土木学会論文集 No. 576／IV-37, 43-54, 1997.10

ランダム限界効用に基づく滞在時間モデルに関する理論的研究

小林潔司[1]・喜多秀行[2]・後藤忠博[3]

[1]正会員 工博 京都大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻(〒606-01 京都市左京区吉田本町)
[2]正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム工学科(〒680 鳥取市湖山町南4丁目101)
[3]正会員 工修 (株)オリエンタルコンサルタンツ(〒213 川崎市高津区久本3-5-7 ニッセイ新溝のロビル)

本研究では個人の効用最大化行動に基づいた滞在時間分布モデルを提案する．そのために，個人の滞在時間決定行動をランダム限界効用モデルを用いて表現するとともに，個人間での時間価値の確率分布から滞在時間の確率分布モデルを導出する．さらに，代替的な効用関数の形式，時間価値の確率分布を提案し，それに基づいた滞在時間分布モデルを導出する．最後に，数値計算を通じて滞在時間分布モデルの性質について考察する．

Key Words : *duration model, random marginal utility, hazard function, time allocation*

1．はじめに

近年，交通需要管理（TDM）施策により，活動の開始・終了時刻を間接的に誘導しトリップの発生時刻分布を制御しようとする試みが着目されている．TDMの効果を効果的に検討するためには，個人が各種の活動に割り当てる時間，すなわち活動の継続時間を決定するメカニズムを理解することが不可欠である．駐車場などの各種ターミナル施設計画においては，滞在時間分布それ自体が到着パターンと共に施設利用挙動の支配的要素であり，滞在時間分布を的確に予測し，可能な範囲でこれを適切に制御することが要請される．

個人は目的地の魅力や滞在に要する費用等を勘案しながら滞在時間を決定する．その際，目的地に滞在することにより獲得する効用や払わねばならない費用は個人により必ずしも同一ではないことに留意する必要がある．むしろ，個人間には差異が存在し，それが故に，多様な個人が混在する施設や目的地における滞在時間にばらつきが存在すると考えるのが自然であろう．事実，施設計画を策定する際など滞在時間は多くの場合分布として取り扱われる．このような観点から，利用者の異質性が滞在時間の分布形状をどのように規定しているかを探ることも興味深い問題である．

このような観点から，近年，期間モデル(duration model)[1]を用いて滞在時間を予測する試みがなされるようになってきた．元来，期間モデルは信頼性分析の分野で発展してきた手法であり，事象が生起，もしくは終了する時点までの継続時間長の確率分布をモデル化することを目的とする．期間モデルを交通行動分析に適用した事例はいくつか見られるが，いずれも期間モデルの統計的推計に終始しており，その行動科学的基礎は明らかにされていない．特に，TDM等の施策が個人の行動に及ぼす影響を分析するためには，行動科学的な基礎を有する期間モデルの開発が不可欠である．

本研究で明らかにするように，効用最大化行動と整合性がとりうる簡便な期間モデルを開発することは必ずしも容易ではない．ある限定的な仮定の下でいくつかの期間モデルを効用最大化仮説より導出することできる．期間モデルを個人行動分析に適用する場合，それが近似的に個人行動を表現しているにせよ，それがどのような行動仮説を前提としているかを知ることは重要な課題であろう．本研究では，まず個人の効用最大化行動に基づいた一般的な滞在時間モデルを提案する．その上で，効用最大化仮説に基づいた滞在時間モデルが，ある仮定の下で既存の期間モデルのいくつかに一致することを明らかにする．以下，2．では，本研究の基本的な考え方を説明する．3．で個人の滞在時間の決定行動を定式化し，4．で滞在時間分布モデルを導出する．5．では効用関数を特定化し，いくつかの期間モデルを導出する．6．では滞在時間費用を考慮しうるようモデルを拡張する．7．では数値計算によりモデルの特性について考察する．

2．本研究の基本的考え方

（1）従来の研究

期間モデルは，元来信頼性分析の分野で発展してきた手法であるが，最近になり行動科学の分野でも頻

繁に用いられるようになってきた[1)]．交通行動モデリングの分野においても，Jovanis and Chang[2)]，Chang and Jovanis[3)]，Jones[4)]等は個々のドライバーが交通事故を起こすまでの走行時間分布を分析した．Mennering and Hamed[5)]は帰宅途上の交通渋滞を避けるための退社時刻調整行動を，Gilbert[7)]，de Jong[8)]は自家用車の保有期間と買い換え行動を分析している．また Ettema *et al.*[9)]は activity scheduling 問題を扱っている．Hensher and Mannering が指摘しているように[1)]，継続時間に関連する現象が至る所に見られる割にはそれらを統計的に扱っている研究はそれほど多くない．

一方，Becker[10)]の先駆的な業績以来，経済学の分野で数多くの時間配分に関する研究が蓄積されてきた．交通の分野においても activity-based approach に基づいて時間配分のモデル化を試みた研究が見られる．例えば，Sasaki は個人の時間配分行動に基づいて交通発生需要を分析している[11)]．Kitamura は自宅外における活動とトリップに関する時間配分行動をランダム効用最大化理論に基づいて分析している[12)]．ただし，前者では，個々の活動時間が外生的に与えられ，後者では時間配分が離散選択として記述されている．また，Wang[13)]は timing utility なる概念を導入し，それが旅行時間に及ぼす影響を検討している．また Hamed and Mannering[6)]は退社後の活動選択と各活動の継続時間を離散選択モデルとハザードモデルを組み合わせて記述する方法を提案している．一方，期間モデルの推定方法に関しては計量経済学の分野で研究が蓄積されており，その成果は Cox and Oakes[14)]，Lancaster[15)]に詳しい．

しかし，期間モデルを用いたこれまでの研究は信頼性分析で開発された生存関数やハザード関数を統計的に推計する段階に止まっており，個人行動を内包する形にはなっていない．したがって，各種の料金政策や公共施設等の整備が滞在時間の分布に及ぼす影響を分析できないという限界がある．また，個人の行動選択プロセスに着目した activity based approach に基づく研究は，必ずしも滞在時間が内生的に決定されるメカニズムになっていない．また，前述の Kitamura では時間を離散的に扱っており，滞在時間の分布形を論じるには必ずしもそぐわない．このように，効用最大化行動に基づいて交通行動にかかわる滞在時間分布が決定されるメカニズムについて検討した研究は筆者等の知る限り見当たらない．

（2）ランダム限界効用モデル

効用最大化理論に基づいた期間モデルに関しては Pudney[16)]が先鞭をつけた．彼は，ミクロ経済モデルに基づいて在職期間打ち切り問題を定式化し，退職時期の分布を導出している．Pudney が示したように，ある活動の継続時間長はその活動を継続することによる限界効用とそれに要する限界費用の相互比較によって決定される．このことを滞在時間の決定問題に即して考察してみよう．目的地に滞在することにより獲得する効用は，目的地の特性や個人属性により異なる．目的地に滞在することの限界効用は滞在時間とともに減少していく．この時，ある目的地に滞在している個人は，限界効用が限界費用を上回る限り滞在を継続し，下回る場合には滞在を終了するだろう．

個人の滞在時間に関する限界効用は目的地特性や個人属性により規定されよう．限界効用は個人にとって確定的であり，分析者はそれが観測できると考える．一方，限界費用は金銭的費用と心理的費用により構成されると考える．このうち，金銭的費用は個人・分析者にとって確定的である．一方，心理的費用は個人の時間価値によって決定され，分析者はその値を確定的に観測できない．同一個人にとって，時間価値は時により変動してもいい．しかし，個人が滞在時間を決定する時点で時間価値は確定しており，合理的に滞在時間を決定していると考える．時間価値は個人によって多様に変化しており，時間価値のちらばりが存在するため滞在時間が確率的に分布している．時間価値の確率分布に基づいた個人行動モデルに関しては，すでに機関分担を対象とした犠牲量モデル[17)]が提案されている．本研究で提案する滞在時間モデルは，時間価値の確率分布を考慮したようなランダム限界効用モデルを新たに構成した点に特徴がある．

3．基本モデルの定式化

（1）モデルの前提条件

ある目的地を訪問することを考えている個人を考えよう．目的地の魅力は，個人がその場所に滞在し，その目的地の環境やアメニティを消費することによって形成される．その場合，個人は希少資源である時間や金銭と環境要因を結合させサービスを生産するとともに，自己生産したサービスを自己消費している[18)]．目的地にどれだけ滞在するかは個人が意思決定しており，モデルの中で内生的に決定される必要がある．本研究では，このような滞在時間決定を内生化したようなランダム限界効用モデルを定式化する．

本研究は効用最大化仮説に基づいて期間モデルを導出することを目的としている．従来の期間モデルに関する研究は効用最大化問題としての分析枠組みが欠如しているため，モデルが前提としている行動科学的な仮定は必ずしも明確ではない．しかし，期間モデルを効用最大化問題として再定式化しようとすれば，以下の仮定を設定する必要があることが理解できる．すな

わち，1）ある単一の目的地での滞在行動に着目する．2）目的地での金銭出費は滞在時間に比例する．3）個人の時間価値（時間の機会費用）は一定である．仮定1）は，本研究では複数の目的地の選択問題を考慮しないことを意味する．単一の目的地への滞在行動に分析の焦点を絞るという方法は，期間モデルをはじめとして，たとえば旅行費用法等[19),20)]において伝統的に採用されてきたものであり，本研究においても踏襲する．もちろん，以下で提案するモデルは，3．(3）で言及するように，複数の目的地の選択モデルに容易に拡張できるが，この問題は本稿の域を越えるので今後の課題としたい．仮定2）により，目的地での金銭の出費は，たとえば駐車料金等に代表されるように滞在時間に比例して増加する費用により構成されると考える．もちろん，目的地での滞在に要する固定費用を考慮したり，訪問先での財の購入額と滞在時間を同時決定するような連続一離散型選択モデル[21),22)]への拡張も考えられるが，本研究では滞在時間の決定問題に焦点を絞るため，財の同時消費の問題は考慮しない．このうち，固定費用の問題は3．(3）で言及する．仮定3）は時間と所得がある一定の比率で代替可能であることを意味する．この仮定は，単位時間の価値が賃金率により金銭所得に代替されると考えれば，従来の時間配分モデルにおいてfull-icome仮説[10)]として採用されてきたものに他ならない．以上は，いずれもある目的地への訪問行動を他の交通行動や消費行動と切り離して，部分均衡分析を行うために設けた仮定である．以上の仮定により，経済理論と整合のとれた形で目的地での滞在行動を容易にモデル化できることになる．

(2）モデルの定式化

ある個人が目的地に滞在することにより獲得する効用を一般化された合成財に関して準線形な効用関数

$$U(t, x_0, t_0, \boldsymbol{\xi}; \varepsilon) = u(\phi(t, \boldsymbol{\xi})) + x_0 + \varepsilon t_0 \tag{1}$$

により表現する．ここに，$\boldsymbol{\xi}$は目的地の特性や個人属性を表す変数ベクトル，x_0は合成財の消費量，t_0は当該活動以外に投入する余暇時間である．$z = \phi(\cdot)$は家計生産関数であり，家計が自己の時間資源tと環境要因$\boldsymbol{\xi}$を結合し滞在サービスzを生産する技術を表現する．家計生産関数は，新古典派的生産関数の性質$\partial\phi(t,\boldsymbol{\xi})/\partial t \geq 0$, $\partial^2\phi(t,\boldsymbol{\xi})/\partial t^2 \leq 0$を満足し，サービス生産には時間投入が必要であるという条件$\phi(0,\boldsymbol{\xi}) = 0$を満足すると仮定する．効用関数の第1項は，滞在サービスを自己生産・自己消費することにより得られる部分効用を意味している．部分効用関数$u(z)$は，滞在サービスzに関して単調増加かつ強凹，すなわち$\partial u(z)/\partial z > 0$, $\partial^2 u(z)/\partial z^2 < 0$を満足する．効用関数の基準化のために，$u(0) = 0$を仮定する．$\varepsilon$は時間の機会費用を表す確率変数である．full-income仮説では，時間の機会費用εは賃金率で表現される．εは個人にとって定数であるが，分析者には観測できない確率変数である．個人は，時間・金銭という2つの予算制約に直面する．

$$t + t_0 + t_1 = T \tag{2a}$$

$$pt + x_0 = \varepsilon t_1 \tag{2b}$$

ここに，Tは個人の利用可能時間，t_1は労働時間，pは単位時間当たりの滞在費用（以下，限界滞在費用と呼ぶ）である．full-income仮説に基づけば式(2a),(2b)はfull-income制約に統合できる．

$$(p+\varepsilon)t + x_0 + \varepsilon t_0 = \varepsilon T \tag{3}$$

なお，εTはfull-incomeを表す．この時，個人の滞在時間決定問題は次式のようになる．

$$\max_{t,x_0,t_0} \{u(\phi(t,\boldsymbol{\xi})) + x_0 + \varepsilon t_0\}$$
$$\text{s.t.} \ (p+\varepsilon)t + x_0 + \varepsilon t_0 = \varepsilon T$$
$$t \geq 0, \ t_0 \geq 0, \ x_0 \geq 0 \tag{4}$$

内点解を仮定すれば，最適化条件は式(2a),(2b)，及び

$$\frac{\partial u(\phi(t,\boldsymbol{\xi}))}{\partial t} = \iota(p+\varepsilon) \tag{5a}$$
$$\iota = 1 \tag{5b}$$

で表される．ここで，ιは式(3)に対応するラグランジュ乗数である．式(5b)を式(5a)に代入することにより次式のような最適性条件を得る．

$$\frac{\partial u(\phi(t,\boldsymbol{\xi}))}{\partial t} - p = \varepsilon \tag{6}$$

すなわち，活動主体は目的地での滞在から得られる限界効用から限界費用を差し引いた値（以下，実効限界効用と呼ぶ）が，時間の機会費用に等しくなるように滞在時間を決定する．式(6)において，$\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon$は外生的パラメータであり，滞在時間に関する需要関数はこれらパラメータの関数として求まる．このことは，準線形の効用関数を用いたことの理論的帰結であるが，需要関数が計測が困難な所得を変数として含まないため，モデル推計が著しく容易になる．滞在時間の需要関数の一般形を次式のように表現しよう．

$$t^* = D(\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon) \tag{7}$$

一方，一般化合成財の消費量は次式で表現される．

$$x_0 + \varepsilon t_0 = \varepsilon T - (\varepsilon + p)D(\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon) \tag{8}$$

目的地に滞在する$(t > 0)$場合の間接効用関数は

$$V^0(\boldsymbol{\xi}, T, p, \varepsilon) = u(\phi(D(\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon), \boldsymbol{\xi})) + \varepsilon T$$
$$-(\varepsilon + p)D(\boldsymbol{\xi}, p, \varepsilon) \tag{9}$$

と表現される．一方，$t = 0$の場合，間接効用関数は

$$V^1(\boldsymbol{\xi}, T, p, \varepsilon) = \varepsilon T \tag{10}$$

となる．εを単位時間当たりの賃金率と考えれば，間接効用関数はfull-income (εT) に一致する．以上では，時間の機会費用εを外生変数として基本モデルを定式化した．しかし，εは分析者が観測できない変数であり，個人によっても異なった値をとる確率変数である．εがある確率分布に従うと考えれば，基本モデルから導出される滞在時間はある確率分布に従う．

（3）若干の留保事項

基本モデルでは，予算制約式に目的地までの交通時間ω，目的地に滞在するための固定費用cが含まれていない．交通時間，固定費用が存在する場合には，効用最大化問題は連続－離散型効用最大化問題

$$\max_{t,x_0,t_0,\delta}\{u(\phi(t,\boldsymbol{\xi}))\cdot\delta+x_0+\varepsilon t_0\}$$
$$\text{s.t. } \{(\varepsilon+p)(t+\omega)\}+c\}\cdot\delta+x_0+\varepsilon t_0=\varepsilon T \quad (11)$$

として定式化される．ここに，δは目的地を訪問する場合$\delta=1$，そうでない時$\delta=0$となるダミー変数である．上式において$\delta=1$を仮定し，最適条件を求めれば式(5a),(5b)を得る．すなわち，目的地までの交通時間ω，訪問費用cは，基本的には活動主体の滞在時間決定に影響を及ぼさず，当該目的地へ訪問するか否かを決定する際にのみ影響を及ぼすことになる．このことは，準線形効用関数を用いたことの論理的帰結である．目的地へ訪問行動に時間制約があったり，他の活動との時間配分に競合がある場合には，以上の結論は成立しない．複数活動に対する時間配分行動を同時にとりあげたような問題設定[11)]も可能であるが，モデルが過度に複雑になるという問題が生じる．ここで提案するモデルは，多くの期間モデルと同様に，個人が時間制約を考慮せずに滞在時間を決定するような局面に焦点を絞っていることを断っておく．個人が目的地に訪問するか否かは$\delta=1,\delta=0$の場合の間接効用関数$V(T,\varepsilon:\delta=1)$，$V(T,\varepsilon:\delta=0)$の大小関係に依存する．すなわち，$V(T,\varepsilon:\delta=1)\geq V(T,\varepsilon:\delta=0)$が成立する場合に目的地に滞在することになる．さらに，複数の目的地の選択モデルは目的地ごとに定義される間接効用関数の最大値を選択するモデルとして定式化できる．この場合，ある目的地へ滞在するか否かは，時間価値εだけでなく交通時間ω，固定費用cに依存する．したがって，滞在時間の分布は目的地に訪問するか否かという行動に影響を受ける．標準的な期間モデルでは，ある事象が発生したことを与件として，その事象が持続する期間の確率モデルを表現している．固定費用，交通時間を考慮にいれたような滞在時間モデルを考える場合，事象（目的地訪問）の生起確率を明示的に考慮にいれたアプローチが必要となる．そのためには，連続－離散型効用最大化問題(11)の枠組みを用いた滞在時間モデルが必要となる．本研究は伝統的な期間モデルを用いた滞在時間モデルを効用最大化問題から導出することを目的としており，（複数の）目的地選択モデルへの拡張は今後の課題としておく．

4．滞在時間モデルの定式化

（1）期間モデル

本節ではランダム限界効用モデルを用いて期間モデルを導出する．期間モデルは状態が変化するまでの時間（生存時間）の分布を生存関数$S(t)$とハザード関数$h(t)$を用いて表現する．生存関数はある確率変数τがある時点tを越える確率を意味している．いま，$\tau\leq t$となる確率を示す分布関数を$G(t)$，確率密度関数を$g(t)$とすれば，生存関数は次式のように定義される[15)]．

$$\begin{aligned}S(t)&=Prob\{\tau\geq t\}=1-Prob\{\tau\leq t\}\\&=1-G(t)\end{aligned} \quad (12)$$

一方，ハザード関数は$\tau\geq t$となる条件下で次の瞬間に状態が変化する確率を表す．つまり，時刻tまで生存し続けたものが時刻$t+\Delta t$までに状態が変化するという条件付き確率で定義される．

$$\begin{aligned}h(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Prob(t\leq\tau\leq t+\Delta t|\tau\geq t)}{\Delta t}\\&=\frac{g(t)}{S(t)}\end{aligned} \quad (13)$$

ハザード関数と生存関数の間には次式が成り立つ．

$$S(t)=\exp\{-\int_0^t h(\tau)d\tau\} \quad (14)$$

（2）滞在時間モデル

基本モデルの枠組みの中で期間モデルを理論的に導出するとともに，目的地における滞在時間の確率分布を表現する滞在時間モデルを定式化する．議論の見通しをよくするために，ここでは限界滞在費用がゼロ$(p=0)$の場合をとりあげる．6．では，この仮定を緩め$p>0$となる場合をとりあげる．ある個人が目的地に滞在する時間は限界条件(6)により決定される．時間価値εが区間$(0,M)$上で定義されるある確率分布に従って分布する考え，限界条件を用いて滞在時間の確率分布を導出する．ここに，Mは十分大きな正数，もしくは無限大をとる．いま，目的地に到着した時点を$\tau=0$と表し，初期時点より時間tが経過した時点$\tau=t$における限界効用を次式により定義する．

$$v(t)=\left.\frac{\partial u(\phi(\tau,\boldsymbol{\xi}))}{\partial\tau}\right|_{\tau=t} \quad (15)$$

時点$t(>0)$において，個人の限界効用$v(t)$が時間の機会費用εより大きい限り，この個人は目的地に滞在している．つぎに，滞在時間に関する限界効用の上限値を

定義する．滞在時間の限界効用は滞在時間とともに減少するため，限界効用の上限値$\bar{\mu}$は

$$\bar{\mu} = \left.\frac{\partial u(\phi(\tau,\xi))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} \tag{16}$$

で定義される．限界効用の上限値が有限の値を持つか，あるいは無限大に発散するかは効用関数の形式に依存している．一方，限界効用に上限値が存在する場合，$\varepsilon, \bar{\mu}$の間に以下の関係が生じる．

$$\begin{array}{ll} \text{Case 1} & 0 < \varepsilon \leq \bar{\mu} \\ \text{Case 2} & \bar{\mu} < \varepsilon \end{array}$$

Case 1 の場合，時間価値が滞在における限界効用の上限値より小さく，任意の$\varepsilon \in (0, \bar{\mu}]$に対して限界条件

$$v(t^*) = \varepsilon \tag{17}$$

を満足するような滞在時間t^*が存在する．すなわち，限界効用関数(6)より，滞在時間は次式で表される．

$$t^* = v^{-1}(\varepsilon) \tag{18}$$

一方，Case 2 の場合には時間価値εが滞在時間の限界効用より常に大きくなり，滞在時間は$t^* = 0$となる．すなわち，この個人は目的地に滞在しない．前述したように，限界効用が上限値を持つか，あるいは無限大に発散するかは，部分効用関数の形式に依存する．5．では，具体的に効用関数を特定化し滞在時間モデルを導出するが，1）限界効用に上限値が存在する 2）無限大に発散する，という性質を持つ2種類の効用関数を想定することとする．

確率変数εが確率密度関数$r(\varepsilon)$に従って分布していると仮定しよう．個人が目的地に滞在する確率P_sは

$$\begin{aligned} P_s &= 1 - Prob\{t = 0\} \\ &= \int_0^{\bar{\mu}} r(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \tag{19}$$

と表される．ここで，目的地に滞在している個人の時間価値εの条件付き確率分布を密度関数

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{P_s} r(\varepsilon) \tag{20}$$

で定義する．時間価値に関する条件付き密度関数$f(\varepsilon)$の定義域は$(0, \bar{\mu}]$である．ある客が，目的地に時点tまで滞在し，かつその時点で限界効用が時間の機会費用より大きくなる条件付き確率$S(t)$は次式で定義される．

$$\begin{aligned} S(t) &= Prob\{v(t) \geq \varepsilon\} \\ &= F(v(t)) = \int_0^{v(t)} f(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \tag{21}$$

いま，効用関数に関する条件$\partial^2 u/\partial t^2 < 0$より，限界効用関数$v(t)$は$t$に関して単調に減少する．時点$t$において限界効用が時間価値よりも大きい場合，当該の客は「少なくとも時点tまでは当該地に滞在している」ことを意味する．したがって，条件付き確率$S(t)$は個人の滞在時間τがtより大きい確率，すなわち生存確率に他ならない．ここで，生存関数$S(t)$がtに関して単調減少であることに留意しよう．いま，時間軸上の微少期間$[t, t+\Delta t]$を考える．この期間中に滞在を終了する確率$g(t)\Delta t$は

$$g(t)\Delta t = S(t) - S(t + \Delta t) \tag{22}$$

により表される．上式の両辺をΔtで除し，$\Delta t \to 0$の極限をとれば，滞在時間tで滞在を終了する確率密度を得ることができる．

$$g(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{t - (t + \Delta t)} \tag{23}$$

時刻tまでに滞在が終了する確率を表す確率関数$G(t) = Prob\{\tau \leq t\}$は次式で表現される．

$$G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \tag{24}$$

以下，確率分布関数$G(t)$を滞在時間終了分布関数と呼ぶ．この時，定義より滞在時間終了分布関数と生存関数の間には次式が成立する．

$$G(t) = Prob\{v(t) \leq \varepsilon\} = 1 - S(t) \tag{25}$$

上式に対して変数変換$v(t) = \varepsilon$を考えよう．この時，

$$\begin{aligned} &G(t + \Delta t) - G(t) \\ &\quad = 1 - S(t + \Delta t) - \{1 - S(t)\} \\ &\quad = S(t) - S(t + \Delta t) \\ &\quad = F(v(t)) - F(v(t + \Delta t)) \end{aligned} \tag{26}$$

両辺をΔtで割れば次式が成立する．

$$\begin{aligned} &\frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} \\ &= -\frac{F(v(t)) - F(v(t + \Delta t))}{v(t) - v(t + \Delta t)} \frac{v(t) - v(t + \Delta t)}{-\Delta t} \end{aligned} \tag{27}$$

ここで，$\Delta \to 0$の極限をとれば

$$g(t) = -f(v(t)) \frac{dv(t)}{dt} \tag{28}$$

が成立する．モデルの推計上の便宜性やデータの入手可能性を考慮すれば，上記の無条件確率密度関数を用いるよりもハザード関数を用いた方が望ましい．ハザード関数は定義より次式のように表現できる．

$$h(t) = \frac{g(t)}{S(t)} \tag{29}$$

以上のように，個人の効用最大化行動に基づいてハザード関数を導出できる．残念ながら，ハザード関数を解析的に導出することは一般的には極めて困難であるが，効用関数や時間価値分布をある特定の形式に特定化すればハザード関数を解析的に導出できる場合もある．特に，時間価値分布として一様分布，指数分布を採用すれば，既存の期間モデルと類似のハザード関数を導出できる．時間価値分布として一様分布，指数分布を想定することは特殊な仮定であると言わざるを得ない．しかし，時間価値分布として通常用いられる正規分布，対数正規分布を用いた場合，ハザード関数を解析的に求

めることは不可能である．換言すれば，これまでに提案された標準的な期間モデルは，時間価値分布に対して特殊な仮定を置いていることを意味する．したがって，この種の期間モデルの価値は，実用モデルとして現象をどこまで近似しうるかという点に求められよう．以下では，効用関数，時間価値分布を特定化し，滞在時間モデルを具体的に導出するとともに，滞在時間モデルが有している行動特性について考察する．

5．滞在時間モデルの導出

（1）効用関数の特定化

効用関数(1)を具体的に特定化し滞在時間分布を導出する．ここでは，限界滞在費用がゼロ($p=0$)の場合を考える．$p>0$の場合の議論は6．で行う．部分効用関数として種々考えられるが，限界効用関数の性質には効用関数の形状（曲率）が重要な影響を及ぼす．従来より，効用関数の曲率を表す尺度として，次式で定義されるような絶対的危険回避度，相対的危険回避度が提案されている[23]．

$$-\frac{\partial^2 u_a(z)/\partial z^2}{\partial u_a/\partial z}=\alpha \tag{30a}$$

$$-\frac{\partial^2 u_r(z)z/\partial z^2}{\partial u_r/\partial z}=\beta \tag{30b}$$

ここでは，効用関数の強凹性を保証するために，$\alpha>0, 1>\beta>0$を仮定する．以上の尺度(30)は，不確実性下での個人行動に関する研究の中で考案された経緯より，通常危険回避度と呼ばれる．ここでは確定的環境の下での個人の時間配分行動を考察の対象としており，危険回避度という呼び方はふさわしくない．以下では，経済学の慣例に従って危険回避度という言葉を用いるが，それはあくまでも式(30)に示すような効用関数の曲率に関する性質を表現していることを断っておく．このような危険回避度が一定となる部分効用関数として以下の2種類を考えよう．

$$u_a(z)=\frac{\mu}{\alpha}\{1-\exp(-\alpha\cdot z)\}\quad(\text{ケース}1) \tag{31a}$$

$$u_r(z)=\frac{\mu}{1-\beta}z^{1-\beta}\quad(\text{ケース}2) \tag{31b}$$

前述したように，家計の滞在時間決定行動を効用最大化仮説と整合のとれた形で説明しようとすれば，滞在時間の限界効用が滞在時間とともに低減していく必要がある．ここで，特定化した部分効用関数は，このような性質を満足する効用関数の中でもっとも簡単な形式を有している[23]．いま，時間価値εの確率分布を規格化するために，一般性を損なうことなく$\mu=1$を仮定しよう．つぎに，準線形家計生産関数を導入する．

$$z=\phi(t,\boldsymbol{\xi})=\psi(\boldsymbol{\xi})t \tag{32}$$

ここに，$\psi(\boldsymbol{\xi})$は目的地の魅力を表す関数である．この時，部分効用関数(31a),(31b)は以下の条件を満足する．

$$u_a(\phi(t,\boldsymbol{\xi}))=\begin{cases}0 & \text{when}\quad t=0\\ \frac{1}{\alpha} & \text{when}\quad t\to\infty\end{cases} \tag{33a}$$

$$u_r(\phi(t,\boldsymbol{\xi}))=\begin{cases}0 & \text{when}\quad t=0\\ \infty & \text{when}\quad t\to\infty\end{cases} \tag{33b}$$

また，$p=0$を仮定した時の限界効用関数は

$$v_a(t)=\psi(\boldsymbol{\xi})\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \tag{34a}$$

$$v_r(t)=\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^{1-\beta}t^{-\beta} \tag{34b}$$

となる．ここで，$v_a(t), v_r(t)$はそれぞれ効用関数(31a),(31b)の限界効用関数を表す．$\alpha>0, 1>\beta>0$に留意すれば，限界効用関数は以下の性質を持つ．

$$v_a(t)=\begin{cases}\psi(\boldsymbol{\xi}) & \text{when}\quad t=0\\ 0 & \text{when}\quad t\to\infty\end{cases} \tag{35a}$$

$$v_r(t)=\begin{cases}\infty & \text{when}\quad t\to 0\\ 0 & \text{when}\quad t\to\infty\end{cases} \tag{35b}$$

すなわち，限界効用関数の値がとり得る範囲は，1）効用関数(31a)の場合は$(0,\psi(\boldsymbol{\xi})]$，2）効用関数(31b)の場合は$(0,\infty)$となる．効用関数(31a)の場合，時間価値が$\psi(\boldsymbol{\xi})$より大きくなれば$t=0$となる．一方，効用関数(31b)の場合は，任意の$\varepsilon$に対して$t>0$となり，滞在時間は必ず正となる．現実には，$t=0$の場合，あるいは滞在時間が非常に短い場合，個人は当該目的地に訪問しないだろう．このような目的地の訪問の有無に関する選択は，3．(3）で言及したように，交通時間・費用や複数目的地の同時選択を考慮するようにモデルを拡張することにより表現することが可能となる．ここでは，あくまでも期間モデルが採用している仮定の下で議論を進めることとする．

ここで，上記の範囲を満足する任意のεに対して限界条件(17)を満足する滞在時間t^*が存在することに着目しよう．限界効用関数(34a),(34b)をそれぞれtに関して明示的に解くことにより，滞在時間は

$$t_a^*=\frac{1}{\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})}\ln\left(\frac{\psi(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon}\right) \tag{36a}$$

$$t_r^*=\left(\frac{\psi(\boldsymbol{\xi})^{1-\beta}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{36b}$$

と表せる．最後に，間接効用関数を導出しておく．まず，絶対危険回避度一定の効用関数の場合，$\varepsilon>\psi(\boldsymbol{\xi})$の場合には滞在時間は$t^*=0$となる．この個人は目的地に滞在しない．間接効用関数は次式で表される．

$$V_a^0(\boldsymbol{\xi},T,\varepsilon)=\varepsilon T+\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\varepsilon}{\psi(\boldsymbol{\xi})}\right)-\frac{\varepsilon}{\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})}\ln\left(\frac{\psi(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon}\right)\quad(\psi(\boldsymbol{\xi})\geq\varepsilon>0\text{の時})$$

$$V_a^1(\boldsymbol{\xi},T,\varepsilon)=\varepsilon T\qquad(\varepsilon>\psi(\boldsymbol{\xi})\text{の時}) \tag{37}$$

$\varepsilon > \psi(\boldsymbol{\xi})$ の場合，間接効用値は full-income に一致する．一方，相対的危険回避度一定の効用関数の場合，間接効用関数は次式で表される．

$$V_r(\boldsymbol{\xi}, T, \varepsilon) = \varepsilon T + \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{\psi(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \quad (38)$$

（2）滞在時間モデル（絶対的危険回避度一定の場合）

時間価値εが確率密度関数$r(\varepsilon)$に従って分布していると仮定する．客の時間価値に関する条件付き確率密度関数を$f(\varepsilon)$で表す．ここで，変数変換$v_a(t) = \varepsilon$を用いて時刻tに滞在が終了する条件付き確率密度関数を導出しよう．限界効用関数 (34a) を用いて$dv_a(t)/dt$を評価すれば

$$\frac{dv_a(t)}{dt} = -\alpha\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^2 \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \quad (39)$$

を得る．したがって，確率密度関数は

$$g(t) = \alpha f(v(t))\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^2 \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \quad (40)$$

となる．以下，時間価値が一様分布，および指数分布に従って分布する場合をとりあげ，滞在時間分布を具体的に導出する．

a）一様分布の場合

時間価値εが区間$(0, M]$ $(\infty > M \geq \psi(\boldsymbol{\xi}))$において一様分布

$$r(\varepsilon) = \frac{1}{M} \quad (41)$$

に従うと仮定する．個人が目的地を訪問する確率（以下，滞在確率と呼ぶ）は

$$\begin{aligned} P_s &= Prob\{0 < \varepsilon \leq \psi(\boldsymbol{\xi})\} \\ &= \frac{\psi(\boldsymbol{\xi})}{M} \end{aligned} \quad (42)$$

で表される．式 (40) より滞在時間の条件付き確率密度関数を求めれば

$$g(t) = \alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \quad (43)$$

となる．また，条件付き滞在時間終了分布は

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t \alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\tau\}d\tau \\ &= 1 - \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \end{aligned} \quad (44)$$

と表せる．また，生存関数$S(t)$は定義より

$$S(t) = \exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \quad (45)$$

となる．ハザード関数は

$$h(t|\boldsymbol{\xi}) = \alpha\psi(\boldsymbol{\xi}) \quad (46)$$

と表せる．時間価値が一様分布に従う場合，滞在時間終了分布は平均$\{\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\}^{-1}$の指数分布に従う．平均滞在時間$ET_a$は次式で表せる．

$$ET_a = \frac{1}{\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})} \quad (47)$$

b）指数分布の場合

時間価値εが区間$(0, \infty)$において平均λ^{-1}の指数分布に従って分布していると考える．

$$r(\varepsilon) = \lambda\exp(-\lambda\varepsilon) \quad (48)$$

当該個人の滞在確率は次式で定義される．

$$\begin{aligned} P_s &= Prob\{0 < \varepsilon \leq \psi(\boldsymbol{\xi})\} \\ &= 1 - \theta \end{aligned} \quad (49)$$

ただし，$\theta = \exp\{-\lambda\psi(\boldsymbol{\xi})\}$ である．式 (40) より滞在時間の条件付き確率密度関数を求めれば

$$g(t) = \frac{\kappa\zeta\exp(-\zeta t)\exp\{-\kappa\exp(-\zeta t)\}}{1-\theta} \quad (50)$$

となる．ただし，$\kappa = \lambda\psi(\boldsymbol{\xi}), \zeta = \alpha\psi(\boldsymbol{\xi})$ である．式 (50) がガンベル分布の密度関数であることに留意すれば，条件付き滞在時間終了分布は次式で表せる．

$$G(t) = \frac{1}{(1-\theta)}\{\exp[-\kappa\exp(-\zeta t)] - \theta\} \quad (51)$$

すなわち，滞在時間終了分布は，客が滞在しない確率 ($t = 0$となる確率)θを用いて補正したガンベル分布で表現できる．また，生存関数$S(t)$は定義より

$$S(t) = \frac{1 - \exp\{-\kappa\exp(-\zeta t)\}}{1-\theta} \quad (52)$$

となる．ハザード関数は

$$h(t|\boldsymbol{\xi}) = \frac{\kappa\zeta\exp(-\zeta t)\exp\{-\kappa\exp(-\zeta t)\}}{1 - \exp\{-\kappa\exp(-\zeta t)\}} \quad (53)$$

と表せる．すなわち，絶対的危険回避型効用関数の下で時間価値が指数分布に従う時，滞在時間は修正されたガンベル分布に従って分布することが理解できる．平均滞在時間は次式で定義される．

$$ET_a = \int_0^\infty \tau\frac{\kappa\zeta\exp(-\zeta\tau)\exp\{-\kappa\exp(-\zeta\tau)\}}{1-\theta}d\tau \quad (54)$$

（4）滞在時間モデル（相対的危険回避度一定の場合）

相対的危険回避度一定型の限界効用関数 (34b) を用いて$dv_r(t)/dt$を評価すれば

$$\frac{dv_r(t)}{dt} = -\beta\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^{1-\beta}t^{-\beta-1} \quad (55)$$

を得る．確率密度関数は次式のようになる．

$$g(t) = \beta f(v(t))\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^{1-\beta}t^{-\beta-1} \quad (56)$$

a）一様分布の場合

時間価値が区間$(0, M]$で一様分布していると考える．一方，相対危険回避度一定型の効用関数の場合，限界効用関数は$(0, \infty)$の間の値をとりうる．限界効用関数の値が$v(t) > M$となる間は個人が滞在を終了しない．また，客は目的地に必ず滞在することになる．すなわち，本ケースはある一定の時間は目的地に滞在し，そ

の後帰宅を始める行動を表現している．いま，目的地に滞在する最小時間を

$$v_r(t^{**}) = M \tag{57}$$

で定義する．以下，t^{**}を最小滞在時間と呼ぶ．式(57)をt^{**}に関して明示的に解くことにより

$$t_r^{**} = \left(\frac{\psi(\xi)^{1-\beta}}{M}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{58}$$

を得る．この時，滞在時間の確率密度関数は

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t^{**} > t \geq 0) \\ \frac{\beta}{M}\{\psi(\xi)\}^{1-\beta}t^{-\beta-1} & (t \geq t^{**}) \end{cases} \tag{59}$$

で表される．滞在時間終了分布は

$$G(t) = \begin{cases} 0 & (t^{**} > t \geq 0) \\ 1 - \frac{1}{M}\{\psi(\xi)\}^{1-\beta}t^{-\beta} & (t \geq t^{**}) \end{cases} \tag{60}$$

で表される．また，生存関数は

$$S(t) = \begin{cases} 1 & (t^{**} > t \geq 0) \\ \frac{1}{M}\{\psi(\xi)\}^{1-\beta}t^{-\beta} & (t \geq t^{**}) \end{cases} \tag{61}$$

さらに，$t > t^{**}$においてハザード関数は

$$h(t|\xi) = \frac{\beta}{t} \tag{62}$$

となる．なお，平均滞在時間は発散し$ET_r = \infty$となる．のちに**表－1** (b) に示すように，限界滞在費用が存在する場合には平均滞在時間は有限の値をとる．したがって，本ケースのモデルは，限界滞在費用が存在する場合にのみ実用的な意味を持ちうると考える．

b）指数分布の場合

いま，時間価値εが区間$(0,\infty)$において平均λ^{-1}の指数分布に従って分布していると考える．

$$f(\varepsilon) = \lambda\exp(-\lambda\varepsilon) \tag{63}$$

(56) より滞在時間の確率密度関数を求めれば

$$g(t) = \lambda\beta\{\psi(\xi)\}^{1-\beta}t^{-\beta-1}\exp\left\{-\lambda[\psi(\xi)]^{1-\beta}t^{-\beta}\right\} \tag{64}$$

となる．また，若干の計算により条件付き滞在時間終了分布は次式のように表せる．

$$G(t) = \exp\{-\lambda\left(\psi(\xi)\right)^{1-\beta}t^{-\beta}\} \tag{65}$$

また，生存関数$S(t)$は定義より

$$S(t) = 1 - \exp\{-\lambda\psi(\xi)^{1-\beta}t^{-\beta}\} \tag{66}$$

となる．ハザード関数は次式のようになる．

$$h(t|\xi) = \frac{\lambda\beta\psi(\xi)^{1-\beta}t^{-\beta-1}\exp\{-\lambda\psi(\xi)^{1-\beta}t^{-\beta}\}}{1-\exp\{-\lambda\psi(\xi)^{1-\beta}t^{-\beta}\}} \tag{67}$$

6．モデルの若干の拡張

（1）滞在時間費用の導入

以上では，滞在時間あたりの限界滞在費用がゼロ$(p=0)$の場合を想定して，滞在時間モデルを導出した．現実の計画問題では，駐車料金等に代表されるような料金政策を通じて個人の滞在時間を制御する場合が存在する．本節では滞在料金を明示的に考慮した滞在時間モデルについて考察する．限界滞在費用を考慮した時の実効限界効用関数を次式のように定義する．

$$w_a(t) = v_a(t) - p \tag{68a}$$

$$w_r(t) = v_r(t) - p \tag{68b}$$

この実効限界効用関数は以下のような特徴を持つ．

$$w_a(t) = \begin{cases} \psi(\xi) - p & \text{when} \quad t = 0 \\ -p & \text{when} \quad t \to \infty \end{cases} \tag{69a}$$

$$w_r(t) = \begin{cases} \infty & \text{when} \quad t \to 0 \\ -p & \text{when} \quad t \to \infty \end{cases} \tag{69b}$$

いま，個人が目的地に滞在するのは$w(t) \geq \varepsilon$の場合に限られることに着目しよう．一方，仮定より時間価値は$(0,M)$の間の値をとる．$w(t) \in [-p,0]$が成立する場合には，彼の限界効用は時間の機会費用よりも小さくなり客は目的地に滞在しない．ここで，

$$v_a(t_a^{***}) - p = 0 \tag{70a}$$

$$v_r(t_r^{***}) - p = 0 \tag{70b}$$

が成立するような滞在時間をそれぞれt_a^{***}, t_r^{***}と表し，この値を臨界滞在時間と呼ぶ．この値は時間価値がゼロの個人が目的地に滞在する時間を表しており，換言すれば滞在時間の理論的な上限値を表している．

$$t_a^{***} = \frac{1}{\alpha\psi(\xi)}\left\{\ln\left(\frac{\psi(\xi)}{p}\right)\right\} \tag{71a}$$

$$t_r^{***} = \left(\frac{\psi(\xi)^{1-\beta}}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{71b}$$

また，間接効用関数を求めれば以下のようになる．

$$V_a^0(\xi,T,\varepsilon) = \varepsilon T + \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\varepsilon+p}{\psi(\xi)}\right) - \frac{\varepsilon+p}{\alpha\psi(\xi)}\ln\left(\frac{\psi(\xi)}{\varepsilon+p}\right) \quad (\psi(\xi) - p \geq \varepsilon > 0)$$

$$V_a^1(\xi,T,\varepsilon) = \varepsilon T \qquad (\varepsilon > \psi(\xi) - p) \tag{72a}$$

$$V_r(\xi,T,\varepsilon) = \varepsilon T + \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{\psi(\xi)}{\varepsilon+p}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \tag{72b}$$

限界滞在費用が存在する場合の滞在時間終了分布，生存関数，ハザード関数を導出しよう．時間価値εが条件付き密度関数$f(\varepsilon)$に従うと考える．変数変換$v(t) - p = \varepsilon$を行えば滞在時間の確率密度関数は

$$g(t) = -\frac{f(v(t)-p)}{\eta}\frac{dv(t)}{dt} \tag{73}$$

と表せる．ここで，確率密度関数(73)の定義域は(t^{**}, t^{***})である．t^{**}, t^{***}はそれぞれ滞在時間の下限値，上限値であり**表－1**に示すとおりである．ηは定義域を限定するために必要な補正パラメータであり

$$\eta = \int_{t^{**}}^{t^{***}} -f(v(t)-p)\frac{dv(t)}{dt}dt \tag{74}$$

表－1 (a)　滞在時間分布モデル ($u_a(z)$ の時)

$r(\varepsilon)$	一様分布		指数分布	
p	$p=0$	$p>0$	$p=0$	$p>0$
P_s	$\frac{\psi}{M}$	$\frac{\psi-p}{M}$	$1-\theta$	$1-\sigma$
$G(t)$	$1-\Gamma(t)$	$\frac{1-\Gamma(t)}{1-\gamma(p)}$	$\frac{\Lambda(t)-\theta}{1-\theta}$	$\frac{\upsilon\Lambda(t)-\sigma}{1-\sigma}$
$S(t)$	$\Gamma(t)$	$\frac{\Gamma(t)-\gamma(p)}{1-\gamma(p)}$	$\frac{1-\Lambda(t)}{1-\theta}$	$\frac{1-\upsilon\Lambda(t)}{1-\sigma}$
$h(t\|\xi)$	$\alpha\psi$	$\frac{\alpha\psi\Gamma(t)}{\Gamma(t)-\gamma(p)}$	$\frac{\kappa\zeta\Gamma(t)\Lambda(t)}{1-\Lambda(t)}$	$\frac{\kappa\zeta\upsilon\Gamma(t)\Lambda(t)}{1-\upsilon\Lambda(t)}$
t^{**}	0	0	0	0
t^{***}	∞	$\frac{\ln(\psi/p)}{\alpha\psi}$	∞	$\frac{\ln(\psi/p)}{\alpha\psi}$
ET_a	$\frac{1}{\alpha\psi}$	Q_1	Q_2	Q_3

注) $\psi=\psi(\xi)$, $\theta=\exp(-\lambda\psi)$, $\gamma(p)=p/\psi$, $\Gamma(t)=\exp(-\alpha\psi t)$, $\Lambda(t)=\exp\{-\kappa\exp(-\alpha\psi t)\}$, $\sigma=\exp\{-\lambda(\psi-p)\}$, $\upsilon=\exp(\lambda p)$, $Q_1=\{1-[1+\ln(\psi/p)]p/\psi\}/\{\alpha(\psi-p)\}$, $Q_2=\kappa\zeta/(1-\theta)\int_0^\infty\tau\Gamma(\tau)\Lambda(\tau)d\tau$, $Q_3=\kappa\zeta\upsilon/(1-\sigma)\cdot\int_0^{t^{***}}\tau\Gamma(\tau)\Lambda(\tau)d\tau$.

で表される．5. と同様の方法で，滞在時間終了分布，生存関数，ハザード関数を導出できる．

ここでは，紙面の都合上，絶対危険回避度一定の効用関数を用いて時間価値が一様分布に従う場合のみを例にとり滞在時間分布を導出してみよう．時間価値εが区間$(0,M]$ $(M\geq\bar{\mu})$において一様分布に従って分布している時，個人が目的地を訪問する確率（滞在確率）は

$$P_s=\frac{\psi(\boldsymbol{\xi})-p}{M} \tag{75}$$

で表される．いま，区間$(0,t_a^{***})$上で定義される滞在時間の条件付き確率密度関数は

$$g(t)=\frac{\alpha}{\psi(\boldsymbol{\xi})-p}\{\psi(\boldsymbol{\xi})\}^2\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\} \tag{76}$$

となる．また，条件付き滞在時間終了分布は

$$G(t)=\frac{1-\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\}}{1-\gamma(p)} \tag{77}$$

と表せる．ただし，$\gamma(p)=p/\psi(\boldsymbol{\xi})$である．生存関数$S(t)$は定義より

$$S(t)=\frac{\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\}-\gamma(p)}{1-\gamma(p)} \tag{78}$$

となる．ハザード関数は

$$h(t|\boldsymbol{\xi})=\frac{\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\}}{\exp\{-\alpha\psi(\boldsymbol{\xi})t\}-\gamma(p)} \tag{79}$$

と表せる．同様に，他のケースにおける滞在時間終了分布，生存関数，ハザード関数を導出することができる．紙面の都合上，ここでは結果のみを**表－1** (a) 及び**表－1** (b) に示す．

表－1 に示すように，限界滞在費用が存在する場合，滞在時間が有限の値で切断されるため単純な期間モデルを適用できない．このことは直観的にも理解できよう．すなわち，滞在時間が十分に長くなり，目的地に滞在する限界効用が限界滞在費用よりも小さくなれば滞在を終了するだろう．限界滞在費用がゼロの場合は，時間価値が極めて低い（例えば$\varepsilon=0$）個人は極めて長期にわたって目的地に滞在する可能性がある．しかし，限界滞在費用が課徴された場合，単位時間あたり常に滞在料金pを支払う必要が生じるため，無限時間滞在するような人間は存在しない．厳密に言えば，限界滞在費用が存在する場合，滞在時間分布は単純な期間モデルで表現することはできず，本節で提案したような修正モデルが必要となる．むしろ，従来用いられてきた期間モデルは滞在時間分布を表現するための近似モデルであると位置づけることができる．しかし，その推計にあたっては本研究で言及したような切断バイアスの問題に配慮する必要がある．この種の問題は本稿の域を越えるので今後の課題としたい．

（２）厚生水準の評価

個人の滞在時間決定行動を内生化した期間モデルを開発することの意義は目的地の魅力の変化や限界滞在費用が個人の滞在時間に及ぼす影響を経済理論と整合がとれた形で分析することが可能になる点にある．それと同時に，これら政策の効果を個人の厚生水準と関連づけて分析できる点にある．本節では，滞在行動により達成される厚生水準を評価するための指標を導出する．絶対危険回避度一定の効用関数の場合，目的地に滞在した場合，あるいは訪問をとりやめた場合の厚生水準は，それぞれ間接効用関数 (37) を用いて$V_a^0(\boldsymbol{\xi},T,\varepsilon),V_a^1(\boldsymbol{\xi},T,\varepsilon)$と表せる．ここで，時間価値は分析者には観測できない確率変数であり，その値が確率密度関数$r(\varepsilon)$に従って分布すると考えよう．ここで，εの定義域をΞと表す．この時，間接効用の期待値 (EV) は次式で定義される．

$$EV=\int_{\{\varepsilon\leq\varepsilon^*|\varepsilon\in\Xi\}}V_a^0(\boldsymbol{\xi},T,\varepsilon)r(\varepsilon)d\varepsilon+\int_{\{\varepsilon\geq\varepsilon^*|\varepsilon\in\Xi\}}V_a^1(\boldsymbol{\xi},T,\varepsilon)r(\varepsilon)d\varepsilon \tag{80}$$

ここで，滞在時間を0にするような臨界的時間価値を

$$v(0)=\varepsilon^* \tag{81}$$

を満足するε^*として定義する．式 (34a) より，このような臨界的な時間価値は

$$\varepsilon^*=\psi(\boldsymbol{\xi})-p \tag{82}$$

で表される．一方，相対的危険回避度一定の効用関数の場合，間接効用関数は式 (38) で表される．この場合，間接効用の期待値は次式で表される．

$$EV=\int_0^\infty V_r(\boldsymbol{\xi},T,\varepsilon)r(\varepsilon)d\varepsilon \tag{83}$$

以上で定義された間接効用の期待値を用いることにより，滞在行動を通じて達成される個人の厚生水準を計測することができる．ここで，時間価値が一様分布に従う場合，間接効用の期待値を求めてみよう．$p=0$を仮定する．効用関数 (31a),(31b) を用いた場合の間接効

表一1 (b)　滞在時間分布モデル($u_r(z)$の時)

$r(\varepsilon)$	一様分布		指数分布	
p	$p=0$	$p>0$	$p=0$	$p>0$
P_s	1	1	1	1
$G(t)$	0 $1-\frac{R(t)}{M}$	0 $1-\frac{R(t)-p}{M}$	$\Theta(t)$	$\upsilon\Theta(t)$
$S(t)$	1 $\frac{R(t)}{M}$	1 $\frac{R(t)-p}{M}$	$1-\Theta(t)$	$1-\upsilon\Theta(t)$
$h(t\|\xi)$	0 $\frac{\beta}{t}$	0 $\frac{H(t)}{R(t)-p}$	$\frac{\lambda H(t)\Theta(t)}{1-\Theta(t)}$	$\frac{\upsilon\lambda H(t)\Theta(t)}{1-\upsilon\Theta(t)}$
t^{**}	$\left(\frac{\psi^{1-\beta}}{M}\right)^{\frac{1}{\beta}}$	$\left(\frac{\psi^{1-\beta}}{M+p}\right)^{\frac{1}{\beta}}$	0	0
t^{***}	∞	$\left(\frac{\psi^{1-\beta}}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}$	∞	$\left(\frac{\psi^{1-\beta}}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}$
ET_r	∞	Q_4	Q_5	Q_6

注) $\psi=\psi(\xi)$, $\Theta(t)=\exp\{-\lambda\psi^{1-\beta}t^{-\beta}\}$, $R(t)=\psi^{1-\beta}t^{-\beta}$, $H(t)=\beta\psi^{1-\beta}t^{-\beta-1}$, $\upsilon=\exp(\lambda p)$, $\rho \fallingdotseq (1-\beta)/\beta$, $Q_4=\psi^{\rho}/(\rho M)[p^{-\rho}-(p+M)^{-\rho}]$, $Q_5=\int_0^{\infty}\lambda\tau H(\tau)\Theta(\tau)d\tau$, $Q_6=\int_0^{t^{***}}\lambda\upsilon\tau H(\tau)\Theta(\tau)d\tau$. $G(t),S(t)$の上段は$t^{**}>t\geq 0$のケース，下段は$t\geq t^{**}$のケースを意味する．なお，パラメータβは$1>\beta>0.5$を満足しなければいけない．

用の期待値EV_a, EV_rは，それぞれ次式で定義される．

$$EV_a=\bar{T}+\frac{\psi}{4\alpha M}, \tag{84a}$$

$$EV_r=\bar{T}+\frac{\beta^2}{(1-\beta)(2\beta-1)}\left(\frac{\psi}{M}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \tag{84b}$$

ただし，$\bar{T}=MT/2$はfull-incomeの期待値である．期待値が収束するためには相対的危険回避パラメータは$1>\beta>0.5$を満足しなければならない．また，この条件が満足される場合には式(84b)の第2項が正となり，full incomeの期待値($\bar{T}$)より目的地に滞在した場合の間接効用の期待値の方が大きくなる．限界滞在費用が存在する場合も同様に以下のように表せる．

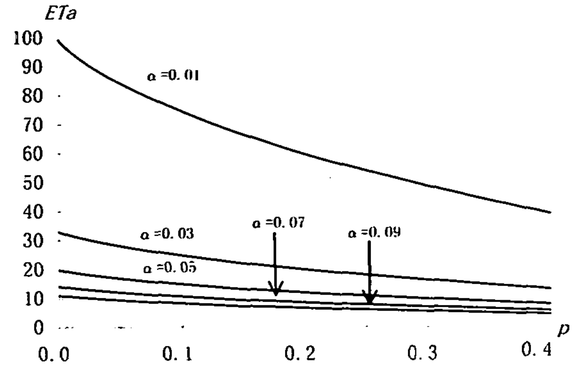
$$EV_a(p)=\bar{T}+\frac{1}{M}\left[\frac{(\psi-p)^2}{2\alpha\psi}+\frac{p^2(1+2\ln(\frac{\psi}{p}))}{4\alpha\psi}-\frac{\psi}{4\alpha}\right],$$

$$EV_r(p)=\bar{T}+B\frac{\beta^2}{(1-\beta)(2\beta-1)}\frac{\psi^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{M} \tag{85}$$

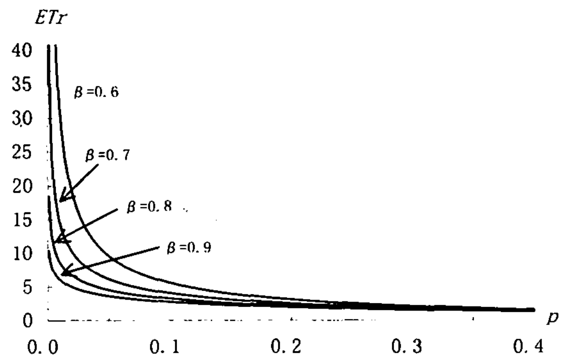
$B=(M+p)^{(2\beta-1)/\beta}-p^{(2\beta-1)/\beta}$である．時間価値が指数分布に従う場合，間接効用の期待値を解析的に求めるのは困難であり数値計算に頼らざるを得ない．

7．数値計算

本節では，簡単な数値計算を通じて，限界費用pと平均滞在時間ETおよび期待厚生水準EVの間の関係について分析する．もちろん，滞在時間モデルの有効性を検討するためには，具体的な事例を対象とした実証分析の蓄積が必要であることは論を待たない．本研究の目的が滞在時間モデルが効用最大化モデルより導出できることに主眼を置いており，実証分析に関しては今後の課題としたい．数値計算のために，パラメータ値として$M=1$(単位100円/分)$,\lambda=0.02, T=100.0, \psi(\xi)=1$を想定する．このことは，時間価値の上限値が6,000円/時間，時間価値の平均値3,000円/時間であり，時間価値の分布が一様分布，指数分布に従ういずれの場合においても，時間価値の平均値が3,000円/時間となることを想定している．効用関数が凹になり，間接効用の期待値が収束するためには，絶対危険回避度αと相対的危険回避度βの値がそれぞれ$0<\alpha, 0.5<\beta<1$を満たしている必要がある．

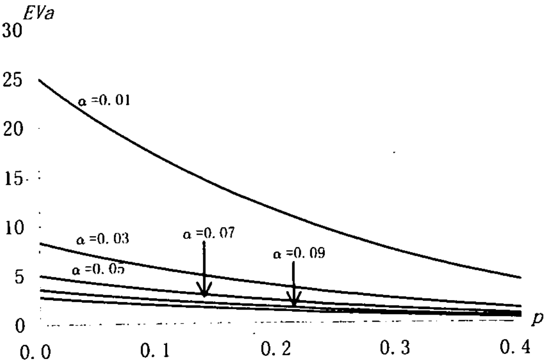


図一1 (a)　pとET_aの関係

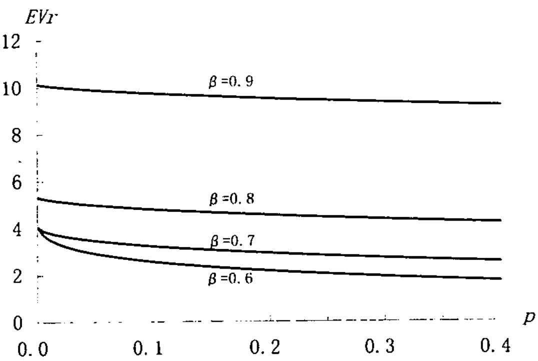


図一1 (b)　pとET_rの関係

紙面の都合上，ここでは計算結果の一部を紹介するにとどめる．図一1は限界費用が平均滞在時間に及ぼす影響の算定結果の一部である．(a)は利用者が絶対危険回避度一定の効用関数を持ち，時間価値分布が$0\leq\varepsilon<M$の値域をとる一様分布に従う場合，(b)は相対危険回避度βが一定の効用関数を用いた場合の計算結果を示している．危険回避度の値が異なることは，効用関数が異なることを意味する．したがって，危険回避度が異なる計算ケース間の直接的な比較はあまり意味をなさないが，危険回避度が平均滞在時間や期待効用値に及ぼ



図－2 (a)　p と EV_a の関係



図－2 (b)　p と EV_r の関係

す影響について傾向的な性質は読みとれる．**図－1**より，いずれのケースにおいても，限界費用が大きくなるにつれ平均滞在時間が短くなっている．絶対危険回避度一定の効用関数の場合，平均滞在時間は限界費用の増加に対して比較的穏やかに低減する．相対危険回避度一定の効用関数の場合には，限界費用が小さい場合平均滞在時間は長いものの，限界費用の増加につれて急速に短くなる．このような平均滞在時間と限界費用の関係は，限界効用関数の性質に大きく依存している．特に，相対危険回避度一定の効用関数はある最低限度の滞在に対する限界効用は大きな値をとるが，滞在時間が増加すれば急速に低減するという性質を持つ．したがって，**図－2** (b) に示すように，限界費用が大きくなると平均滞在時間はある最低水準に漸近していく．このようなモデルの挙動からも，効用関数の曲率（危険回避度）に対して異なった仮定を置くことにより，滞在時間の限界効用に関する異なった行動特性を表現することが可能になることが理解できる．**図－2**は限界費用の変化に伴う利用者の期待効用値の変化を示したものであり，ケース設定(a)(b)は**図－1**のそれに対応している．いずれも限界費用が上昇するにつれて厚生水準の期待値は低減しており，本モデルにより料金政策の変化が交通主体の効用水準に及ぼす影響を分析できることが理解できよう．

8．おわりに

本研究では個人の効用最大化行動に基づいた滞在時間分布モデルを提案した．その際，個人の滞在時間決定行動をランダム限界効用モデルを用いて表現するとともに，個人間での時間価値の確率分布から滞在時間の確率分布モデルを導出した．それにより，これまで提案されてきた期間モデルのいくつかが，比較的単純な効用関数の形式やある特殊な時間価値の確率分布の下で導出されることを示した．一方，Hensher[1), Lancaster[15) 等は，指数族の確率密度関数に変数変換を施すことにより滞在時間分布モデルの相互の間の形式的な関係を導きだしている．しかし，本研究で提案した効用最大化モデルの枠組みの下では，滞在時間モデルが行動仮説と整合性を有するために期間モデルのパラメータ値やモデルの適用範囲に大きな制約が存在することが判明した．本研究により得られたいま１つの重要な知見は，効用最大化仮説に基づいて期間モデルが解析的に導出できる場合は非常に限られ，一般的な時間価値分布に対して期間モデルを解析的に導出することが非常に困難であるという点にある．換言すれば，期間モデルと個人の効用最大化仮説を両立させることは容易ではなく，期間モデルは行動モデルとして必ずしもすぐれた特性を持っているわけではない．現実的には，期間モデルの多くは近似モデルとして使っていかざるを得ないと考える．そのためには，本研究の４.（２）で提案した一般的な滞在時間モデルと，５．６．で提案したような簡便な期間モデルの推計精度の比較検討を通じて，期間モデルの近似の程度について経験的な知見を積み重ねていくことが必要である．当然のことながら，以上の結論は，本研究で採用した効用最大化モデルの枠組みの下でのみ有効であることは言うまでもない．今後，本研究とは異なる効用関数や時間価値分布を用いることにより行動仮説と整合がとりうる滞在時間モデルについてより広範囲に検討していくことが必要である．本研究に残された今後の課題は，以上に要約したとおりであるが，本研究で提案した滞在時間モデルは今後種々の方向に拡張可能であり，それを以下に課題としてとりまとめておく．第１に，目的地までの交通時間，固定費用が必要となるような滞在行動を表現した連続－離散型選択行動モデルを開発する必要がある．第２に，限界滞在費用が存在する場合の滞在時間分布モデル，ハザードモデルの推計方法に関する研究が必要である．特に，第１の研究課題とも関連

して，滞在時間分布が切断されることによる推計バイアスを処理するための計量経済学的手法の開発が必要であろう．第3に，本研究で提案したモデルは，たとえば料金政策によってサービス時間分布（滞在時間分布）を制御できるような都市施設の設計問題に適用が可能である．料金政策によりサービス時間分布の制御を行うような待ち行列システムの解析が今後に残された重要な研究課題である．

参考文献

1) Hensher, D. A. and Mannering, F.: Hazard-based duration models and their application to transport analysis, *Transport Review*, Vol.14, pp.63-82, 1994.
2) Jovanis, P. P. and Chang, H. L.: Disaggregate model of highway accident occurrence using survival theory, *Accidnt Analysis and Prevention*, Vol.21, pp.445-458, 1989.
3) Chang, H. L. and Jovanis, P. P.: Formulating accident occurrence as a survival process, *Accident Analysis and Prevention*, Vol.22, pp.407-419, 1990.
4) Jones, P., Janssen, L., and Mannering, F.: Analysis of the frequency and duration of freeway accidents in Seattle, *Accidetnt Analysis and Prevention*, Vol.23, pp.239-255, 1991.
5) Mannering, F. and Hamed, M.: Occurrence, frequency, and duration of commuters' work-to-home departure delay, *Transportation Research*, Vol. 24B, pp.99-109, 1990.
6) Hamed, M. and Mannering, F.: Modeling travelers' post-work activity involvement: Toword a new methodology, *Transportation Science*, Vol.27, pp.381-394, 1993.
7) Gilbert, C.: A duration model of automobile ownership, *Transportation Research*, Vol.26B, pp.97-114, 1992.
8) de Jong, G.: A disaggregate model system of vehicle holding duration, type choice and use, *Transportation Research*, Vol.30B, pp.263-276, 1996.
9) Ettema, D., Borgers, A., and Timmermans, H.: Competing risk hazard model of activity choice, timing, sequencing, and duration, *Transportation Research Record*, No.1493, pp.101-109, 1995.
10) Becker, G. S.: A theory of the allocation of time, *Economic Journal*, Vol.75, pp.493-517, 1965.
11) Sasaki, K.: Travel demand and the evaluation of transportation system change: A reconsideration of the random utility approach, *Environment and Planning*, Vol.14A, pp.169-182, 1982.
12) Kitamura, R.: A model of daily time allocation to discretionary out-of-home activities and trips, *Transportation Research*, Vol.18B, No.3, pp.255-266, 1984.
13) Wang, J. J.: Timing utility of daily activities and its impact on travel, *Transportation Research*, Vo.30A, pp.189-206, 1996.
14) Cox, D. R. and Oakes, D.: *Analysis of Survival Data*, London, Chapman & Hall, 1984.
15) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990.
16) Pudney, S.: *Modelling Individual Choice, The Econometrics of Cornes, Kinks, and Holes*, Oxford, Basil Blackwell, 1989.
17) 坂下昇: 交通量配分の微視的理論について，高速道路と自動車，Vol.5, pp.16-22, 1962.
18) Muth, R. F.: Household production and consumer demand functions, *Econometrica*, Vol.34, pp. 699-708, 1966.
19) Burt, O. R. and Brewer, D.: Estimation of net social benefits from outdoor recreation, *Econometrica*, Vol.39, pp.182-187, 1971.
20) Feenberg, D. and Mills, E. S.: *Measuring the Benefits of Water Pollution Abatement*, New York, Academic Press, 1980.
21) Small, K. A. and Rosen, S.: Applied welfare economics with discrete choice models, *Econometrica*, Vol.49, pp.105-130, 1981.
22) Train, K.: *Qualitative Choice Analysis - Theory, Econometrics and an Application to Automobile Demand*, Cambridge, MIT Press, pp. 29-59, 1986.
23) たとえば，酒井泰弘: 不確実性の経済学，有斐閣, 1982.

(1996. 11. 22 受付)

A DURATION MODEL INCORPORATING RANDOM MARGINAL UTILITY: A THEORETICAL APPROACH

Kiyoshi KOBAYASHI, Hideyuki KITA and Tadahiro GOTO

In this paper, duration models are derived from the utility maximization hypothesis. In so doing, the random marginal utility models are presented to describe the individuals' time allocation behavior. The heterogeneity in individuals' time value assessment is supposed to be the major source of probabilistic distribution of duration time. It is shown that alternative duration models can be derived from different specification of utility functions and distribution functions of time values.