通して、各定式化の妥当性を検討する。

図-7に示すように、 x 軸に対して傾斜角 α の直線斜面境界を固定し、1つの円要素をその斜面に接して配置する。そして、底版を $-y$ 軸方向に一定速度で50mmスライドさせたとき(底版スライド量 $\delta_B = 50\text{mm}$)、円要素の移動量 δ と回転量 θ がいくらかになるかという問題を考える。

・斜面の傾斜角 α を $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ にして検討したが、ここではその中の代表例として $\alpha = 45^\circ$ の場合について示す。

DEM解析に用いた諸定数を表-1に示す。表中の底面摩擦係数 μ_B の値は、多数並べた鉄柱が移動も回転もしないよう拘束しながら底版をスライドさせ

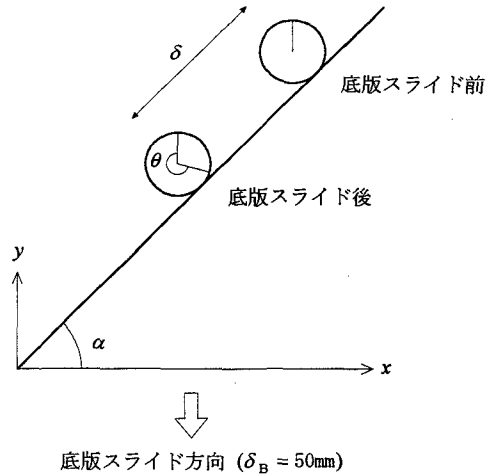


図-7 直線斜面境界に接しながら移動する円要素

表-1 DEM解析に用いた諸定数

円要素の質量 m	(g)	9.14
円要素-境界間の法線方向ばね係数 K_n (gf/mm)		90000
円要素-境界間の接線方向ばね係数 K_s (gf/mm)		22500
底面摩擦係数 μ_B		2.72
底版スライド速度 v_B	(mm/sec)	-5
時間増分 Δt	(sec)	0.00001

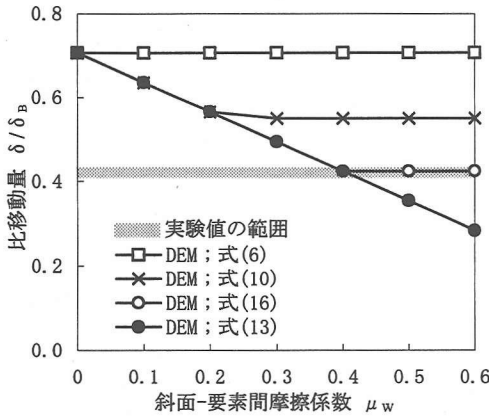
円要素-境界間の法線方向粘性係数 $\eta_n = 2\sqrt{m/K_n}$

円要素-境界間の接線方向粘性係数 $\eta_s = 2\sqrt{m/K_s}$

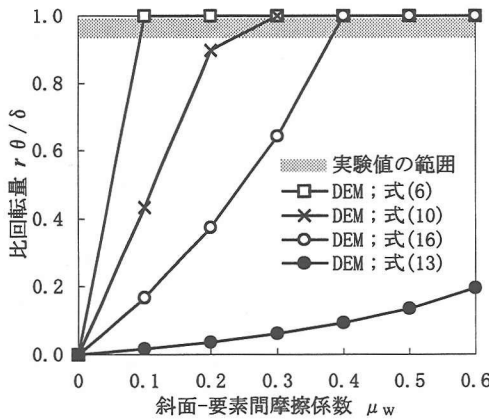
たとき、反力板に加わる荷重を測定し、その荷重と鉄柱重量との比から求めたものである。底版スライド速度 v_B は実験時の速度($=-5\text{mm/min}$)の60倍に設定したものである。これは、例えば、式(16)を用いて、実験時の速度の12倍の設定で行ったDEM解析結果とほとんど同じであったことから、演算時間を削減するために設定したものである。そのほか、円要素-斜面境界間のばね係数を100倍にし、同時に、時間増分を0.1倍にしても、ほとんど同じ結果が得られている。

式(6), (10), (16)を用い、斜面-円要素間の滑り摩擦係数 μ_w を0~0.6の範囲で0.1ずつ変えたときのDEM解析結果を実験値とともに図-8に示す。なお、式(11)を用いたDEM解析結果は式(10)を用いた場合と比べ、比移動量が高々2%、比回転量が高々6%しか変わらず、しかも実験値からさらに離れたため図中への表示は省略している。ここで、比回転量 $r\theta/\delta = 0$ は回転のない完全滑り移動を意味し、比回転量 $r\theta/\delta = 1$ は斜面-円要素間の滑りのない完全ころがり移動を意味する。

同図から分かるとおおり、比移動量と比回転量の両



(a) 比移動量



(b) 比回転量

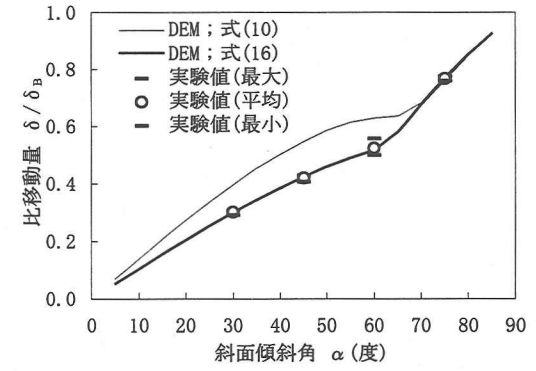
図-8 直線斜面問題(傾斜角45°)に対する各式のDEM計算結果と実験値との比較

方を実験値と一致させることができるのは式(16)だけである。すなわち、式(6)、(10)は比回転量を一致させることはできるが、移動量を一致させることができない。また、式(13)では移動量が一致するような μ_w を選ぶと比回転量が小さくなり過ぎる。これらに対して、式(16)では、 $\mu_w \geq 0.4$ としておけば、円要素の移動量と回転量が同時に実験値と一致する。また、ここには図示していないが、斜面の傾斜角を30°、60°、75°にした場合も、円要素の移動量と回転量が同時に実験値と一致するのは式(16)だけであった。

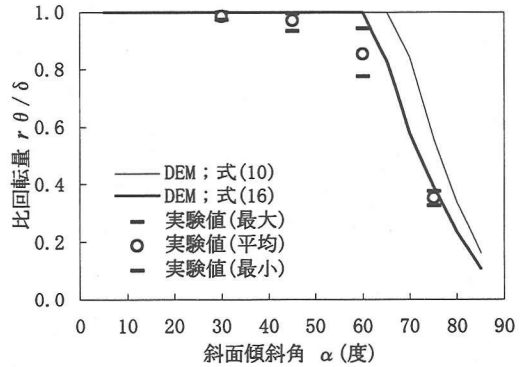
(2) 直線斜面問題の理論解

上述の直線斜面問題において、 x 軸に対する直線斜面の傾斜角を α ($0 < \alpha < 90^\circ$)とする。いま、次の3つの仮定が成り立つものとする。

仮定-1 円要素は斜面に接しながら一定速度で滑る



(a) 比移動量



(b) 比回転量

図-9 直線斜面問題に対して式(10)、(16)を用いたDEM計算結果($\mu_w = 0.764$)と実験値との比較

仮定-2 斜面-円要素間の接触抗力の法線方向成分 P_n と接線方向成分 P_s の間には $P_s = \mu_w P_n$ なる関係が成り立つ

仮定-3 底面摩擦力の x, y 方向成分から成るベクトルは底版に対する円要素の相対並進速度ベクトルの反対向きである

これらの仮定の下に、比移動量(底版移動量 δ_B に対する円要素移動量 δ の比)の理論解が得られ、次式で表される(付録参照)。

$$\delta/\delta_B = \sin \alpha - \mu_w \cos \alpha \quad (17)$$

実験では、 α が小さいとき、斜面-円要素間に滑りのないころがり移動が観察されたため、仮定-1が満たされないことにより、式(17)は適用できない。しかし、 $\alpha = 75^\circ$ のときには、回転を伴う滑り移動が観察されたため、式(17)が適用できると考えられる。従って、 $\alpha = 75^\circ$ およびそのときに実測された比移動量の平均値 $\delta/\delta_B = 0.768$ を式(17)に代入すれば

$$\mu_w = 0.764$$

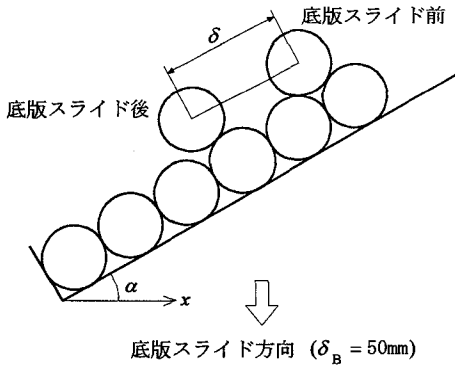


図-10 円要素列斜面に接しながら移動する円要素

表-2 DEM解析に用いた円要素-円要素間の諸定数

円要素-円要素間の法線方向ばね係数 K_n (gf/mm)	45000
円要素-円要素間の接線方向ばね係数 K_s (gf/mm)	11250

円要素-円要素間の法線方向粘性係数 $\eta_n = \sqrt{m/K_n}$

円要素-円要素間の接線方向粘性係数 $\eta_s = \sqrt{m/K_s}$

が得られる。

直線辺を有する要素が斜面上を滑るとき、斜面-直線辺間の摩擦係数を求める良い方法として、Bray & Goodmanは比速度（底版移動速度に対する要素移動速度の比）の理論解を用いる方法を言及しているが¹²⁾、ここで示した方法はそれと同様である。

得られた摩擦係数を用いて行ったDEM解析結果を実験結果とともに図-9に示す。DEM解析は斜面の傾斜角 α を5~85°の範囲で5°間隔で変えて行ったものであり、実験は30~75°の範囲で15°間隔で変えて行ったものである。同図より、式(16)を用いたDEM解析結果は実験結果に非常によく一致することが分かる。

(3) 円要素列斜面問題

一般の底面摩擦模型実験をDEMで模擬するためには、円要素-円要素間の摩擦を正確に捉えることも重要である。ここでは、図-10に示すように、斜面上に円要素を1列に並べ、その円要素列に接しながら1つの円要素が移動・回転して行く問題について、DEM解析結果と実験結果の比較を行う。同図に示すとおり、円要素の移動量 δ は、測定の簡便さのため、要素中心の直線移動距離で定義する。底版スライド速度や底版スライド量 ($\delta_B = 50\text{mm}$) は先の直線斜面問題のときと同一である。

DEM解析に用いた円要素-円要素間の諸定数を表-2に示す。他の定数は表-1と同一である。

斜面傾斜角 $\alpha = 75^\circ$ の場合、円要素-円要素間の

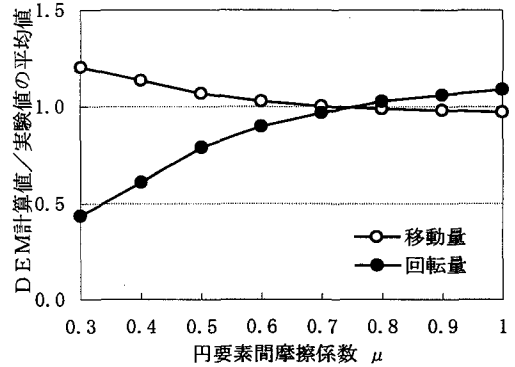
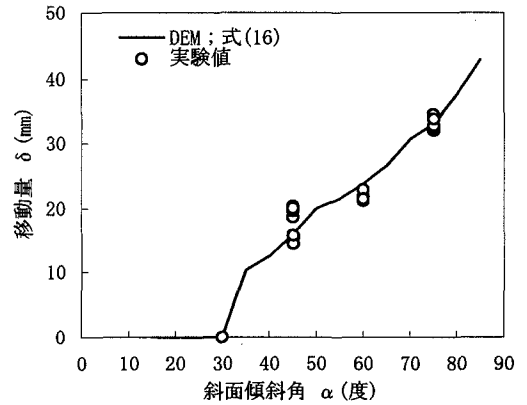
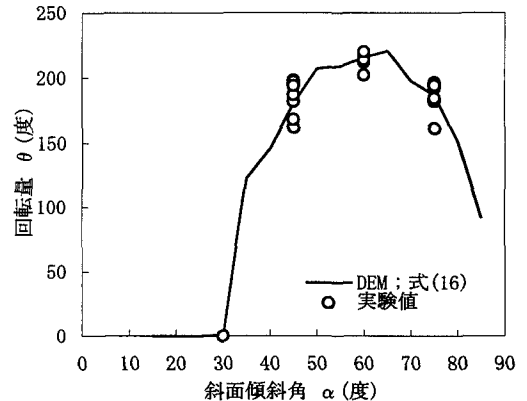


図-11 円要素列斜面問題(傾斜角75°)の実験値に対する式(16)を用いたDEM計算値の比



(a) 移動量



(b) 回転量

図-12 円要素列斜面問題に対して式(16)を用いたDEM計算結果($\mu = 0.764$)と実験値との比較

滑りが実験にははっきり観察された。そこで、この場合について式(16)を用い、円要素-円要素間の摩

摩擦係数 μ を何通りかに変えて行ったDEM解析結果を図-11に示す。同図より、円要素-円要素間の摩擦係数 μ を0.7と0.8の間にすれば、実験結果に一致することが分かる。

前節(1)の実験では、直線斜面境界として円要素材料と同じ鉄製の角棒を用いたため、円要素-円要素間の摩擦係数は斜面-円要素間の摩擦係数にほぼ等しいと考えられる。図-12は、 $\mu = \mu_w = 0.764$ として行ったDEM解析結果を実験結果とともに示したものであり、非常によい対応が見られる。

5. 結論

円柱形の模型要素を用いた底面摩擦模型実験をDEMで解析する場合、重力を作用させずに式(16)で表される底面摩擦力ベクトルを接触抗力とともに要素に作用させればよいことが分かった。この式(16)は、底面摩擦力ベクトルの大きさが楕円体の式(15)で規定され、かつ、その方向が底版に対する模型要素の相対速度ベクトルの反対方向であるとするにより導かれるものである。

積分型の式(10)またはその修正型の式(11)の方が直感的には妥当であろうと考えられるのに、なぜ楕円体型の式(16)の方が良い結果を出すのかは、まだよく分からない。しかし、ここに示した式(16)を用いてDEM解析を行えば、実験結果と非常によく対応した結果を得ることができるということに工学的意味がある。

直線斜面問題において円要素が滑り移動するときの比移動量(底版移動量に対する円要素移動量)の理論解を導いた。また、円要素-直線境界間および円要素間の摩擦係数は斜面問題を通じて決定することができることを示した。すなわち、円要素-直線境界間の摩擦係数は滑り移動が観察される実験で得られる円要素移動量と式(17)から直ちに求まり、円要素間の摩擦係数はその値を変えたDEM解析を試行して実験結果と一致させるようにすることにより求められる。これらの方法は重力場で傾斜角を調整して摩擦係数を求める実験に比べ、非常に有力な方法といえる。

DEMにおける底面摩擦力の定式化により、現実には存在しない疑似重力方向に直角な方向および回転方向の抑止力が影響を与えている底面摩擦模型実験の結果を適切に実際の挙動に適用・評価することが可能になると同時に、その底面摩擦模型実験で検証したDEM解析において底面摩擦力場を重力場に変えて実際の挙動を模型実験から拡張的に解析する

ことが可能となる。

磁力が作用しない場合や円柱形以外の模型要素を用いる場合の底面摩擦力の定式化については今後の課題である。

付録

本文中の4.(2)の仮定-1より以下の式(A.1)および(A.2)が成り立ち、仮定-3より式(A.3)が成り立つ。

$$P_x + B_x = P_y + B_y = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{y} = \dot{x} \tan \alpha \quad (\text{A.2})$$

$$B_x / B_y = \dot{x} / (\dot{y} - v_B) \quad (\text{A.3})$$

ここで、 P_x, P_y は斜面-円要素間の接触抗力ベクトル \boldsymbol{P} の x, y 方向成分である。式(A.1)は、これが成立しなければ円要素の速度一定条件が満たされないことによる。

次に、仮定-2および式(A.1)から、

$$\begin{aligned} P_x &= -P_n \sin \alpha + \mu_w P_n \cos \alpha = -B_x \\ P_y &= P_n \cos \alpha + \mu_w P_n \sin \alpha = -B_y \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となり、これより、

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{-\sin \alpha + \mu_w \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_w \sin \alpha} \quad (\text{A.5})$$

また、式(A.3)および(A.2)から、

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{\dot{x}}{\dot{y} - v_B} = \frac{\dot{y} \cos \alpha}{\dot{y} - v_B \sin \alpha} \quad (\text{A.6})$$

見易くするため、 $c = \cos \alpha$ 、 $s = \sin \alpha$ と置けば、式(A.5)および(A.6)から、

$$(c^2 + c\mu_w)\dot{y} = (-s^2 + c\mu_w)(\dot{y} - v_B)$$

$$(c^2 + s^2)\dot{y} = (s^2 - c\mu_w)v_B$$

$$\therefore \dot{y} = (s^2 - c\mu_w)v_B$$

$$\dot{x} = \dot{y}c/s = (cs - c^2\mu_w)v_B$$

こうして、底版スライド速度に対する円要素の並進速度成分の式(A.7)が導かれる。

$$\dot{x}/v_B = \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \mu_w \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{y}/v_B = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{2} \mu_w$$

仮定-1より、

$$\delta/\delta_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} / |v_B|$$

であるから、これに式(A.7)を代入し、式を展開すれば、式(17)が導かれる。

比移動量の理論式(17)はBrayが矩形要素に対して別の方法で導いた比速度の理論式^{10), 12)}と同様であるが、本文中の仮定の基に成り立つものであること

がわかる。

参考文献

- 1) 川本朧夫, 尾原祐三, 市川康明: 底面摩擦模型実験装置および模型材料の力学特性, 日本鉱業会誌, Vol. 99, pp. 1-6, 1983.
- 2) Cundall, P. A. : A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock systems, *Symp. of I.S.R.M.*, Nancy, pp.129-136, 1971.
- 3) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 4) Egger, P. et Gindroz, C. : Tunnels ancrés à faible profondeur étude comparative sur modèles physique et mathématique, *Proc. 4th Cong. of Int. Soc. for Rock Mechanics*, Vol. 2, pp. 121-130, 1979.
- 5) 江崎哲郎: 地下空洞および長大斜面安定解析のための新しい底面摩擦模型装置の開発, 平成2年度科学研究費補助金研究成果報告書, 1991.
- 6) Cundall, P., Voegele, M. and Fairhurst, C. : Computerized design of rock slopes using interactive graphics for the input and output of geometrical data, *Proc. 16th Symp. on Rock Mechanics*, pp. 5-15, 1979.
- 7) 木梨秀雄, 畑 浩二, 吉岡尚也, 藤原紀夫: 個別要素法の不連続性岩盤への適用, 土木学会第49回年次学術講演会, pp. 836-837, 1994.
- 8) 川村國夫, 近藤久義, 西川幸成, 村山秀幸: 個別要素法および底面摩擦模型実験による不連続性岩盤斜面の破壊予知, 第30回土質工学研究発表会, pp. 1237-1238, 1995.
- 9) 川村國夫, 近藤久義, 西川幸成, 村山秀幸: 岩盤斜面の破壊例に基づく個別要素法と底面摩擦模型実験の実際への適用, 土木学会第50回年次学術講演会, pp. 706-707, 1995.
- 10) グッドマン, R. E. (赤井・川本・大西共訳): 不連続性岩盤の地質工学, 森北出版, 1978.
- 11) 松井幹雄, 西村和夫: 底面摩擦装置によるトンネル切羽崩壊実験のDEM解析, トンネル工学研究発表会論文・報告集, 第5巻, pp. 1-8, 1995.
- 12) Bray, J. W. and Goodman, R. E. : The theory of base friction models, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 18, pp. 453-468, 1981.
- 13) 西村和夫, 今田 徹, 山崎良一, 松井幹雄: トンネル切羽の形状と安定性についての一考察, トンネルと地下, Vol. 27, No. 5, pp. 43-50, 1996.
- 14) Poulos, H. G. : The behaviour of a rigid circular plate resting on a finite elastic layer, *Civil Eng. Trans., Instn. of Engrs., Aust.*, Vol. CE10, pp. 213-219, 1968.

(1996. 12. 20 受付)

FORMULATIONS OF BASE FRICTION FORCE FOR DISTINCT ELEMENT METHOD ANALYSIS ON BASE FRICTION MODEL

Mikio MATSUI, Kazuo NISHIMURA and Toru KONDA

The distinct element method seems to have an ability to simulate precisely the fracture processes in the base friction model. The base friction force acting on the model elements is one of the most important factor in the base friction model. In this paper, some formulations are presented to put the base friction force acting on circular or cylindrical elements into the distinct element method analysis. Quantitative comparisons are made between numerical results and experiments on very simple slope problems. They clarify which formulation is proper. It is exhibited that the coefficient of friction between elements can be determined through simple slope problems.