

走行荷重を受ける軌道振動系の連成解析

古田 勝¹・阿部和久²

¹正会員 東京都交通局建設工務部 (〒163-01 東京都新宿区西新宿2丁目8番1号)

²正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050番地)

地下鉄の軌道に用いられる防振まくらぎなどの低バネ係数軌道の振動特性を数値解析により予測・把握することを目的に、台車・軌道系の非線形振動を直接モデル化し得る解析手法の構成を試みた。具体的方法は、走行荷重下でのレールの振動系と質点系でモデル化した車輪やまくらぎの振動系を時間域積分表現式で定式化を行い、振動系の数値解の安定性と精度とを向上させるため、質点系とレールとの間に作用する接触力を時間域で離散化した。さらに、各系における接触力が適合するように質点系の時間積分スキームを積分方程式に基づき構成した。解析例として、防振まくらぎ軌道の軌道パッドと防振パッドのバネを線形とした場合と、圧縮変形試験から得られた非線形特性を反映させた場合での解析を行い、軌道各部の振動の差違について比較検討した。

Key Words : railway track vibration, numerical analysis, nonlinearity, time domain

1. はじめに

近年、地下鉄の列車走行に伴うトンネル周辺地盤振動への対策を目的に、コンクリート直結道床に1締結当たり4～10 MN/m程度の低バネ係数の防振まくらぎを敷設した軌道構造の採用が試みられている。この防振まくらぎを用いた軌道の防振効果など、振動の周波数特性の把握には、まくらぎの支持バネ係数等から簡単に計算することが困難であることから、一定区間の延長にまくらぎを試験敷設して実際に測定する方法が一般に採られている。

一方、軌道系の数値モデルにより軌道振動の特性を把握しようとする試みも近年なされつつある。軌道振動の数値モデルとしては、台車及び軌道を一次元の質点に置き換えて解析する方法¹⁾が主であったが、近年、レールを弾性床または離散支持されたはりで表わし、列車を移動荷重として扱うモデル²⁾⁻⁵⁾が提案されている。これらの問題では、振動系の運動方程式が時間項を含む偏微分方程式系で与えられる。したがって、一般に用いられている解法としては、時間域の問題をフーリエ変換やラプラス変換により像空間の問題に変換して解くものや、はりを有限長としモード重畳法を用いるものなどがほとんどである。動的な問題を像空間で扱う方法には、軌道パッド及び防振パッド(以下パッド類と称する)に材料特性上明確な非線形性が認められるにもかかわらず⁶⁾、その非線形性を直接的に考慮することが本質的に不可能であるといった問題点があり、時間域での有効な解析手法の構成が望まれる。

本論文は、地下鉄で用いられる防振まくらぎ等の低バネ定数軌道の周波数特性を数値解析により把握する

ことを目的に、台車及び軌道系の非線形振動を時間域で解析するための数値モデルを提案するものである。具体的には、レールの振動応答を時間域積分表現式で表わす筆者らが提案した方法⁷⁾を基本に用い、パッド類とまくらぎとで構成される軌道構造と走行する台車車輪との連成振動に対して、動的応答を時間域で定式化する方法を構成する。なおその際に、上述のとおりレール振動系は積分表現式に基づきモデル化を行うが、車輪とまくらぎは質点系で表わす。質点系の運動方程式の時間積分スキームとしては、差分近似に基づいたものが一般的に用いられている。しかし、レール振動系との結合を図る場合、両者の時間方向の扱い方が本質的に異なることから、安定かつ適切な解法の構成は必ずしも容易ではない。そこで、本論文では質点系の時間積分法を積分方程式に基づき定式化し、レールと質点系における接触力の時間方向の扱い方に適合性を課した結合解法の構成を試みる。

また、実際の軌道振動における周波数成分は数Hzから数1000Hzまでの広域成分を含んでおり、一つの統一的な数値モデルで全ての周波数領域を適切に表現することは難しいと考えられる。このため、地下鉄走行時のトンネル近傍の地表面における振動の測定例⁸⁾では数Hzから300Hz程度までが主な振動成分であったこと、公害振動の評価単位の振動レベルは数Hzから90Hzまでの領域を対象としていることなどの理由から、軌道振動の周波数領域として数Hzから数100Hzまでの低域を主な解析対象とする。

解析例として、パッド類の非線形性を反映させた場合と、それを線形化した場合との比較を行い、モデル化が軌道各部の振動応答に及ぼす影響について検討する。

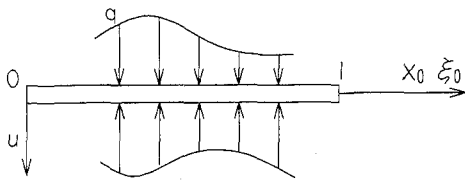


図-1 座標系と諸条件

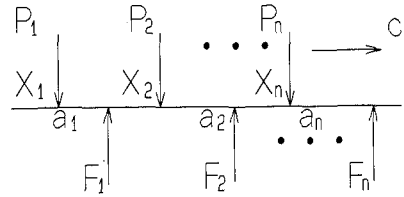


図-2 レールに作用する荷重

2. 移動荷重を受けるレールの積分表現式に基づくモデル化

(1) レールの積分表現式

レールは Euler ばりによりモデル化し、移動荷重を受けるレールの動的挙動を時間域積分表現式に基づき定式化する。なお、その定式過程の詳細については文献7) に示したので、ここでは概略についてのみ述べることにする。図-1 に示す曲げ剛性 EI 、長さ l の Euler ばりを考える。簡単のため、はりの両端において曲げモーメント M 、せん断力 Q は作用していないものとし、荷重は移動荷重も含め上載されているものと下方からの反力を合わせ q で表わす。

はりの運動方程式は次式で与えられる。

$$EIu'''' + \rho A \ddot{u} = q \quad (1)$$

ここで、 u はたわみ、 $(\prime) = \partial/\partial \xi$ 、 $(\dot{}) = \partial/\partial t$ であり、 ρ は質量密度、 A ははりの断面積である。

二つの力学状態 u と u^* を考える。動力学問題における相反関係式⁹⁾より、これら二つの系に対し次式を得る。

$$\int_0^l u^* q^* d\xi = -\rho A \int_0^l (\dot{u}_0^* u - u_0^* \dot{u}) d\xi + [\theta^* M^* - u^* Q^*]_0^l + \int_0^l u^* q d\xi \quad (2)$$

ここで、 q^* は u^* に対応する荷重、 $u_0^* := u^*(t=0)$ 、 $\dot{u}_0^* := \dot{u}^*(t=0)$ であり、

$$M^* = -EIu''^*, \quad Q^* = -EIu'''^*, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (3)$$

とする。また、 $*$ は合成積を意味し、次式で定義されるものである。

$$g * f = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

なお、式(2)では、初期条件として $u(t=0) = 0$ 、 $\dot{u}(t=0) = 0$ としている。

q^* として $\tau = 0$ 、 $\xi = x$ に加えられる以下の単位衝

撃荷重を考える。

$$q^* = \delta(\xi - x)\delta(\tau) \quad (5)$$

ここで、 δ は Dirac のデルタ関数であり、 $u^* = 0 (\tau \leq 0)$ とすると、式(2)より $u(x, t)$ に関する次の積分表現式を得る。

$$u(x, t) = [\theta^* M^* - u^* Q^*]_0^l + \int_0^l u^* q d\xi \quad (6)$$

また、無限長のはりのたわみ $u(x, t)$ に対する積分表現式は次式となる。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^* q d\xi \quad (7)$$

式(5)の荷重条件に対応する Green 関数 u^* は次式をみたすものより与えられる。

$$EIu'''' + \rho A \ddot{u}^* = \delta(\xi)\delta(\tau), \quad u^*(\tau \leq 0) = 0 \quad (8)$$

なお、式(5)の荷重条件をみたす解は、式(8)で ξ を $\xi - x$ としたものによって与えられる。

初期条件として強制変位を与えたはりに対する解は、Graff¹⁰⁾により示されているが、ここではそれと本質的に等価な、式(8)をみたす無限長はりを考える。この場合、Green 関数 u^* は次式により与えられる⁷⁾。

$$u^* = \frac{H(\tau)\xi}{2\sqrt{EI\rho A}} \left[S \left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\tau}} \right) - C \left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\tau}} \right) \right] + \frac{H(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{EI\rho A}\sqrt{\pi\rho A}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi^2}{4\tau} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (9)$$

ここで、 H は Heaviside のステップ関数、 S, C は Fresnel 関数である。

(2) 積分表現式の離散化

図-2 に示すようにレール上を n 個の連行荷重 (P_1, P_2, \dots, P_n) が定速度 c で走行する場合を考える。なお、レールは N 個の離散点でまくらぎなどにより支持されているものとし、移動荷重の $t = 0$ における位置を x_i ($i = 1, \dots, n$)、 N 個の反力とその作用位置をそれぞれ、 F_i, a_i ($i = 1, \dots, N$) とする。この問題において、はりに作用する外力 q は次式で与えられる。

$$q = \sum_{i=1}^n P_i(\tau)\delta(\xi - x_i - c\tau) - \sum_{i=1}^N F_i(\tau)\delta(\xi - a_i) \quad (10)$$

式(10)を式(7)に代入すると、はりのたわみ u の積分表現式は次式となる。

$$u(x, t) = \sum_0^n \int_0^t u^*(x_i - x + c(t - \tau), \tau) P_i(t - \tau) d\tau - \sum_0^N \int_0^t u^*(a_i - x, \tau) F_i(t - \tau) d\tau \quad (11)$$

ここで、時刻 t を時間増分 Δt で分割し、外力 P_i, F_i を時間方向に区間一定の関数で離散化すると、時刻 $t_M = M\Delta t$ における移動荷重 P_i の作用位置でのレールのたわみは次式で与えられる。

$$u(x_i + ct_M, t_M) = \sum_0^n \sum_0^M A_{ij}^{M-m+1} P_j^m - \sum_0^N \sum_0^M B_{ij}^{M, M-m+1} F_j^m \quad (12)$$

ここで、係数 $A_{ij}^m, B_{ij}^{M, m}$ は次式で定義したものである。

$$A_{ij}^m = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(x_j - x_i - c\tau, \tau) d\tau, \quad B_{ij}^{M, m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - x_i - ct_M, \tau) d\tau \quad (13)$$

また、反力の作用位置 $x = a_i$ におけるたわみ量は次式により与えられる。

$$u(a_i, t_M) = \sum_0^n \sum_0^M C_{ij}^{M, M-m+1} P_j^m - \sum_0^N \sum_0^M D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \quad (14)$$

ここで、係数 $C_{ij}^{M, m}, D_{ij}^m$ は次式で定義したものである。

$$C_{ij}^{M, m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(x_j - a_i + c(t_M - \tau), \tau) d\tau, \quad D_{ij}^m = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - a_i, \tau) d\tau \quad (15)$$

式(13), (15)に示した係数成分のうち、 $B_{ij}^{M, m}$ と D_{ij}^m は解析的に求める。一方、 $A_{ij}^m, C_{ij}^{M, m}$ は数値積分により求める。なお、これらの係数の具体的評価方法については文献7)を参照されたい。

3. 車輪の運動方程式の構成と接触力の評価

本論文では、車輪やまくらぎを質点でモデル化し、2. に示したはりモデルと結合して、全体系の連成解析を行う。質点系の運動方程式は、時間に関する常微分方程式で表わされる。それに対する時間積分スキームとしては、Runge-Kutta 法を初め、様々な方法が用いられているが、いずれも時間微分を有限差分に置き換える差分型を基本として導かれる時間積分法である。

これらの時間積分法では、質点と他の系との間に作用する接触力の各ステップ間における連続的な変化は明確なかたちで定義されていない。一方、2. に構成した積分表現式に基づくレールの振動モデルは、レールに

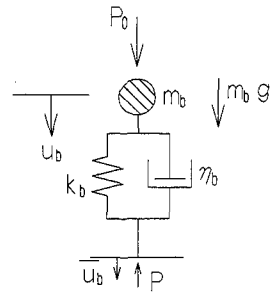


図-3 台車バネ下重量と車輪接触バネで構成されるモデル

作用する力を時間ステップ間で一定な関数により離散化している。前者においては質点系に作用する力が時間ステップ毎の離散的な時刻においてのみ定義されているのに対し、後者では全ての時刻で作用力が定義されている。このように解の構成法が互いに異なる系どうしを結合する場合、安定かつ信頼性の高い結合解を得ることは必ずしも容易ではない。したがって、車輪やまくらぎなどの質点系と本論文で採用したレールの運動系とを結合する場合、両者間で時間方向に適合した時間積分法を構成することが望ましい。

時間方向の変動を何らかの補間関数により離散近似し得る時間積分法として、変分原理や積分方程式に基づき定式化する方法があげられる。Kisu¹¹⁾や木須・下本¹²⁾は、積分方程式に基づいた時間積分スキームの定式過程を提案した。

本論文では、文献11),12)の考え方を参考に、台車バネ下重量(車輪と車軸の1/2の重量)の運動方程式並びに軌道パッド、まくらぎ及びび防振パッドで構成される軌道構造の運動系の定式化を積分方程式に基づいた積分スキームにより構成する。

(1) 車輪の運動方程式

走行する台車からレールが受ける荷重は、Hertzの接触バネを介して作用するとの考え方⁵⁾が一般的である。図-3に示すような、台車バネ下重量と車輪接触バネからなる1質点系の運動方程式は、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} -m_b \ddot{u}_b - \gamma_b \dot{u}_b - k_b u_b + f &= 0, \\ \ddot{u}_b &= u_b - \ddot{u}, \\ f &= P_0 + m_b g \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、 u_b は車輪の変位、 \ddot{u}_b は車輪直下におけるレールのたわみ、 \ddot{u} はそれらの相対変位、 m_b はバネ下質量、 γ_b はダッシュポッドの減衰係数、 k_b はバネ定数、 f は質点に作用する外力 P_0 と自重の総和であり、 g は重力加速度である。なお、Hertzの接触バネは本来非線形バネ¹³⁾としてモデル化が可能であるが、ここでは軌道系における非線形特性が振動応答に及ぼす影響につ

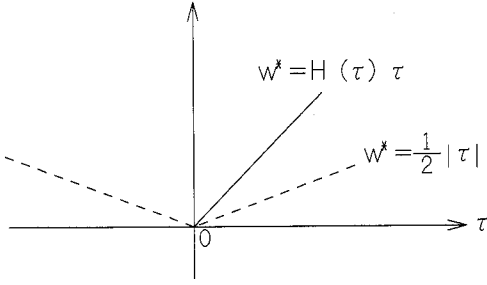


図-4 時間積分の核関数

いて検討することを目的とし、車輪の接触バネには等価線形バネを用いている。

式(16)と核関数 w^* との合成積を次式のようにとる。

$$\int_{t_{M-1}}^{t+} (m_b \ddot{u}_b + \eta_b \dot{u}_b + k_b \tilde{u}_b - f) w^*(t - \tau) d\tau = 0 \quad (17)$$

ここで積分上端において $t+ := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} t + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) であり、 $t_{M-1} < t$ とする。

Kisu は核関数 w^* として次のものを用いている⁹⁾。

$$w^*(\tau) = \frac{1}{2} |\tau| \quad (18)$$

式(18)の関数では $\tau < 0$ においても w^*, \dot{w}^* が非ゼロの値をとり、因果律を満たしていない。これは定式結果に特に影響を及ぼすものではないが、定式過程に多少不自然さが感じられる。そこで本論文では、 w^* として次式を用いる。

$$w^*(\tau) = H(\tau)\tau \quad (19)$$

なお、式(18),(19)の核関数を図示すると 図-4 のようである。

式(19)より、 \dot{w}^*, \ddot{w}^* は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}^* &= \delta(\tau)\tau + H(\tau) \\ &= H(\tau) \\ \ddot{w}^* &= \delta(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(17)で \ddot{u}_b と \dot{u}_b を含む項をそれぞれ部分積分し、式(20)の関係を用いると、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} u_b(t) &= u_b(t_{M-1}) + (t - t_{M-1})\dot{u}_b(t_{M-1}) \\ &\quad + \frac{\eta_b}{m_b} [(t - t_{M-1})\tilde{u}_b(t_{M-1}) - \int_{t_{M-1}}^{t+} \tilde{u}_b d\tau] \\ &\quad - \frac{1}{m_b} \int_{t_{M-1}}^{t+} (k_b \tilde{u}_b - f)(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (21)$$

また、式(21)を t について微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{u}_b(t) &= \dot{u}_b(t_{M-1}) + \frac{\eta_b}{m_b} [\tilde{u}_b(t_{M-1}) - \dot{u}_b(t)] \\ &\quad - \frac{1}{m_b} \int_{t_{M-1}}^{t+} (k_b \tilde{u}_b - f) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

式(21), (22)で $t = t_M = t_{M-1} + \Delta t$ とし、 $t_{M-1} \leq \tau \leq t_M$ での車輪とレールの変位を区間線形、レールと車輪の接触力 P を区間一定で近似する。このとき、各

式内の積分項は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_{M-1}}^{t_M} \tilde{u}_b d\tau &= \frac{\Delta t}{2} (\tilde{u}_b^{M-1} + \tilde{u}_b^M) \\ \int_{t_{M-1}}^{t_M} \tilde{u}_b(t_M - \tau) d\tau &= \frac{\Delta t^2}{3} \tilde{u}_b^{M-1} + \frac{\Delta t^2}{6} \tilde{u}_b^M \\ \int_{t_{M-1}}^{t_M} P d\tau &= \Delta t P^M \\ \int_{t_{M-1}}^{t_M} P(t_M - \tau) d\tau &= \frac{\Delta t^2}{2} P^M \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここで $\tilde{u}_b^{M-1} = \tilde{u}_b(t_{M-1})$ 、 $P^M = P(t_M)$ である。

式(21)～式(23)より 図-3 に示した質点系の時間積分スキームとして次式を得る。

$$\kappa_1 u_b^M - \kappa_2 \tilde{u}_b^M = S^{M-1} \quad (24)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= 1 + \frac{\eta_b \Delta t}{2m_b} + \frac{k_b \Delta t^2}{6m_b} \\ \kappa_2 &= \frac{\eta_b \Delta t}{2m_b} + \frac{k_b \Delta t^2}{6m_b} \\ S^{M-1} &= u_b^{M-1} + \Delta t \dot{u}_b^{M-1} \\ &\quad + \left(\frac{\eta_b \Delta t}{2m_b} - \frac{k_b \Delta t^2}{3m_b} \right) \tilde{u}_b^{M-1} \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \left(g + \frac{P_0}{m_b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

なお上乗荷重 P_0 は一定としている。

また、車輪の速度 \dot{u}_b^M は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{u}_b^M &= \dot{u}_b^{M-1} + \frac{\eta_b}{m_b} (\tilde{u}_b^{M-1} - \dot{u}_b^M) \\ &\quad - \frac{k_b \Delta t}{2m_b} (\tilde{u}_b^{M-1} + \dot{u}_b^M) + \left(g + \frac{P_0}{m_b} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (26)$$

(2) 車輪とレール間の接触力の評価

車輪とレールからなる系においては、車輪の変位 u_b 、車輪直下のレールのたわみ \tilde{u}_b および接触力 P が未知量である。図-3 のモデルにおける接触力 P は

$$P = k_b \tilde{u}_b + \eta_b \dot{\tilde{u}}_b \quad (27)$$

で与えられるが、式(27)より直接 P を評価した場合、レールのモデル化において区間一定関数で離散近似した接触力との間で、時間域での適合性がみだされなくなる。そこで本論文では、接触力に対しても積分方程式に基づく評価式を採用する。

3.(1) に示した手順と同様に式(27)と核関数 w_p^* との合成積をとる。

$$\int_{t_{M-1}}^{t+} (\eta_b \dot{\tilde{u}}_b + k_b \tilde{u}_b - P) w_p^*(t - \tau) d\tau = 0 \quad (28)$$

ここで w_p^* として次式の関数を用いる。

$$w_p^*(\tau) = H(\tau) \quad (29)$$

式(29)を式(28)に用い、部分積分を行うと次式を得る。

$$\tilde{u}_b(t) = \tilde{u}_b(t_{M-1}) - \frac{1}{\eta_b} \int_{t_{M-1}}^{t+} (k_b \tilde{u}_b - P) d\tau \quad (30)$$

ここで $t = t_M$ とし, $t_{M-1} \leq \tau \leq t_M$ において \tilde{u}_b を線形, P を区間一定関数により近似すると次式を得る.

$$\tilde{u}_b^M = \tilde{u}_b^{M-1} - \frac{k_b \Delta t}{2\eta_b} (\tilde{u}_b^{M-1} + \tilde{u}_b^M) + \frac{\Delta t}{\eta_b} P^M \quad (31)$$

式(31)より, P^M が以下のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} P^M &= \frac{\eta_b}{\Delta t} (\tilde{u}_b^M - \tilde{u}_b^{M-1}) + \frac{k_b}{2} (\tilde{u}_b^{M-1} + \tilde{u}_b^M) \\ &= \kappa_3 \tilde{u}_b^M - \left(\frac{\eta_b}{\Delta t} - \frac{k_b}{2} \right) \tilde{u}_b^{M-1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで,

$$\kappa_3 = \frac{\eta_b}{\Delta t} + \frac{k_b}{2} \quad (33)$$

式(27)により P^M を評価する場合, $\dot{u}_b = (\tilde{u}_b^M - \tilde{u}_b^{M-1})/\Delta t$ とすれば, P^M は次式で与えられる.

$$P^M = \frac{\eta_b}{\Delta t} (\tilde{u}_b^M - \tilde{u}_b^{M-1}) + k_b \tilde{u}_b^M \quad (34)$$

式(32)と式(34)とでは, バネの反力の項が異なっている. 式(32)の右辺第2項は1ステップ間において区間線形に近似した変位の下で作用するバネの反力の平均値に一致しているが, これは式(28)の合成積に基づいて接触力を評価したしたことによるものである.

4. まくらぎの運動方程式の構成とパッド類の非線形バネの作用力の評価

パッド類の荷重作用時の圧縮変形特性は, 図-5の軌道パッドの圧縮変形試験の結果に示すとおり, 主材料の加硫ゴムの特性及び溝を有する幾何形状から非線形性を示し, 荷重増加に伴いバネ係数が大きくなり, しかも除荷時にヒステリシスループを描く特徴をもつ. これらの特性を考慮に入れ, 文献(14), (15)では, 数値解析に用いるバネ係数が公称バネ係数の3~4倍に相当すること, また, パッド類は振動の周波数が高くなるほどバネ係数が大きな値を示す周波数特性を有することが指摘されており, これらの特性を説明するモデルとして, 図-6に示す3要素モデルが提案されている. 本論文では, パッド類の圧縮変形特性及び周波数特性を考慮して時間域で計算を行うことを前提に, 3.と同様な手順でまくらぎの運動方程式と作用力の定式化を行う.

(1) まくらぎの運動方程式

図-7に示すように, 軌道パッドと防振パッドに対し3要素モデルを用いる. 図-7で, k_1, k_2, η_2 は軌道パッドの各要素定数, $k_{1s}, k_{2s}, \eta_{2s}$ は防振パッドの各要素定数, m_s はまくらぎ質量, u_i, u_{si} は i 番のまくらぎ位置のレール及びまくらぎの変位, u_{2i}, u_{2si} はそれぞれ i 番まくらぎに関する k_2, k_{2s} の各バネ要素の縮み量である. パッド類のバネのうち k_1, k_{1s} は 図-5 に示した

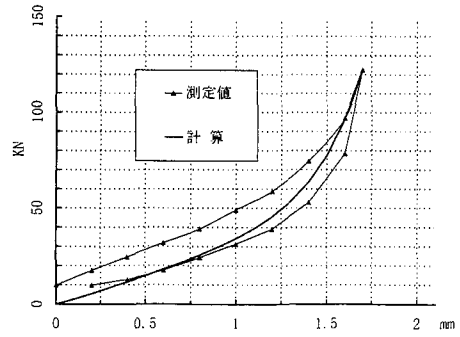


図-5 軌道パッドの圧縮変形試験結果

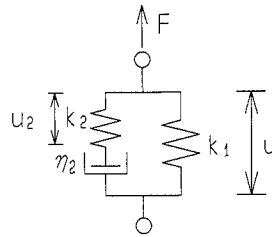


図-6 パッド類の3要素モデル

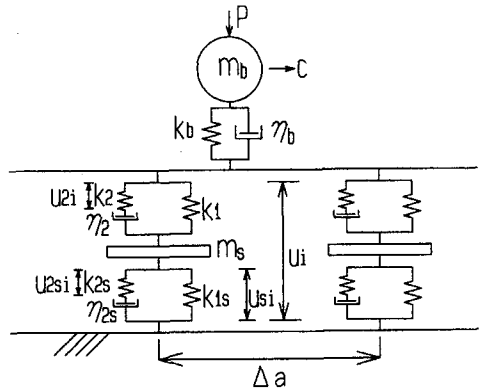


図-7 台車・軌道系の解析モデル

ような非線形性を有するものとする.

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= k_1^l + k_1^r(u) \\ k_{1s} &= k_{1s}^l + k_{1s}^r(u) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここで, k_1^l, k_{1s}^l は線形成分に対応する定数である. また, 右辺第2項目は非線形項を意味しており変位の関数として与えられる.

図-7に示したまくらぎの運動方程式は次式で与えられる.

$$-m_s \ddot{u}_{si} + F_i - F_{si} = 0 \quad (36)$$

ここで、 F_i, F_{si} はそれぞれ軌道パッドと防振パッドに作用する力であり、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F_i &= k_1^l \dot{u}_i + \eta_2 (\dot{u}_i - \dot{u}_{2i}) + k_1^r (\dot{u}_i) \dot{u}_i \\ F_{si} &= k_{1s}^l u_{si} + \eta_{2s} (\dot{u}_{si} - \dot{u}_{2si}) + k_{1s}^r (u_{si}) u_{si} \end{aligned} \right\} (37)$$

なお、式(37)で \dot{u}_i はレールとまくらぎの相対変位量であり、次式で定義される。

$$\dot{u}_i = u_i - u_{si} \quad (38)$$

式(37)を式(36)に代入し、式(19)に示した核関数 w^* との合成積をとり、3.(1)に述べた手順と同様の計算を進める。 $\dot{u}_i, u_{2i}, u_{si}, u_{2si}$ を1ステップ間で線形近似すると最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} u_{si}^M &= u_{si}^{M-1} + \Delta t \dot{u}_{si}^{M-1} - \frac{\eta_2}{m_s} \Delta t (\dot{u}_i^{M-1} - \dot{u}_{2i}^{M-1}) \\ &\quad + \frac{\eta_2 \Delta t}{2m_s} (\dot{u}_i^{M-1} + \dot{u}_i^M - u_{2i}^{M-1} - u_{2i}^M) \\ &\quad + \frac{k_1^l}{m_s} \left(\frac{\Delta t^2}{3} \dot{u}_i^{M-1} + \frac{\Delta t^2}{6} \dot{u}_i^M \right) + \tilde{u}_{si}^M \\ &\quad + \frac{\eta_{2s} \Delta t}{m_s} (u_{si}^{M-1} - u_{2si}^{M-1}) \\ &\quad - \frac{\eta_{2s} \Delta t}{2m_s} (u_{si}^{M-1} + u_{si}^M - u_{2si}^{M-1} - u_{2si}^M) \\ &\quad - \frac{k_{1s}^l}{m_s} \left(\frac{\Delta t^2}{3} \dot{u}_{si}^{M-1} + \frac{\Delta t^2}{6} \dot{u}_{si}^M \right) - \tilde{u}_{ssi}^M \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 $\tilde{u}_{si}^M, \tilde{u}_{ssi}^M$ は非線形項に関する以下の成分である。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{si}^M &= \frac{1}{m_s} \int_{t_{M-1}}^{t_M} k_1^r (\dot{u}_i) \dot{u}_i (t_M - \tau) d\tau \\ \tilde{u}_{ssi}^M &= \frac{1}{m_s} \int_{t_{M-1}}^{t_M} k_{1s}^r (u_{si}) u_{si} (t_M - \tau) d\tau \end{aligned} \right\} (40)$$

また、 \dot{u}_{si}^M は次式で評価する。

$$\begin{aligned} \dot{u}_{si}^M &= \dot{u}_{si}^{M-1} - \frac{\eta_2}{m_s} (\dot{u}_i^{M-1} - \dot{u}_i^M - u_{2i}^{M-1} + u_{2i}^M) \\ &\quad + \frac{k_1^l \Delta t}{2m_s} (\dot{u}_i^{M-1} + \dot{u}_i^M) + \frac{\Delta t}{m_s} \tilde{F}_i^M \\ &\quad + \frac{\eta_{2s}}{m_s} (u_{si}^{M-1} - u_{si}^M - u_{2si}^{M-1} + u_{2si}^M) \\ &\quad - \frac{k_{1s}^l \Delta t}{2m_s} (u_{si}^{M-1} + u_{si}^M) - \frac{\Delta t}{m_s} \tilde{F}_{si}^M \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 $\tilde{F}_i^M, \tilde{F}_{si}^M$ は非線形項に関する以下の成分である。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_i^M &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{M-1}}^{t_M} k_1^r (\dot{u}_i) \dot{u}_i d\tau \\ \tilde{F}_{si}^M &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{M-1}}^{t_M} k_{1s}^r (u_{si}) u_{si} d\tau \end{aligned} \right\} (42)$$

(2) まくらぎとレール間の軌道パッドに作用する力の評価

式(37)で非線形項を含むバネ定数を k_1 とすると、軌道パッドに作用する力 F_i は次式で与えられる。

$$F_i = k_1 \dot{u}_i + \eta_2 (\dot{u}_i - \dot{u}_{2i}) \quad (43)$$

また、 k_2 と η_2 に作用する力は等しいから、

$$k_2 u_{2i} = \eta_2 (\dot{u}_i - \dot{u}_{2i}) \quad (44)$$

式(43),(44)と式(29)に定義した核関数 w_p^* との合成積をとる。

$$\int_{t_{M-1}}^{t_M} (\dot{u}_i - \dot{u}_{2i} + \frac{k_1}{\eta_2} \dot{u}_i - \frac{F_i}{\eta_2}) w_p^*(t_M - \tau) d\tau = 0 \quad (45)$$

$$\int_{t_{M-1}}^{t_M} (\dot{u}_i - \dot{u}_{2i} - \frac{k_2}{\eta_2} u_{2i}) w_p^*(t_M - \tau) d\tau = 0 \quad (46)$$

式(??)を部分積分し、3.(2)と同様の手順で計算を進める。 \dot{u}_i, u_{2i} を1ステップ間で線形近似すると、 u_{2i}^M に対し次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u_{2i}^M &= \nu_1 (\dot{u}_i^M - \dot{u}_i^{M-1}) + \nu_2 u_{2i}^{M-1}, \\ \nu_1 &= \frac{2\eta_2}{2\eta_2 + k_2 \Delta t}, \quad \nu_2 = \frac{2\eta_2 - k_2 \Delta t}{2\eta_2 + k_2 \Delta t} \end{aligned} \right\} (47)$$

式(46)に対しても、部分積分を施し、式(47)を代入して u_{2i}^M を消去することで F_i^M が次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_i^M &= \hat{\eta} (\dot{u}_i^M - \dot{u}_i^{M-1}) + 2\hat{\eta} u_{2i}^{M-1} \\ &\quad + \frac{k_1^l}{2} (\dot{u}_i^M + \dot{u}_i^{M-1}) + \tilde{F}_i^M, \\ \hat{\eta} &= \frac{\eta_2 k_2}{2\eta_2 + k_2 \Delta t} \end{aligned} \right\} (48)$$

(3) 防振パッドのバネ k_{2s} における縮み量 u_{2si} の評価

防振パッドの k_{2s} と η_{2s} に作用する力は等しいから、軌道パッドと同様に次式が成り立つ。

$$k_{2s} u_{2si} = \eta_{2s} (\dot{u}_{si} - \dot{u}_{2si}) \quad (49)$$

式(49)と核関数 w_p^* との合成積をとって部分積分を行い、 u_{2si}, u_{si} を1ステップ間で線形近似すると、4.(2)と同様に u_{2si}^M の評価式を得る。0)

$$\left. \begin{aligned} u_{2si}^M &= \nu_{1s} (u_{si}^M - u_{si}^{M-1}) + \nu_{2s} u_{2si}^{M-1}, \\ \nu_{1s} &= \frac{2\eta_{2s}}{2\eta_{2s} + k_{2s} \Delta t}, \quad \nu_{2s} = \frac{2\eta_{2s} - k_{2s} \Delta t}{2\eta_{2s} + k_{2s} \Delta t} \end{aligned} \right\} (50)$$

5. パッド類に3要素モデルを用いた台車・軌道系の連成解析手法

図-7に示したように、パッド類に3要素モデルを用いた連成系を解析対象とする。まくらぎは等間隔(Δa)で配置されており、車輪からレールが受ける荷重は一定速度 c で走行する単一の質点でモデル化する。なお、車輪が複数の場合も定式過程は基本的に同じである。

本研究で対象としている問題においては、自由度として車輪の変位 u_b^M 、車輪直下のレールのたわみ \tilde{u}_b^M 、車輪とレール間の接触力 P^M 、まくらぎ直上のレールのたわみ u_i^M 、まくらぎ変位 u_{si}^M 、軌道パッドからレール

ルへ作用する反力 F_i^M , 3要素モデルのバネ k_2, k_{2s} における縮み量 u_{si}^M, u_{2si}^M などを選ぶことができる. ここではこれらの変数の内, レールのたわみ u_i^M, \bar{u}_b^M と車輪の変位 u_b^M および車輪とレール間の接触力 P^M を基本的な未知量にとり, 他の量は 3., 4. に導いた各式より消去して求解方程式を作成する.

第 i 番のまくらぎ位置における時刻 t_M でのレールのたわみ \bar{u}_b^M は, 式(14)で $n = 1$ とした場合で与えられ, 次のようになる.

$$u_i^M = \sum_m^M C_i^{M, M-m+1} P^m - \sum_j^N \sum_m^M D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \quad (51)$$

ここで, レールに作用する反力 F_j^M は式(48)で表わされるので, それを式(51)へ代入すると, 次式を得る.

$$\sum_j^N K_{ij} u_j^M - \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right) \sum_j^N D_{ij}^1 u_{sj}^M - C_i^{M,1} P^M = Q_i^{M-1} \quad (52)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \delta_{ij} + \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right) D_{ij}^1 \\ Q_i^{M-1} &= \sum_{m=1}^{M-1} C_i^{M, M-m+1} P^m \\ &\quad - \sum_j^N \sum_m^M D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \\ &\quad - \sum_j^N D_{ij}^1 \left[\left(\frac{k_1^i}{2} - \hat{\eta}\right) \bar{u}_j^{M-1} + 2\hat{\eta} u_{2j}^{M-1} + \bar{F}_j^M \right] \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

式(53)で δ_{ij} は Kronecker のデルタである.

一方, 車輪直下のレールのたわみ \bar{u}_b^M は, 式(12)より次式で与えられる.

$$\bar{u}_b^M = \sum_m^M A^{M-m+1} P^m - \sum_j^N \sum_m^M B_j^{M, M-m+1} F_j^m \quad (54)$$

式(54)の F_j^m に式(48)を代入すると次式を得る.

$$\bar{u}_b^M + \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right) \sum_j^N B_j^{M,1} (u_j^M - u_{sj}^M) - A^1 P^M = R^{M-1} \quad (55)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} R^{M-1} &= \sum_m^M A^{M-m+1} P^m - \sum_j^N \sum_m^M B_j^{M, M-m+1} F_j^m \\ &\quad - \sum_j^N B_j^{M,1} \left[\left(\frac{k_1^i}{2} - \hat{\eta}\right) \bar{u}_j^{M-1} + 2\hat{\eta} u_{2j}^{M-1} + \bar{F}_j^M \right] \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

次に, 式(47),(50)を式(39)へ代入すると, まくらぎの変位 u_{si}^M とレールのたわみ u_i^M との関係式が次のように与えられる.

$$u_{si}^M = \frac{\kappa_5}{\kappa_4} u_i^M + \frac{1}{\kappa_4} T_i^{M-1} \quad (57)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \kappa_4 &= 1 + (1 - \nu_1) \frac{\eta_2 \Delta t}{2m_s} \\ &\quad + (1 - \nu_{1s}) \frac{\eta_{2s} \Delta t}{2m_s} + \frac{(k_1^i + k_{1s}^i) \Delta t^2}{6m_s} \\ \kappa_5 &= (1 - \nu_1) \frac{\eta_2 \Delta t}{2m_s} + \frac{k_1^i \Delta t^2}{6m_s} \\ T_i^{M-1} &= \Delta t \bar{u}_{si}^{M-1} + \left[1 + (1 - \nu_{1s}) \frac{\eta_{2s} \Delta t}{2m_s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{1s}^i \Delta t^2}{3m_s} \right] u_{si}^{M-1} - (1 - \nu_{2s}) \frac{\eta_{2s} \Delta t}{2m_s} u_{2si}^{M-1} \\ &\quad - \left[(1 - \nu_1) \frac{\eta_2 \Delta t}{2m_s} - \frac{k_1^i \Delta t^2}{3m_s} \right] \bar{u}_i^{M-1} \\ &\quad + (1 - \nu_2) \frac{\eta_2 \Delta t}{2m_s} u_{2i}^{M-1} + \bar{u}_{si}^M - \bar{u}_{ssi}^M \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

式(57)を式(52)へ代入し, u_{sj}^M を消去すると次式を得る.

$$\sum_j^N K'_{ij} u_j^M - C_i^{M,1} P^M = \bar{Q}_i^{M-1} \quad (59)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} K'_{ij} &= \delta_{ij} + \left(1 - \frac{\kappa_5}{\kappa_4}\right) \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right) D_{ij}^1 \\ \bar{Q}_i^{M-1} &= Q_i^{M-1} + \frac{1}{\kappa_4} \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right) \sum_j^N D_{ij}^1 T_j^{M-1} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

同様に式(57)を式(55)へ代入し, u_{sj}^M を消去すると次式を得る.

$$\bar{u}_b^M + \left(1 - \frac{\kappa_5}{\kappa_4}\right) \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right) \sum_j^N B_j^{M,1} u_j^M - A^1 P^M = \bar{R}^{M-1} \quad (61)$$

ここで,

$$\bar{R}^{M-1} = R^{M-1} + \frac{1}{\kappa_4} \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right) \sum_j^N B_j^{M,1} T_j^{M-1} \quad (62)$$

まくらぎ直上におけるレールのたわみ式(59), 車輪の運動方程式(24), 車輪直下のたわみ式(61)および車輪とレールの接触力に関する式(32)を連立すると, まくらぎ直上でのレールのたわみ u^M , 車輪の変位 u_b^M , 車輪直下のレールのたわみ \bar{u}_b^M および車輪とレールの接触力 P^M に関する以下の連立方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{M,1} \\ \mathbf{0} & \kappa_1 & -\kappa_2 & \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{B}^{M,1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{A}^1 \\ \mathbf{0} & \kappa_3 & -\kappa_3 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^M \\ u_b^M \\ \bar{u}_b^M \\ P^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}^{M-1} \\ \mathbf{S}^{M-1} \\ \bar{\mathbf{R}}^{M-1} \\ \beta \bar{u}_b^{M-1} \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$\alpha = \left(1 - \frac{\kappa_5}{\kappa_4}\right) \left(\frac{k_1^i}{2} + \hat{\eta}\right), \quad \beta = \frac{\eta_b}{\Delta t} - \frac{k_b}{2} \quad (63)$$

なお、式(63)において、 $K', C^{M,1}, B^{M,1}, u^M, \bar{Q}^{M-1}$ はそれぞれ $K'_i, C_i^{M,1}, B_i^{M,1}, u_i^M, \bar{Q}_i^{M-1}$ を成分にもつ小行列およびベクトルである。

式(63)において、 $\bar{Q}^{M-1}, \bar{R}^{M-1}$ は式(40),(42)で定義した非線形項 $\bar{F}_i^M, \bar{u}_{si}^M, \bar{u}_{ssi}^M$ を含む。本論文では式(63)の求解に際し繰返し計算を行い、各ステップで収束解を求める方法を採用している。なお、以降に示す解析例の場合、各ステップ2回の反復で収束解を得ることができた。式(63)より $u^M, u_b^M, \bar{u}_b^M, P^M$ が求められると $u_{si}^M, \bar{u}_{si}^M, u_{2si}^M, \bar{u}_{2si}^M, F_i^M$ はそれぞれ式(57), (41), (47), (50), (26), (48)より与えられ、これらを用いて次のステップにおける式(62)の右辺の各成分を作成することができる。

6. 解析例

計算例として、地下鉄で用いられる防振まくらぎを対象に、パッド類のバネを線形として扱った場合と非線形バネとして扱った場合を比較し、その差を確認することとした。線形解析に用いる軌道パッドのバネ係数について、文献15)では、公称バネ係数60MN/mで厚さ10mmの場合、新幹線は4倍、在来線は3.4倍の値を用いるのが適当としている。これらを参考に、パッド類の圧縮変形試験から得た係数を用いた非線形解析(ケース1)、パッド類の公称バネ係数の値を用いた線形解析(ケース2)、公称バネ係数の3.4倍の値を用いた線形解析(ケース3)の3ケースとした。

列車走行による軌道振動の原因は、レールがまくらぎごとに支持されていることによる不連続性、軌道材料の固有振動、レール頭頂面の凹凸に起因する強制振動¹⁴⁾、車輪とレール接触部の弾性変形量のばらつき¹⁶⁾などの説がある。解析において、レールを平滑なものとして扱った場合の試算結果では、まくらぎ箇所を通過する位置で振動が生じるが、実測例と比較して低いレベルであった。このため、軌道振動の主な原因をレール頭頂面の凹凸と考え、解析に用いる入力を得るため車両台車の軸箱加速度を積分して得られる車輪の変位量の測定、レール波状摩耗測定器によるレール頭頂面の凹凸の測定を試みたが精度に問題があり、適当な入力波形を得られなかった。この結果、振動系の入力としては、レール振動加速度の測定例を参考に、レール頭頂面の凹凸を仮定し、移動荷重に強制変位を与えることとした。

図-8は、地下鉄車両が防振まくらぎ軌道区間を10m/secで走行した時のレール振動加速度のワースペクトルが20, 80, 97, 120, 138, 197, 250, 275及び355Hzの9成分にピークがあった例を参考に、正弦波の振幅、波長及び位相を変えて生成したレール頭頂

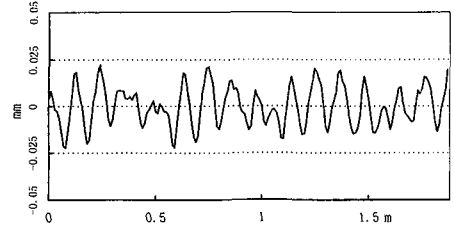


図-8 仮定したレール頭頂面の形状

面の凹凸を示したものである。卓越成分が97Hzであったことから、約10cmの波長が顕著である。

解析条件を表-1に示す。パッド類のバネ係数に関し、 k_1^1, k_1^2 について、ケース1は図-5及び図-9に示す圧縮変形試験結果から得られた係数を、ケース2は公称ばね係数を、ケース3は公称ばね係数の3.4倍の値としている。また、 k_2^1, k_2^2 及び η_2, η_2s の係数は、パッド類のバネ係数の詳細な検討が行われている文献14), 15)を参考に設定した。上載荷重Pは、線形解析と非線形解析との差が顕著に現れるように、長さ20mの車両に定員の200%が乗車した場合を想定している。解析モデルのまくらぎ本数は、ケース1について11から51本の場合を試算して比較したが、中央のまくらぎ位置での比較では21本以上には差違が認められなかったことから、21本で計算を行うこととした。なお、計算の時間刻み1/1000秒、継続時間1.024秒間で行っている。

表-1 解析条件

諸係数 (単位)	ケース1	ケース2	ケース3
軌道パッドばね係数 k_1 (MN/m)	図-5	40	136
” k_2 (MN/m)	11520	11520	11520
軌道パッド減衰係数 η_2 (KN.S/m)	115	115	115
防振パッドばね係数 k_{1s} (MN/m)	図-9	5	17
” k_{2s} (MN/m)	2000	2000	2000
防振パッド減衰係数 η_{2s} (KN.S/m)	100	100	100
上載荷重 P (N)		69250	
輪軸重量 m_b (Kg)		750	
まくら木質量 m_s (Kg)		80	
車輪接触ばね係数 k_b (MN/m)		2000	
車接触減衰係数 η_b (KN.S/m)		0	
レール曲げ剛性 EI (MN/m ²)		4	
レール質量 ρA (Kg/m)		50	
車両速度 C (m/sec)		10	
まくらぎ間隔 Δa (m)		0.625	
まくらぎ本数 (本)		21	

ケース1の解析結果について、レールとまくらぎの変位及び振動加速度の時刻歴波形をそれぞれ図-10,11に示す。図は解析対象としたまくらぎ21本の11番の結果を表している。図-12は、図-10,11に示した振動加

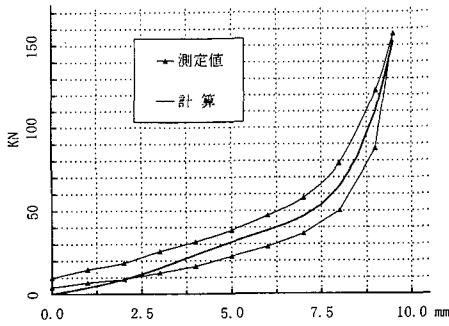


図-9 防振パッドの圧縮変形試験結果

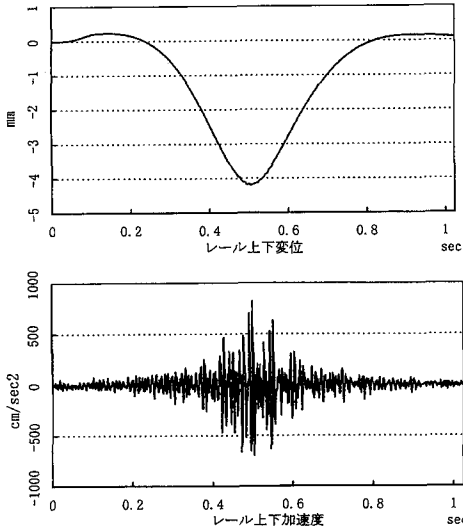


図-10 レールの変位と振動加速度(ケース1)

速度について、0.250秒から0.512秒間の1/3オクターブバンド分析を行った結果を示したものである。また、ケース2及び3について、ケース1と同様な計算から得られたレールとまくらぎの変位及び振動加速度の最大値と振動加速度レベルを表-2に示す。

表-2 解析結果の概要

項目	(単位)	ケース1	ケース2	ケース3
レール	最大変位 (mm)	4.2	4.3	1.7
	最大加速度 (cm/sec ²)	823.3	823.6	882.4
	振動加速度レベル 0~500Hz (dB)	105.0	105.0	104.6
	0~90Hz (dB)	99.0	99.1	98.6
まくらぎ	最大変位 (mm)	3.5	3.9	1.5
	最大加速度 (cm/sec ²)	704.3	710.0	884.8
	振動加速度レベル 0~500Hz (dB)	102.5	102.7	105.0
	0~90Hz (dB)	98.2	95.9	98.3

図-10~12と表-2から、次の事項が認められる。

1) ケース1の解析結果に関して、レールとまくらぎの振動加速度を比較すると、周波数成分は全体的に近似

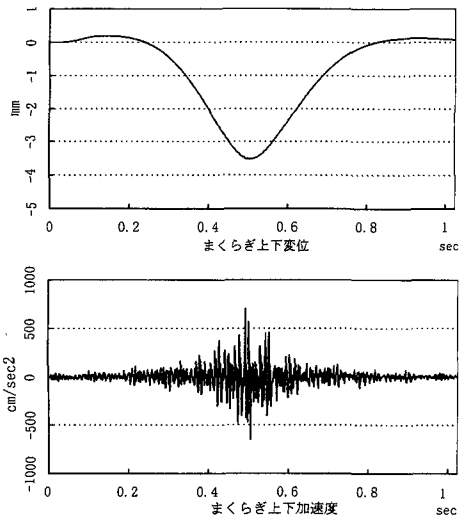


図-11 まくらぎの変位と振動加速度(ケース1)

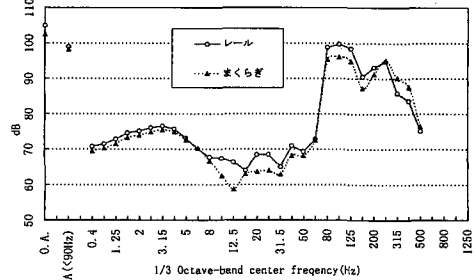


図-12 1/3オクターブバンド分析結果(ケース1)

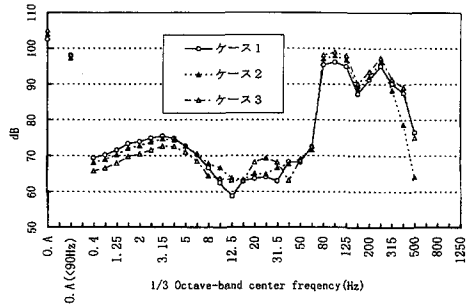


図-13 まくらぎの振動加速度の比較

しているが、振幅に差がある。

2) ケース1及び2のまくらぎの最大変位量は、測定値の3.6mmに近い値を示した。これに対し、ケース3は1/2以下であり、静的応答に不自然さが認められる。

3) 各ケースの最大振動加速度及び加速度レベルを比較すると、レールは各ケースとも近い値を示したが、まくらぎはケース3が他よりも大きい値を示している。

図-13に各ケースのまくらぎ振動加速度の1/3オクターブバンド分析結果を比較して示す。図から、次の点が認められる。

- 1) 全体的傾向はいずれのケースでも概ね一致している。
- 2) 細かく周波数成分を見ると、10Hz以下ではケース1と2とが近い値を示し、250Hz以上ではケース1と3が近い値を示している。
- 3) ケース1と3とを比較すると、卓越成分の80~125Hzの周波数域ではケース3は約3dBレベルが高いが、31.5Hz以下では逆に3-4dB低い。

上述の2)の主な理由は、ケース3はバネ係数が大きいため、低周波数域ではレベルが低く、高周波数域ではレベルが高くなったことがその原因と思われる。このことはたわみ量が1/2以下の値を示したことにとも符合しており、ケース3は低周波数域で過小評価を与えていることが判る。また、250Hz以上ではケース1と3とが近い値を示したことについては、ケース1の非線形バネの特性によるものと考えられる。

以上から、非線形バネによる場合は見かけの剛性が周波数と共に増加し、数Hzから500Hzまでの周波数域においても概ね妥当な結果を与えていることが確認できた。

7. おわりに

本論文では、列車走行時の台車・軌道系の連成振動の解析方法として、移動する列車荷重が作用する軌道に関して、レールの動的たわみを与える積分表現式を基本的な方法に用い、軌道パッド、まくらぎ及び防振パッドで構成される軌道構造系を質点系モデルで定式化した。さらに、質点系モデルを時間域積分表現式より構成し、レールと軌道構造系とを結合解析する手法により、時間域での解析を行った。

本解析法の特徴は、時間域で軌道パッド等の非線形性を直接考慮することが可能となった点にある。試算例として、数Hzから数100Hzまで周波数域の解析が重要である地下鉄の防振まくらぎ軌道を対象に行った解析結果では、非線形解析のレールの最大変位量は測定

値に近い値であったこと、解析方法の違いによるレール振動加速度の差は僅かであるが、まくらぎの振動加速度に差が生じることなどが確認された。

参考文献

- 1) 佐藤裕：軌道構造と振動との関係についての理論的考察、鉄道業務研究資料13-8,1956.4.
- 2) Grassie,S.L. and Gregory,R.W. : The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation, *Jour. Mech. Eng. Sci.*,24,pp.77-90,1982.
- 3) 吉村彰芳,神山雅子：移動荷重による軌道の振動の解析、鉄道総研報告,Vol.8,No.9,pp.31-36,1994.9.
- 4) 三浦重：軌道構造の動特性モデルの構築、鉄道総研報告,Vol.9,No.12,pp.7-12,1995.12.
- 5) Knothe,K.L. and Grassie,S.L. : Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle System Dyn.*,22,pp.209-262,1993.
- 6) 石田誠,三浦重,河野昭子：軌道動的応答モデルとその解析結果、鉄道総研報告,Vol.11,No.2,pp.19-26,1997.2.
- 7) 阿部和久,古田勝：時間域積分表現式による軌道振動解析法、構造工学論文集,Vol.43A,pp.365-372,1997.3.
- 8) 古田勝,長嶋文雄：地下鉄走行に伴うシールドトンネル及び地盤系の動的応答解析とその計算例、土木学会トンネル工学研究発表会論文・報告集,Vol.4,pp.93-100,1994.
- 9) Eringen,A.C. and Suhubi,E.S. : *Elastodynamics*,Vol.2, Academic Press, New York,1975.
- 10) Karl.F.Graff : *Wave motion in elastic solids*, Oxford Univ.Press,pp.141-148,1975.
- 11) Kisu,H. : Stable time integral scheme using one-dimensional boundary integral equation method,in R.C.Ertekin, C.A.Brebbia, M.Tanaka and R.Shaw (eds), *Boundary Element Technology*, XI CMP, pp.297-306, 1996.
- 12) 木須博行,下本陽一：1次元境界積分法を用いた時間積分スキームの開発、計算工学講演論文集,Vol.1,pp.333-334,1996.
- 13) Timoshenko,S.P. and Goodier,J.N. : *Theory of elasticity*,Third edition,McGraw-Hill,pp.409-414,1970.
- 14) 佐藤吉彦：軌道高周波振動の理論解析、鉄道技術研究報告,No.1013,pp.24-34,1976.8.
- 15) 佐藤吉彦,尾高達男,高井秀之：有道床軌道における軌道振動の理論解析、鉄道技術研究報告,No.1347,pp.18-22,1987.2.
- 16) 山田幹雄,小野一良：線路に生じる高周波振動の発生原因に関する一考察、鉄道線路,Vol.34,No.7,pp.4-8,1986.7.

(1997.4.30 受付)

TIME DOMAIN ANALYSIS METHOD FOR TRACK / WHEEL INTERACTION

Masaru FURUTA and Kazuhisa ABE

A time domain numerical method is constructed for dynamic interaction analysis of wheel and track, so that nonlinearity of the system can be introduced. The rail is described as an Euler beam and the deflection is expressed by a time domain integral representation. The wheel and sleepers are modeled as masses. Stability of the dynamic analysis is augmented by introducing the compatibility into contact forces acting between the three subsystems. A time integration scheme for spring, damper and mass system in which the contact forces consist with that of the beam model is derived based on integral equation method. Influence of nonlinearity in rail pad on the dynamic response is investigated using the proposed method.