土木学会論文集 No. 577／I-41, 245-256, 1997. 10

離散固有値および連続固有値を用いたGreen関数のスペクトル分解表示について

東平光生[1]

[1]正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278 千葉県野田市山崎2641)

本論文では成層構造を有する弾性流体の波動場のGreen関数を，離散固有値および連続固有値を用いたスペクトル分解として捉えることを試みている．通常，周波数領域のGreen関数は波数積分で表現され，波数積分は留数定理からの寄与と分岐点回りの積分の寄与に分離できる．ここでは，波数積分のうち，留数定理からの寄与を離散固有値問題として，分岐点回りの積分を連続固有値問題として捉えている．そして，分岐点回りの積分の積分核が連続固有値に対する固有関数で分解されることを示し，この結果Green関数が離散固有値と連続固有値に対する固有関数でスペクトル分解されることを示している．

Key Words : *Green's function, scalar wave field, layered medium, discrete eigenvalue problem, continuous eigenvalue problem, spectral decomposition*

1. はじめに

耐震工学や地震学の分野では，成層弾性体中の波動伝播を表わすGreen関数を計算することは重要な課題である．このGreen関数には，通常Fourier変換やHankel変換などの波数に関する積分変換が現れる．Lambはこの積分を扱い，波数積分のうち表面波に関するものは，留数定理からの寄与であり，実体波に関するものは分岐点回りの積分からの寄与であることを示した[1)]．

その後，計算機技術の進展とともに，波数積分の取扱いについてさまざまな研究がなされるようになってきた．近年になって，提示されてきた手法で代表的なものは，FuchsとMüllerのreflectivity method[2)]，BouchonやAkiのdiscrete wavenumber method[3)-7)]，Harveyのmodal method[8)]，Haddonによる一連のリーキングモードに関する研究[9)-11)]などを上げることができる．

これらの研究の中で，reflectivity methodやdiscrete wavenumber methodは波数積分を直接積分しようとする立場であり被積分関数の極を避けるためのテクニックを用いている．これに対し，リーキングモードの研究を含めmodal methodは，直接的に積分を実行する代わりに，被積分関数の極の寄与から積分を評価しようとする立場でのもので，被積分関数の極を積極的に用いる方法である．こうした意味で両者の手法はそれぞれ対極にあるものと言える．

こうした研究に対し，ここではGreen関数を固有関数を用いたスペクトル分解の概念で捕らえ，分岐点回りの積分について新たな視点を得ることを目的とする．線形代数学で見られる行列の固有値問題がFredholmの積分方程式の研究や量子力学に触発され，ヒルベルト空間上の線形作用素のスペクトル理論にまで発展した経緯については成書[12)]に詳しい．本論文では，波数積分で表現されたGreen関数が，このスペクトル理論で見られる数学的な形式を内在していることを示す．ヒルベルトの著書によれば，固有値の集合はスペクトルと呼ばれる[13)]．ここでは，離散固有値および連続固有値に対する固有関数によりGreen関数がスペクトル分解されることを示す．具体的には，波数積分のうち，留数定理からの寄与である正規モードは離散的な固有値問題として，また，分岐点回りの積分は連続固有値問題として捉えることができることを論じる．そして，分岐点回りの積分の積分核が連続固有値に対する固有関数によって分解されることを示し，この結果，留数定理からの寄与も分岐点回りの積分からの寄与も共に射影作用素の重ね合わせで表現され，それがスペクトル分解表示と関連していることを示す．

スペクトル理論に関する成書[12)]を参照すると，スペクトル分解は射影作用素を用いて展開されていることが分かる．一方，Green関数を波数積分との関連で扱った既往の研究(たとえば，文献[8)])を参照すると，波数積分に関連してスペクトルという言葉は見られるものの固有値問題や射影作用素との関連は必ずしも明確でない．本論文では，Green関数を射影作用素の重ね合わせで表現できることを示すことで，こうした不明確な点を明確にする．

また，実際の現象を扱う限りにおいて，固有値その

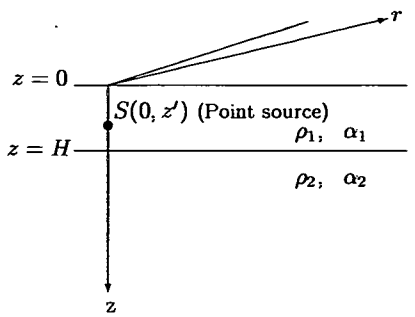

Fig. 1 Point source in liquid layer over liquid half space.

ものは物理的な意味を持っている．したがって，スペクトルの成分を調べることは，波動現象への理解に対する一つの指標になる．Green関数のスペクトル分解を求める工学的意義の一つはこの点にある．また，分岐点回りの積分の積分核が連続固有値に対する固有関数で分解できることは，分岐点回りの積分の被積分関数が振源の特異性を考慮せず求められることを意味し，実際のGreen関数の計算の効率化に寄与できることにもつながってくる．

ここでは，以上の観点から議論を進めて行く．

2. 層構造をなす弾性流体の波動場のGreen関数

(1) 基礎方程式および境界条件

本論文では，具体例として**Fig. 1**に示す2層からなる弾性流体の波動場を扱う．しかしながら，以降で得られるスペクトル分解の結果は固有関数の性質に深く根ざしたものであり，多層の弾性流体の波動場に適用可能であることが明かになる．このことに注意して，議論の出発点を明確にするため，基礎方程式と境界条件を与えることから始める．

弾性流体を伝播する波動はスカラー場の波動方程式で与えられる．ここでは，流体の支配方程式を速度ポテンシャルに関するものとして，次式で与える．

$$(\nabla^2 + k_{\alpha j}^2)\phi_j = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{1}$$

ここに，ϕは流体の速度ポテンシャルで添え字のjにより層を区別する．すなわち，添え字の値が1をとる場合には表層を，添え字の値が2をとる場合には半無限層をあらわすものとする．また，$k_{\alpha j}$は媒質の波数を表わす．また，境界条件は次式で与えるものとする．

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0 && \text{at } z = 0 \\ \rho_1\phi_1 &= \rho_2\phi_2 && \text{at } z = H \\ \partial_z\phi_1 &= \partial_z\phi_2 && \text{at } z = H \end{aligned} \tag{2}$$

ここに，∂は偏微分の演算子で，その添字は微分演算のパラメータを与える．また，zは鉛直座標，ρ_jは質量密度とする．**Fig. 1**に示したα_jは音波の速度，Sは振源を示す．

(2) Green関数の波数積分表示

表層に点源がある場合のGreen関数の誘導過程はEwingらのテキスト[14]で触れられている．誘導のプロセスは成書に譲り結果のみを記すと以下のとおりである．

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty kJ_0(kr)E_k(z, z')dk \tag{3}$$

ここに，GはGreen関数，$\boldsymbol{r}$は観測点，$\boldsymbol{r}'$はソース点，rは観測点とソース点の水平距離を表わす．また，kは波数の水平成分をJ_0は0次の第1種Bessel関数を示す．

また，関数$E_k(z, z')$は次のように与えられる．

$$E_k(z, z') = \frac{E_k^*(z, z')}{F(k)} \tag{4}$$

ここに，

$$F(k) = \nu_1\cosh(\nu_1 H) + \eta_1\nu_2\sinh(\nu_1 H) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} E_k^*(z, z') &= \frac{2\sinh(\nu_1 z)}{\nu_1}\times \\ &\quad [\nu_1\cosh(\nu_1(H - z'))+ \\ &\quad \eta_1\nu_2\sinh(\nu_1(H - z'))] \\ &\quad (0 \le z \le z' \text{のとき}) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} E_k^*(z, z') &= \frac{2\sinh(\nu_1 z')}{\nu_1}\times \\ &\quad [\nu_1\cosh(\nu_1(H - z))+ \\ &\quad \eta_1\nu_2\sinh(\nu_1(H - z))] \\ &\quad (z' \le z \le H \text{のとき}) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} E_k^*(z, z') &= 2\eta_1\sinh(\nu_1 z')\exp(-\nu_2(z - H)) \\ &\quad (H \le z \text{のとき}) \end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$\eta_1 = \rho_1/\rho_2$であり，

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - k_{\alpha 1}^2} \tag{9}$$

$$\nu_2 = \sqrt{k^2 - k_{\alpha 2}^2} \tag{10}$$

とする．被積分関数はν_1の符号の取りかたには依存しない．しかし，ν_2には依存する．式(3) の積分では，$\exp(i\omega t)$ の時間変動を考慮したとき，鉛直下方に波動が逸散する解を得るために$\mathrm{Im}(\nu_2) > 0$となるようにν_2の符号を決めるものとする[14]．$\mathrm{Im}(\nu_2) < 0$の符号を選択すると，波動が鉛直下方から振源へ向かって行く解となる．また，Ewingのテキストに示された誘導過程で明らかになることであるが，$E_k(z, z')$ は境界条件を満足する波数領域の波動方程式の解となっている．このことは以降の議論で重要になる．ただし，振源の特異性のために，$z = z'$では一般に$E_k(z, z')$ のzに関す

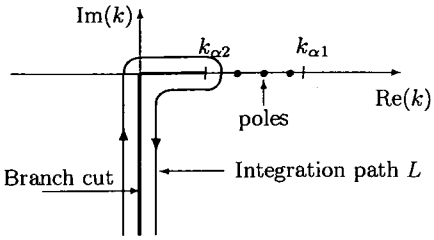

Fig. 2 Integration path L in the complex k plain

る導関数は不連続である．$E_k(z,z')$は次の方程式を満足する．

$$(\frac{d^2}{dz^2}+k_{\alpha j}^2-k^2)E_k(z,z')=-\delta(z-z') \qquad (11)$$

ここに，δはDiracのデルタ関数である．

Ewingのテキスト[14]では，式(3) 波数積分を複素積分に拡張し，積分経路を変形することで，Green関数を次のように，留数定理からの寄与と分岐点回りの積分からの寄与に分解している．

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= -\frac{i}{2}\mathrm{Res}\sum_n k_n H_0^{(2)}(k_n r)E_{k_n}(z,z') \\ &\quad +\frac{1}{4\pi}\int_L kH_0^{(2)}(kr)E_k(z,z')dk \end{aligned} \qquad (12)$$

ここに，$H_0^{(2)}$は0次の第2種のHankel関数，k_nは

$$F(k_n)=0 \qquad (13)$$

を満足する解で，ここではcut-off frequencyの関係で有限個しか存在しない．また，Lは**Fig. 2**に示す分岐点回りの積分経路である．

なお，Lが第1象限から第3象限にあるときは，$\mathrm{Im}(\nu_2)>0$，第4象限にあるときは，$\mathrm{Im}(\nu_2)<0$である．

3. 固有値問題の視点で捉えたGreen関数

前述のように，本論文の目的は留数定理からの寄与である正規モードを離散的な固有値問題として，分岐点回りの積分を連続固有値問題としてとらえ，両者を統一的に固有値問題の枠組みの中で理解すると共に，分岐点回りの積分の積分核を固有関数で分解することである．ここでは，このために正規モードを離散的な固有値問題として捉えることから議論を始める．

(1) 正規モードについて

波数積分で表現されたGreen関数の正規モードからの寄与についての結果はEwingのテキスト[14]にも記載されており，また誘導プロセスも通常の複素関数論の知識を用いれば良い．ここでは，固有関数展開からの立場で次のように結果を整理しておく．

$$\underset{k=k_n}{\mathrm{Res}}\, E_k(z,z')=\frac{1}{2k_n}\varphi_n(z)\varphi_n(z')\rho(z') \qquad (14)$$

ここに，k_nは$F(k_n)=0$を満足する解，φ_nはk_nに対する規格化された固有関数である．また，$\rho(z)$は媒質の質量密度で深さの関数として表わしている．規格化された固有関数は，次式で示される．

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \frac{1}{a}\sin(\bar{\nu_1}z) \quad (0\le z\le H) \\ \varphi_n(z) &= \frac{\eta_1}{a}\sin(\bar{\nu_1}H)\exp(-\nu_2(z-H)) \quad (H\le z) \end{aligned} \qquad (15)$$

ここに，

$$\bar{\nu_1}=\sqrt{k_{\alpha 1}^2-k^2} \qquad (16)$$

$$a^2=\rho_2[\frac{H}{2}-\frac{\cos(\bar{\nu_1}H)\sin(\bar{\nu_1}H)}{2\bar{\nu_1}}+\frac{\eta_1\sin^2(\bar{\nu_1}H)}{2\nu_2}] \qquad (17)$$

であり，aは固有関数の規格化のために用いている．ここでは，固有関数の間の規格直交性は次のように定義している．

$$(\varphi_n(z),\ \varphi_m(z))=\delta_{nm} \qquad (18)$$

ここに，δ_{nm}はKroneckerのデルタ，$(\varphi_n(z),\ \varphi_m(z))$は固有関数の内積で次式で定義される．

$$(\varphi_n(z),\ \varphi_m(z))=\int_0^\infty \varphi_n(z)\varphi_m(z)\rho(z)dz \qquad (19)$$

関数の内積の定義に質量密度が入る理由は付録に示したように$z=H$における境界値の連続性を確保するためである．

Green関数における分岐点回りの積分の効果は観測点が振源から離れるに従い小さくなることは，漸近展開の結果など[15]を参照すれば明らかである．また一般には分岐点回りの積分は繁雑であり，Green関数は正規モードのみで近似されることも多い[16]．式(14)の結果を用いて正規モードで近似したGreen関数は以下のようになる．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\simeq -\frac{i}{4}\sum_n H_0^{(2)}(k_n r)\varphi_n(z)\varphi_n(z')\rho(z') \qquad (20)$$

この結果はもちろん，次の微分方程式

$$(\nabla^2+k_{\alpha j}^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (21)$$

を次の固有値問題によって展開した場合の結果と全く同じとなることを示すことができる．

$$(\frac{d^2}{dz^2}+k_{\alpha j}^2)\varphi_n(z)=k_n^2\varphi_n(z) \qquad (22)$$

この意味で，式(14)は固有関数の性質で決まるもので，一般の多層媒質でも成立する関係式であることに注意する必要がある．

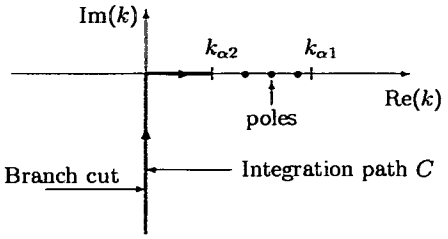

Fig. 3 Integration path C in the complex k plain

(2) 分岐点まわりの積分からの寄与

次に，分岐点回りの積分の寄与について考える．分岐点回りの積分で注意すべき点は，前述のようにRiemann面のcutをはさみ$\mathrm{Im}(\nu_2)$の符号が逆転することである．このことを考慮し，分岐点回りの積分を次のように置き換える．

$$\int_L kH_0^{(2)}(kr)E_k(z,z')dk = -\int_C kH_0^{(2)}(kr)[E_k^-(z,z') - E_k^+(z,z')]dk \tag{23}$$

ここに，関数Eの添え字の+と−は$\mathrm{Im}(\nu_2)$の符号に対応させたものである．また，積分路Cは**Fig. 3**に示すようにRiemann面のcutを取っている．

ここで，式(11)より次式が成立する．

$$(\frac{d^2}{dz^2} + k_{\alpha j}^2 - k^2)E_k^+(z,z') = -\delta(z-z') \tag{24}$$

$$(\frac{d^2}{dz^2} + k_{\alpha j}^2 - k^2)E_k^-(z,z') = -\delta(z-z') \tag{25}$$

これらの方程式でkは積分経路C上，すなわち，Riemann面のcut上のものであることに注意する．

式(24)と式(25)は，ν_2の符号に応じて同じ方程式に対して波動の進行方向の異なる二つの解が存在することを示している．いま，

$$\Psi_k(z,z') = E_k^-(z,z') - E_k^+(z,z') \tag{26}$$

とすると，式(24)と式(25)より，

$$(\frac{d^2}{dz^2} + k_{\alpha j}^2)\Psi_k(z,z) = k^2\Psi_k(z,z') \tag{27}$$

が成立し，固有値問題が形成されていることが分かる．特に，Riemann面のcut上の任意のkについて式(27)が成立することから，連続固有値の問題が現れていることも理解できる．

また，$E_k(z,z')$は境界条件を満足することから，$\Psi_k(z,z')$は境界条件を満足する同次解で必然的に直交関係式が成立する固有関数である．さらに，境界条件を満足する同次解の性質から，$\Psi_k(z,z')$は相反性を満足する関数となる[15]．この意味で，$\Psi_k(z,z')$はRiemann面のcut上の波数を固有値とする固有関数$\psi_k(z)$を用いて，次のように表わすことが可能である．

$$\Psi_k(z,z') \propto \psi_k(z)\psi_k(z') \tag{28}$$

ここで，**Appendix-A**に示すように，固有関数$\psi_k(z)$は次のように正規化することが可能である．

$$(\psi_k(z),\ \psi_{k'}(z)) = \delta(k-k') \quad (k\text{: real}) \tag{29}$$

$$(\psi_k(z),\ \psi_{k'}(z)) = \delta(\tilde{k}-\tilde{k}') \quad (k\text{: imaginary}) \tag{30}$$

ただし，$k = i\tilde{k}$であり，式(30)は波数kが純虚数になった場合に必要な関係式である．この正規化された固有関数を用いることで，**Appendix-B**に示すように$\Psi_k(z,z')$は次のように分解される．

$$\Psi_k(z,z') = \frac{\pi i}{|k|}\psi_k(z)\psi_k(z')\rho(z') \tag{31}$$

式(31)は固有関数の完全性の議論から得られる一般的なものであり，この意味で多層構造の媒質でも成立する関係式である．

ここでは，**Fig. 1**に示すモデルについて，式(31)が成立することを示す．まず，Riemann面のcut上の波数を固有値とする固有関数は次式で示される．

$$\begin{aligned}\psi_k(z) &= \frac{1}{a}\sin(\bar{\nu}_1 z) \quad (0 \le z \le H)\\ \psi_k(z) &= \frac{1}{a}[\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_2}\cos(\bar{\nu}_1 H)\sin(\bar{\nu}_2(z-H))\\ &\quad +\eta_1\sin(\bar{\nu}_1 H)\cos(\bar{\nu}_2(z-H))] \quad (H \le z)\end{aligned} \tag{32}$$

ただし，aは固有関数の規格化のための係数で次式で示される．

$$a^2 = \frac{\pi\rho_2\bar{\nu}_2}{2|k|}[(\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_2})^2\cos^2(\bar{\nu}_1 H) + \sin^2(\bar{\nu}_1 H)] \tag{33}$$

ここに，

$$\bar{\nu}_2 = \sqrt{k_{\alpha 2}^2 - k^2} \tag{34}$$

である．式(32)を用いたとき，式(31)が成立することを示すことは容易であろう．

なお，式(32)より明らかなように，固有関数$\psi_k(z)$は半無限層でも振動を続けるモードである．すなわち，波動のエネルギーが，半無限層に逸散するいわゆるリーキングのモードである．固有関数は，境界条件を満足する同次解であることから，前述のように直交関係式を満足する．しかし，固有関数の積分の値は有限とならず，直交関係式にはDiracのデルタ関数が現れる．

ここで，離散固有値問題と連続固有値問題の成立する背景について若干のコメントを加えておく．離散固有値問題は正規モードを計算するときにあらわれ，特性関数$F(k)$のゼロ点に関連している．これは，境界条件と支配方程式の両者を満足するためには，波動関数は勝手なkを取ることができないことによるもので，離散的な固有値問題が産み出される背景である．ここで，

正規モードには，半無限層で振幅が指数関数的に減少するという性質があることに注意する．

一方，分岐点回りの積分においては，前述のように波動の伝播方向の異なるE^+とE^-を重ねあわせることで，解の特異性が打ち消され，境界条件を満足する同次解，すなわち，固有関数が得られた．物理的には伝播方向の異なる波動を重ねあわせたことで定常波が生成され固有値問題が生じてきたと考えることができる．伝播方向の異なる波動は，振動モードが半無限層で振幅が指数関数的に減少することなく，振動を続ける状況で得られる．この状況で鉛直下方に逸散する波動と，鉛直下方から振源に向かう波動が数学的に作られるからである．換言すれば，半無限層で波動の振幅が指数関数的に減少しない波数領域では連続固有値問題を作ることが可能となる．連続固有値問題と離散固有値問題の重要な相違がこうした点にある．

連続固有値に対する固有関数を用いることで，分岐点回りの積分は次のように表わされる．

$$\int_L kH_0^{(2)}(kr)E_k(z,z')dk = -\pi i\int_C H_0^{(2)}(kr)\frac{k}{|k|}\psi_k(z)\psi_k(z')\rho(z')dk \tag{35}$$

これまで，分岐点回りの積分の評価は繁雑であるとされてきた[16]．その理由は，一般の多層媒質において，$E_k(z,z')$を振源の特異性を考慮して求めることがそれほど容易でないことに基づく．しかしながら，式(35)に示すように積分核が固有関数で分解できれば，状況は異なってくる．分岐点回りの積分の被積分関数を求めるのに，Riemann面のcut上の波数に対する境界条件を満足する同次解のみを見つければ良い．この意味で，積分の評価にかける労力は減らすことができると期待できる．

また，積分経路CはRiemann面のcutであるが，複素関数論によれば，Riemann面のcutの選び方には任意性がある．しかし，式(35)に現われる積分経路Cの設定に関しては，連続固有値問題の成立する背景を考慮することで一意に定められる．前述のように連続固有値問題は半無限層で鉛直方向に伝播する上昇波と下降波を重ね合わせることで成立した．与えらた波数kに対して半無限層を伝播する鉛直方向の波数を$\bar{\nu}_N = \sqrt{k_{\alpha N}^2 - k^2}$とする．ここに，$k_{\alpha N}$は半無限層の媒質の波数である．いま，半無限層を鉛直方向に伝播する上昇波と下降波の波数$\bar{\nu}_N$の実数部の絶対値が等しく符号が反対でなければ定常波は作れず，固有値問題は成立しないことに注意する．このためには積分経路Cは$\mathrm{Im}(\bar{\nu}_N) = 0$の条件を満足しなければならず，これは**Fig. 3**の積分経路Cになる．

4. スペクトル分解の視点で捉えたGreen関数

前述の固有値問題の視点は，スペクトル分解の視点へつながってゆく．スペクトル分解の分かりやすい例は線形代数学で扱う，有限次元ベクトル空間上での線形作用素の固有空間への分解であろう．たとえば，線形代数学のテキスト[17]では対称行列Tが射影作用素$P_j, j = 1, 2, \ldots, n$を用いて次のようにスペクトル分解されることを示している．

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n \tag{36}$$

ここに，$\lambda_j, j = 1, \ldots, n$は固有値である．また，射影作用素の基本的な性質には次式がある．

$$I = P_1 + P_2 + \cdots + P_n, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_j \tag{37}$$

Green関数は与えられた微分方程式の微分演算に対する一種の逆演算子であるから，逆行列のスペクトル分解表示を調べることも必要である．すべての固有値がゼロでないとき，Tの逆は次のように表わせる．

$$T^{-1} = \frac{1}{\lambda_1}P_1 + \frac{1}{\lambda_2}P_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}P_n \tag{38}$$

ここで，Green関数の固有関数による表現に戻る．重要なことは，

$$P_n(z,z') = \varphi_n(z)\varphi_n(z')\rho(z') \tag{39}$$

$$\begin{aligned} d\overline{Q}_k(z,z') &= Q_k(z,z')dk \\ &= \psi_k(z)\psi_k(z')\rho(z')dk \end{aligned} \tag{40}$$

とすると，$P_n(z,z')$および$\overline{Q}_k(z,z')$は射影作用素としての性格を持っていることが固有関数の規格直交性から明らかになる．実際，ある関数$f(z)$を用いて，次のように$g(z)$を次のように決めてみる．

$$g(z) = \int_0^\infty P_n(z,z')f(z')dz' \tag{41}$$

式(41)によれば，固有関数の直交性から，$g(z)$には，$\varphi_n(z)$成分しか含まれない．すなわち，$P_n(z,z')$は，ある関数から$\varphi_n(z)$成分を取り出す作用素である．$\varphi_n(z)$をn-座標成分と考えれば，$P_n(z,z')$には有限次元ベクトル空間で見られた射影作用素の幾何学的な意味が保持されている．連続スペクトルに対する射影作用素は，ある広がりを持ったスペクトル領域に対応する部分空間へ関数を射影するものとして定義される[12]．離散固有値に対する射影作用素$P_n(z,z')$が，$\varphi_n(z)$のみを取り出したように，$\psi_k(z)$のみを取り出す作用素を考えると，これは$Q_k(z,z')$となる．実際，

$$g(z) = \int_0^\infty Q_k(z,z')f(z')dz' \tag{42}$$

を考えれば，$g(z)$は$\psi_k(z)$成分のみを持つ関数である．デルタ関数を用いて議論する場合には，$Q_k(z,z')$を用いる方が分かりやすい．したがって，以降では$P_n(z,z')$

および$Q_k(z,z')$を用いて，Green関数を分解することを考える．

まず，固有関数の直交性より$P_n(z,z')$および$Q_k(z,z')$には以下の性質がある．

$$\int_0^\infty P_n(z,z')P_m(z',z'')dz' = \delta_{nm}P_n(z,z'') \quad (43)$$

$$\int_0^\infty Q_k(z,z')Q_{k'}(z',z'')dz' = \delta(k-k')Q_k(z,z'') \ \ (k \text{ and } k'\text{:real}) \quad (44)$$

$$\int_0^\infty Q_k(z,z')Q_{k'}(z',z'')dz' = \delta(\tilde{k}-\tilde{k}')Q_k(z,z'') \ \ (k \text{ and } k'\text{:imaginary}) \quad (45)$$

ここに，$k=i\tilde{k}$，$k'=i\tilde{k}'$とした．

また，**Appendix-B**に示した固有関数の完全性の表現は$P_n(z,z')$および$Q_k(z,z')$を用いれば次式となる．

$$\delta(z-z') = \sum_n P_n(z,z') + \int_C \frac{k}{|k|}Q_k(z,z')dk \quad (46)$$

式(12),(23),(26), (31)を用いれば，Green関数のスペクトル分解は次式で表わされる．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{i}{4}\sum_n k_n H_0^{(2)}(k_n r)\frac{1}{k_n}P_n(z,z') - \frac{i}{4}\int_C H_0^{(2)}(kr)\frac{k}{|k|}Q_k(z,z')dk \quad (47)$$

逆行列のスペクトル分解のように，ここでは固有値の逆数が現れている．しかしながら，Green関数のスペクトル分解は逆行列の分解とは異なり，波動の連続スペクトルの存在に関連して積分が現れている．

実際のGreen関数の数値計算では連続スペクトルで表現された部分を離散化する必要がある．ここで，離散化された連続スペクトルに対する射影作用素の性質について論じておく．

連続スペクトルの項を離散近似したGreen関数は次のように表せる．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{i}{4}\sum_n H_0^{(2)}(k_n r)P_n(z,z') - \frac{i}{4}\sum_j H_0^{(2)}(k_j r)\frac{k_j}{|k_j|}\overline{Q_j^*}(z,z') \quad (48)$$

ここに，

$$\overline{Q_j^*}(z,z') = \int_{k_j-\Delta k/2}^{k_j+\Delta k/2} Q_k(z,z')dk \quad (49)$$

であり，本論文で示す数値計算では，$\overline{Q_j^*}(z,z') = \Delta k Q_{k_j}(z,z')$としている．$\overline{Q_j^*}(z,z')$は離散近似された射影作用素であり，その直交関係式は，式(44), (45)および(49)を基にすれば，

$$\int_0^\infty \overline{Q_i^*}(z,z')\overline{Q_j^*}(z',z'')dz' = \delta_{ij}\overline{Q_i^*}(z,z'') \quad (50)$$

となる．この式は離散近似された連続スペクトルの射影作用素は，離散スペクトルの射影作用素と同様な直交性の性質を有することを示す．この意味で，離散近似された射影作用素を構成する固有関数も，あたかも表面波モードのように離散的に直交する性質を示すことになる．

なお，式(47)によれば，$z \neq z'$であっても，Hankel関数の特異性から$r \sim 0$でGreen関数は特異性を示すように見える．しかしながら，Hankel関数は式(3)の積分を複素積分に拡張した際に第1種Bessel関数の代わりに現われてきたものである．この意味でHankel関数の特異性は複素積分経路の変形で現われた分岐点回りの積分と留数項で互いに打ち消しあう性質を持つものとして解釈される．

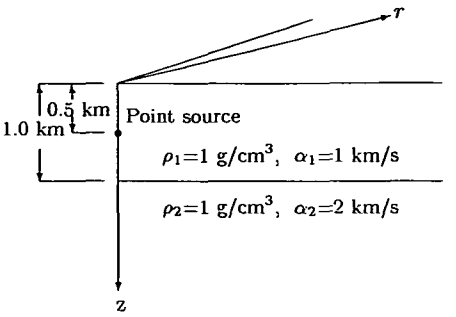

Fig. 4 Analyzed model in which point source in liquid layer over liquid half space.

5. 数値計算例

ここでは，いくつかの数値計算結果を示すことで，前述の理論展開についての理解を深めて行くことにする．解析モデルを**Fig. 4**に示す．

Fig. 4は表層の厚さが1.0 kmの2層の弾性流体のモデルである．表層の音波速度は1.0 km/s，質量密度は1.0 g/cm^3，基盤層の音波速度は2.0 km/s，質量密度は1.0 g/cm^{3}とする．また，自由表面から深さ0.5 kmの位置に点振源を置くものとする．

(1) 分散曲線

解析モデルの分散曲線を**Fig. 5**に示す．**Fig. 5**には離散的な固有値問題で得られる通常の正規モードの分散曲線と連続固有値問題を離散化することで得られるモードの分散曲線を示している．連続固有値問題の

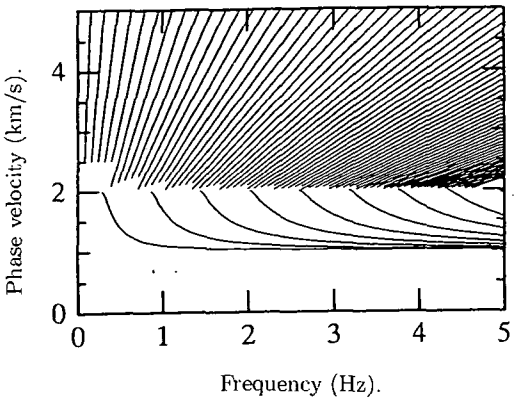

Fig. 5 Dispersion curves for the structure shown in **Fig. 4**

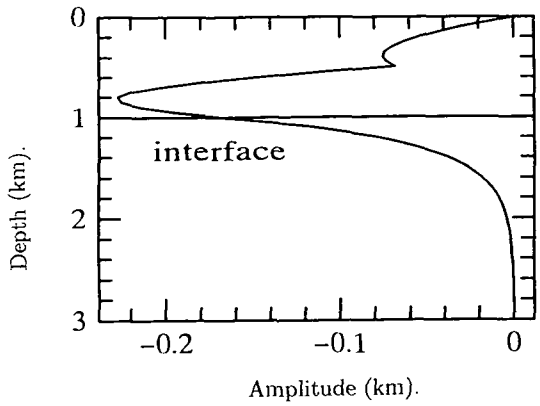

Fig. 6 Properties of function $E_k(z, z')$, in which the frequency is 1.0 Hz and wavenumber 4.8/km.

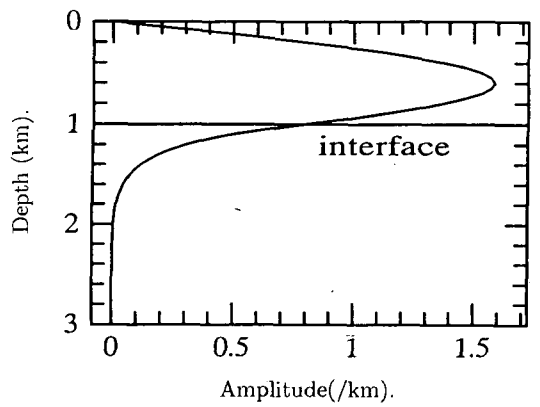

Fig. 7 Properties of function $P_1(z, z')$, in which the frequency is 1.0 Hz.

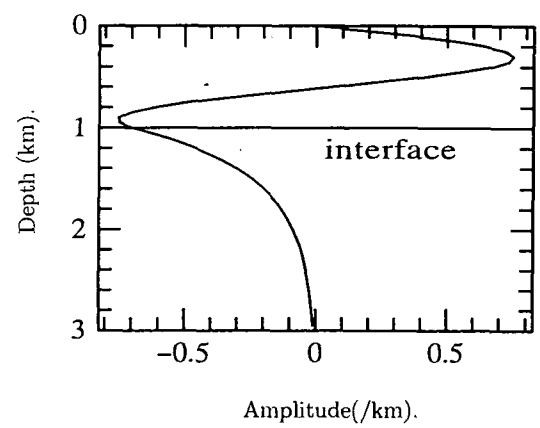

Fig. 8 Properties of function $P_2(z, z')$, in which the frequency is 1.0 Hz.

離散化は式(47) の複素積分のうち実軸に関するものを等間隔のΔkで分割することにより行っている．すなわち，**Fig. 3** に示す積分経路Cの実軸上の区間は，$0 \leq k \leq k_{\alpha 2}$ であるが，これをΔkで分割して，次のように，n 個の離散的なモードを求める．

$$0 < \Delta k < \cdots < j\Delta k < \cdots < n\Delta k \leq k_{\alpha_2} = \frac{\omega}{\alpha_2} \quad (51)$$

ここで，ωは与えられた振動数である．式(51) より，ω が増加すれば，存在できるモードの数も増加することが分かり，正規モードにおける cut-off frequency の存在と同様な性質があることが分かる．いま，離散化されたモードの中でj次モードの波数を$j\Delta k$とすれば，このモードの位相速度β_j は

$$\beta_j = \frac{\omega}{j\Delta k} \quad (52)$$

となる．ωとβ_jは比例関係にあり，振動数が増大すれば，位相速度も単調に増大する性質がある．

Fig. 5 の分散曲線の横軸は振動数，縦軸は位相速度を示している．分散曲線のうち，位相速度2 km/sから1 km/sの間を分散するものは，正規モードの分散曲線であり，2 km/sを越えるものは連続固有値問題を離散化することで得られたモードである．前述の説明のとおり，連続固有値問題の離散化によって得られる分散曲線は，振動数の増大とともに，位相速度が直線的に増加している．また，分散曲線は高い振動数になるに従い半無限層の音波速度に近いところで密集してきており，振動数が高くなるにつれて，半無限層の音速の位相速度を持つ波動が現れ易くなることを示している．

(2) $P_n(z, z')$ および $Q_k(z, z')$ の性質

次に，Green 関数のスペクトル分解表示に現れた $P_n(z, z')$ および $Q_k(z, z')$ の性質について検討してみる．

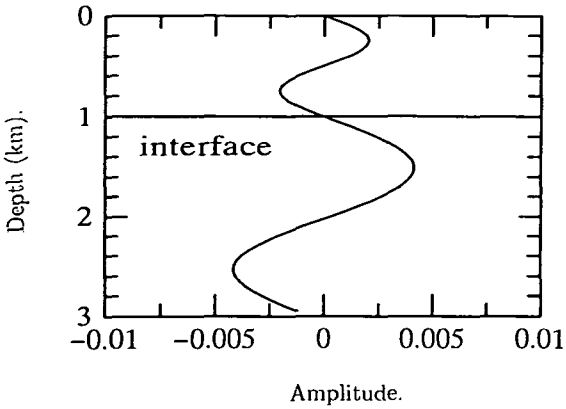

Fig. 9 Properties of function $Q_k(z,z')$, in which the frequency is 1.0 Hz and wavenumber 0.1/km.

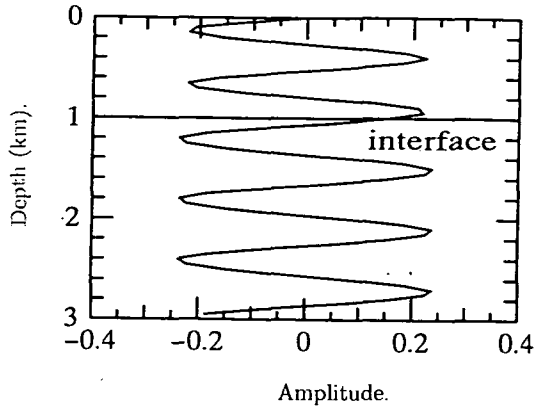

Fig. 10 Properties of function $Q_k(z,z')$, in which the frequency is 1.0 Hz and wavenumber $-10i$ /km.

この検討に先立ち，まず式(3)に現れた関数$E_k(z,z')$の形状について示しておく．関数$E_k(z,z')$は一般的には，**Fig. 6**に示すように振源で微分係数が不連続となっている．これは，与えられた振動数に対して，任意の波数kでは境界条件を満足する波動方程式の同次解を作ることができないことによる．ところが，波数が特性方程式を満足するようになると，定式化でも示したように，

$$\operatorname*{Res}_{k=k_n} E_k(z,z') = \frac{1}{2k_n}\varphi_n(z)\varphi_n(z')\rho(z') \tag{53}$$

となり，$E_k(z,z')$は射影作用素に関連付られるようになる．**Fig. 7**は，振動数1 Hzにおける1次モードの射影作用素すなわち，$P_1(z,z')$を示している．**Fig. 7**によれば，特性方程式を満足する特別な波数については境界条件を満足する自明でない同次解が作られることが実証されている．

Fig. 8に振動数1 Hzにおける2次モードの射影作用素$P_2(z,z')$の形状を示す．離散スペクトル領域の射影作用素の形状は正規モードの形状と結び付けて考察できるので，ここでは詳細な議論は不要であろう．

次に連続スペクトル領域で現れた$Q_k(z,z')$の形状について検討する．**Fig. 9**に振動数1 Hzにおける$Q_{0.1}(z,z')$を示す．すなわち，ここでは波数kを0.1 /kmとしている．離散スペクトル領域の射影作用素とは異なり，$Q_k(z,z')$は半無限層より下でも振動を続けてゆくモードであることが確認できる．同次解に放射条件を課さなければ，任意の振動数と波数について境界条件を満足する同次解を作ることが実証される．**Fig. 10**に振動数1 Hz，における$Q_{-10i}(z,z')$を示す．すなわち，ここでは，波数kを$-10i$としている．波数が虚数になっても，波動の逸散を表すモードであることには変わりない．ただし，波数が虚数の場合には，モードは水平方向には波動として伝播しない．このことは，Hankel関数の漸近展開を考えれば明らかであろう．

$Q_k(z,z')$の示すモード形状の特徴は表層よりも半無限層で振幅が大きくなっていることである．言い換えれば，これらのモードでは表層に波動のエネルギーは集まらず，半無限層に波動が逸散してゆくリーキングのモードであることが示される．

(3) 波数積分との比較

最後にスペクトル分解表示されたGreen関数を実際に計算し，式(3)を直接積分した結果と比較してみる．式(3)を積分する方法は次のようにした．

まず，kが大きいときの$E_k(z,z')$の次の性質，

$$E_k(z,z') \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{2k}\exp(-|z-z'|k) \tag{54}$$

を用いて，無限積分を有限なある波数で打ち切る．すなわち，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty kJ_0(kr)E_k(z,z')dk \\
&= \int_0^N kJ_0(kr)E_k(z,z')dk \\
&\quad + \int_N^R kJ_0(kr)\left(E_k(z,z') - \frac{1}{2k}\exp(-|z-z'|k)\right)dk \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^\infty J_0(kr)\exp(-|z-z'|k))dk \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^N J_0(kr)\exp(-|z-z'|k))dk
\end{aligned} \tag{55}$$

ここに，NとRは十分大きな正数で，特にNからRの区間に正規モードの極が入り込まないように設定する．

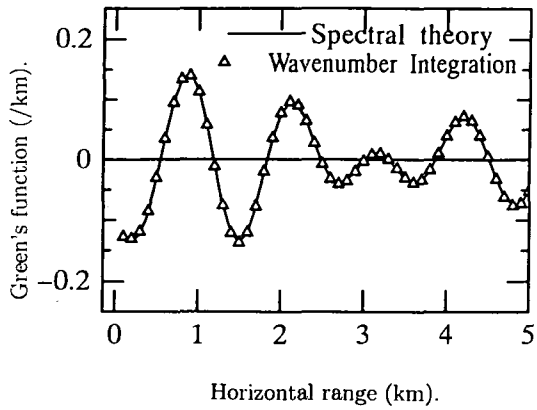

Fig. 11 Comparison of the spectral theory with wavenumber integration (real part).

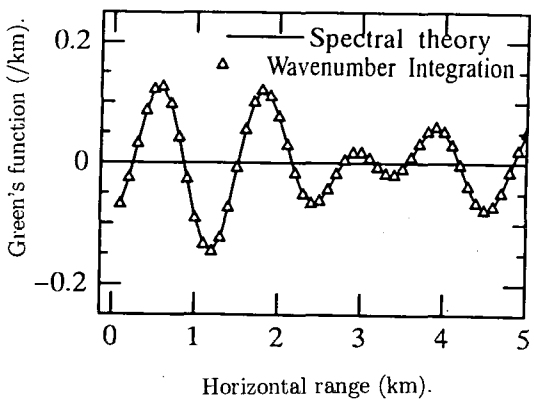

Fig. 12 Comparison of the spectral theory with wavenumber integration (imaginary part).

また，式(55)の計算では，次の公式を使用する．

$$\int_0^\infty J_0(kr)\exp(-|z-z'|k))dk = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \tag{56}$$

次に，区間0からNまでの積分をCauchyの主値と正規モードの寄与である留数項に分離する．

$$\int_0^N kJ_0(kr)E_k(z,z')dk = \mathrm{P.V.}\int_0^N kJ_0(kr)E_k(z,z')dk - \pi i\sum_j \mathrm{Res} \tag{57}$$

また，Cauchyの主値積分は次のように評価する．

$$\mathrm{P.V.}\int_0^N kJ_0(kr)E_k(z,z')dk = \int_0^N (kJ_0(kr)E_k(z,z') - \sum_j \frac{A_j}{k-k_j})dk + \mathrm{P.V.}\int_0^N \sum_j \frac{A_j}{k-k_j}dk \tag{58}$$

ここに，k_jは正規モードの波数であり，

$$A_j = \operatorname*{Res}_{k=k_j}(kJ_0(kr)E_k(z,z')) \tag{59}$$

を意味する．また，

$$\mathrm{P.V.}\int_0^N \sum_j \frac{A_j dk}{k-k_j} = \sum_j A_j(\ln(N-k_j)-\ln(k_j)) \tag{60}$$

に注意する．式(58)の右辺第1項の積分は特異点を含まない有限積分であるから評価は容易である．

以上の方法で波数積分して求めたGreen関数とスペクトル分解表示を用いて求めたGreen関数の比較を**Fig. 11**および**Fig. 12**に示す．ここでは振源の加振振動数は1 Hzとし，自由表面から深さ0.9 kmの位置のポテンシャルを計算している．波数積分の実行に関しては$N = 10$ /km, $R = 20$/kmとし，式(58)の右辺第1項の数値積分の波数の刻みはΔk=0.01 /kmとした．また，スペクトル分解表示でGreen関数を計算する場合の連続スペクトルの離散化では，虚数の波数は$-20i$まで考慮し，波数の刻みはΔk=0.1 /kmとした．

Fig.11と**Fig. 12**によれば，スペクトル分解で求めたGreen関数と波数積分の結果は良く一致しており，本論文で提案した分岐点回りの積分の積分核の固有関数による分解の妥当性が検証されている．

6. 結論

本論文では，波数積分で表現されたGreen関数を離散および連続固有値に対する固有関数によるスペクトル分解表示として捉えることを試みた．これによれば，波数積分の中で，正規モードの留数定理による寄与は離散的な固有値問題として，分岐点回りの積分の寄与は連続固有値問題として捉えることができた．実体波は分岐点回りの積分に関連して現れることを考えると，本論文の展開によって実体波も固有値問題の枠組みの中で捉えることが可能になったことを意味する．

離散スペクトルにせよ連続スペクトルにせよ，これに対する固有関数は直交性を示す．Green関数の計算過程では，連続スペクトルに対する固有関数の積分を離散化しなければならないが，このプロセスで得られる固有関数の直交関係式は形式的には正規モードと同様になる．

しかしながら，連続スペクトル領域と離散スペクトル領域のモードには大きな違いがある．離散スペクトル領域のモードは，表層で振幅が大きく，半無限層で振幅は指数関数的に減少して行く．一方，連続スペクトル領域のモードでは，振幅は表層でそれほど増幅されず，むしろ半無限層で振幅が大きくなっている．連続スペクトル領域のモードは波動の逸散を表すモードであり，波動の逸散現象と連続スペクトルが生成されるメカニズムは表裏一体であった．

Green 関数のスペクトル分解表示の妥当性は，波数積分の結果と比較することで行った．波数積分の結果とスペクトル分解表示から求めた Green 関数の値は非常に良い一致を示し，本論文で展開した分岐点回りの積分の積分核の固有関数による分解の妥当性が検証された．

Appendix-A 固有関数の直交性について

ここでは，離散的な固有値および連続固有値に対する固有関数の直交関係式を示す．本文では2層からなる弾性流体の波動場を考えたが，ここでは，より一般的な設定として，多層の弾性流体の波動場を考えることにする．本文に従い，離散的な固有値k_nに対する固有関数を$\varphi_n(z)$，連続固有値k に対する固有関数を$\psi_k(z)$で表すことにする．以降では，固有関数が境界条件を満足することを利用して議論を進めるので，多層の弾性流体の波動場という概念はあまり表に現れない．

まず，離散的固有値に対する固有関数の直交関係式を誘導する．ここではまず関数の内積を

$$(\varphi_n(z),\ \varphi_m(z)) = \int_0^\infty \rho(z)\varphi_n(z)\varphi_m(z)dz \qquad (A.1)$$

で定義する．ここで内積に質量密度を考慮する理由は層境界での圧力の釣合を確保するためである．なお，ここで質量密度は層ごとに一定，すなわち，区分一定である．

ここで，固有関数φ_nは次の方程式を満足する．

$$\boldsymbol{L}\varphi_n(z) = k_n^2\varphi_n(z) \qquad (A.2)$$

ここに，

$$\boldsymbol{L} = \frac{d^2}{dz^2} + k_\alpha(z)^2 \qquad (A.3)$$

ここに，$k_\alpha(z)$は媒質の波数であり，多層系の波動場を考えているので，zの関数として表している．

微分演算子$\boldsymbol{L}$が形式的自己共役であること，固有関数が同次境界条件を満足することを用いれば，次式を得る．

$$(\varphi_n(z),\ \boldsymbol{L}\varphi_m(z)) = (\boldsymbol{L}\varphi_n(z), \varphi_m)) \qquad (A.4)$$

式(A.2) と式(A.4) を用いれば，対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルが直交するという証明のプロセスをたどることで，次の固有関数の規格直交性を示すことができる．

$$\int_0^\infty \rho(z)\varphi_n(z)\varphi_m(z)dz = \delta_{nm} \qquad (A.5)$$

ここに，δ_{nm}はKronecker のデルタである．

相異なる固有値に対する固有関数が直交するという性質は微分演算子$\boldsymbol{L}$が形式的自己共役であることに基づくものであり，この意味で相異なる固有値を持つ連続固有関数も直交性を示す．また，連続固有関数と離散固有関数も相異なる固有値を持つことから直交することに注意する．

次に，連続固有値に対する固有関数の直交性について検討する．本文でも述べたように，この固有関数の特徴は，モード形状が半無限層で指数関数的に減少することがなく，無限遠方まで三角関数的に振動する，いわゆる波動の逸散を表わすモードである．このため，式(A.1) で定義された内積は通常の意味では収束せず，デルタ関数を用いて表わして行く必要が生じる．連続固有値に対する固有関数の規格直交性は，この意味で半無限層のモード形状が主要な役割を果たし，半無限層でのモードが固有関数の主要部と呼ぶべきものとなる．

いま，半無限層のモード形状を次のように表す．

$$\psi_k(z) = A\sin(\overline{\nu}_N z) + B\cos(\overline{\nu}_N z) \qquad (A.6)$$

ここに，AとBは係数で表層のモード形状で規定されるべきものである．また，$\overline{\nu}_N$ は鉛直方向に伝播する波動の波数で，次式で示される．

$$\overline{\nu}_N = \sqrt{k_{\alpha N}^2 - k^2} \qquad (A.7)$$

ここに，$k_{\alpha N}$は半無限層の媒質の波数である．

ここで，連続固有値に対する固有関数を規格化する．同じ固有値を持つ固有関数の内積は発散するから，固有関数の規格化にあたっては，固有関数の主要部の内積のみを考慮すればよい．(表層部分の固有関数の内積の値は有限となるから，規格化に寄与しない．)

連続固有値に対する固有関数の内積を主要部についての内積で近似すれば，次式を得る．

$$\begin{aligned}&(\psi_k(z),\ \psi_{k'}(z))\\ &\simeq \int_{z_N}^\infty \rho_N[A\sin(\overline{\nu}_N z) + B\cos(\overline{\nu}_N z)]\\ &\quad [A\sin(\overline{\nu}'_N z) + B\cos(\overline{\nu}'_N z)]dz \qquad (A.8)\end{aligned}$$

ここに，z_Nは半無限層の上面のZ座標，$\overline{\nu}'_N$はk'に対する鉛直方向の波数を示す．

固有関数の規格化に当たっては，式(A.8) が$k \to k'$のときどのように発散して行くかを追跡すればよい．Fourier 積分とデルタ関数の関係式を用いて，式(A.8) の計算を進めると次式を得る．

$$(\psi_k(z),\ \psi_{k'}(z)) \underset{k\to k'}{\sim} \rho_N[A^2 + B^2]\frac{\pi}{2}\delta(\overline{\nu}_N - \overline{\nu}'_N) \quad (A.9)$$

ここで，本文に示した Riemann 面の cut 上では$\overline{\nu}_N$は常に実数であることに注意する．

ここで,

$$\delta(\overline{\nu}_N - \overline{\nu}'_N) = \delta(k-k')\frac{\overline{\nu}_N}{|k|} \quad (k\text{:real}) \qquad \text{(A.10)}$$

$$\delta(\overline{\nu}_N - \overline{\nu}'_N) = \delta(\hat{k}-\hat{k}')\frac{\overline{\nu}_N}{|k|} \quad (k\text{:imaginary}) \qquad \text{(A.11)}$$

の関係に注意すれば，固有関数の規格化の条件が次のように得られる.

$$\frac{\pi}{2}\frac{\overline{\nu}_N}{|k|}\rho_N[A^2+B^2]=1 \qquad \text{(A.12)}$$

ただし，式(A.11) では$k=i\hat{k}$とした.

前述のように相異なる固有値に対する固有関数は直交するから，式(A.12)に示すように，固有関数を規格化してしまえば，連続固有関数の直交条件式が次のように得られる.

$$(\psi_k(z),\ \psi_{k'}(z)) = \delta(k-k') \quad (k\text{:real}) \qquad \text{(A.13)}$$

$$(\psi_k(z),\ \psi_{k'}(z)) = \delta(\hat{k}-\hat{k}') \quad (k\text{:imaginary}) \qquad \text{(A.14)}$$

Appendix-B 分岐点まわりの積分の積分核の固有関数による分解

Appendix-A で固有関数の直交性を論じたのを受け，ここでは固有関数による関数の展開と固有関数の完全性についての議論を行う．そしてその結果を用いて，分岐点回りの積分の積分核を固有関数を用いて分解する.

ここで注意すべき点は連続固有値による固有関数で関数を展開する場合には，積分経路を複素平面上にとることである．この点と離散固有値に対する固有関数と連続固有値に関する固有関数が直交する(離散固有値による固有関数の展開と連続固有値による固有関数展開の線形結合で関数が展開される.) ことを用いれば，固有関数による関数の展開は次のように表現される.

$$f(z) = \sum_n a_n\varphi_n(z) + \int_C \frac{k}{|k|}b(k)\psi_k(z)dk \qquad \text{(B.1)}$$

実際，固有関数の直交性を用いれば，

$$a_n = (f(z),\ \varphi_n(z)) \qquad \text{(B.2)}$$

であり，kが実数のときにも

$$b(k) = (f(z),\ \psi_k(z)) \qquad \text{(B.3)}$$

を示すのは容易である.

積分経路Cは虚数軸を通るので，kが虚数のときに，$b(k)$がどのようになるかを調べることは重要であろう．ξを虚数として，$f(z)$と$\psi_\xi(z)$の内積を計算する.

$$(f(z),\ \psi_\xi(z)) = \int_0^\infty \rho(z)f(z)\psi_\xi(z)dz \qquad \text{(B.4)}$$

この式に式(B.1)を代入し，離散固有値に対する固有関数と連続固有値に対する固有関数の直交性を適用することで次式を得る.

$$\begin{aligned}&(f(z),\ \psi_\xi(z))\\ &= \int_0^\infty \rho(z)\psi_\xi(z)\psi_k(z)dz\int_C \frac{k}{|k|}b(k)dk\\ &= \int_C \frac{k}{|k|}b(k)\delta(\hat{\xi}-\hat{k})dk \end{aligned} \qquad \text{(B.5)}$$

ここで，$\xi = i\hat{\xi}$としている.

式(B.5)において，$k=i\hat{k}$とし，$\hat{k}$による積分として変数変換することで,

$$\begin{aligned}&(f(z),\ \psi_\xi(z))\\ &= \int_{\hat{C}} b(i\hat{k})\delta(\hat{\xi}-\hat{k})d\hat{k} = b(i\hat{\xi}) = b(\xi)\end{aligned} \qquad \text{(B.6)}$$

として，$b(\xi)$が自然な形で求められ，式(B.1)の妥当性が示される.

連続固有値と離散固有値による固有関数が完全性を示すことは，本文に示したようにGreen関数がこれらの固有関数で表されたことにより保証されている．式(B.1)と関数の内積の定義である式(A.1)により，固有関数系の完全性が,

$$\begin{aligned}&\delta(z-z')\\ &= \sum_n \varphi_n(z)\varphi_n(z')\rho(z')\\ &\quad + \int_C \frac{k}{|k|}\psi_k(z)\psi_k(z')\rho(z')dk\end{aligned} \qquad \text{(B.7)}$$

で表現されることになる．この固有関数の完全性の表現はGreen関数の波数積分表示に現れた分岐点回りの積分が固有関数によってどのように表現されるべきかを示すことになる．本文にも示したように，Green関数は以下のように表わせる.

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= -\frac{i}{2}\mathrm{Res}\sum_n k_n H_0^{(2)}(k_n r)E_{k_n}(z,z')\\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_L kH_0^{(2)}(kr)E_k(z,z')dk\end{aligned} \qquad \text{(B.8)}$$

ところがGreen関数そのものは

$$(\nabla^2 + k_\alpha(z)^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \text{(B.9)}$$

で定義されるから，式(B.8)の両辺に$(\nabla^2+k_\alpha(z)^2)$を作用させ，ここで述べた固有関数の完全性の議論を繰り返すことで,

$$E_k^-(z,z') - E_k^+(z,z') = \frac{\pi i}{|k|}\psi_k(z)\psi_k(z')\rho(z') \qquad \text{(B.10)}$$

と分岐点回りの積分の積分核が固有関数で分解される．この分解はGreen関数の定義と固有関数の性質のみで誘導され，波動場の層数などとは無関係に成立することに注意する必要がある.

参考文献

1) Lamb, H.: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **203**, pp. 1-42, 1904.

2) Fuchs, K. and Müller,G.: Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations, *Geophys. J.*, Vol. 23, pp. 417-433, 1971.

3) Bouchon, M. and Aki, K.: Discrete wavenumber representation of seismic wave fields. *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 67, 259-277, 1977.

4) Bouchon, M.: Discrete wavenumber representation of elastic wavefields in three space dimensions, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp. 3609-3614, 1979.

5) Bouchon, M.: Calculation of complete seismograms for an explosive source in layered medium, *Geophysics*, Vol. 45, pp. 197-203, 1980.

6) Bouchon, M.: A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. seis. Soc. Am.*, Vol. 71, pp. 959-979, 1981.

7) Bouchon, M.: The complete synthesis of seismic crustal phases at regional distances, *J. Geophys. Res.*, Vol. 87, pp. 1735-1741, 1982.

8) Harvey, D. J.: Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophys. J. R. astr. Soc.* Vol. 66, pp. 37-69, 1981.

9) Haddon, R. A. W.: Computation of synthetic seismograms in layered earth models using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 74, 1225-1248, 1984.

10) Haddon, R. A. W.: Exact evaluation of the response of a layered elastic medium to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 76, 1755-1775, 1986.

11) Haddon, R. A. W.: Response of an oceanic wave guide to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 77, 1804-1822, 1987.

12) 志賀浩二: 固有値問題30講 (数学30講シリーズ 10), 朝倉書店, 1991.

13) クーラン·ヒルベルト: 数理物理学の方法 (斎藤利弥監訳), 東京図書, 1959.

14) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F.: *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, 1957.

15) 今村勤: 物理とグリーン関数, 岩波書店, 1978.

16) 時松孝次, 田村修次: 3次元多層地盤における地表面鉛直点加振の応答変位に対するレイリー波と実体波の寄与, 日本建築学会構造系論文集, No. 476, 95-101, 1995.

17) 斎藤正彦: 線型代数入門, 東京大学出版会, 1966.

(1996.12 .5 受付)

SPECTRAL DECOMPOSITION OF GREEN'S FUNCTION IN TERMS OF DISCRETE AND CONTINUOUS EIGENVALUE PROBLEMS

Terumi TOUHEI

The purpose of this research is to represent Green's function for liquid layered medium in terms of spectral theory. In general, Green's function represented by wavenumber intagration can be separated into residue terms and branch line integrals. This reserch shows that the residue terms are related to the discrete eigenvalue problem and the branch line integrals to the continuous eigenvalue problem. This research also shows that the integrand of the branch line integral can be decomposed into the continuous eigenfunctions. By the decomposition, Green's function can be synthesized by using the continous and discrete eigenfunctions for the wave field.