

非線形構造システム方程式の線形同定法

佐藤忠信¹・菊川雅士²

¹正会員 工博 京都大学防災研究所教授 (〒611 京都府宇治市五ヶ庄)

²学生会員 京都大学大学院工学研究科 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

構造物の動特性を支配するシステム方程式のパラメータ同定を行う際、システム方程式が同定したいパラメータの非線形関数となるため、同定は非線形最適化問題へと変換される。本論文では線形及び非線形な復元力特性を持つ構造物を対象に、運動方程式から誘導される観測方程式を同定したいパラメータに関して線形関数として表現する方法論を開発する。線形ならびに非線形 8 自由度構造系の応答シミュレーション結果に白色雑音を乗せたものを観測値として利用することにより、開発したアルゴリズムの有用性を検証した。

Key Words : identification problem, linearization, neural network, kalman filter, versatile model

1. 概説

システム同定の定義¹⁾については議論のあるところであるが、ここでは、構造物の動特性を表現する力学パラメータを構造物の応答の観測データに基づいて決定することをシステム同定ということにする。実際の構造物では部材の質量や剛性が与えられたとしても、その動特性を決定するのは困難である。これは、構造形式や地盤条件が構造物の動特性を規定する要因となっていることや、対象構造物に内在する減衰機構などの不確定性を正確に予測することが困難なためである。そこで構造物に入力する外乱とそれに対する構造物の応答を用いて、逆解析的に構造物のシステム構造を同定することが重要となる。

逆解析的な技術を利用して、構造物自体の動的な性質を明らかにする研究^{2), 3), 4)}はこれまでにも数多く行われてきている。しかしながら、これまでの研究では、「システム方程式が非線形関数となる」ので、必然的に逆解析の問題は制約条件のない非線形最適化の問題を解くことに帰着されている⁵⁾。こうした問題での解の収束性や、大局的な解と局所解との関係などを議論するための数学的な背景としては、非線形計画法の分野で展開されてきた理論を用いることが可能である。しかし、非線形最適化の問題では解の存在や一意性、解の構成法やその安定性などを一般的に議論することは困難である。一方、線形最適化の問題では線形代数の知識があればかなりのレベルまで体系的にこうした問題を議論することができるので⁶⁾、観測方程式を線形方程式で書き

下すことができれば、逆解析の見通しは格段に良くなる。したがって、実用的な観点から見た逆解析の研究における独創性は、本質的に非線形な観測方程式をどの様にして線形化するかという点にあると言つてもよい。

本論文では、構造物の動的パラメータから構成されるシステム遷移方程式の遷移行列が単位行列から構成されている場合を対象として、本質的に動的パラメータの非線形関数となっている観測方程式を線形化する方法論を開発する。

同定のための方法論としては、任意の入出力間の写像関係を記述する道具として良く利用されているニューラルネットワーク⁷⁾を用いる。ニューラルネットワークは高等動物の神経回路網を模倣した高度並列分散型の情報処理システムであり、その取り扱いが容易であるにもかかわらず、入出力間の写像関係を精度良く近似することが可能である。ニューラルネットワークを用いて同定を行う際には、モデル構造（システム方程式等）に関する知識を前もって知る必要がなく、構造が未知のシステムに対しても簡単に推定が行えるのが特徴である。しかしその反面、ネットワークの内部構造を数式化することが困難であるという問題点がある。そのためシステムの写像関係のみを利用して制御などを行う場合には有効であるが、システムの内部状態を把握したい場合には、困難を生じる。また、入出力値がノイズを含む場合には、写像関係の学習に誤差逆伝播法を用いると、

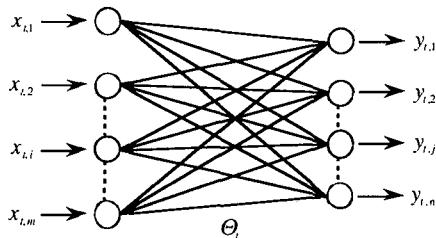


図-1 Perceptron型ニューラルネットワーク

過学習の結果として写像空間に発生するノイズを処理できないという問題が生じる⁸⁾。こうした観点から、ニューラルネットワークの構造と力学的なモデル構造との対応付けを行なうとした先駆的研究として、野田・星谷・小淵の研究⁹⁾を挙げることができる。これはニューラルネットワークの構造化學習システムを利用して非線形履歴を有する構造システムを同定するためのアイデアを展開したものである。しかし、ネットワークの構造が非常に複雑になつてゐるため、具体的に構造システムの同定を行える段階に達していない。

本研究で用いているニューラルネットワークは多層構造を有するPerceptron型ネットワークであり、重み係数の学習にカルマンフィルターを用いたものである⁸⁾。このネットワークの写像能力は層間に設けられるノードの入出力関係を表す関数形に大きく依存している。これが線形の場合には、高次の層構造ネットワークであっても1層のネットワークに変換可能である。本研究では線形問題を取り扱うので、1層のPerceptron型ネットワークを利用した。この場合の同定アルゴリズムは、観測方程式が線形で、システム遷移行列が単位行列となつてゐる系に対して、单纯にカルマンフィルターを適用したものと一致している。

2. 学習アルゴリズム

入力教師信号が x_i 、出力教師信号が y_i の図-1のようなニューラルネットワークを考える。このネットワークはPerceptron型ネットワークと呼ばれニューラルネットワークの中で最も単純な形となつてゐる。通常Perceptron型ニューラルネットワークを用いた解析では学習則として誤差逆伝播法(B.P.法)を用いるが、「学習に用いる教師信号にノイズが混入していふと学習過程が不安定になる」、「学習の出発点により解が局所解に陥る危険性がある」といった問題点が挙げられている。そこで学習則としてカルマンフィルター^{10), 11)}を採用する。以下にその概要を述べる。

述べる。

図-1の様なネットワークの出力ベクトルを y_i (m 次元)、入力ベクトルを x_i (n 次元) とし、ネットワークの重み係数マトリックスを Θ_i ($m \times n$ 次元) とすれば、出力ノイズ v_i (m 次元) を考慮にいれた場合の入出力関係は次式のようになる。

$$y_i = \Theta_i x_i + v_i \quad (1)$$

重み係数マトリックスを次式の様に並べ変えた重み係数ベクトル W_i (mn 次元)

$$W_i = \{\theta_i(1,1), \dots, \theta_i(1,m), \theta_i(2,1), \dots, \theta_i(2,m), \dots, \theta_i(n,1), \dots, \theta_i(n,m)\} \quad (2)$$

を考え、観測行列を H_i ($m \times mn$ 次元) として次式を考えれば、

$$H_i = \begin{bmatrix} x_i^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & x_i^T & \cdots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & x_i^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(1)は次式のように書き換えられる。

$$y_i = H_i W_i + v_i \quad (4)$$

式(4)を観測方程式として用い、重み係数ベクトル W_i の定常性を仮定すると、システム方程式は次式で与えられる。

$$W_i = I W_{i-1} \quad (5)$$

これは、付録(A)のカルマンフィルターの概要の式(A1)で $x_i = W_i$ と置き換えて、 $\Phi_i = I$ とし、システムノイズ w_i が無い場合に相当している。したがつて、ここで用いられるニューラルネットワークの重み係数はカルマンフィルターの概念を用いて以下の手順で決定することができる。

- (i) $t=1$ とする。すべての t について $\Phi_i = I$ とし、システムノイズのない系 ($Q_i = \mathbf{0}$) を考える。
- (ii) W_i の初期値、 \hat{W}_i とその共分散マトリックスの初期値 P_i を与える。
- (iii) 時刻 t のステップを 1 つ進める。
- (iv) 式 (A2)、式 (A3) に基づいて \bar{x}_i と M_i を計算する。
- (v) y_i と H_i ならびに観測ノイズベクトルの共分散マトリックス R_i を与える。
- (vi) 式 (A7) に基づいてカルマンゲインを計算する。
- (vii) 式 (A5)、式 (A6) に基づいて \hat{x}_i と P_i を計算する。
- (viii) データがあれば (iii) に戻る。なければ最後の \hat{x}_i と P_i を最尤推定値と共分散マトリックスとする。

3. 線形問題への適用

構造物はその変形が微小であると考えられるとき、線形システムとして扱うことができる。ここでは線形構造物モデルを対象として、質量が既知であるとして、構造物の減衰定数と剛性を未知パラメータとした場合に対して、質点の絶対加速度が観測値として与えられれば、構造系の運動方程式から線形の観測方程式が誘導でき、従来は本質的に非線形問題であった構造システムの未知パラメータの同定が線形問題に帰着されることを示す。

(1) モデルの線形化

質量集中型の線形 n 自由度モデルの運動方程式は一般に次式で表される。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{I\}\ddot{X}_0 \quad (6)$$

ここに、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[C]$ は粘性減衰マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{I\}$ はおおきさが1の列ベクトル、 $\{x\}$ 、 $\{\dot{x}\}$ 、 $\{\ddot{x}\}$ はそれぞれ変位、速度、加速度応答ベクトル、 \ddot{X}_0 は地動加速度である。今、 j 番目の質点の絶対加速度応答 $\ddot{x}_j + \ddot{X}_0$ に着目し、 $\ddot{x}_j + \ddot{X}_0$ について式(6)を展開すると運動方程式は次式のような変位応答 $\{x\}$ 、速度応答 $\{\dot{x}\}$ にそれぞれ重み係数を乗じたものの線形結合で表される。

$$\ddot{x}_j + \ddot{X}_0 = \sum_{i=1}^n w_{i,j} x_i + \sum_{i=1}^n w_{n+i,j} \dot{x}_i \quad (7)$$

各質点の絶対加速度応答 $\ddot{x}_j + \ddot{X}_0$ 、速度応答 $\{\dot{x}\}$ と変位応答 $\{x\}$ が観測されるとすれば、式(7)は次式のように表現できる。

$$y_j(t) = H_j(t)W_j(t) \quad (8)$$

ここで $y_j(t)$ 、 $H_j(t)$ はそれぞれ観測値及び観測ベクトル、 $W_j(t)$ は重み係数ベクトルであり、次式で与えられる。

$$y_j(t) = \ddot{x}_j + \ddot{X}_0 \quad (9)$$

$$H_j(t) = (x_1 \ \dots \ x_n \ \dot{x}_1 \ \dots \ \dot{x}_n) \quad (10)$$

$$W_j(t) = (w_{1,j} \ \dots \ w_{2n,j})^T \quad (11)$$

式(8)を加速度応答 $\{\ddot{x}\}$ について書き下すと、

$$y_t = H_t W_t \quad (12)$$

となる。ただし、

$$y_t = (y_1(t) \ \dots \ y_n(t))^T \quad (13)$$

$$H_t = (H_1(t) \ \dots \ H_n(t)) \quad (14)$$

$$W_t = (W_1(t) \ \dots \ W_n(t))^T \quad (15)$$

である。式(12)は前章でそのアルゴリズムを展開した観測方程式であるのでカルマンフィルターを用いて同定が可能である。

式(7)は運動方程式を絶対加速度に関して展開したので、結果として線形の観測方程式が得られたが、

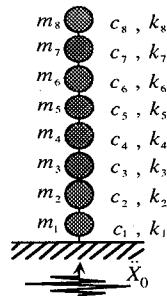


図-2 解析モデル

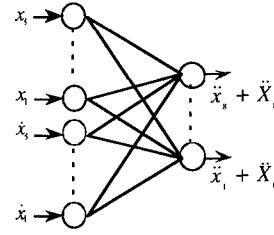


図-3 ネットワークモデル

変位応答について展開すれば、次式を得る。

$$x_j = f_j(w_{1,j}, \dots, w_{n,j}, \ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \ddot{X}_0) \quad (16)$$

これは、同定の対象としている未知パラメータの非線形関数になっている。速度応答について展開しても同じような関係式が得られる。したがって変位応答あるいは速度応答を観測値として用いるシステム同定では非線形システム同定のアルゴリズムが必要になる。

(2) 全ての階での絶対加速度応答が観測される場合

図-2に示すような線形8自由度系のモデル構造物を対象として、全ての質点の応答の観測値が与えられる場合について同定を行う。このモデルは震動制御の実験に使用した¹²⁾ものであり、諸元は各層の質量がそれぞれ1.00kgfs²/cm、層間の粘性減衰係数、剛性がそれぞれ0.40kgfs/cm、100.0kgf/cmである。同定に用いた観測データを得るために図-2のモデルにEI Centro地震観測記録の最大地動加速度を50 galに修正したものを入力し、Newmarkのβ法を用いて順解析を行った。一般に観測データには観測ノイズが含まれる。そこで順解析で得られた絶対加速度応答、速度応答、変位応答にそれぞれの最大応答値の10%に相当するホワイトノイズを混入して観測データとして用いることとする。図-3は解析を行うためのニューラルネットワークモデルであり、 $x_s \sim x_1$ 、 $\dot{x}_s \sim \dot{x}_1$ を入力教師信号とし、観測マトリックス H_t を構成し、 $\ddot{x}_s + \ddot{X}_0 \sim \ddot{x}_1 + \ddot{X}_0$ を出力教師信号ベクトル y_t として、粘性減衰係数、剛性をネットワークの重み係数と

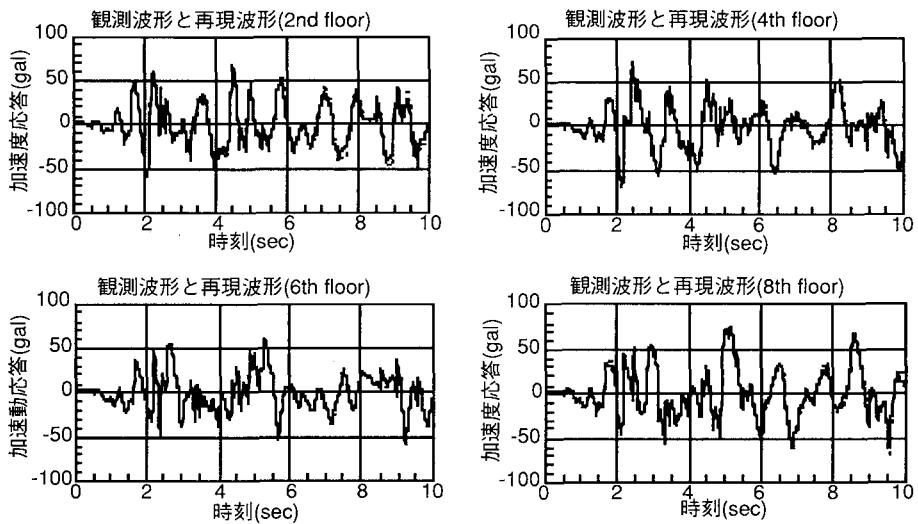


図-4 全観測時における観測波形と再現波形

して学習を行う。学習を行うにあたり重み係数マトリックス w_i の初期値の決め方が重要となる。初期値として現実的な値であれば、どのような値を与えてもほぼ厳密値に収束する。しかし、学習速度は重み係数の初期値に大きく影響されるので、初期値の設定のための分布関数を式(17)で定義する。これは式(7)より明らかなように、 j 番目の質点の絶対加速度応答 $\ddot{x}_j + \ddot{X}_j$ は全ての質点の変位と速度応答の線形和として表現されているが、多自由度系の応答を考えると、任意の階の応答はその上下の階の応答の影響を大きく受けるが、注目している階から遠ざかるにつれてそれらの影響は薄れていくと考えられるからである。

$$w_{n,m} = A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(m-n)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (17)$$

ここに、 σ は任意に設定できる値で、任意の階の応答が他の階の応答に及ぼす影響の度合いを表す変数であり、 m は入力教師信号の質点番号、 n は出力教師信号の質点番号である。本論文では変位応答の入力教師信号に関する重み係数に対しては初期値として式(17)に $\sigma = 0.75$ を与え、初期値を決定する定数として $A = 10.0$ を乗じたものを用い、速度応答の入力教師信号に関する重み係数に対してはその初期値として $\sigma = 0.75$ を与え、 $A = 1.0$ を乗じたものを用いた。初期値の分布特性は連続関数で定義しなくともよいが、対象としている構造物の形式ごとに、異なった初期値の分布特性を設定する必要がある。構造物の力学モデルが設定できれば、初期値の分布特性のおまかなかは $M^{-1}C$ と $M^{-1}K$ の非ゼロ要素の分布形から決定可能である。重み係数の共分散マトリックス

表-1 同定値と厳密解の比較

真値	粘性c 0.400	剛性k 100.0
1st	0.417	101.6
2nd	0.404	100.7
3rd	0.409	97.012
4th	0.418	100.0
5th	0.426	99.03
6th	0.395	100.1
7th	0.394	101.5
8th	0.389	99.67

の初期値は、上記の方法で決定した重み係数マトリックスの各要素を二乗した値とした。おおまかなかは $M^{-1}C$ と $M^{-1}K$ の非ゼロ要素の分布形から決定可能である。重み係数の共分散マトリックスの初期値は、上記の方法で決定した重み係数マトリックスの各要素を二乗した値とした。

構造物の応答値を再現するに際しては、はじめの3秒間ずなわち300ステップを学習ステップとして重み係数の更新を行い、逐次得られる重み係数を用いて数値積分を行い、それ以降は学習ステップの最後で得られた重み係数の値で固定して数値積分を行っている。図-4は解析結果である。それぞれ偶数階の加速度応答を表したものであり、波線が観測波形、実線が再現波形である。観測波形にノイズが含まれているので応答値に差が見られるが全体的な時刻歴はほぼ一致しており、提案した手法が妥当であるといえる。また紙面の都合上、奇数階の再現結果を載せていないが、偶数階と同様ほぼ一致している。表-1は3秒間の学習から決定された減衰係数マトリック

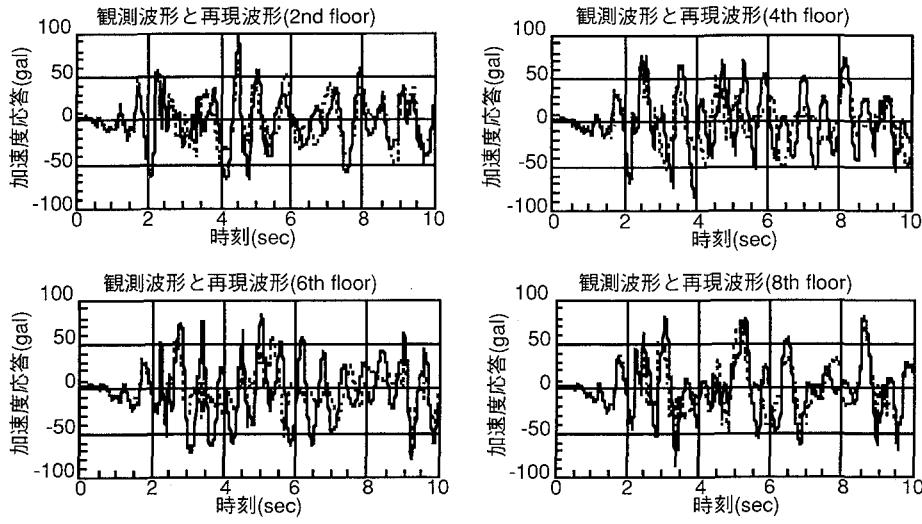


図-7 部分観測時における観測波形と再現波形

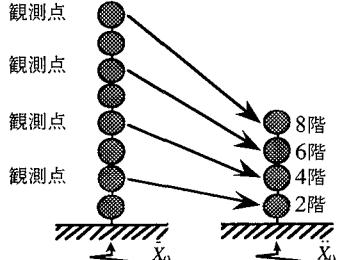


図-5 部分観測時のモデル化

スと剛性マトリックスに関する重み係数の同定値とそれらの厳密値との比較である。本研究で用いていいる同定アルゴリズムでは、減衰係数と剛性マトリックスの両者とも全ての要素に初期値が設定されているが、学習を行うにつれて対角要素とそれに隣接する要素のみ値を持つようになり、それ以外の要素はゼロに収束していく。

(3) 部分観測データを用いた解析

これまでに全ての質点に関して観測データが得られた場合について述べてきた。しかし、実際にはすべての質点に関して観測データを得ることは困難である。そこで観測データが限られた質点のみで与えられる場合について考える。ここでは、前述の線形8自由度モデルに関して、2, 4, 6, 8階の質点のみで観測データが得られた場合、観測データの得られた質点に関しての応答を再現することを試みる。運動方程式の観点から考えると観測データの得られない質点を含んだ運動方程式をたてることは不可能である。そこで観測データの得られた質点のみ

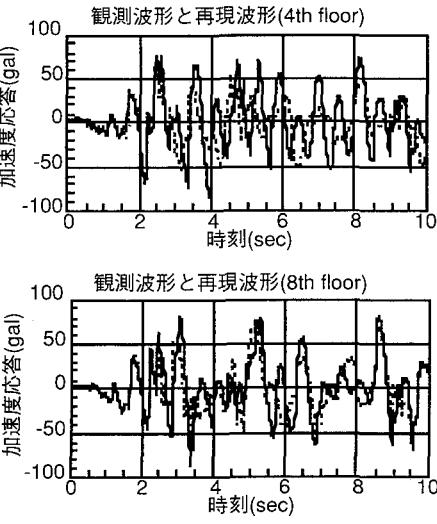


図-6 ネットワークモデル

を取り出し、自由度を落とした質点系を考える。そのモデル化が図5である。この場合には、観測方程式は次式のようになる。

$$y_i = H_i W_i + v_i \quad (18)$$

ただし、

$$y_i = (\ddot{x}_8 + \ddot{X}_0, \ddot{x}_6 + \ddot{X}_0, \ddot{x}_4 + \ddot{X}_0, \ddot{x}_2 + \ddot{X}_0)^T \quad (19)$$

$$H_i = (H_8(t) \ H_6(t) \ H_4(t) \ H_2(t)) \quad (20)$$

$$H_j(t) = (x_8 \ x_6 \ x_4 \ x_2 \ \dot{x}_8 \ \dot{x}_6 \ \dot{x}_4 \ \dot{x}_2) \quad (21)$$

$$W_i = (W_8(t) \ W_6(t) \ W_4(t) \ W_2(t))^T \quad (22)$$

$$W_j(t) = (w_{1,j} \ \dots \ w_{8,j}) \quad (23)$$

である。式(18)を用いて、図6に示すニューラルネットワークを構築し、全観測の時と同様に3秒間を学習ステップとした解析を行った。観測データにはこれまでと同様、それぞれの最大応答値の10%に相当するホワイトノイズを附加してある。図7は解析結果である。それぞれ2階、4階、6階、8階の加速度応答であり、波線が観測波形、実線が再現波形である。最大応答値が若干大きくなるものの、応答の傾向は忠実に再現できているといえる。この場合に、

学習された重み係数は物理的な意味を与えることはできない。つまり、これらはニューラルネットワークの特徴である入出力間の写像関係のみを再現するものであり、ここでは絶対加速度応答に対する変位応答、速度応答の相関関係をあらわすものである。

4. 非線形問題への適用

構造物部材やそれらの接合部は変形量が大きくなると変形と作用荷重の関係が非線形領域に入る。したがって、強い地震や風などの自然外力に対して構造物は非線形応答を示すので、こうした応答特性を解析的に推定するためには、対象となる構造物の非線形動特性を同定することが必要となってくる。本章節では非線形な復元力特性を有する構造物モデルを考え、かつこの構造物モデルの非線形構成式（力と変位、速度ならびに加速度応答の関係を表現している関数）が非線形パラメーターについて線形方程式で表現できる場合を対象として、その運動方程式を線形の観測方程式へ変換する方法論を展開し、非線形問題を線形問題として同定する方法論を示す。

(1) 観測方程式の線形化

一般に集中質量系で表現される非線形多自由度モデルにおいて、その自由度を n とすると質点 i の運動方程式は次式で表される。

$$m_i(\ddot{x}_i + \ddot{X}_0) + c_i\dot{u}_i + z_i - (1 - \delta_{in})(c_{i+1}\dot{u}_{i+1} + z_{i+1}) = 0 \quad (24)$$

ここに、 x_i は地面に対する質点 i の相対変位、 u_i は質点 i と質点 $i-1$ 間の相関変位であり、 $u_i = x_i - x_{i-1}$ と表され、 $i=0$ の場合は $x_0 = 0$ とする。 δ_{in} はクロネッカーデルタであり、 $i=n$ のときのみ値 1 をとり、それ以外では 0 となる。また z_i は質点 i と質点 $i-1$ 間のバネの非線形復元力であり、次式の Versatile 型モデル¹³⁾ で表現できるものとする。

$$\dot{z}_i = -\alpha_i |\dot{u}_i|^{n_i-1} z_i - \beta_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i} + k_i u_i \quad (25)$$

いま式(24)を非線形復元力 z_i の展開式と考え、質点 i と質点 $i-1$ 間のバネの非線形復元力 z_i について解くと次式のようになる。

$$z_i = -c_i \dot{u}_i - \sum_{j=i}^n m_j (\ddot{x}_j + \ddot{X}_0) \quad (26)$$

したがって観測値として各質点の加速度応答 \ddot{x}_i 、速度応答 \dot{x}_i （それぞれ $i=1 \sim n$ ）、および地動加速度 \ddot{X}_0 が得られたとき、粘性減衰係数 c_i ($i=1 \sim n$) が既知であれば式(26)を用いて各質点間の非線形復元力 z_i ($i=1 \sim n$) が観測値として得られる。粘性減衰係数 c_i ($i=1 \sim n$) に関しては 3 節で述べたように線形領域での同定が可能があるので、まず線形問題

として粘性減衰係数 c_i ($i=1 \sim n$) を同定しその値を既知として用いるものとする。また質量 m_i ($i=1 \sim n$) も既知とする。しかし非線形復元力 z_i ($i=1 \sim n$) を支配している方程式（式(25)）は z_i に関する形に直す必要がある。台形公式を用いて時間積分すれば次式のように書き直せる。

$$\begin{aligned} z_{i(t)} &= \\ &- \alpha_i \left\{ \Delta t / 2 \left(|\dot{u}_{i(t)}| |z_{i(t)}|^{n_i-1} z_{i(t)} + |\dot{u}_{i(t-1)}| |z_{i(t-1)}|^{n_i-1} z_{i(t-1)} \right) \right\} \\ &- \beta_i \left\{ \Delta t / 2 \left(|\dot{u}_{i(t)}| |z_{i(t)}|^{n_i} + |\dot{u}_{i(t-1)}| |z_{i(t-1)}|^{n_i} \right) \right\} \\ &+ k_i \left\{ \Delta t / 2 \left(\dot{u}_{i(t)} + \dot{u}_{i(t-1)} \right) \right\} + \left\{ z_{i(t-1)} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

式(27)は非線形パラメーターを未知数とする次のような線形な観測方程式に書き下すことができる。

$$y_t = \mathbf{H}_t \mathbf{W}_t \quad (28)$$

ここで y_t 、 \mathbf{H}_t はそれぞれ観測ベクトル、 \mathbf{W}_t は重み係数ベクトルで、

$$y_t = z_{i(t)} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \left\{ \Delta t / 2 \left(|\dot{u}_{i(t)}| |z_{i(t)}|^{n_i-1} z_{i(t)} + |\dot{u}_{i(t-1)}| |z_{i(t-1)}|^{n_i-1} z_{i(t-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. \Delta t / 2 \left(|\dot{u}_{i(t)}| |z_{i(t)}|^{n_i} + |\dot{u}_{i(t-1)}| |z_{i(t-1)}|^{n_i} \right) \right. \\ &\quad \left. \Delta t / 2 \left(\dot{u}_{i(t)} + \dot{u}_{i(t-1)} \right) \quad z_{i(t-1)} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{W}_t = (-\alpha_i, -\beta_i, k_i, 1)^T \quad (31)$$

と表される。式(28)に対して、これまでと同じようなネットワークを考え、2 節で展開したアルゴリズムを用いて学習を行う。しかし、Versatile 型の復元力モデルにおける累乗パラメーター n_i については、式(28)で与えられる観測方程式の中では線形化されていないので、ここでは累乗パラメーター n_i を既知として同定を行うものとする。このパラメータを換えると履歴復元力特性が変化するので、このパラメータの同定には、モデル選択の方法論¹⁴⁾ を用いることが可能である。ここではこのパラメーターの同定は行っていないが、これは、幾つかの n_i をあらかじめ設定しておいて、その各々に対して式(31)で定義されるパラメータを同定し、同時に赤池・ペイズ情報量基準 (ABIC 値) を計算し、ABIC 値が最小になる場合の n_i とそのときのパラメータを最適な値とする方法論である。

(2) 数値解析例

a) 2 自由度系の例

解析には図 8 に示すような非線形 2 自由度モデルを用いる。

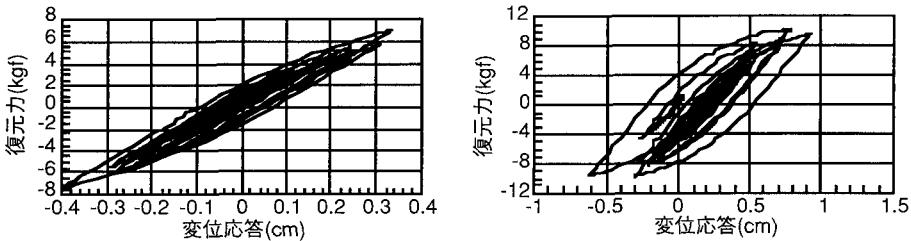


図-9 真の履歴応答

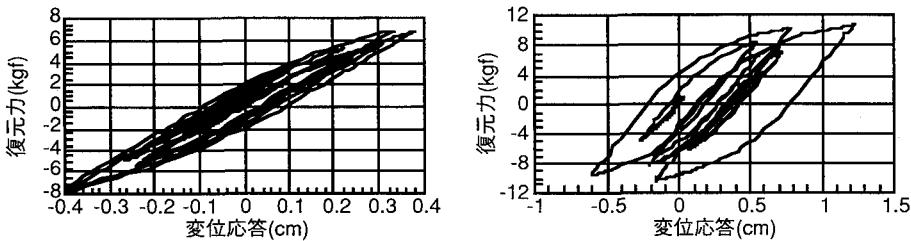


図-10 500回の学習による再現履歴応答

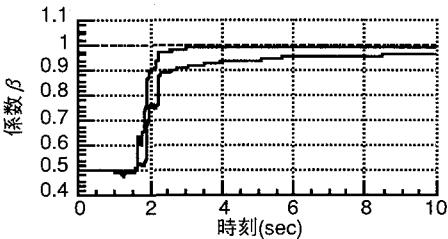
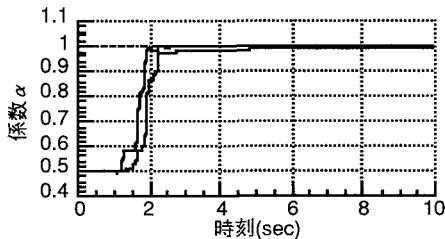


図-11 係数 α および β の時刻歴

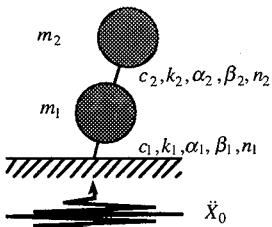


図-8 非線形2自由度モデル

モデルの諸元は各層の質量を $0.12 \text{ kgf}^2/\text{cm}$ 、層間の粘性減衰係数を $0.00678 \text{ kgf} \cdot \text{cm}/\text{s}$ 、剛性を 24.0 kgf/cm とする。Versatile型モデルの形状係数はそれぞれ $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$, $n = 1.0$ とする。図-8のモデルに El Centro 地震観測記録（最大加速度を 50 gal に修正）を入力し、Runge Kutta 法を用いて順解析を行い得られた各質点の加速度応答ならびに速度応答値から、各時刻での復元力を式(26)を用いて求め、これを教師信号として用いた。こうして求めた復元力の履歴曲線が図-9である。左が1階、右が2階を表している。

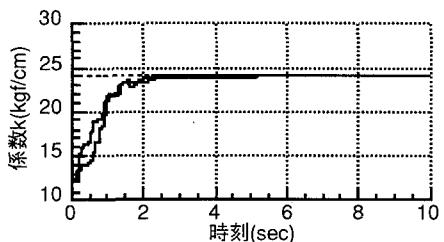


図-12 剛性 k の時刻歴

構造物の応答を再現するには、初めの 5 秒間ずなわち 500 ステップを学習ステップとして重み係数の更新を行い、逐次得られる重み係数を用いて数値積分を行い、それ以降は学習ステップの最後で得られた重み係数の値で固定して数値積分を行った。こうして得られた履歴曲線の再現結果が図-10である。図-9と図-10を比較すると、変位の小さい間は両者は良く一致しているが、変位が大きくなるにつれて再現性が悪くなっている。図-11と図-12には同定された重み

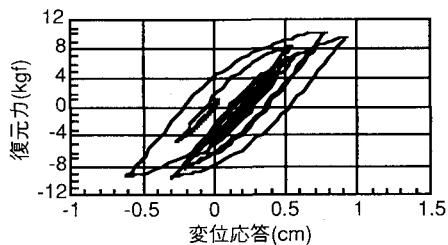
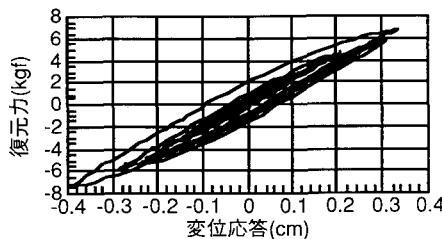


図-13 1ステップ前の重み係数を用いた再現履歴応答

表-2 同定値と厳密解の比較

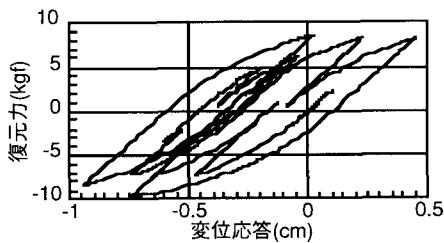


図-14 8階の真の履歴曲線

真値	剛性k 24.000	係数 α 1.000	係数 β 1.000
1st	24.018	1.003	0.998
2nd	24.002	1.003	0.994
3rd	24.002	1.003	0.993
4th	24.008	1.002	0.996
5th	24.011	1.002	0.997
6th	24.005	1.001	0.996
7th	24.014	1.001	0.997
8th	23.982	0.994	0.969

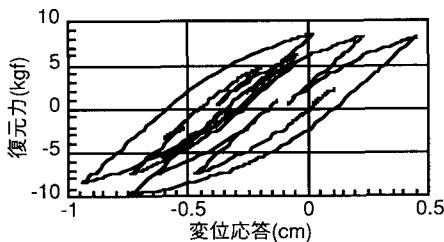


図-15 8階の再現履歴曲線

係数の時刻歴（太線が2層に、細線が1層に関するパラメータである）が示されている。この図から、500ステップでは、Versatile型モデルの形状係数に関する重み係数の厳密値への収束性が悪いことが分かる。したがって、500ステップで学習を打ち切った場合、それ以降の数値積分で誤差が蓄積され、図-9と図-10の差異が発生したと考えられる。そこで、学習ステップを定めずに数値計算を行う時間の1ステップ前までに同定された重み係数を用いて応答の再現を行った。その結果が図-13である。図-11、12から明らかなように、同定されるパラメータの収束速度は時間の経過とともに悪くなるものの、厳密値へ少しずつではあるが収束しているため、よい再現結果が得られている。

b) 自由度系の例

次にここで用いている手法の非線形8自由度モデルへの適用を考える。モデルの諸元は非線形2自由度モデルと同じものとした。自由度が非常に高いた

め、短い学習ステップでは同定値の厳密値への収束性が悪いので、数回のグローバル学習を行った。1グローバル学習過程は10秒間（1000ステップ）の学習からなっており、1グローバル学習過程の最後に収束した値を改めてパラメータの初期値として、同じデータを用いて同定を繰り返した。ただし、共分散マトリックスの初期値については1回のグローバル学習過程の最後の段階の共分散マトリックスを100倍したものを次のグローバル学習過程の初期値として用いた。ここではグローバルな繰り返し計算を10回行った後に、求められた構造パラメーターを用いて応答の数値シミュレーションを行った。図-14は8階の真の履歴曲線、図-15は8階の再現履歴曲線である。最終的に得られた剛性k、係数 α 、 β の同定値を示したもののが表2であるが、どの数値もほとんど厳密解へ収束しており、それらの数値を用いて積分計算を行っているため非常によい再現性を示しているといえる。なお、グローバル学習をどの段階で打ち切るかについては、各グローバル学習の前後のパラメーター値を用い、その差から収束誤差を計算し、その値が0.1%以下になった時点でグローバル学習を終了している。また、同定するべき未知パラメーターの数が多くなってくると、局所的な最適値へ同定値が収束するという問題があるが、ここで取り扱った程度の

パラメーター数 (24) では厳密解へ収束するようである。

5. まとめ

本研究では線形および非線形な復元力特性を持つ構造物を対象として、その運動方程式を線形な観測方程式へ変換する方法を展開し、構造パラメータの同定を行うとともに構造物の応答の再現を試みた。得られた結果を以下にまとめる。

線形な復元力特性を持つ場合には、

- (1) 観測データが全て得られた場合、短い学習時間で構造物の動的パラメーターを同定し、精度よく応答の再現が行える。
 - (2) 観測データが部分的にしか得られない場合にも、モデルの自由度を落とすことで、同定が可能となり、応答の再現が行える。
 - (3) カルマンフィルターを用いることで、観測データに含まれているノイズに対応できる。
- 非線形な復元力特性を持つ場合には、
- (4) Versatile型モデルの形状係数を含めたパラメーター同定がおこなえ、応答の再現が行える。
 - (5) 自由度の低い場合には、一度の学習で同定が可能であり、応答の再現が行える。
 - (6) 自由度の高い場合、収束性を判定しながらグローバルな繰り返し計算を行うことで、同定値の収束性を改善することができる。

付録A カルマンフィルターの概念

状態 $t-1$ から状態 t への遷移が次式のシステム方程式として与えられるものとする。

$$\mathbf{x}_t = \Phi_{t-1} \mathbf{x}_{t-1} + \Gamma_{t-1} \mathbf{w}_{t-1} \quad (\text{A1})$$

ここに Φ_{t-1} は $n \times n$ 次元の遷移マトリックス、 Γ_{t-1} は $n \times r$ 次元のマトリックス、 \mathbf{w}_{t-1} は系に加わる r 次元のシステムノイズベクトルであり、その平均値は $\bar{\mathbf{w}}_{t-1}$ 、共分散マトリックスが \mathbf{Q}_{t-1} のホワイトノイズである。また、状態量 \mathbf{x}_{t-1} も不規則ベクトルであるとして、その最尤推定値と共に分散マトリックスが $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$ と \mathbf{P}_{t-1} で与えられるものとする。いま、 \mathbf{x}_{t-1} と \mathbf{w}_{t-1} が無相関であるとすれば、時刻 t における状態量の事前推定値 $\bar{\mathbf{x}}_t$ とその共分散マトリックス \mathbf{M}_t は次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{x}}_t = \Phi_{t-1} \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \Gamma_{t-1} \bar{\mathbf{w}}_{t-1} \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{M}_t = \Phi_{t-1} \mathbf{P}_{t-1} \Phi_{t-1}^T + \Gamma_{t-1} \mathbf{Q}_{t-1} \Gamma_{t-1}^T \quad (\text{A3})$$

この状態で状態量 \mathbf{x}_t との関係が次式で表されるような観測ベクトル \mathbf{y}_t が与えられるものとする。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (\text{A4})$$

ここに、 \mathbf{H}_t は $m \times n$ 次元の観測マトリックスであ

り、 \mathbf{v}_t は m 次元の観測ノイズベクトルで、その共分散マトリックスが \mathbf{R}_t と与えられる。この状態で状態量の事前推定値 $\bar{\mathbf{x}}_t$ がどのように修正され、事後推定値である最尤推定値 $\hat{\mathbf{x}}_t$ になるかを与えるのがカルマンフィルターであり、それは次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{x}}_t) \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{M}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{M}_t \quad (\text{A6})$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{M}_t \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{M}_t \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (\text{A7})$$

カルマンフィルターの誘導過程はよく知られているのでここでは結果のみを示したが、本論文で用いている記号と同じ形式の誘導過程は参考文献^{10), 11)}を参照すればよい。

参考文献

- 1) 久保司郎: 逆問題, 培風館, 1992.
- 2) 星谷勝, 丸山収: 非線形構造系の地震時挙動特性の同定, 土木学会論文集, 第386号/I-8, pp.397-405, 1987.
- 3) 野田茂, 久保田秀樹: 非線形履歴劣化多自由度系の震動特性の同定, 第3回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集, pp.195-209, 1993.
- 4) 星谷勝, 斎藤悦郎: 線形多自由度系の動特性の推定, 土木学会論文集, 第334号/I-1, pp.289-298, 1984.
- 5) Fletcher, R.: Practical methods of optimization, Second Edition, John Wiley, 1987.
- 6) 岡本良夫: 逆問題とその解き方, オーム社, 1993.
- 7) 麻生英樹: ニューラルネットワーク情報処理, 産業図書, 1988.
- 8) 佐藤忠信, 佐藤誠: 自己学習機能を有する構造同定アルゴリズム, 第9回日本地震工学シンポジウム講演概要集, pp.1729-1734, 1994.
- 9) 野田茂, 星谷勝, 小淵康義: 構造化学習による非線形履歴振動系の同定, 構造工学論文集, 第40A巻, 1994.
- 10) 星谷勝, 斎藤悦郎: データ解析と応用, 鹿島出版会, 1991.
- 11) 加藤寛一郎: 最適制御入門, 東京大学出版会, 1987.
- 12) 佐藤忠信, 土岐憲三, 望月俊弘: 可動質量型制振装置を用いた構造物の閉開ループ制御, 土木学会論文集, 第525号/I-33, pp.201-211, 1995-10.
- 13) Vi-Kwei Wen: Method for random vibration hysteretics system, Journal of the engineering mechanics division, No.EM2, pp.249-263, 1976
- 14) 赤池弘次: モデルによってデータを測る, 数理科学, No.213, pp.7-10, 1981.

(1997.1.13受付)

A LINEAR ALGORITHM TO IDENTIFY THE NON-LINEAR STRUCTURAL SYSTEM EQUATIONS

Tadanobu SATO and Masashi KIKUKAWA

To identify dynamic parameters of structural systems, we have to solve non-linear optimization problems because the system transfer equation of structural system is usually a non-linear function of the system parameters. The purpose of this paper is to develop a method to linearize an observation equation with respect to the structural parameters, which is derived from the system transfer equation and apply it to identify the dynamic parameters of linear and non-linear dynamic structural systems. The numerical examples give satisfactory results to identify dynamic parameters of model structures with 8 degrees of freedoms.