

1次せん断変形を許す板よりなる折板構造の弾性解法

臼木恒雄¹・野口彰宏²・山田正人³

¹正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科 (〒278 千葉県野田市山崎 2641)

²工修 日本道路公団 大阪建設局 西神戸工事事務所 (〒654-01 神戸市須磨区西落合 5-14-1)

³工修 (財) 鉄道総合技術研究所 構造物技術開発事業部 (〒185 東京都国分寺市光町 2-8-38)

薄肉断面部材を前提とする弾性法は古典平面応力理論と Kirchhoff/Love の板曲げ理論を用いるため、PC 箱桁のごとく、やや厚肉の断面よりなる折板構造には適用し難い。そこで、板曲げ理論を Reissner/Mindlin 理論に変更して、精度の向上を計り、古典平面応力理論の代わりに Mindlin の偶応力理論を用い理論の整合性を計った。数値計算例として、剛性マトリックス法により隔壁を含む多室箱桁を解き、弾性論に基づく厳密解を得た。現在、材料定数のスケールパラメータ l の大きさは確定されていない。最初、これを零とおくと古典理論より得られる値と一致することを確認した。次に l の大きさを変化させて各状態量の変化を調べたところ、妥当な範囲内の l 値を用いることで、得られる状態量の大きさに変動の無いことがわかり、十分一般的に活用できることを示した。

KeyWords : Couple stress theory, Reissner/Mindlin plate theory, Scale parameter, Box girder

1. まえがき

折板構造の「弾性法 (Elasticity Method)」とは、板曲げ問題と平面応力問題を支配方程式では連成させず、稜線境界条件でのみ相関させる解法¹⁾である。構造系および支配方程式共にいかなる離散化も行わないため、弾性論の仮定の範囲内で厳密解といえる。

従来の板曲げ問題では、Kirchhoff/Love の古典板曲げ理論（以後、古典 K/L 板曲げ理論と略記）を用いる。この理論は板厚の薄いものを対象としているため、プレストレストコンクリート箱桁の腹板のごとく中位の板厚をもつ構造には不適切である。また、近似的処置として換算せん断力の概念を用いるため、板の隅角部では真の応力値とのずれが大きくなるなどの問題点をもつ。そこで、これらの問題点を生じない、より一般性の高い板曲げ理論に立脚することが望ましい。

本報告は、古典板曲げ理論の次の段階として、Reissner/Mindlin のごとき 1 次せん断変形を許容する板曲げ理論^{2),3)}（以後、R/M 板曲げ理論と略記）を用い、従来より精度および整合性の高い弾性法解析を提案するものである。板そのものの解析では、すでに多くの高次せん断変形板理論が存在するが、折板構造を解析する弾性法で 1 次せん断変形板理論と平面応力理論とを併せて扱った研究は著者の知る限りでは無い。

周知のごとく、古典 K/L 板曲げ理論では、ねじりモー

メントを等価な偶力に置き換え、せん断力と合体させた換算せん断力を用いる。本研究ではせん断変形を考慮することにより、力学的にあいまいな換算せん断力の概念を用いず、ねじりモーメントとせん断力を独立な断面力として扱うことになる。すると、折板どうしの接合部であらたにねじりモーメントのつりあい条件およびねじり回転変位の適合条件が要求されることになる。そこで、従来の平面応力理論に相当するものとして、Mindlin の偶応力理論⁴⁾を採用した。古典平面応力理論が従来の Airy の応力関数を用いるのに対し、Mindlin の偶応力理論は一般化された Airy の応力関数を用いる。前者が单一の関数であるのに対し、後者は前者を一般化した 2 つの関数を意味している。しかし、ともに 2 次の応力関数であるため、得られる偏微分方程式がやや複雑となる。そこで、ここでは Mindlin が定義していた 1 次の 2 つの応力関数を採用した。これにより、支配方程式は低次となり、扱いやすくなる⁵⁾。

弾性法の特徴は、古典 K/L 板曲げ理論と Airy の応力関数を用いる平面応力理論のアナロジー性である。両方の理論の状態量どうしが対応関係⁶⁾をもち、その結果どちらも 1 本の重調和支配方程式に帰着する 4 次の理論である。このアナロジー性を保持しつつ板の 1 次せん断変形を考慮する⁷⁾には、R/M 理論より Marguerre/Woerle の板曲げ理論⁸⁾のほうが上記の 1 次の応力関数との明快な対応関係が得られるため、これを採用した。

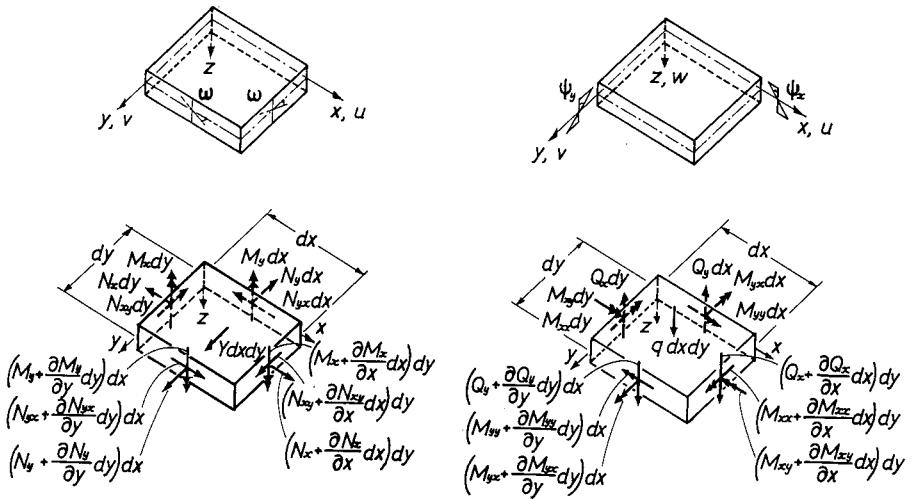


図 -1 板要素の座標系と断面力および変位成分

従来の古典弾性論では扱いきれないいくつかの構造力学問題があり、それらのあるものに対しこの偶応力理論が力を発揮する。特に、空孔、切り欠き、クラック、熱応力などを有する物体の応力集中問題、あるいは粒状体、多孔体、繊維状体、格子状体、層状体、多結晶体などの材料の応力解析、格子骨組構造物の解析、平面問題の面内回転剛性問題などへの適用が有名である。平面問題を扱う有限要素解析においては、面内回転剛性を取り込むことにより、せん断ロッキングを回避する種々の手法⁹⁾が提案されており、偶応力理論の利用¹⁰⁾もその一つである。鍵はせん断応力の対称性を放棄することにある¹¹⁾。

理論の妥当性を検討するため、四室箱桁をとりあげ、隔壁のある場合および無い場合について種々の構造系を解いた。軸方向に正弦関数展開する方法で荷重および状態量を表現し、三角関数の直交性を利用した精度の高い解法である。三角関数による荷重関数近似の質を高めるため、Lanczos の平滑化法¹²⁾に用いるシグマ因子¹³⁾を用い、さらに収束状況の監視を十分に行い信頼できる解を得た。ここでは、正弦関数展開が得意とする両端単純支持はりおよび不得意とする片持ちはりの結果を示し、その妥当性を考察する。最後に、現在、未確定とされる偶応力理論の材料定数であるスケールパラメータ l の値を変化させて、得られる状態量の変化を調べた。その結果、妥当な範囲内の l 値において、得られる値はまったく変化しなかった。ゆえに、用いる構造材のスケールパラメータの値が特定できずとも、精度および整合性の高い本理論が適用可能なことが確認できた。

2. 支配方程式

ある折板要素の座標系および断面力（応力）、変位成分を図-1のごとく定義する。記号および正負の方向は Mindlin の偶応力理論⁴⁾および Marguerre/Woernle の 1 次せん断変形板曲げ理論⁸⁾によっている。Mindlin の表記法によれば、 μ_x 、 μ_y は偶応力であり、これに対応する回転成分は ω である。板曲げ理論の境界条件は通常、板の断面力を用いるため、偶応力に関してもそれに板厚 t を掛けた断面力成分

$$\begin{aligned} N_x &= \sigma_x t, \quad N_y = \sigma_y t, \quad N_{xy} = \tau_{xy} t, \quad N_{yx} = \tau_{yx} t \\ M_x &= \mu_x t, \quad M_y = \mu_y t \end{aligned} \quad (1)$$

を用いることとし、図-1 中に与えた。

平面問題として、 y 方向の物体力 Y 、板曲げ問題として、 z 方向の分布荷重 q の作用を考慮するならば、Mindlin の平面応力理論および Marguerre/Woernle の 1 次せん断変形板曲げ理論の式の対応関係は次のようになる。

平面偶応力理論

弹性則

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad M_{yy} = D(\kappa_{yy} + \nu\kappa_{xx}) \quad (2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad M_{xx} = D(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E}(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad M_{xy} = \frac{D}{2}(1-\nu)(\kappa_{xy} + \kappa_{yx}) \quad (4)$$

$$\kappa_x = \frac{1}{4B}\mu_x \quad Q_y = -Gt_s\gamma_x \quad (5)$$

$$\kappa_y = \frac{1}{4B}\mu_y \quad Q_x = Gt_s\gamma_y \quad (6)$$

応力関数設定

$$\sigma_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \int Y dy$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial \theta_y}{\partial x}$$

$$\mu_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \theta_y \right)$$

$$\mu_y = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \theta_x \right)$$

ひずみと応力関数

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

$$\kappa_x = -\frac{1}{4B} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \theta_y \right)$$

$$\kappa_y = \frac{1}{4B} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \theta_x \right)$$

ひずみの定義

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}$$

$$\kappa_y = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}$$

ひずみの定義

$$\kappa_{yy} = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$$

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y}$$

$$\kappa_{yx} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x}$$

$$\gamma_x = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)$$

$$\gamma_y = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right)$$

断面力

$$M_{yy} = D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)$$

$$M_{xx} = D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = Gt_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)$$

$$Q_x = Gt_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right)$$

応力関数設定

$$M_{yy} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$M_{xx} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$Q_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$Q_x = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

ひずみの適合条件

力のつりあい条件

$$0 = \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} - \frac{\partial \kappa_x}{\partial y}$$

$$-q = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

$$\kappa_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}$$

$$\kappa_y = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

$$-q - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}$$

支配方程式

$$\nabla^2 W = -\Phi_s \quad \nabla^2 w = -\Phi_b - \frac{q}{Gt_s}$$

$$\nabla^2 \Phi_s = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int Y dy - \nu \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \nabla^2 \Phi_b = -\frac{q}{D}$$

$$\nabla^2 \Psi_s = \frac{1}{l^2} \Psi_s \quad \nabla^2 \Psi_b = \frac{10}{t^2} \Psi_b$$

ここで、 E は継弾性係数、 G は横弾性係数、 B は曲率弾性係数であり、 ν はポアソン比、偶応力理論の材料定数 l は長さの次元をもつスケールパラメータであり、 $B = Gl^2$ の関係がある。厚さ t の板の曲げ剛性およびせん断修正板厚はそれぞれ

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$t_s = \frac{t}{1.2}$$

と定義してある。平面応力理論の応力関数は θ_x, θ_y および W であり、板曲げ理論の応力関数は U, V および Ω である。平面応力理論の κ_x, κ_y は曲率であり、それぞれ回転 ω_z の x および y 方向の変化率を意味する。板曲げ理論の κ_{xx}, κ_{yy} そして κ_{xy} は板曲げの曲率、ねじれ率である。さらに、関数 $\Phi_s, \Psi_s, \Phi_b, \Psi_b$ は次のとく定義した。

$$\Phi_s = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad \Phi_b = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$$

$$\Psi_s = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \Psi_b = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}$$

これらの関数どうしの対応関係を表-1に示す。周知のごとく、表中のせん断ひずみ ε_{xy} は工学ひずみ γ_{xy} の半分の値をもつ。平面偶応力問題の支配方程式を導く。式(2)～(23)および(33), (34)より平面応力問題の応力は関数 W, Φ_s および Ψ_s を用いて次のとく表現できる。

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{2l^2}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2l^2}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\tau_{yx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{2l^2}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x \partial y} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{2l^2}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x \partial y} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial y^2} \right)$$

表 -1 偶応力理論と板曲げ理論の諸量の対応関係

偶応力理論	板曲げ理論
u	U
v	V
ε_x	M_{yy}
ε_y	M_{xx}
ε_{xy}	$-M_{xy}$
ω	Ω
κ_x	$-Q_y$
κ_y	Q_x
θ_x	Ψ_x
θ_y	Ψ_y
w_s	w
σ_x	κ_{yy}
σ_y	κ_{xx}
τ_{xy}	$-\kappa_{xy}$
τ_{yx}	$-\kappa_{yx}$
μ_x	γ_x
μ_y	γ_y
Φ_s	Φ_b
Ψ_s	Ψ_b
$1/E$	D
$+v$	$-v$
$1/4B$	Gt_s

$$\mu_x = -\frac{2l^2}{1+v} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial y} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial \Psi_s}{\partial x} \right) \quad (39)$$

$$\mu_y = \frac{2l^2}{1+v} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} - \frac{1+v}{2} \frac{\partial \Psi_s}{\partial y} \right) \quad (40)$$

これらの応力式を弾性則に代入してひずみの式に直し、積分するならば、変位成分は次のとくあらわせる。

$$u = \frac{1}{E} \int \left\{ - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) W + \frac{2l^2}{1+v} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_s + \frac{(1+v)^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x \partial y} \right] \right\} dx \quad (41)$$

$$v = \frac{1}{E} \int \left\{ - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W + \frac{2l^2}{1+v} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_s - \frac{(1+v)^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x \partial y} \right] \right\} dy \quad (42)$$

$$\omega = \frac{1}{2E} \int \left\{ - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) W + \frac{2l^2}{1+v} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) \Phi_s - \frac{(1+v)^2}{2} \frac{\partial^3 \Psi_s}{\partial x^2 \partial y} \right] \right\} dy + \frac{1}{2E} \int \left\{ \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right) W \right\} dy \quad (43)$$

$$- \frac{2l^2}{1+v} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right) \Phi_s + \frac{(1+v)^2}{2} \frac{\partial^3 \Psi_s}{\partial x \partial y^2} \right] dx \quad (43)$$

平面偶応力の支配方程式 (28) ~ (30) から関数 Φ_s を消去すると、次のとく 3 本の支配方程式を得る。

$$\nabla^4 W = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int Y dy + \nu \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (44)$$

$$\nabla^2 \Phi_s = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int Y dy - \nu \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (45)$$

$$\nabla^2 \Psi_s - \frac{1}{l^2} \Psi_s = 0 \quad (46)$$

いま、 y 軸方向の物体力 $Y(x, y)$ を y 方向に一定な値をもつ x のみの関数と仮定し、次のとく Fourier 級数展開できるとする。

$$Y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \alpha_n x \quad (47)$$

ただし、

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (48)$$

とおいた。そして、これらの支配方程式を x 軸両端で単純支持の条件のもとで解いて、

$$W(x, y) = E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (A_{sn} \cosh \alpha_n y + B_{sn} \sinh \alpha_n y + C_{sn} \alpha_n y \cosh \alpha_n y + D_{sn} \alpha_n y \sinh \alpha_n y + \alpha_n y \frac{p_n}{E \alpha_n}) \sin \alpha_n x \quad (49)$$

$$\Phi_s(x, y) = -2E \sum_{n=1}^{\infty} (C_{sn} \sinh \alpha_n y + D_{sn} \cosh \alpha_n y - \alpha_n y \frac{p_n}{2E \alpha_n}) \sin \alpha_n x \quad (50)$$

$$\Psi_s(x, y) = -\frac{2E}{1+v} \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_{sn} e^{\gamma_{sn} \alpha_n (y-b)} + F_{sn} e^{-\gamma_{sn} \alpha_n y} - \frac{1+v}{\gamma^2} \frac{p_n}{E \alpha_n} \right) \cos \alpha_n x \quad (51)$$

となる。ただし、

$$\gamma_{sn}^2 = 1 + \frac{1}{\alpha_n^2 l^2} \quad (52)$$

と定義している。

式 (35) ~ (43) に方程式の一般解式 (49) ~ (51) を代入すれば、平面応力問題の応力および変位成分が 6 個の積分定数 $A_{sn}, B_{sn}, C_{sn}, D_{sn}, E_{sn}, F_{sn}$ で表現できる。これらの関数は変数分離形の級数で次のとく表せる。

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \cos \alpha_n x \quad (53)$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \sin \alpha_n x \quad (54)$$

$$\omega(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) \cos \alpha_n x \quad (55)$$

$$N_{yx}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_{yx_n}(y) \cos \alpha_n x \quad (56)$$

$$N_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_{yn}(y) \sin \alpha_n x \quad (57)$$

$$M_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{yn}(y) \cos \alpha_n x \quad (58)$$

ただし、応力成分は式(1)に示すごとく、板厚を掛け断面力成分に直した。

次に1次せん断変形板曲げ問題の支配方程式を導く。式(2)～(23)および(33),(34)より板曲げ問題の回転角および断面力は関数 w, Φ_b および Ψ_b を用いて次のごとく表現できる。

$$\psi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + h^2 \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial x} - \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial \Psi_b}{\partial y} \right] \quad (59)$$

$$\psi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + h^2 \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial \Psi_b}{\partial x} \right] \quad (60)$$

$$M_{xx} = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - h^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial y^2} - \frac{1}{2}(1-\nu)^2 \frac{\partial^2 \Psi_b}{\partial x \partial y} \right] \right\} \quad (61)$$

$$M_{yy} = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\nu)^2 \frac{\partial^2 \Psi_b}{\partial x \partial y} \right] \right\} \quad (62)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - h^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4}(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \Psi_b}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_b}{\partial y^2} \right) \right] \right\} \quad (63)$$

$$Q_x = D \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial x} - \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial \Psi_b}{\partial y} \right] \quad (64)$$

$$Q_y = D \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial \Psi_b}{\partial x} \right] \quad (65)$$

1次せん断変形板曲げ理論の支配方程式(28)～(30)から関数 Φ_b を消去すると、次のごとき3本の方程式を得る。

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} - \frac{\nabla^2 q}{Gt_s} \quad (66)$$

$$\nabla^2 \Phi_b = -\frac{q}{D} \quad (67)$$

$$\nabla^2 \Psi_b - \frac{10}{t^2} \Psi_b = 0 \quad (68)$$

いま、板厚方向の分布荷重 $q(x, y)$ を y 方向に一定値をとる x のみの関数と仮定し、式(38),(39)同様に、次のごとくFourier級数展開できるとする。

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x \quad (69)$$

そして、これらの支配方程式を x 軸両端で単純支持の条件のもとで解いて、

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} (A_{bn} \cosh \alpha_n y + B_{bn} \sinh \alpha_n y + C_{bn} \alpha_n y \cosh \alpha_n y + D_{bn} \alpha_n y \sinh \alpha_n y + (1 + \alpha_n^2 h^2) \frac{q_n}{D \alpha_n^3}) \sin \alpha_n x \quad (70)$$

$$\Phi_b(x, y) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (C_{bn} \sinh \alpha_n y + D_{bn} \cosh \alpha_n y - \frac{q_n}{2D \alpha_n^3}) \sin \alpha_n x \quad (71)$$

$$\Psi_b(x, y) = \frac{2}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (E_{bn} e^{\gamma_{bn} \alpha_n (y-b)} + F_{bn} e^{-\gamma_{bn} \alpha_n y}) \cos \alpha_n x \quad (72)$$

となる。ただし、

$$\gamma_{bn}^2 = 1 + \frac{10}{\alpha_n^2 t^2} \quad (73)$$

と定義している。式(35)～(43)に方程式の一般解式(70)～(72)を代入すれば、板曲げ問題の応力および変位成分が6個の積分定数 $A_{bn}, B_{bn}, C_{bn}, D_{bn}, E_{bn}, F_{bn}$ で表現できる。これらの関数は変数分離形の級数で次のごとく表せる。

$$\psi_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{yn}(y) \sin \alpha_n x \quad (74)$$

$$\psi_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{xn}(y) \cos \alpha_n x \quad (75)$$

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \sin \alpha_n x \quad (76)$$

$$M_{yy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{yy_n}(y) \sin \alpha_n x \quad (77)$$

$$M_{yx}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{yx_n}(y) \cos \alpha_n x \quad (78)$$

$$Q_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{yn}(y) \sin \alpha_n x \quad (79)$$

3. 要素剛性行列

要素剛性行列を作成するため、各板の断面における始端および終端の断面力と変位成分を定義する。変数分離表示された状態量を構成する y のみの関数の始端($y=0$)および終端($y=b$)の値をそれぞれ添字*i*および*j*で区別する。すなわち、平面偶応力問題の場合、*n*番目のFourier級数項において、変位および断面力の各成分を

$$u_{ni} = u_n(0), \quad u_{nj} = u_n(b)$$

$$M_{yni} = M_{yn}(0), \quad M_{ynj} = M_{yn}(b) \quad (80)$$

と表記する。すると、端部の変位量ベクトル u_{sn} および断面力ベクトル f_{sn} のそれぞれが積分定数ベクトル α_{sn} と荷重ベクトル b_{sn} および g_{sn} を用いて

$$u_{sn} = C_{sn}\alpha_{sn} + b_{sn} \quad (81)$$

$$f_{sn} = D_{sn}\alpha_{sn} + g_{sn} \quad (82)$$

と表せる。これらのベクトルの定義は以下のとくとなる。

$$u_{sn}^T = (u_{ni} \ v_{ni} \ w_{ni} \ u_{nj} \ v_{nj} \ w_{nj}) \quad (83)$$

$$f_{sn}^T = (N_{yxn_i} \ N_{yni} \ M_{yni} \ N_{yx_nj} \ N_{y_nj} \ M_{y_nj}) \quad (84)$$

$$\alpha_{sn}^T = (A_{sn} \ B_{sn} \ C_{sn} \ D_{sn} \ E_{sn} \ F_{sn}) \quad (85)$$

これらの式 (81), (82) から積分定数ベクトル α_{sn} を消去して、面内力を受ける板要素の剛性方程式

$$f_{sn} = k_{sn}u_{sn} + f_{sn}^F \quad (86)$$

を得る。ただし、要素剛性マトリックス k_{sn} および固定端力ベクトル f_{sn}^F は次のとく計算される。

$$k_{sn} = D_{sn}C_{sn}^{-1} \quad (87)$$

$$f_{sn}^F = -D_{sn}C_{sn}^{-1}b_{sn}g_{sn} \quad (88)$$

板曲げ問題も同様に行う。すなわち、状態量のFourier級数 n 番目を構成する y の関数の始端および終端の値を、

$$\psi_{yni} = \psi_{yn}(0), \quad \psi_{ynj} = \psi_{yn}(b)$$

$$Q_{yni} = Q_{yn}(0), \quad Q_{ynj} = Q_{yn}(b) \quad (89)$$

と表記するならば、端部の変位量ベクトル u_{bn} および断面力ベクトル f_{bn} のそれぞれが積分定数ベクトル α_{bn} と荷重ベクトル b_{bn} および g_{bn} を用いて

$$u_{bn} = C_{bn}\alpha_{bn} + b_{bn} \quad (90)$$

$$f_{bn} = D_{bn}\alpha_{bn} + g_{bn} \quad (91)$$

と表せる。これらのベクトルの定義は以下のとくとなる。

$$u_{bn}^T = (\psi_{yni} \ \psi_{xni} \ w_{ni} \ \psi_{ynj} \ \psi_{xnj} \ w_{nj}) \quad (92)$$

$$f_{bn}^T = (M_{yy_ni} \ M_{yx_ni} \ Q_{yni} \ M_{yy_nj} \ M_{yx_nj} \ Q_{ynj}) \quad (93)$$

$$\alpha_{bn}^T = (A_{bn} \ B_{bn} \ C_{bn} \ D_{bn} \ E_{bn} \ F_{bn}) \quad (94)$$

これらの式 (90), (91) から積分定数ベクトル α_{bn} を消去して、曲げ作用を受ける板要素の剛性方程式

$$f_{bn} = k_{bn}u_{bn} + f_{bn}^F \quad (95)$$

を得る。ただし、要素剛性マトリックス k_{bn} および固定端力ベクトル f_{bn}^F は次のとく計算される。

$$k_{bn} = D_{bn}C_{bn}^{-1} \quad (96)$$

$$f_{bn}^F = -D_{bn}C_{bn}^{-1}b_{bn}g_{bn} \quad (97)$$

面内力と曲げ作用を受ける板要素の剛性方程式は、式 (86) および (95) を合体させて

$$f_n = k_nu_n + f_n^F \quad (98)$$

と表現できる。ただし、用いたマトリックスおよびベクトルは次のとく定義した。

$$f_n = \begin{bmatrix} f_{ns} \\ f_{nb} \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$f_n^F = \begin{bmatrix} f_{sn}^F \\ f_{bn}^F \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$u_n = \begin{bmatrix} u_{sn} \\ u_{bn} \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$k_n = \begin{bmatrix} k_{sn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{bn} \end{bmatrix} \quad (102)$$

部材端変位ベクトル u_n 、部材端断面力ベクトル f_n および固定端反力ベクトル f_n^F は座標変換マトリックス T を用いてそれぞれ全体座標系のベクトル U_n および F_n 、 F_n^F に変換される。

$$U_n = T^T u_n \quad (103)$$

$$F_n = T^T f_n \quad (104)$$

$$F_n^F = T^T f_n^F \quad (105)$$

ただし、マトリックス T は次のとく与えられる。式中の φ は全体座標系と部材座標系のなす角である。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (106)$$

式 (98), (103) ~ (105) から、全体座標系におけるある板要素の剛性方程式は

$$F_n = K_n U_n + F_n^F \quad (107)$$

となる。ただし、全体座標系におけるある板要素の剛性マトリックス K は次のとく算出できる。

$$K_n = T^T k_n T \quad (108)$$

板要素の組合せよりなる折板構造物の全体剛性方程式は上記の要素剛性方程式 (107) を重ね合せてつくる。したがって、全体剛性マトリックスも要素剛性マトリックス (108) を重ね合せればよい。次に、折板構造物の断面内の境界条件を導入して剛性方程式を解き、 n 番目の級数項の未知変位量ベクトル U_n を決定できる。この経過は剛性法の周知の方法なので記述を省略する。

すべての級数項について、この計算を行い、式(53)～(58)および(74)～(79)に示すとく、 x に関する三角関数との積の和をとれば、あらゆる状態量が決定できる。

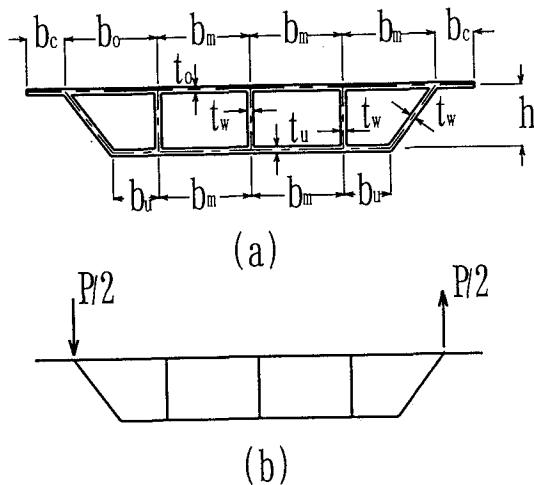


図-2 四室箱桁 (a) 断面形状 (b) ずり荷重

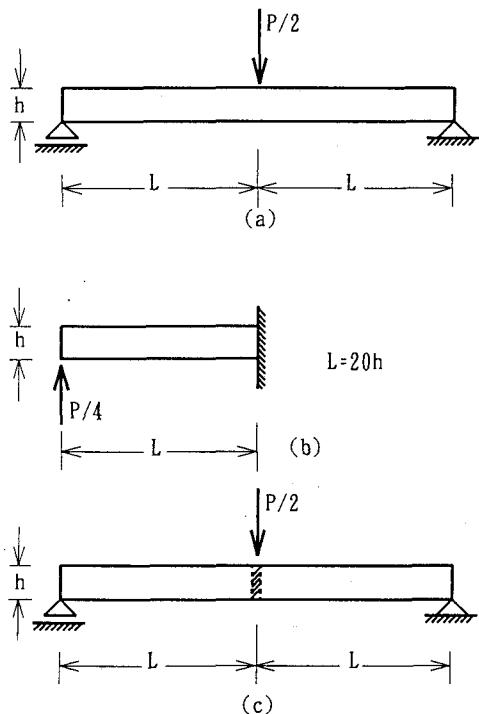


図-3 構造系 (a) 系A：単純支持はり（隔壁なし）
(b) 系B：片持ちはり (c) 系C：系Bの変換構造系

4. 数値計算例

折板構造の例として、鉛直軸に対称な四室の断面形状(図-2(a))の箱桁を選んだ。上下フランジ間距離 h を基準長さとし、他の寸法もそれであらわせるものとしている。この例題では、断面変形を起こしやすい薄肉および中肉厚の部材を用いることとした。

$$b_c = h, \quad b_m = (3/2)h, \quad b_u = (3/4)h, \quad b_w = (5/4)h$$

$$t_o = (3/40)h, \quad t_u = (1/10)h, \quad t_w = (3/20)h$$

とした。慣用的に、板幅と板厚の比10をもって薄肉の限界としている。ウエブにおいて、 $b_w/t_w = 25/3$ となるから、この部材のみ中肉厚となっている。

両端単純支持はりの構造系中央に $+P/2$ および $-P/2$ のずり荷重(図-2(b))の作用する場合を解いた。

あらゆる任意の荷重は対称荷重と逆対称荷重に分解可能であるから、断面对称軸に関して半分の断面のみ扱って解くことができる。上フランジに張り出し部を持つ四室箱桁の半断面は対称軸上のウエブを含めて8枚の板要素より構成されるから、この8要素の全体剛性方程式を誘導し、対称軸線と交わる上下フランジの各境界条件および張り出しフランジ先端の境界条件を用いて方程式を解き、未知変位量を定めた。これを各板要素の局所座標系の変位量に変換し、その要素剛性方程式に代入すれば、各板の材端力のすべての値が決定できる¹⁴⁾。

用いた材料定数のうち、縦弾性係数、ポアソン比はそれぞれ $E = 34.3 \text{ GPa} (3.5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2)$, $\nu = 1/6$ とした。さらに、偶応力理論は微細構造を初步的な形で取り入れたCosserat弾性理論と位置づけられるため、長さの次元をもつ材料定数 l の設定値が必要となる。しかし、材料の結晶粒の寸法といわれるこのスケールパラメータは正しく測定されていないのが実状である¹⁵⁾。アルミニウムで0.05mm程度、人骨で0.1mm程度ではないかと言われている。プレストレストコンクリート材料の予測値も不明であるため、便宜的に $l=0.1\text{mm}$ とした。

中間隔壁をもたない長さ $2L (=2 \times 20h)$ の桁の中央断面斜めウエブに集中ずり荷重 $P/2$ がかかる系Aの場合(図-3(a))の載荷断面の主な状態量分布を図-4(a)～(e)に示す。ねじりモーメントは桁中央の全断面にわたり零であるから、そこから $L/10$ 離れた断面の分布を図-4(f)に与えた。図中実線は本理論の解、点線は古典理論(K/L 板理論+古典平面応力理論)の解である。図-2の断面を構成する板厚が比較的薄いため、両理論の計算結果に大きな差異はでていない。

Fourier級数の収束状況を確認するため、状態量ごとの最大となる位置での級数項ごとの増分量とその項までの総和値を調べた。その結果、この例題ではほとんど101項目で増分量の絶対値が最小となり、それは第1項目の増

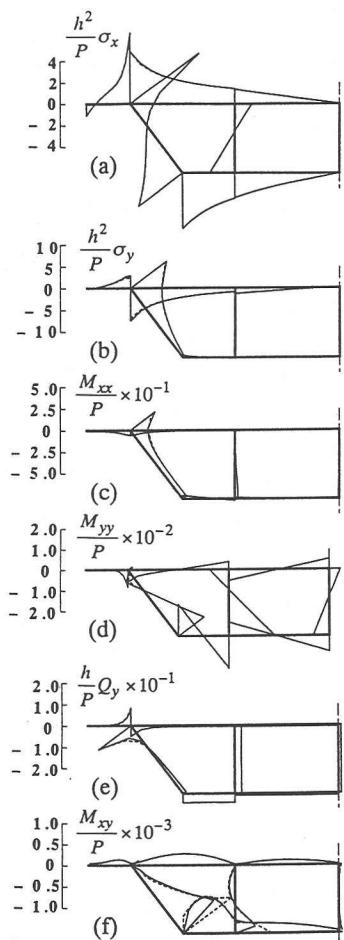


図 -4 系Aの載荷断面の状態量 (a) σ_x (b) σ_y
(c) M_{xx} (d) M_{yy} (e) Q_y (f) M_{xy}

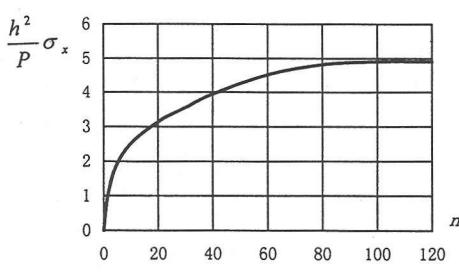


図 -5 系Aの載荷断面の上フランジとウェブ結合位置の σ_x のフーリエ級数収束状況

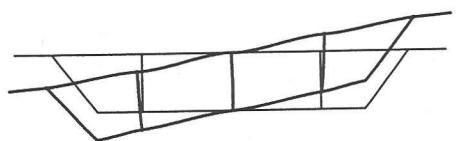


図 -6 系Aの載荷断面の断面変形状態

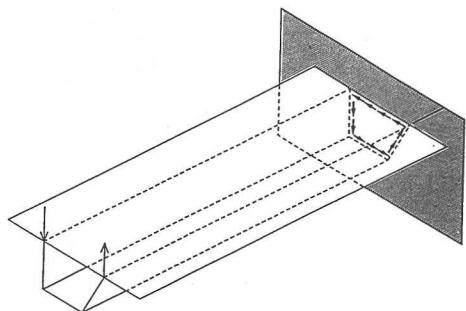


図 -7 系Bの埋め込み端の状況

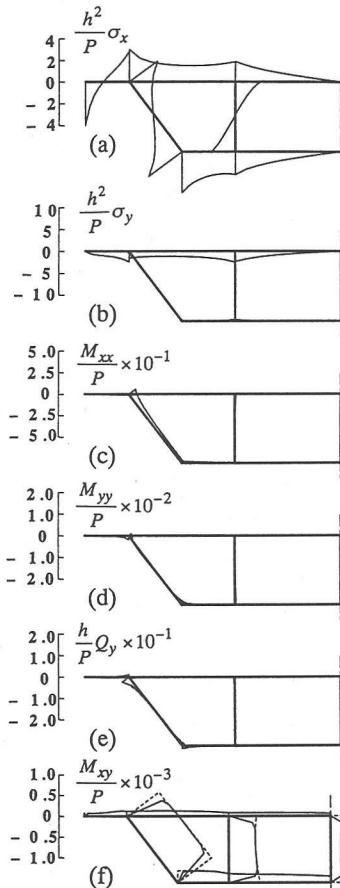


図 -8 系Cの載荷断面の状態量 (a) σ_x (b) σ_y
(c) M_{xx} (d) M_{yy} (e) Q_y (f) M_{xy}

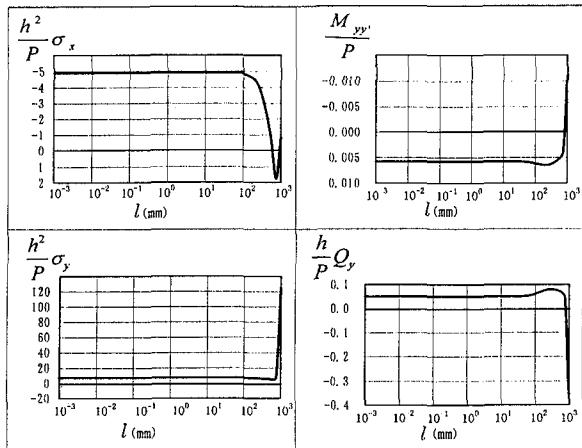


図-9 系Aの載荷断面の上フランジとウェブの結合位置での断面力とスケールパラメータ l の関係

分量の $1/10,000$ 程度であること、それ以上の項になると、じょじょに数値不安定状態になり、精度が低下してゆくことがわかった。ゆえに、ここでは 101 項までの総和を最終値としている。図-5に載荷断面の上フランジとウェブの接合部の軸方向垂直応力 σ_x の級数項番号 n とそこまでの総和値を示す。安定した収束状況が見てとれる。また、同一断面の断面変形状況を示したのが図-6である。

次に $+P/4$ と $-P/4$ の集中ずり荷重を先端に受けける長さ $L (=20h)$ の片持ちはり（図-3(b)）を解く。断面形は上記のものと同一とする。この問題を本理論で解くため、長さ $2L$ の両端単純支持の箱桁の中央に断面変形を防止する隔壁を挿入し、そこに上記の例題と同じずり荷重を作用させればよい（図-3(c)）。ただし、中央の荷重載荷断面は片持ちはりの埋め込み端に対応するため、断面変形は発生してはならない。そこで、断面形保持のため不静定力 $X_i (i=1 \sim 4)$ を作用させねばならない¹⁶⁾。四室断面の断面変形の自由度は室の数に等しく4であるため、不静定次数は4となる。しかし、断面の対称性を考慮しているので、実質その半分の2として計算できる。

埋め込み端で発生する反力は均等に分布された力とみなせるから、図-7の桁右端に示すごとく、作用ずり荷重および不静定力共にシャイペ力に分解し、軸方向にFourier級数展開している。得られた結果のうち、埋め込み端の主な状態量分布を図-8(a)～(e)に、そこから $L/10$ 離れた断面位置の板ねじりモーメントの分布を図-8(f)に示す。隔壁の無い単純はり（構造系A）の場合と比較して、垂直応力分布はシャイペ力に分解したため、穏やかになっている。また、隔壁の存在を仮定するため、断面変形を部材角レベルで零としたため、板曲げ成分はほと

んど発生していない。この結果より、応力法の導入はおおむね成功しているといえる。

図-8(a)～(b)の軸方向垂直応力分布はこの境界条件でも古典理論と本理論間におおきな差異は認められない。応力最大値において、有効数字2桁まで一致した。しかし、板のねじりモーメントは隅角部から斜めに立ち上がる曲線となり、古典理論と明確な差異を示している。この様子は、文献8)の16章で与えた単純支持板の計算結果に類似しており、本理論の妥当性を示唆している。

以上の計算例において、構造材料のスケールパラメータを便宜的に $l=0.1\text{mm}$ とした。この値が異なるごとに計算結果が異なるのであれば、上記の計算結果は無意味である。そこで、このスケールパラメータ値 l を $1000\text{mm} \sim 0.001\text{mm}$ まで変化させて、種々の状態量の値の変化を調べてみた。例えば、上記の桁長さ $2L$ の単純支持はりの場合、載荷断面の斜めウェブと上フランジの接合部は比較的大きな応力状態になるので、その位置の主な断面力あるいは応力と l 値の関係を与えたのが図-9である。この図によれば、 l 値としてあり得ない 10mm 程度まで、断面力値（ゆえに応力値）は一定のままである。この結果から、スケールパラメータの値は未確定でも、十分精度および整合性の高い計算値が本理論より得られることができた。上記の計算結果の信頼性も裏づけられた。

5. まとめ

1次せん断変形を許容する板よりなる折板構造物を解析するため、従来の平面応力理論の代わりにMindlinの偶応力理論を採用し、1次せん断変形板曲げ理論とのアナロジー関係を1次の応力関数を用いて対応づけた。得られた二種類の6次の理論をそれぞれ解き、簡便な方法で剛性マトリックス法の関係式を作成した。数値計算例として、中間隔壁をもつ自由端、単純支持端あるいは埋め込み端をもつ多室箱桁を解いた。板厚を薄いものからやや厚いものへと変化させて、従来の理論による解と数値を比較した。数値計算例から、平面応力問題の垂直応力は古典理論と大差ないが、板曲げ問題のねじりモーメントでは分布形状に明確な差があらわれること、などが確認できた。

本解析法の特徴は以下のとくとなる。

- (1) 平面（偶）応力理論とR/M板曲げ理論のアナロジー性を利用するため、計算プログラムが統一化でき、簡便かつ高精度の安定した解が得られる。
- (2) 折板稜線位置での力のつり合いおよび変位適合の条件が、板のねじり成分を含めて守られるため、理論の整合性が保持され、剛性マトリックスが特異にならない。
- (3) きわめて短いプレキャストブロックから長大

多主けた橋梁まで板の曲げ変形を含んだ弾性論の厳密解を得ることができる。

(4) せん断ロックギングおよびメンブレンロックギングなどの数値不安定を起こさない。

(5) 他の古典的正弦関数の級数展開法と同様に、応力法などと組み合わせて自由端、単純支持端および埋め込み端をもつ中間隔壁付き連続けたに適用できる。

(6) 板厚の薄いものから厚いものまで、あるいはそれらの組み合わされた構造物まで統一的に扱えるため、理論の適用範囲に限定を設けずに利用できる。

稜線位置での偶応力およびねじりモーメントは予想どおり小さい値となり、設計上は零とみなせる。しかし、折板構造物の稜線位置での断面力の釣り合いの確保は本解析法で満足されたといえる。この厳密さを保持しつつ、弾性域を越えた材料非線形の問題、あるいは座屈問題、有限変位理論などの幾何非線形問題に展開させるならば、本理論はより有意義なものとなろう。

参考文献

- 1) 岡村宏一：骨組解析法要覧、培風館、pp.415、1976.
- 2) Reissner,E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.12, pp.69-77, 1945.
- 3) Mindlin,R.D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, pp.31-38, 1951.
- 4) Mindlin,R.D.: Influence of Couple-Stresses on Stress Concentrations, Experimental Mechanics, Vol.3, pp.1-7, 1963.
- 5) Wood,R.D.: Finite Element Analysis of Plane Couple-Stress Problems Using First Order Stress Functions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.26, pp.489-509, 1988.
- 6) de Veubeke,F.B. and Zienkiewicz,O.C.: Strain-Energy Bounds in Finite-Element Analysis by Slab Analogy, Journal of Strain Analysis, Vol.2, pp.265-271, 1967.
- 7) Farshad,M. and Tabarrok,B.: Dualities in the Analysis of Cosserat Plate, Mech.Res.Comm., Vol.3, pp.399-406, 1976.
- 8) Marguerre,K. and Woernle,H.-T.: Elastic Plates, Blaisdell, Waltham, MA, 1969.
- 9) Hughes,T.J.R. and Brezzi,F.: On Drilling Degrees of Freedom, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.72, pp.105-121, 1989.
- 10) Herrmann,L.R.: Mixed Finite Elements for Couple-Stress Analysis, Hybrid and Mixed F.E.M., Ed. by S.N. Atluri, R.H.Gallagher and O.C. Zienkiewicz, Wiley, New York.
- 11) Iura,M. and Atluri,S.N.: Formulation of a Membrane Finite Element with Drilling Degrees of Freedom, Computational Mechanics, Vol.9, pp.417-428, 1992.
- 12) Lanczos,C.: Discourse on Fourier Series, Oliver & Boyd, Edinburgh and London, pp.55-75, 1966.
- 13) Lo,C.C. and Niedenfuhr,F.W.: On Improving the Convergence of Fourier Series Solutions in Plane Bi-harmonic Problems, Journal of Applied Mechanics, pp.210-212, March, 1967.
- 14) Sennett,R.E.: Matrix Analysis of Structures, Prentice Hall, 1994.
- 15) 岡村弘之：強度解析学Ⅰ、オーム社、pp.256、1985
- 16) Kristek,V.: Theory of Box Girders, John Wiley & Sons, 1979.

(1997. 3. 7 受付)

FOLDED PLATE STRUCTURES COMPOSED OF FIRST ORDER SHEAR DEFORMABLE PLATES

Tsuneo USUKI, Akihiro NOGUCHI and Masato YAMADA

Elasticity Method of folded plates structures correlate the plane stress problem and the plate problem not within the governing equations but at plate edges. This gives exact solutions in its theoretical hypotheses. This paper extended the theory for the folded plates structures from classical Kirchhoff plate to the plates with first order shear deformable ones. In this way the plate elements that we shall construct will possess, in a natural way, also the degree of freedom related to the rotation along the vertical direction. This fact permits us to use Mindlin's couple stress theory in plane elasticity. This paper suggests a way of structural analysis without referring to the exact values of scale parameter of materials.