

ABIC と拡張カルマンフィルタを用いた 最適な地下水解析モデルの推定

奥野哲夫¹・鈴木誠²・本城勇介³

¹正会員 博(工) 清水建設(株) 和泉研究室 研究員 (〒100 千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル)

²正会員 工博 清水建設(株) 和泉研究室 主任研究員 (〒100 千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル)

³正会員 Ph.D. 岐阜大学助教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

地盤工学に逆解析を適用する場合を対象にして、解析モデル構築における様々な不確定性を考慮し、限られた情報の下での最適モデルの選定と未知パラメータの推定手法を提案する。本手法では ABIC の逐次計算法と拡張カルマンフィルタを用いており、最適な地下水解析モデルの選定と透水係数の推定の妥当性をシミュレーションにより検討する。検討対象は、透水係数の確率特性の初期値、透水係数の領域区分、初期条件、境界条件、貯留係数、観測誤差の各設定であり、推定に用いる複数の試験結果の利用順についても検討する。本手法ではカルマンフィルタのシステム誤差が重要な役割を持ち、ABIC により最適なシステム誤差も評価される。

Key Words : *groundwater, hydraulic conductivity, Akaike Bayesian Information Criterion, Kalman filter, inverse problem*

1. 序 論

本来、解析モデルは、その解析の目的に従い、それまでに得られた情報を十分活用して構築されるべきものであり、適切な解析モデルが構築できればそれを用いた予測解析(順解析)から設計や施工に有益な情報を与えることが可能になる。しかし、地盤工学において対象領域内およびその境界上の情報を得るには、経済的理由などから多くの制限を伴う場合が一般的である。このため事前調査などの限られた情報を基に、背後にあるメカニズムを十分考慮して解析モデルを構築するには技術者の適切な判断が必要とされる。例えば、解析対象領域を有限領域に限定し、領域内の地下水挙動を予測解析する場合、領域内の透水係数の不均質性や境界条件などの設定にはかなりの不確定性を伴う場合が多い。このような場合、技術者の判断により構築された解析モデルの適切性を評価する基準が問題になる。

逆解析は、このような状況にある原位置の地盤状況を観測データから逆に推定し、将来の地盤の挙動を予測する上で多くの可能性を秘めた手法と考えられる¹⁾。特に逆解析に関する研究では、境界/領域逆問題、支配方程式逆問題、境界値/初期値逆問題、負荷逆問題、材料特性逆問題など、様々な問題への適用が試みられている²⁾。しかし、その現状を見る限り、対象とする未知パラメータ以外の解析モデルの様々な条件設定にも同時に不確定性が存在することを考慮した推定手法はほとんどなく、例えば境界条件など材料特性以外の条件は全て既知と仮定した上で材料特性を推定するといっ

た例が一般的である。

地下水を対象とした逆解析の研究は Yeh³⁾、Carrera and Neuman⁴⁾、Sun⁵⁾ に海外の動向がまとめられている。国内では、Arai et al.⁶⁾ による飽和・不飽和領域を考慮した飽和透水係数の推定、大西と井尻⁷⁾ による AIC (Akaike Information Criterion; 赤池情報量規準) を用いた不均質地盤の最適な領域区分モデルの選定と透水係数の推定、青木と嘉門⁸⁾ による不均質地盤の領域区分による透水量係数と貯留係数の推定などがある。また、本城と森嶋⁹⁾ は統計学的な解釈から逆解析における事前情報の役割とその効果について言及し、予測の信頼性の評価を行った。河野ら¹⁰⁾ は被圧帯水層での揚水試験から鉛直方向の不均質性を帯水層ごとに領域区分し、透水係数と比貯留係数を軸対象モデルに基づき求めている。また、長谷川ら¹¹⁾ はカルマンフィルタ有限要素法により、各領域の透水係数の推定と降雨や表面流からの涵養量を推定した。本城¹²⁾ および本城ら¹³⁾ は拡張ベイズ法^{14), 15)} に ABIC (Akaike Bayesian Information Criterion; 赤池のベイズ情報量規準) を適用し、広域地下水モデルの最適な領域区分モデルを選定し、そのパラメータを推定した。堀ら¹⁶⁾ は岩盤の透水係数の推定手法として、多数の亀裂を主要な透水経路とする場合を対象に、等価介在物法に基づくモデル化手法で表現し検討を行った。以上の研究において、解析モデルの各種条件設定をモデル選定の立場から検討したものは、Carrera and Neuman⁴⁾、大西と井尻⁷⁾、本城¹²⁾、本城ら¹³⁾ の領域区分モデルの選定のみである。前述のように、地盤工学において限られた情報の下で逆解析を適

用するには、推定すべき未知パラメータ以外にも不確定な条件が存在することを考慮した推定手法が望まれる。

一方、奥野と鈴木¹⁷⁾は、拡張カルマンフィルタを用いた透水係数の空間分布推定法として、その状態ベクトルの時間更新アルゴリズムに有限要素法に基づく地下水位と流量の予測値を利用する手法を示した。さらに、奥野¹⁸⁾は複数の揚水試験結果を逐次利用することで領域全体の透水係数の推定値を更新し、最終的に全試験データを網羅した推定結果を得る手法を示した。また、システム誤差の確率特性の設定が適切な推定結果を得るために重要であることも示した。この手法はカルマンフィルタを用いた推定手法であることから、事前情報をはじめとし、複数の透水試験結果や施工中の観測データを逐次利用して推定値を更新することができ、地盤物性値である透水係数の空間分布(不均質性)を不確定性も考慮して推定することが可能である。また、その推定値の不確定性も考慮して将来の地下水位や流量の予測を行うことが可能であるため、排水計画の立案などにも有効に利用することができる¹⁹⁾。

カルマンフィルタを用いた推定手法(適応フィルタリング)では、システム誤差と観測誤差の確率特性を既知として、これらの誤差伝搬では説明が困難な予測値と観測値の差を未知パラメータの推定誤差に起因する予測誤差と解釈し、観測値に予測値を近づけるよう未知パラメータの推定値を逐次修正(観測更新)する。したがって、システム誤差や観測誤差の確率特性を既知量として設定する必要があるが、その設定如何によって推定結果が異なることになる。特に問題になる点として、これから推定を行おうとするシステムに対して、そのシステムが有する時間更新の誤差(システム誤差)を事前に設定することは一般に困難な点である。本論文で用いる手法は、有限要素法による予測を状態ベクトルの時間更新に利用していることから、有限要素法に基づく種々のモデル化の誤差をシステム誤差として評価する必要がある。このような誤差として、具体的には力学モデル、数理モデル、定式化、離散化、未知パラメータの確率特性の初期設定、領域区分、境界条件、初期条件などのモデル化の誤差が考えられる。同様に観測誤差の設定も重要である。観測誤差の設定には実際の観測装置の測定精度や設置状況から見積もられる場合が多いが、その設定が実際の観測誤差の確率特性と異なれば推定結果も異なることになり、真値がわからない限り観測誤差の設定も一種のモデルと考えられる。このように各種のモデル誤差の影響を考慮してシステム誤差と観測誤差を適切に設定する必要があり、これら2種類の誤差の確率特性の設定方法はカルマンフィルタを用いた推定手法の残された課題と言える。

以上より、以下の2点が重要な課題と考えられる。

(1) 地盤工学においては対象領域全体の詳細な情報を得ることが困難な場合が多く、限られた情報に基づき技術者が構築した複数の解析モデル代替案の中から各種の不確定性を考慮した最適解析モデルを判断する評価基準とそのモデルのパラメータ推定法が必要とされる。(2) カルマンフィルタを用いた推定手法では、各種のモデル誤差の影響を考慮した最適なシステム誤差および観測誤差の設定法が必要とされる。

本論文ではこれらの課題に対して、評価基準(規準)として *ABIC* を用いることで、システム誤差と観測誤差を適切に設定する手法を提案し、その結果として解析モデルとして具備すべき様々な条件をモデルとして選定すると同時にそのパラメータも推定する手法を示す。これにより対象とする未知パラメータ以外の解析モデルの不確定性にも対処する。特に、拡張カルマンフィルタに基づく透水係数の空間分布推定法(逆解析)に *ABIC* の逐次計算法を導入した点に特徴がある。以下では、提案手法に基づく地下水解析モデルの選定とパラメータ推定の妥当性を検討するため、模擬観測データを用いた推定のシミュレーションを行う。具体的なモデル選定として、透水係数(対数透水係数)の確率特性の初期設定、透水係数の領域区分、初期地下水位、境界地下水位、貯留係数(有効間隙率)、観測誤差を対象とする。また、位置を変えた複数の試験結果を利用する場合、利用順序が推定結果に与える影響についても考察する。なお、有限要素法は不圧地下水を対象とした平面2次元解析を用いる。

2. *ABIC* と拡張カルマンフィルタによるモデル推定

(1) *ABIC*(Akaike Bayesian Information Criterion)

ABIC は以下の形で与えられ、*ABIC* を最小にするベイズモデルの超パラメータ(hyperparameter)が最適な値として選定される^{20),21),22)}。

$$\begin{aligned} ABIC &= -2\log(\text{Bayesian likelihood}) \\ &\quad + 2(\text{number of hyperparameters}) \\ &= -2\log \int p_y(y|\theta)p_\theta(\theta|\lambda) d\theta \\ &\quad + 2(\text{number of hyperparameters}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで y , θ , λ はそれぞれデータ、パラメータ、超パラメータであり、 $p_y(y|\theta)$ はデータ y の分布、 $p_\theta(\theta|\lambda)$ は超パラメータ λ が与えられた下でのパラメータ θ の事前分布である。また、対数はこれ以降も自然対数とする。

情報量統計学に基づくモデル選定規準として最もよく用いられる規準に *AIC* が^{23),24),25)}、時系列モデルに関する *AIC* の算定式は北川²⁶⁾ に示されている。

ABICも AICと同様、Kullback-Leibler 情報量を最小化(エントロピー最大化)することで真の分布とモデル分布の近さを代替モデル間で相対的に測る規準であるが、式(1)の第1項に、最大対数尤度の代わりに超パラメータの関数であるベイズ尤度を導入する点が AICと異なる。超パラメータは、未知パラメータの事前分布を規定するパラメータである。本論文では、超パラメータにより観測データ分布と未知パラメータ(状態ベクトル)の事前分布という異種類の分布の相対的な重み付けを行い、その最適値を ABICにより決定する¹²⁾。その結果、逆問題における非適切性(ill-posedness)を克服し、最適モデルと最適事前分布が選定される。ここでは以下に述べるように、カルマンフィルタのアルゴリズムを利用した ABICの逐次計算法を用いる点に特徴がある。

(2) 拡張カルマンフィルタと ABIC の逐次計算法

はじめに、拡張カルマンフィルタを用いた透水係数の空間分布推定法^{17),18)}の概要を述べる。まず、非定常状態の不圧地下水の支配方程式は、平面2次元状態を仮定すると質量保存則、ダルシー則、Dupuitの仮定から式(2)で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = c \frac{\partial h}{\partial t} - q \quad (2)$$

$$T_{ij}(h) = (h - a) K_{ij} \quad (3)$$

$$i, j = 1, 2$$

ここで、 x_i は水平面内の直交座標、 h は地下水位、 a は基底不透水面の鉛直座標、 T_{ij} は透水量テンソル、 K_{ij} は透水係数テンソル、 c は有効間隙率(貯留係数)、 q は単位水平面積当たりの水の湧き出し量、 n_i は境界面の外向き法線ベクトルの成分、 t は時間である。この支配方程式は透水量テンソルが地下水位に依存するため非線形方程式である。適当な初期条件、境界条件の下で式(2)を有限要素法により離散化すると、1期先の未知地下水位と未知流量を非線形代数方程式の収束計算により求めることができる。

拡張カルマンフィルタのシステム状態方程式と観測方程式はそれぞれ式(4)、(5)のように設定する。

$$\begin{aligned} x_{t+1} &\equiv \begin{Bmatrix} h_{t+1}^1 \\ L_{t+1} \\ q_{t+1}^2 \end{Bmatrix} \\ &= f_t(x_t) + A_t w_t \\ &= \begin{Bmatrix} f_t^h(x_t) \\ L_t \\ f_t^q(x_t) \end{Bmatrix} + A_t \begin{Bmatrix} w_t^h \\ w_t^L \\ w_t^q \end{Bmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_t &\equiv \begin{Bmatrix} \tilde{h}_t^1 \\ \tilde{L}_t \\ \tilde{q}_t^2 \end{Bmatrix} \\ &= G_t x_t + v_t \\ &= \begin{bmatrix} G_t^h & 0 & 0 \\ 0 & G_t^L & 0 \\ 0 & 0 & G_t^q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ L_t \\ q_t^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_t^h \\ v_t^L \\ v_t^q \end{Bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、時刻 t ステップにおける状態ベクトルを x_t (n 次元ベクトル)、観測ベクトルを y_t (m 次元ベクトル)としている。式(4)に示すシステム状態方程式は、有限要素解析から求められる地下水位 h_{t+1}^1 と流量 q_{t+1}^2 から構成される。ここで肩文字の1あるいは2は、それぞれ地下水位と流量に関する未知量を示す。また、状態ベクトルには透水係数の常用対数をとった値 L_t (対数透水係数)が用いられる。このようにシステム状態方程式では非線形計算を有限要素法で実施し、透水係数に関しては時間的な変化がないものとする。さて、 $A_t w_t$ (n 次元ベクトル)はシステム誤差であり、このうち w_t (n 次元ベクトル)はその確率特性を技術者が設定するシステム誤差成分で、正規白色性を有するものとする。 w_t^h 、 w_t^L 、 w_t^q は、それぞれ地下水位、対数透水係数、流量に関する成分で、有限要素法による定式化や離散化をはじめとして、各種の条件設定が真の状態と異なることにより生じる誤差として設定する。しかし、実際のシステム誤差は設定したモデルに依存して異なり、事前に適切に設定することは困難である。このため技術者が設定したシステム誤差成分 w_t を真のシステム誤差へ変換する行列として A_t ($n \times n$ 行列)を導入する。本論文では上記の変換行列 A_t が式(6)のように時間的に不変なスカラー α で代表でき、真のシステム誤差は技術者の与えたシステム誤差成分 w_t のスカラー倍で与えられると仮定する。したがって、式(4)のシステム状態方程式は式(7)で与えられるものとし、スカラー α の決定に後述する ABICを用いる。

$$A_t = \alpha I \quad (6)$$

$$x_{t+1} = f_t(x_t) + \alpha w_t \quad (7)$$

ここで I は単位行列($n \times n$ 行列)である。変換行列 A_t を時間的に不変なスカラー α で代表させることの実践的な意味は、対象とする時系列データ全体に対して平均的に最適係数 α で近似させることである。なお、式(6)、(7)において $\alpha = 1.0$ とした場合が、先に奥野と鈴木が示した方法^{17),18)}に相当する。

一方、観測方程式(5)は線形であり、 \tilde{h}_t^1 は観測される地下水位、 \tilde{L}_t は調査や試験により測定される一部領域の透水係数の常用対数をとった値、 \tilde{q}_t^2 は観測される流量である。 G_t^h 、 G_t^L 、 G_t^q はそれぞれ地下水位、対数透水係数、流量が観測されている成分のみ1、他は0の

行列である。また、 \mathbf{v}_t (m 次元ベクトル)は観測誤差で、正規白色性の誤差とする。

以上のシステム状態方程式と観測方程式を基に、状態ベクトルの初期値 $\hat{\mathbf{x}}_{0/t-1}$ 、推定誤差分散共分散行列の初期値 $\mathbf{P}_{0/t-1}$ ($n \times n$ 行列)、システム誤差分散共分散行列 \mathbf{Q}_{t-1} ($n \times n$ 行列)、観測誤差分散共分散行列 \mathbf{R}_t ($m \times m$ 行列)が与えられた後、カルマンゲイン \mathbf{K}_t ($n \times m$ 行列)、状態ベクトルの推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ 、 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}$ 、推定誤差分散共分散行列 $\mathbf{P}_{t/t}$ ($n \times n$ 行列)、 $\mathbf{P}_{t/t-1}^*$ ($n \times n$ 行列)、状態遷移行列 (Jacobian 行列) \mathbf{F}_t ($n \times n$ 行列)が拡張カルマンフィルタのアルゴリズムに従って逐次的に繰り返し計算される²⁷⁾。具体的な式の誘導は付録 A に示しており、観測更新アルゴリズムは式 (A.12)、(A.13)、(A.14) から、また時間更新アルゴリズムは有限要素法と予測誤差分散共分散行列の状態遷移から、以下のように与えられる。なお、本論文ではシステム状態方程式 (7) に示された α が重要な意味をもつため、その影響を直接受ける推定誤差分散共分散行列 $\mathbf{P}_{t/t-1}^*$ に*を付けて表す。

(a) フィルタ方程式

時間更新アルゴリズム

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1/t} = \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t}) \quad (8)$$

観測更新アルゴリズム

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{K}_t [\mathbf{y}_t - \mathbf{G}_t \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}] \quad (9)$$

(b) カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_t = \left[\mathbf{G}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{G}_t + \mathbf{P}_{t/t-1}^* \right]^{-1} \mathbf{G}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \quad (10)$$

(c) 推定誤差分散共分散行列

時間更新アルゴリズム

$$\mathbf{P}_{t/t-1}^* = \mathbf{F}_{t-1} \mathbf{P}_{t-1/t-1} \mathbf{F}_{t-1}^T + \alpha^2 \mathbf{Q}_{t-1} \quad (11)$$

観測更新アルゴリズム

$$\mathbf{P}_{t/t} = \left[\mathbf{G}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{G}_t + \mathbf{P}_{t/t-1}^* \right]^{-1} \quad (12)$$

フィルタ方程式の観測更新アルゴリズムにおいて、カルマンゲイン \mathbf{K}_t は正則化一般逆行列の一種として機能し、状態ベクトルの最適な修正量を与える。その際、 $\mathbf{P}_{t/t-1}^*$ はペナルティ行列として逆解析における解の安定化に寄与することになり、行列の正則化 (regularization) の観点から式 (11) の α にどの程度の値を与えるべきかという問題に帰着される。一方、このことはベイズ推定の立場から事前情報と観測データの相対的な重み付けとして最適な係数を選定することを意味する。実際、観測ベクトル \mathbf{y}_t が得られた後の状態ベクトル \mathbf{x}_t の対数尤度 $\ell_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_t)$ は、式 (A.10) の同時確率密度関数の対数をとることで求められ、この対数尤度の最大化は式 (13) の評価関数の最小化に一致する。

$$J_t(\mathbf{x}_t | \alpha) = (\mathbf{y}_t - \mathbf{G}_t \mathbf{x}_t)^T \mathbf{R}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{G}_t \mathbf{x}_t)$$

$$+ (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1})^T \mathbf{P}_{t/t-1}^*^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) \quad (13)$$

式 (13) の評価関数を最小にする推定値は式 (9) で与えられる。本城ら¹³⁾は拡張ベイズ法による逆問題の解析において、モデル選定と事前情報の重み係数の決定に ABIC を用いている。式 (13) との比較の目的から本城らの定式化に従い拡張ベイズ法における評価関数を示すと式 (14) の形となる。

$$J(\boldsymbol{\theta} | \beta) = (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{V}_h^{-1} (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\theta})) + \beta^2 (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (14)$$

ここで $\boldsymbol{\theta}$ が未知パラメータである透水量ベクトル、 β^2 が事前分布の重み係数である。また、 \mathbf{h} は地下水位の観測値ベクトル、 $\hat{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\theta})$ は地下水位の計算値ベクトル、 \mathbf{V}_h は地下水位の観測誤差分散共分散行列、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は透水量ベクトルの事前平均値ベクトル、 \mathbf{V}_θ は $\boldsymbol{\theta}$ の事前分布の分散共分散行列である。式 (13) と式 (14) を比較すると、拡張ベイズ法における事前情報の重み係数 β の決定は、単位時間ステップにおいて式 (13) の係数 α に依存して定まる $\mathbf{P}_{t/t-1}^*$ を決定することと等価である。このことから推定誤差分散共分散行列 $\mathbf{P}_{t/t-1}^*$ は、時間ステップ t において事前分布の分散共分散行列であり、式 (14) において β を決定することと式 (13) において α を決定することが等価であることが理解できる。ただし、評価関数値への影響としては、 α の減少が事前分布の重み係数 β の増大に対応している点に注意を要する。

カルマンフィルタのアルゴリズムでは、本来、システム誤差分散共分散行列 $\alpha^2 \mathbf{Q}_{t-1}$ と観測誤差分散共分散行列 \mathbf{R}_t は既知量として与える必要があり、観測値から状態ベクトルの推定値が逐次更新され、その際、状態ベクトルの一部を構成する対数透水系数が推定される。しかし、ABICに基づく本手法では、各時間ステップにおける $\mathbf{P}_{t/t-1}^*$ には後述する各種のモデル誤差の影響が含まれるとの解釈の下に、そのモデル誤差の影響をシステム誤差分散共分散行列 $\alpha^2 \mathbf{Q}_{t-1}$ として捉える。そのシステム誤差分散共分散行列をパラメータ α により調整することで事前分布の分散共分散行列である $\mathbf{P}_{t/t-1}^*$ を調整する。以下では係数 α を決定するための ABIC の算定式を示す。

カルマンフィルタを利用した ABIC の計算式は付録 A の式 (A.17)、(A.6) から次式で与えられる。

$$ABIC(\alpha) = mN \cdot \log(2\pi) + \sum_{t=1}^N \log |\mathbf{R}_t| + \sum_{t=1}^N \left\{ \log |\mathbf{P}_{t/t-1}^*| - \log |\mathbf{P}_{t/t}| \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_i \hat{\mathbf{x}}_{i/t-1})^T (\mathbf{D}_{i/t-1})^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_i \hat{\mathbf{x}}_{i/t-1}) \quad (15)$$

$$\mathbf{D}_{i/t-1} = \mathbf{G}_i \mathbf{P}_{i/t-1}^* \mathbf{G}_i^T + \mathbf{R}_i \quad (16)$$

式(15)の総和は、1ステップ毎に m 個のデータが得られる場合、時系列上で N ステップまで加算して求める。さらに複数の試験データを利用する場合は全試験データに亘って総和を求める。式(15)の第1項は定数項、第2項は観測誤差分散共分散行列の行列式に関する総和、第3項は相互情報量^{18),28)}の総和(正しくは第3項は相互情報量の2倍になる)、第4項は観測値に対する予測誤差の総和である。

(3) 解析モデルの選定

本手法による解析モデル選定の基本的考えは、カルマンフィルタの時間更新アルゴリズムから得られる1期先の予測分布を各種のモデル誤差を含む事前分布と見なし、この事前分布の分散共分散行列 $\mathbf{P}_{i/t-1}^*$ に含まれるモデル誤差をシステム誤差として捉え、システム誤差を決定する係数 α を調節することで Kullback-Leibler 情報量を最小化し、状態ベクトルの真の分布に対する予測分布のあてはまりの悪さを最小にするモデルを最適モデルとして選定する点にある。このことが事前分布を調整しながら $ABIC$ を最小にするモデルを選定することに等しい。特に、本手法の予測には有限要素法を用いていることから解析モデルの条件設定が予測分布を生成する基本的な事前情報となる。後述する推定シミュレーションのように、観測点(観測井)の数より未知パラメータ(透水係数)の数が多いような場合、逆問題は本質的に解の唯一性がない。本手法はこのような非適切問題に対処するため、解析モデルに付随した全ての条件を事前情報として活用し、式(13)を最小にする意味で解の唯一性のある問題設定にしている^{3),4),14),29)}。しかし、得られる解は事前情報である解析モデルと観測データに依存するため、必ずしも真の状態に一致するとは限らない点に注意を要する。さて、計算手順を示す前に具体的なモデルの考え方を述べる。

まず、ここでのモデルは、真の状態が厳密には設定不可能な状況下において、不可避な誤差が含まれる理想化・単純化された記述(各種条件設定)をいう。本手法は、はじめに真の状態に比較的近いと判断される複数の代替モデルを準備し、これらのモデルの中から、事前情報を利用しながら観測値が得られた状態を単純かつ正確に説明できるモデルを相対的に選定するものである。例えば、地下水位や揚水(注水)量などを観測値とする場合、初期条件、境界条件などの様々な条件は各観測値を生成する背後のメカニズムを構成しており、

透水係数のみならず、これらの条件も観測値に大きな影響を与えていることが考えられる。この場合、初期条件や境界条件の設定を変えた複数のモデルを準備し、この中から最適なモデルを相対的に選定する。これは確率モデルを通して見た最適なメカニズムをモデルとして選定することになる。

また、観測値に含まれる観測誤差の評価が問題になる場合、観測更新アルゴリズムにおいてフィルタリングに用いられる観測誤差の確率特性の設定を変えることで複数の観測誤差モデルを準備し、この中から最適なモデルを選定することも考えられる。例えば、式(10)中の観測誤差の分散共分散行列 \mathbf{R}_i の設定が問題になる場合、 \mathbf{R}_i の設定を変えた複数のモデルを準備し、各モデルに対して式(11)中の α を調整することで $\mathbf{P}_{i/t-1}^*$ を調整し、式(10)の \mathbf{K}_i に対する \mathbf{R}_i の設定の影響を $\mathbf{P}_{i/t-1}^*$ により修正することもできる。これは観測誤差の設定誤差をモデル誤差として捉え、その影響に対してシステム誤差を調整することで対処するものである。

以上のように誤差が懸念される条件をそれぞれモデルとして捉えることが考えられるが、多種類の誤差を対象にすると条件設定の組み合わせが膨大になり、現実的ではない。実務的には将来の地下水流動の予測やメカニズムの解明といった逆解析の目的に応じて、不可避な誤差の中から対象とすべき誤差を見極め、代替モデルとして準備する条件を絞り込むことが重要である。このためには当然ながら事前の調査や試験により、確かな情報を取得することが肝要である。

さて、計算手順であるが、以下の全推定では事前分布 $\mathbf{P}_{i/t-1}^*$ を定める係数 α として予め定めた離散的な値を設定し、一連の観測データを利用した推定において係数 α は一定値とする。こうして1つのモデルに対してある係数 α の下での推定が終了した後、そのモデルに対して係数 α の値を変えた推定を同様に繰り返す。さらに、これと同様の手順を複数の代替モデルに対して実施する。以上の結果、それぞれのモデルに対して様々な係数 α の下で、透水係数の推定と同時に $ABIC$ の算定が行われる。この全ての計算の中から $ABIC$ を最小にするモデルを最適モデル、その時の係数 α を最適係数として選定する。

3. 地下水解析モデルの推定シミュレーションのための条件設定と検討項目

本手法の妥当性を確認する目的で、仮想地盤モデル(地下水解析モデル)を基に地下水の FEM 解析(順解析)により作成した模擬観測データを用い、設定した元の地下水解析モデルの推定(逆解析)が可能か検証を行う。以下ではその条件設定と検討項目を示す。

表-1 設定した透水係数の空間分布特性

透水係数 (単位cm/s) の常用対数をとった値に対する
平均値と共分散関数

平均値	共分散関数
-2 (1.0×10^{-2} cm/s)	$C(d) = \sigma^2 \cdot \exp \left[- \left\{ \left(\frac{d_x}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{d_y}{a_y} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]$ $\sigma^2 = 1.0, a_x = a_y = 200\text{m}, d = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$

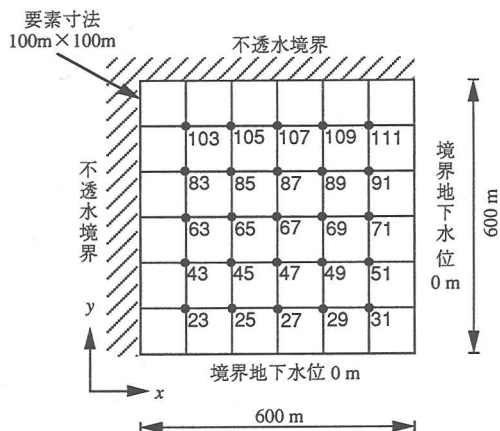


図-1 仮想地盤モデルの要素分割

(1) 仮想地盤モデルと模擬観測データ

仮想地盤モデルは平面2次元状態を仮定してモデルを設定した。これは先に奥野と鈴木¹⁷⁾が用いたものと同様で、ここではその概要のみ説明する。

まず、透水係数は等方性を仮定し、その空間分布特性を表-1のように設定する。この空間分布特性は、透水係数分布は対数正規分布に従うもので、対数透水係数 (単位 cm/s) の平均値が-2.0、分散が1.0の母集団を設定している。また、共分散関数としては2次元の指数型の関数を仮定した³⁰⁾。共分散関数の変数である d_x , d_y はそれぞれ x , y 方向の距離、パラメータ a_x , a_y はそれぞれ x , y 方向の相関距離である。

図-1には要素分割を示しており、対象とする平面領域は600m x 600mの正方領域で、不透水基盤までの深さは一律50mとする。要素の寸法は100m x 100mで、8節点のアイソパラメトリック要素を用いおり、領域全体の要素数は36、節点数は133である。このモデルに先の透水係数の空間分布特性を有する母集団から標本を1つ発生させ、各要素に一定の透水係数を割り当てる。こうして作成した透水係数の空間分布モデル

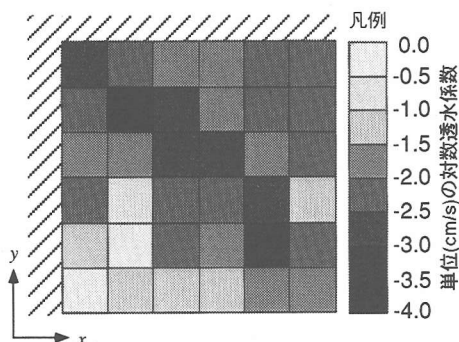


図-2 設定した透水係数の空間分布モデル (単位 cm/s の透水係数の常用対数值)

表-2 各揚水試験の観測点配置
(図-1の節点番号参照)

揚水試験	揚水井	観測井
A	103	63,65,67,83,85,87,103,105,107
B	111	67,69,71,87,89,91,107,109,111
C	67	45,47,49,65,67,69,85,87,89
D	23	23,25,27,43,45,47,63,65,67
E	31	27,29,31,47,49,51,67,69,71

を図-2に示す。また、有効間隙率は全要素とも6.0%とする。

次に、複数の揚水試験を想定し、これらの揚水試験で地下水位のみ観測することを想定して模擬観測データを作成する。まず、想定した揚水試験としてA~Eまでの5回の試験を考える。それぞれの揚水井と観測井の配置を表-2のように設定した。各試験の井戸配置は図-1の節点番号で示しており、各試験は揚水井1点と観測井9点からなり、試験ごとに井戸の集中する領域を変えて5回の試験全体で仮想地盤全体を網羅する配置としている。図-1の仮想地盤領域で揚水試験A, B, C, D, Eの順に、それぞれ図の左上, 右上, 中央, 左下, 右下の領域を中心に揚水井と観測井を配置している。その一例として揚水試験Cの井戸配置を図-3に示す。このような井戸配置で、各試験とも揚水井から1200l/min (2.0×10^{-2} m³/s) の一定流量を揚水するものとし、各観測井位置の地下水位の経時変化を有限要素法の順解析により求め、これを模擬観測データとする。なお、初期水位はいずれも基準高さ位置(深さ)0.0mで

凡例

○ 揚水位置 (1点: 1200 l/min)

□ 地下水位観測位置 (9点)

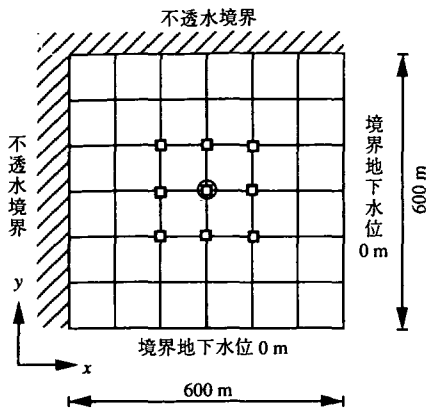


図-3 揚水試験Cの観測点配置

表-3 標準としたシステム誤差分散, 観測誤差分散, 推定誤差共分散の初期値

関係する状態量 分散	地下水位 (m) ²	透水係数: 単位(cm/s)の透水係数の 常用対数に対する分散	流量 上段: (m ³ /s) ² 下段: (l/min) ²
推定誤差共分散の 初期値	4.0×10^{-2} (分散のみ)	表-1の共分散関数から 求まる値	7.7×10^{-8} 2.8×10^2 (分散のみ)
システム誤差分散 σ_0^2	1.0×10^{-4}	1.1×10^{-3}	1.9×10^{-10} 6.8×10^{-1}
観測誤差分散 σ_1^2	4.0×10^{-4}	4.4×10^{-3}	7.7×10^{-10} 2.8×10^0

さて、ここでは検討項目として、まず、a) システム誤差と観測誤差の設定を変えた場合の ABIC の変化、を把握したのち、b) 対数透水係数の確率特性の初期設定モデル、c) 複数の揚水試験結果の利用順序、d) 透水係数の領域区分モデル、e) 初期条件モデル、境界条件モデル、貯留係数(有効間隙率)モデル、f) 観測誤差モデル、について検討する。これらのモデルの条件設定の詳細は後述する推定結果で共に示すこととし、以下では各検討の目的を説明する。

システム誤差と観測誤差の設定を変えた場合の ABIC の変化を把握するには、これら 2 種類の誤差設定を種々変化させることで ABIC の算定結果がどのように変化するかを調べ、その基本的な特性を把握する。また、未知パラメータである対数透水係数以外の条件設定にもモデル誤差が存在する場合を対象に、システム誤差と観測誤差の設定の変化が ABIC の算定に及ぼす影響について調べる。これには後述する境界水位モデルを用いて、境界水位が真の状態と異なることによるモデル誤差を対象に検討する。

状態ベクトルに関する確率特性の初期設定を行う場合、その初期推定値 $\hat{x}_{0|-1}$ と推定誤差分散共分散行列の初期値 $P_{0|-1}$ が基本的パラメータとなるが、対数透水係数の確率特性の初期設定を行うに当たり、事前に定量的なデータが十分に存在しない場合が多々ある。このような場合を想定し、対数透水係数の初期推定値モデルと推定誤差分散共分散行列の初期値モデルを用いて、妥当なモデルが選定されることを確認する。なお、この場合の真値は前述の仮想地盤モデルの作成に用いた透水係数の母集団の確率特性とする。さらに、対数透水係数の初期推定値モデルにおいて、5 回の揚水試験の模擬観測データの利用順序が異なることによる ABIC の算定結果と推定結果への影響の違いを調べる。

観測点数よりも求めようとする未知パラメータ数が多いような場合、逆問題は非適切になる。透水係数の領域数を限定し不必要な未知パラメータ数を制限(parameterization)することは、このような逆問題にお

一律とする。

また、模擬観測データは各揚水試験とも約 1 ヶ月間のデータを観測するものとし、ここでは対数時間軸上で 1 オーダーを 50 ステップに等分割し、観測期間の 1 ヶ月を合計 225 ステップに分割した。この時間ステップの順解析で地下水位を計算し、5 ステップごとに各観測井の地下水位が観測されるものとし、時間軸上に各観測井とも 46 点の観測データを設定した。以下の各推定シミュレーションでは、このようにして作成した模擬観測データを標準として用いる。したがって、特に観測誤差を付加したものを模擬観測データとはしていないが、後述する観測誤差モデルの検討のみ、標準とする観測データに乱数を用いて所定の観測誤差を付加させたものを模擬観測データとして用いる。

(2) 検討項目

各推定シミュレーションの検討項目を示す前に、まず拡張カルマンフィルタのフィルタリングに必要となるシステム誤差分散, 観測誤差分散, 推定誤差分散共分散行列の初期値に関する標準値を設定し表-3に示す。これら標準値は、後述する各検討項目の影響のみ明確にする目的から、他の条件を同一条件に設定するためのものである。したがって、特に断らない限り標準値を設定し、これらの値の設定が検討対象になる場合はその旨別途値を設定して代替モデルを作成する。また、特に記述のない条件は真の条件に設定する。なお、標準値としてシステム誤差と観測誤差の分散共分散行列は分散(対角成分)のみ設定し、共分散(非対角成分)は 0 と仮定した。

る非適切性を回避する有効な手段となっている。透水係数の領域区分モデルの検討では、5回の揚水試験の観測データに基づき情報量が逐次増加するのに伴って、領域数(未知パラメータ数)や領域区分形状を変えたモデルの中から $ABIC$ を最小にする最適な領域区分モデルがどのように推移するかを調べる。

次に、境界条件モデル、初期条件モデル、貯留係数(有効間隙率)モデルの各検討モデルは、透水係数の推定を行う際に、同時にこれらの項目に関する条件設定(モデル設定)の不確実性が懸念される場合を想定したものである。例えば、境界条件モデルでは、透水係数の推定を行う際に同時に境界条件の不確実性が懸念される場合を想定し、境界条件として考えられるいくつかの代替モデルから適切な境界条件モデルが選定され、かつ、透水係数の推定結果が妥当であることを確認する。他のモデルに関しても同様の目的から検討を行う。

観測誤差モデルは、先の a) においてシステム誤差と観測誤差の設定を変えた場合の $ABIC$ の変化を調べたものを参考として、観測誤差共分散行列の設定に不確実性が懸念される場合、観測誤差の設定を変えた数種類のモデルを準備し、この中から真の観測誤差共分散に近いモデルが選定されることを確認する。なお、簡単のため観測誤差共分散のうち分散のみ対象とし、この検討のみ所定の観測誤差分散を有する標本を1つ発生させ、これを先の模擬観測データに付加したものを模擬観測データとして使用する。したがって、最適な観測誤差分散モデルとして付加した観測誤差分散に一致するモデルが選定されることを確認する。

4. 推定結果と考察

以上の3.の条件で実施した推定結果を検討項目順に示し考察を行う。

(1) システム誤差と観測誤差の設定による $ABIC$ の変化

この推定には1回の揚水試験結果を用いるものとし、領域中央で実施した揚水試験Cの模擬観測データを用いた。透水係数の確率特性の初期設定として、仮想地盤モデルの作成に用いた母集団が既知と仮定し、領域全体に対して表-1の初期推定値-2乗(透水係数: $1 \times 10^{-2} \text{cm/s}$)と共分散関数により設定される推定誤差分散共分散行列を用いて推定を開始した。拡張カルマンフィルタによる推定を行う際に観測誤差分散の設定を変えた5種類のモデルを準備し、それぞれについてシステム誤差の大きさを調整する係数 α を変えて推定を行い、その結果を比較した。この推定による $ABIC$ の変化を図-4に示す。また、各観測誤差分散モデルにおいて $ABIC$ を最小にする α と $ABIC$ の最小値を表-4に示す。5種

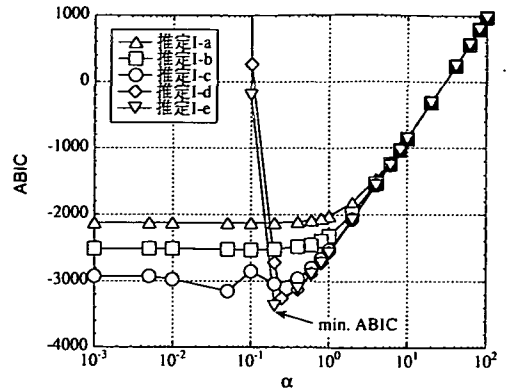


図-4 α と $ABIC$ の関係 (システム誤差と観測誤差の設定による $ABIC$ の変化)

表-4 システム誤差と観測誤差の設定による $ABIC$ の最小値の変化

推定ケース	設定したモデル (観測誤差分散 σ_R^2)	利用する揚水試験データ (試験位置)	$ABIC$ を最小にする α	$ABIC$ の最小値
推定 I-a	$\sigma_R^2 = 4.0 \times \sigma_Q^2$	C	0.001 ~ 0.1	-2126
推定 I-b	$\sigma_R^2 = 1.0 \times \sigma_Q^2$	C	0.1	-2534
推定 I-c	$\sigma_R^2 = 0.1 \times \sigma_Q^2$	C	0.05	-3150
推定 I-d	$\sigma_R^2 = 0.01 \times \sigma_Q^2$	C	0.25	-3257
推定 I-e	$\sigma_R^2 = 0.001 \times \sigma_Q^2$	C	0.2	-3377

注) σ_Q^2 は表-3に示したシステム誤差分散の標準を示す。試験位置は表-2参照。

類の観測誤差分散モデルはシステム誤差分散の標準値 Q_{t-1} に対して、それぞれ 4.0, 1.0, 0.1, 0.01, 0.001 を乗じた大きさを観測誤差分散 R_t に設定している。なお、式(11)および式(13)から理解されるように、 $Q_{t-1} = \alpha$ (あるいは $\alpha = 0$) とすることは可能であるが、 $R_t = \alpha$ とすることは意味がない。また、システム誤差分散の標準値の 4.0 倍が、他の検討で用いる観測誤差分散の標準値である。

図-4を見ると、 α が比較的大きな範囲では観測誤差分散の設定による違いはほとんどなく、 $ABIC$ は一致した変化を示している。 α が小さな範囲では、観測誤差分散を小さく設定したモデル(推定 I-e など)で $ABIC$ に明確な最小値が現れ、これに対して観測誤差分散を大きく設定したモデル(推定 I-a など)では α の低下に伴って $ABIC$ が小さくなり、ある α の値以下で $ABIC$ は一定値かつ最小値を示す傾向が認められる。また、図-4および表-4から、観測誤差分散を小さく設定するほど $ABIC$ の最小値は小さくなっている。ここで利用した模擬観測データには特に観測誤差を付加しておらず、

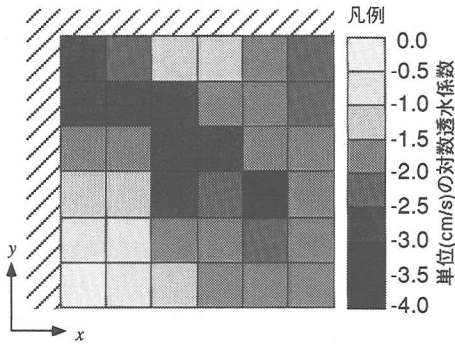


図-5 透水係数の推定結果 (推定 I-a, $\alpha = 0.01$)

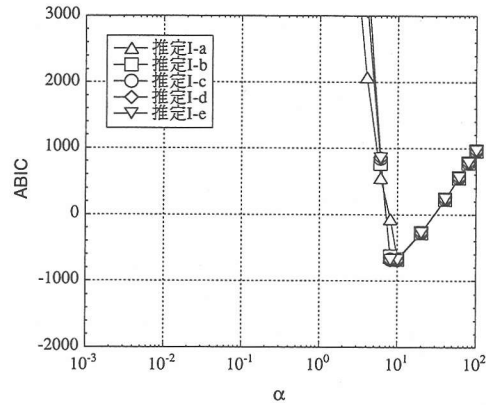


図-7 α と ABICの関係 (境界水位モデル VI-a)

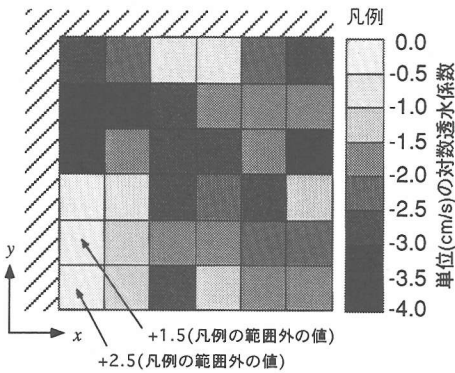


図-6 透水係数の推定結果 (推定 I-e, $\alpha = 0.2$)

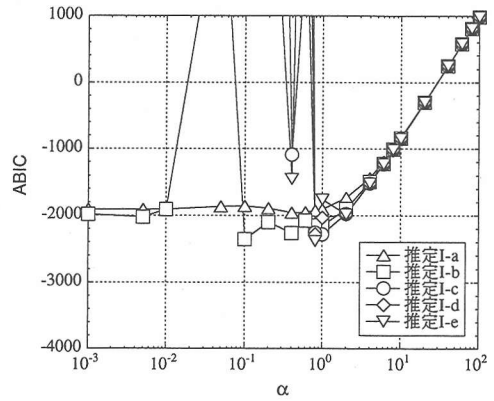


図-8 α と ABICの関係 (境界水位モデル VI-c)

観測誤差分散の真値は 0.0(模擬観測データ作成時の解析誤差は無視する)である。したがって、5種類の観測誤差分散のうち真の観測誤差分散に近いほど ABIC が小さくなっていることは、ABIC が最小を持つモデルを最適なモデルとして選定することが妥当な基準であることを示している。

観測誤差分散の設定を変えて得られた対数透水係数の推定値のうち、推定 I-a と推定 I-e の結果を図-5, 6 に示す。これらと比較すると、ABIC が最小になった推定 I-e ($\alpha = 0.2$) の結果が必ずしも真の透水係数の分布(図-2)に一致しておらず、観測誤差分散を大きくした推定 I-a ($\alpha = 0.01$) の結果の方が全体的な傾向を捉えている。この理由は、先の 2. (3) で述べたように、事前情報を用いることで解の唯一性は保証されるものの真の状態に一致するとは限らず、事前情報であるモデルと観測データに依存して最適な解が得られるためである。例えば、表-3 地下水位と流量の推定誤差分散の初

期値は仮定した値であることから一種のモデルであり、モデル誤差が生じることが考えられる。また、ここでは利用した単一の試験結果のみを再現するのに最適な解が得られることになる。このことから判断して、特定の試験結果に対してのみ最適化されたモデルは、未知パラメータ全体に対してよい推定結果を与えるとは限らないと言える。

以上はシステム誤差分散と観測誤差分散の設定を変えることで ABIC がどのように変化するかを調べたが、この結果はシステム誤差分散を調整することで観測誤差分散モデルを選定することも可能であることを示唆している。特に真の観測誤差分散が 0.0 の場合を調べたが、模擬観測データに 0.0 以外の有意な観測誤差分散が存在する場合のモデル選定は、後述する (6) で示す。

次に、解析モデルの条件として観測誤差分散以外の条件設定も同時に真の状態と異なる場合に ABIC の変化がどのような状況になるかを調べた。そのため、ここ

で用いた観測誤差分散モデルに後述する境界水位の違いも加えたモデルを用いて推定を行った。境界水位モデルは後述する表—9の推定 VI-a と推定 VI-c の2種類を用い、推定 VI-b は真の境界水位を設定したケースであることからその結果は図—4に示したものである。真の境界水位が 0.0m で時間的に不変であるのに対して、推定 VI-a では 30 日後に -1.0m に低下し、推定 VI-c では 30 日後に +1.0m に上昇する境界水位モデルとしている。これらの推定結果を図—7, 8 に示す。図—7は境界水位モデル VI-a に対して先の5種類の観測誤差分散モデルを用いた場合、図—8は境界水位モデル VI-c に対して同様に5種類の観測誤差分散モデルを用いた場合の α と $ABIC$ の関係を示している。境界水位モデル VI-a では5種類の観測誤差分散モデルによる $ABIC$ の変化に大きな違いがなく、 α の変化に対して $ABIC$ の変化がほぼ一致している。このため、各観測誤差分散モデルごとに $ABIC$ は最小値を持つが、その差に有意な違いが現れにくくなっている。このことは観測誤差分散モデルの違いよりも境界水位モデルの設定が $ABIC$ の算定に支配的影響を与えることを示しており、真の状況と異なる境界水位モデルを用いた場合、観測誤差分散モデルの選定は困難になる。一方、境界水位モデル VI-c では α が小さい領域で5種類の観測誤差分散の違いが現れ、特に観測誤差分散が小さなモデル(推定 I-e など)では $ABIC$ の値が不安定に変動し、観測誤差分散が大きいモデル(推定 I-a など)では安定している。また、 α の値の比較的大きな範囲では、観測誤差分散モデルの違いは少なく $ABIC$ はほとんど一致した変化を示している。この状況は真の境界水位を用いた図—4と境界水位モデル VI-a を用いた図—7の中間的な状況を示している。このような状況を理解するには、利用する観測データにより $ABIC$ が時系列的に変化することも考え合わせる必要がある。ここで示した例は先の揚水試験 C の全観測データを用いて推定が終了した時点の状況であり、この時点では観測誤差分散を小さく設定した場合に α の小さな範囲で $ABIC$ が増大する傾向を示しはじめており、これにより不安定な変動が生じている。この状況が進むと先の図—4のように、 α の小さな範囲では大きな $ABIC$ の値を示し、特定の α の位置で明確な $ABIC$ の最小値を示すものと考えられる。

以上の真の境界水位、境界水位モデル VI-a、境界水位モデル VI-c の3種類の検討から、モデル選定で対象とする条件以外に真の状態と異なる条件設定がされている場合は、その影響(感度)の大きさによって対象とするモデル選定が困難になる場合があることがわかる。先の例では境界水位モデルが真の状態と異なる場合(推定 VI-a など)に観測誤差分散のモデル選定を行う場合がこのような場合に相当する。この理由として基

本的に $ABIC$ は AIC と同一の理論に基づいており、その誘導には漸近理論が用いられているためと考えられる^{20),23),25),26)}。逆に、対象とする条件以外に真の状態と異なる条件設定がされていても、その影響(感度)が小さければ対象とするモデル選定が可能な場合もある。観測誤差分散が真の状態と異なる場合(推定 I-a など)に境界水位のモデル選定を行う場合がこれに相当し、同一の観測誤差分散の設定の下で $ABIC$ の最小値を比較することで境界水位モデルの選定が可能である。なお、境界水位のモデル選定の詳細は後述する(5)で示す。

また、 $ABIC$ が最小値を示す際の α の値に注目すると、例えば境界水位モデル VI-a(図—7)では観測誤差分散モデルに依存せず全て $\alpha = 10$ の場合に、また真の境界水位(図—4)では観測誤差分散を小さく設定したケースで $\alpha = 0.2$ の場合に、それぞれ $ABIC$ の最小値を示している。さらに、両者の $ABIC$ の最小値を比較すると、真の境界水位を設定した場合の方が小さな値になっている。このことは真の境界水位に一致する条件を設定し、かつ、システム誤差分散を小さく設定した場合に、よい推定結果が得られることを示している。式(13)と式(14)を通してこの意味を考察すると、システム誤差分散を小さくすることは事前分布を規定する $P_{t_i/t_{i-1}}^*$ の各成分を小さくする効果があり、拡張ベイズ法において事前情報の重み係数 β を大きくすることと同様の効果がある。したがって、利用した観測データに対して採用した境界水位モデルが事前情報として尤もらしいことを示している。以下の様々な解析モデルの選定においても、この意味において同様の選定が行われる。

(2) 対数透水係数の確率特性の初期設定モデル

まず、対数透水係数の確率特性のうち初期推定値を変えた5種類のモデルを作成し、妥当なモデルが選定されることを確認する。ここでは5回の揚水試験結果を順次利用する¹⁸⁾ものとし、揚水試験 C, A, B, D, E の順序で模擬観測データを用いた。5種類のモデルと、その推定結果から $ABIC$ を最小にする α および $ABIC$ の最小値を表—5に示す。また、各モデルを用いた推定により α と $ABIC$ の関係を求め図—9に示す。この結果から、5種類のモデルのうち $ABIC$ が最小になるモデルは、対数透水係数において初期推定値を -1 に設定した推定 II-d であり、このモデルが最適モデルとして選ばれる。したがって、表—1に示したように領域全体の対数透水係数の母集団の平均値 -2 を真値とすると、適切なモデルが選択されたとは言いがたい。なお、標準である仮想地盤モデルの対数透水係数の平均値は -1.96 では母集団に等しい。このように適切なモデルが選定されなかった原因として、標準値として用いている

表-5 対数透水性係数の初期推定値モデルと各推定の ABIC の最小値

推定ケース	設定したモデル (初期推定値)	利用する揚水試験データ (試験位置)	ABICを最小にする α	ABICの最小値
推定 II-a	-4	C→A→B →D→E	2.0	-8628
推定 II-b	-3	C→A→B →D→E	1.0	-9838
推定 II-c	-2 (真)	C→A→B →D→E	0.6	-10351
推定 II-d	-1	C→A→B →D→E	0.6	-10566
推定 II-e	0	C→A→B →D→E	0.8	-10330

注) 試験位置は表-2参照。

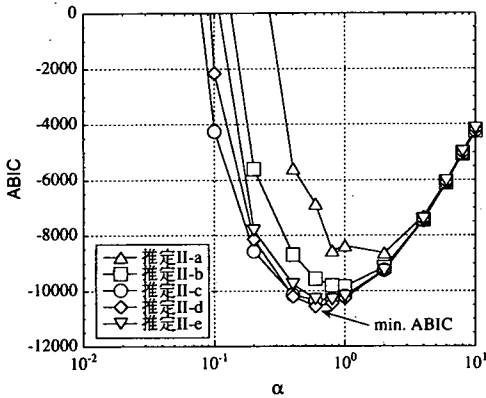


図-9 α と ABIC の関係 (対数透水性係数の初期推定値モデル; 試験利用順 C,A,B,D,E)

観測誤差分散の設定が真の状態である 0.0 とは異なることによる影響が考えられる。

このため観測誤差分散モデルのみ変えて同様に 5 回の揚水試験結果を順次用いた推定結果を図-10 に示す。これは先の (1) の検討において最もよい結果を与えた観測誤差分散モデル I-e を用いた場合で、観測誤差分散をシステム誤差分散の標準値の 0.001 倍としている。この結果、対数透水性係数の初期推定値として -2 を設定した推定 II-c の ABIC が最も小さな ABIC を示し、適切なモデル選定が可能になった。

クリッキングなどの地盤統計学により物性値の推定値と推定誤差の空間分布 (条件付き確率場) が得られている場合がある^{30),31)}。このような推定結果を事前情報として、対数透水性係数の確率特性の初期設定モデルを作成することも考えられる。しかし、逆解析とは異なる

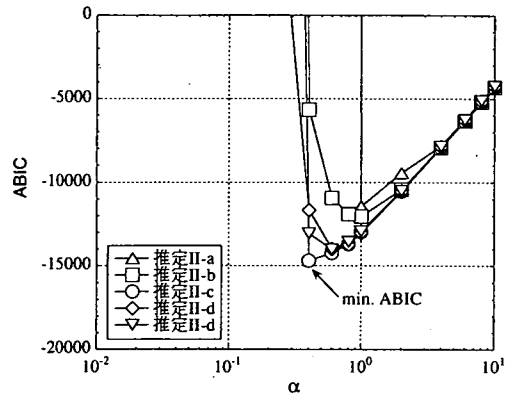


図-10 α と ABIC の関係 (対数透水性係数の初期推定値モデル; 試験利用順 C,A,B,D,E; 観測誤差分散モデル I-e)

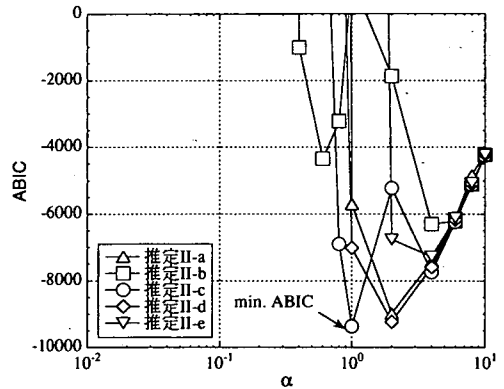


図-11 α と ABIC の関係 (対数透水性係数の初期推定値モデル; 試験利用順 E,D,B,A,C; 観測誤差分散モデル I-e)

り、物理則を直接介さない手法で得られた推定結果を事前情報とする場合、どの程度有効な事前分布であるかその判断が難しい。このような場合、ABIC を用いたモデル選定では事前情報の重みを適切に設定することが可能であることから、その有効性も判定しつつ推定を行うことが可能と考えられる。

以上、対数透水性係数の確率特性の初期設定モデルのうち、初期推定値モデルに関する選定結果と考察を示したが、推定誤差分散共分散行列の初期設定モデルに関する選定結果と考察は、次項 (3) の複数の揚水試験結果の利用順序において示す。

(3) 複数の揚水試験結果の利用順序

次に、利用する揚水試験の順序による影響を調べるため、上記 (2) の内容に関して揚水試験の利用順を逆

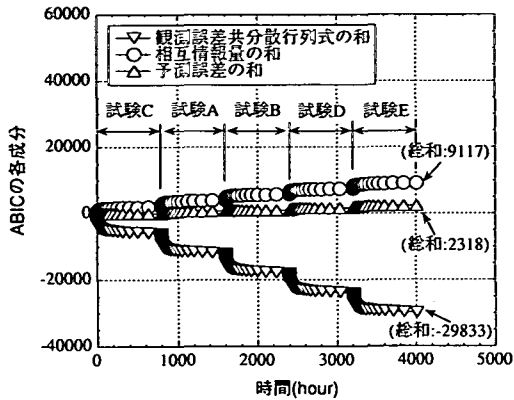


図-12 $ABIC$ の各成分の時系列変化(初期推定値モデルII-c; 試験利用順C,A,B,D,E; $\alpha = 0.4$)

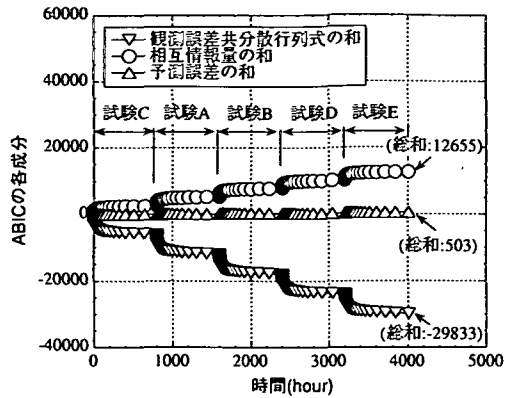


図-14 $ABIC$ の各成分の時系列変化(初期推定値モデルII-c; 試験利用順C,A,B,D,E; $\alpha = 1.0$)

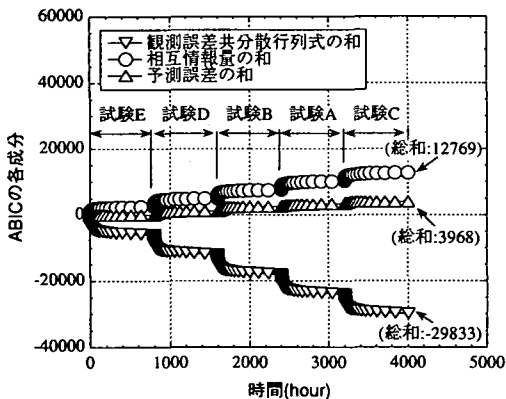


図-13 $ABIC$ の各成分の時系列変化(初期推定値モデルII-c; 試験利用順E,D,B,A,C; $\alpha = 1.0$)

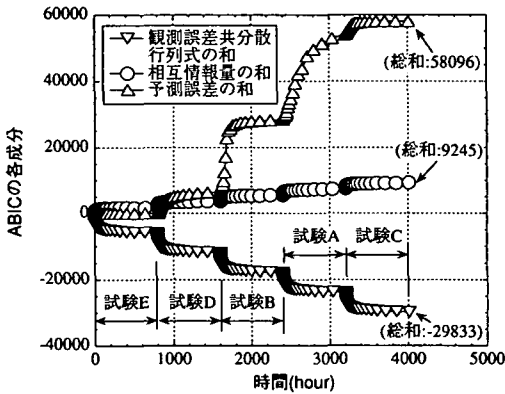


図-15 $ABIC$ の各成分の時系列変化(初期推定値モデルII-c; 試験利用順E,D,B,A,C; $\alpha = 0.4$)

順にしてE,D,B,A,Cの順序で推定を行った。この場合も、観測誤差分散モデルはI-eを用いた。その結果を図一11に示す。この結果から $ABIC$ が最小値を持つモデルは初期推定値モデルII-cとなり、選定されるモデルは真の状態に一致する。しかし、一般的に α の変化に対して $ABIC$ は不安定な変動を示している。また、得られた $ABIC$ の最小値も揚水試験C,A,B,D,Eの順序で求めた結果(図一10)と比較して大きな値である。このことから判断して、複数の試験結果などが独立に行われている場合、推定に利用する観測データの順序によって推定結果が異なり、揚水試験C,A,B,D,Eの順序で推定を行った方がよい結果が得られると考えられる。奥野ら¹⁸⁾は複数の試験結果を利用した推定により、(1) 独立な試験結果を順次用いて推定を行う場合、全ての観測データを利用して推定を終了した段階で相互情報量

は同一になり、観測データを用いる順序に依存しないことを確認し、(2) 試験結果を利用する順序を変えて推定を行い、同一の推定結果が得られるようシステム誤差を設定することを提案した。しかし、 $ABIC$ を用いたモデル選定の結果では、利用する試験の順序により推定結果が異なることを示唆している。この点について詳細な検討を行うため、式(15)の右辺各項の時系列的な変化を調べた。

式(15)の右辺の観測誤差分散に関する総和(第2項)、相互情報量に関する総和(第3項)、観測値に対する予測誤差の総和(第4項)を、それぞれ個別に示したのが図一12~15である。これらは全て初期推定値モデルII-cの場合で、図一12は揚水試験の利用順がC,A,B,D,Eで $\alpha = 0.4$ の場合を、図一13は揚水試験の利用順がE,D,B,A,Cで $\alpha = 1.0$ の場合を示しており、共に $ABIC$ が最小に

なった場合である。また、同じ初期推定モデル II-c に關して $ABIC$ が最小にならなかった場合として、図-14 は揚水試験の利用順が C, A, B, D, E で $\alpha = 1.0$ の場合を、図-15 は揚水試験の利用順が E, D, B, A, C で $\alpha = 0.4$ の場合を示している。まず、これら 4 つの図は R_t が同一であることから、観測誤差共分散行列式の和は同一(総和:-29833)である。揚水試験の利用順が同一の図-12 と図-14 では α の値の違いにより相互情報量の総和と観測値に対する予測誤差の総和に違いが生じている。同様に図-13 と図-15 も α の値により相互情報量の総和と観測値に対する予測誤差の総和に違いが生じている。揚水試験の利用順の違いのみを比較するには、図-12 と図-15、ならびに図-13 と図-14 を比較すればよい。図-12 と図-15 を比較すると、 α が同一であることから 5 回の揚水試験を利用し終わった段階で相互情報量の総和はほぼ同一(総和:9117 と 9245)になり、観測値に対する予測誤差の総和のみが異なっている。特に図-15 の観測値に対する予測誤差の総和は、途中、揚水試験 B, A, C を利用する段階で著しく増大しており、これが $ABIC$ を増大させた原因になっている。同様に図-13 と図-14 を比較すると、 α が同一であることから 5 回の揚水試験を利用し終わった段階で相互情報量の総和はほぼ同一(総和:12769 と 12655)になり、観測値に対する予測誤差の総和のみ異なる。しかし、図-14 の観測値に対する予測誤差の総和は図-13 よりも低下していることから、 $\alpha = 1.0$ の同一条件において揚水試験の利用順序 C, A, B, D, E の方が E, D, B, A, C よりも $ABIC$ の総和が最終的に小さくなる。なお、図-12 と図-15、および図-13 と図-14 の相互情報量の総和がそれぞれ厳密には一致しない理由は、本手法では拡張カルマンフィルタを用いることから非線形方程式を線形近似しているためと考えられる。すなわち、式 (11) の状態遷移行列 (Jacobian 行列) F_t の成分が推定値における微分係数で与えられることから、厳密には推定結果が推定過程 (試験結果の利用順) に依存するためである^{17), 18), 27)}。

本手法では、ある揚水試験結果による推定結果を事前分布 (初期設定) として受け継ぎ、次の揚水試験結果を用いてこの推定結果を更新し、これを繰り返すことで最終的に全揚水試験結果を網羅した推定を行う。図-12~15 の状況は、ある試験結果を利用して次の推定を行う場合の初期設定として、それまでに利用した試験結果からよりよい推定値が得られているほど、観測値に対する予測誤差が小さくなることを反映した結果となっている。これは逐次推定値を更新していく過程で出来るだけ早い段階によりよい推定値を得ることが、最終的にもよい推定結果を与えることを示唆している。前述の奥野¹⁸⁾ が示した内容の (2) の根拠として、ベ

表-6 対数透水係数の推定誤差分散共分散行列 (相関距離) の初期設定モデルと各推定の $ABIC$ の最小値

推定ケース	設定したモデル (相関距離: m)	利用する揚水試験データ (試験位置)	$ABIC$ を最小にする α	$ABIC$ の最小値
推定 III-a (A)	100	A	0.2	-1995
推定 III-a (AB)	100	A→B	2.0	-3248
推定 III-a (ABC)	100	A→B→C	2.0	-4982
推定 III-a (ABCE)	100	A→B→C →E	2.0	-6783
推定 III-a (ABCED)	100	A→B→C →E→D	2.0	-8782
推定 III-b (A)	200 (真)	A	0.4	-2019
推定 III-b (AB)	200 (真)	A→B	1.0	-3721
推定 III-b (ABC)	200 (真)	A→B→C	1.0	-5265
推定 III-b (ABCE)	200 (真)	A→B→C →E	1.0	-7377
推定 III-b (ABCED)	200 (真)	A→B→C →E→D	1.0	-9578
推定 III-c (A)	300	A	0.4	-2007
推定 III-c (AB)	300	A→B	1.0	-3691
推定 III-c (ABC)	300	A→B→C	2.0	-5149
推定 III-c (ABCE)	300	A→B→C →E	1.0	-7199
推定 III-c (ABCED)	300	A→B→C →E→D	1.0	-9387

注) 試験位置は表-2参照。

ズ推定では利用する試験結果の順番を変えても最終的な生起確率 (事後確率) は一致することを挙げているが、カルマンフィルタではベイズ推定法に基づく観測更新アルゴリズムのみでなく時間更新アルゴリズムによるシステム誤差が加わるため最終的な事後確率は一致しない³²⁾。領域全体で比較的早い段階によりよい推定値が得られていると、位置を変えた複数の試験結果を順次用いる推定過程においてそれ以降の観測値に対する予測誤差が平均的に小さくなり、システム誤差の最適値も推定過程全体を通して平均的に小さくなる。このため全試験結果を利用した後の $ABIC$ の最小値もより小さくなると考えられる。以上より、 $ABIC$ を用いる立場からは複数の試験結果を利用する順序にも最適な順序があるものと考えられる。

次に、前項 (2) の内容でもある対数透水係数の推定誤差分散共分散行列の初期設定モデルの選定結果を示

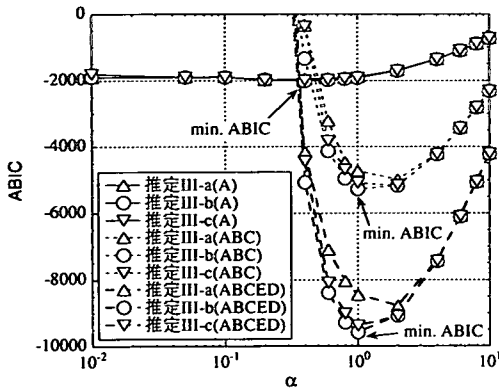


図-16 α と $ABIC$ の関係(対数透水係数の推定誤差分散共分散行列の初期設定モデル)

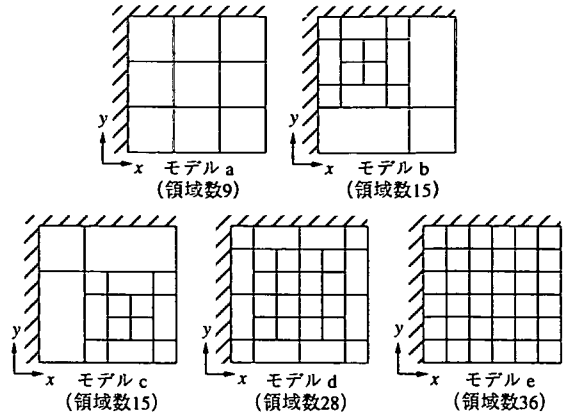


図-17 領域区分モデル

す。仮想地盤モデルの作成には表-1の共分散関数を用いられていることから、特に共分散関数の相関距離を変えた複数のモデルを作成した。その設定を表-6に示す。表-6の3種類のモデルに対して観測誤差分散として標準値を設定し、5回の揚水試験を順次用いて推定を行い、その過程で得られた $ABIC$ の値を図-16に示す。5回の揚水試験を A,B,C,E,D の順序で用いたところ、表-1と図-16に示すように、全ての推定段階において真の相関距離(200m)を設定した推定 III-b の $ABIC$ が最小値を示し、最適なモデルとして選定されている。

また、5回の揚水試験結果を順次用いると、 α が減少するのに伴いある特定の α において明確な最小値を示すようになる。仮想地盤モデルの対数透水係数の分散共分散構造は母集団から作成した1つの標本であるため、標本の分散共分散構造は場所により異なり当然母集団とも異なることになる。実際の地盤も1つの標本であり、このような標本に対して母集団の分散共分散構造を推定誤差分散共分散行列の初期設定モデルとして推定を行うと、これも一種のモデル誤差となる。先の2.(3)で述べたように、事前情報を用いることで解の唯一性は保証されるものの真の状態に一致するとは限らず、このような状況下でシステム誤差を過小に設定すると、局所的な観測データが再現できるように過度に透水係数を修正することになる。このため α を小さく設定すると、複数の揚水試験結果を順次用いる過程において、試験が実施されている位置に依存して推定値や推定誤差分散の空間分布に一時的かつ局所的な偏りが生じることが考えられる。したがって、一時的かつ局所的な偏りが生じた結果を次の推定の初期値として受け継ぐ段階で、事前分布に大きな重みを与える(α を小さく設定する)ことは必ずしも良い推定につながら

表-7 各領域区分モデルと各推定の $ABIC$ の最小値

推定ケース	設定したモデル(領域区分)	利用する揚水試験データ(試験位置)	$ABIC$ を最小にする α	$ABIC$ の最小値	最適モデル
推定 IV-a (A)	a	A	8.0	-584	
推定 IV-b (A)	b	A	1.0	-1825	
推定 IV-d (A)	d	A	0.6	-1850	
推定 IV-e (A)	e	A	0.2	-1932	○
推定 IV-a (E)	a	E	0.01	-2249	○
推定 IV-c (E)	c	E	0.01	-2240	
推定 IV-d (E)	d	E	0.01	-2236	
推定 IV-e (E)	e	E	0.01	-2230	

注) 試験位置は表-2参照。

ず、その重みには最適値が存在することになる。

(4) 透水係数の領域区分モデル

ここで検討対象とする領域区分モデルは図-17に示す5種類である。各モデルの領域間対数透水係数の相関特性は、表-1の共分散関数を用いて局所平均を行って設定した。これらの領域区分モデルに対する $ABIC$ 算定結果を表-7, 8, 図-18, 19に示す。

まず、1回の試験データを利用する場合、その試験位置により最適な領域区分モデルがどのように選定されるか調べた。表-7より試験 A のデータを用いた場合、 $ABIC$ が小さい順番はモデル e, d, b, a の順となる。これらの領域数はそれぞれ 36, 28, 15, 9 であるこ

表-8 領域区分モデル c, e と各推定の ABIC の最小値

推定ケース	設定したモデル (領域区分)	利用する揚水試験データ (試験位置)	ABIC を最小にする α	ABIC の最小値
推定 IV-c (E)	c	E	0.01	-2240
推定 IV-c (ED)	c	E→D	1.0	-3954
推定 IV-c (EDC)	c	E→D→C	2.0	-5109
推定 IV-c (EDCB)	c	E→D→C →B	2.0	-5476
推定 IV-c (EDCBA)	c	E→D→C →B→A	4.0	-6418
推定 IV-e (E)	e	E	0.01	-2230
推定 IV-e (ED)	e	E→D	2.0	-3546
推定 IV-e (EDC)	e	E→D→C	2.0	-5045
推定 IV-e (EDCB)	e	E→D→C →B	2.0	-6810
推定 IV-e (EDCBA)	e	E→D→C →B→A	2.0	-8535

注) 試験位置は表-2参照。

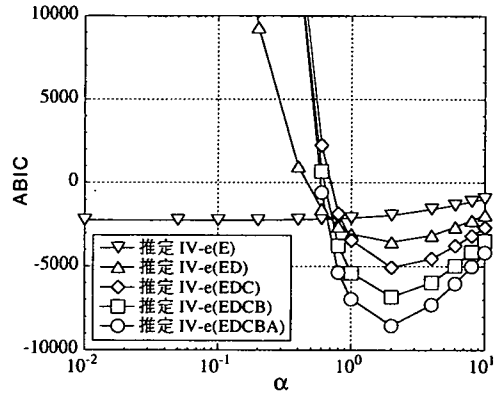


図-19 α と ABIC の関係 (領域区分モデル e)

の逆である。また、必ずしも試験領域周辺を詳細に領域区分したモデル b や c が選定されていないことも興味深い。

次に、複数の試験データの利用による最適領域区分の推移を示す。試験 E, D, C, B, A の順に揚水試験データを順次追加利用することで、ABIC から選定される最適領域区分モデルがどのように推移するか調べた。ただし、簡単のため領域区分モデルはモデル c と e の 2 種類とした。表-8 および図-18, 19 には、揚水試験データが追加されるのに伴って領域区分モデル c と e の ABIC の最小値の推移を示している。その結果、揚水試験データ E, D, C まではモデル e よりも c の ABIC の最小値の方が小さく、粗いモデルが選定される。さらに多くの揚水試験データ E, D, C, B を利用した推定や 5 回全ての揚水試験データ E, D, C, B, A を利用した推定では、詳細なモデル e が選定されている。これは情報量が増加することにより、詳細なモデルが選定されることを示している。

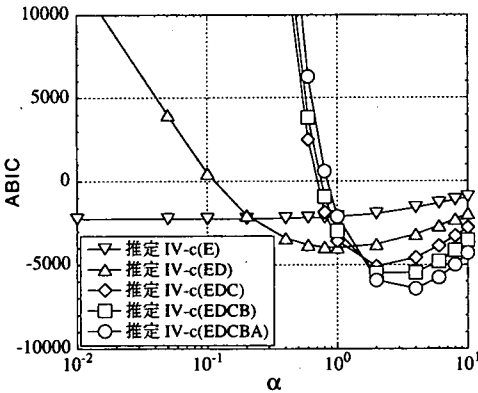


図-18 α と ABIC の関係 (領域区分モデル c)

(5) 初期条件モデル、境界条件モデル、貯留係数モデル

初期水位、境界水位、貯留係数(有効間隙率)の設定を変えたモデルをそれぞれ 3 種類ずつ準備し、1 回の揚水試験 C のみ用いてモデル選定を行った。なお、初期水位、境界水位、貯留係数の真値は前述のようにそれぞれ 0.0m, 0.0m, 6.0% である。各モデルとそれらのモデルを用いた推定から得られた ABIC の最小値を表-9 に、 α と ABIC の関係を図-20, 21, 22 に示す。

それぞれ真値に一致するモデルにおいて ABIC の最小値が得られていることから、モデル選定結果は妥当と言える。境界水位の設定の違いによる透水係数の推定値の違いを図-23 に示す。これは推定 VI-a ($\alpha = 10$)

とから、より詳細な領域区分モデルが選定されている。一方、試験 E のデータを用いた場合、ABIC が小さい順番はモデル a, c, d, e の順で、その領域数は 9, 15, 28, 36 であることから粗い領域区分モデルが選定されている。このような結果になる理由は、試験 A では不透水境界に挟まれたコーナー領域で揚水を行っていることから比較的広範囲の地下水位が低下し、地下水位観測データが領域全体の透水係数の情報を時系列的に供給するためと考えられる。すなわち試験 A は領域全体の透水係数を知るうえで比較的感度がよく、試験 E はこ

表-9 初期水位モデル, 境界水位モデル, 貯留係数モデルと各推定の ABIC の最小値

推定ケース	検討対象	真値	設定したモデル	ABIC を最小にする α	ABIC の最小値	最適モデル
推定 V-a	初期水位	領域内 一律 0.0m	一律 -0.5m	6.0	-805	
推定 V-b			一律 0.0m (真)	0.01 ~ 0.1	-2126	○
推定 V-c			一律 +0.5m	4.0	-975	
推定 VI-a	境界水位 (地下水位 指定境界)	0.0m で 一定 (初期水位 のまま一定)	30日後に -1.0m になる よう一定率で減少	10	-668	
推定 VI-b			0.0m で一定 (真)	0.01 ~ 0.1	-2126	○
推定 VI-c			30日後に +1.0m になる よう一定率で増加	0.4	-1957	
推定 VII-a	貯留係数 (有効空隙 率)	全領域 6.0%	全領域 1.0%	4.0	-890	
推定 VII-b			全領域 6.0% (真)	0.01 ~ 0.1	-2126	○
推定 VII-c			全領域 10.0%	0.6	-1837	

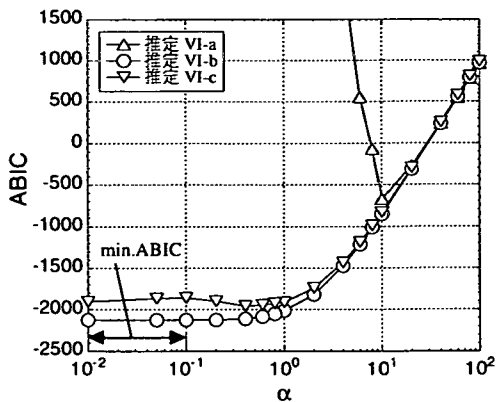


図-21 α と ABIC の関係 (境界水位モデル)

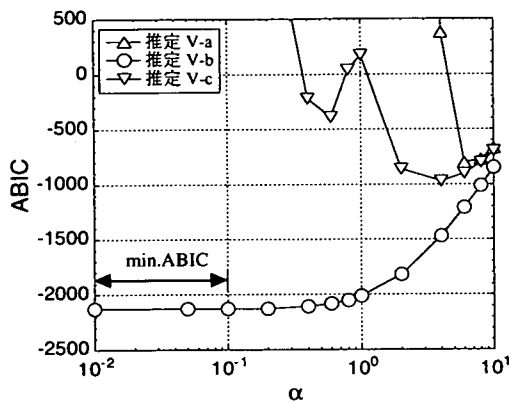


図-20 α と ABIC の関係 (初期水位モデル)

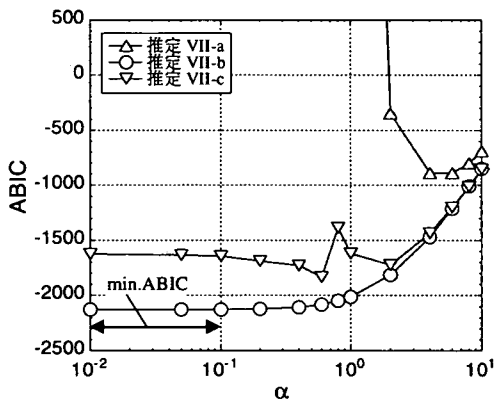


図-22 α と ABIC の関係 (貯留係数モデル)

の場合であり、最適モデルとして選定される推定 VI-b ($\alpha = 0.01$) は先の図-5 (推定 I-a, $\alpha = 0.01$) と同一である。図-23 と図-5 を比較すると、推定 VI-b の方が真値 (図-2) に近い推定値が得られ、境界条件が適切にモデル化されていない推定 VI-a では、透水係数の推定結果は大きく異なっている。

(6) 観測誤差モデル

最後に、観測値に含まれる観測誤差がどの程度かを推定する目的から、観測誤差を付加した模擬地下水位データを用いてモデル選定を行った。ここでは揚水試験の模擬観測地下水位に、 $N(0.0, 4.0)$ の観測誤差 (単位 cm) を付加し、これを真値として表-10 に示す 5 種類の観測誤差のモデルを準備した。各観測誤差モデルごとの係数 α と ABIC の関係を図-24 に示す。これより真の観測誤差に一致する $N(0.0, 4.0)$ のモデルが $\alpha = 0.8$ において他のモデルよりも ABIC が最小になり、最適

な観測誤差モデルとして選定される。これは妥当な結果と言える。

5. 結論

原位置の地盤状況を知るには経済的理由などから事前に限られた情報しか存在せず、推定しようとする特定のパラメータ以外にも解析に用いるモデルに付随して材料特性の領域区分や境界条件など各種の条件設定に不確実性が存在する。本論文では、地盤工学に逆解析を適用する場合に重要な問題と考えられる解析モデルの構築における各種条件設定の不確実性を考慮して、限られた情報の下での推定手法を提案した。以下に提案手法の特徴と本論文で得られた知見をまとめる。

- (a) 本論文では、拡張カルマンフィルタと有限要素法を組み合わせた透水係数の空間分布推定手法を基礎として、解析モデルの構築における各種条件設定

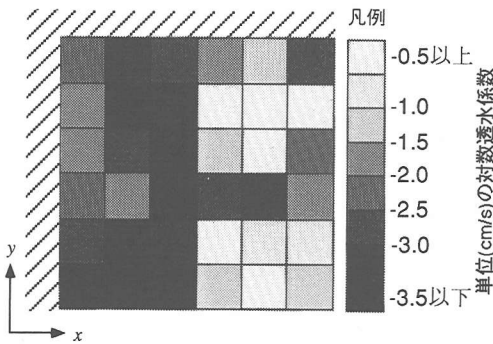


図-23 透水係数の推定結果 (推定 VI-a, $\alpha = 10$)

表-10 観測誤差モデルと各推定の ABIC の最小値

推定ケース	検討対象	真値	設定したモデル (観測誤差)	ABIC を最小にする α	ABIC の最小値	最適モデル
推定 VIII-a	地下水位の観測誤差 (9ヶ所の観測水位)	$N(0.0, 4.0)$ (正規分布; 平均値cm, 分散 cm^2)	$N(0.0, 16.0)$	0.001~0.01	-1576	
推定 VIII-b			$N(0.0, 8.0)$	0.2	-1723	
推定 VIII-c			$N(0.0, 4.0)$ (真)	0.8	-1759	○
推定 VIII-d			$N(0.0, 2.0)$	2.0	-1684	
推定 VIII-e			$N(0.0, 1.0)$	2.0	-1608	

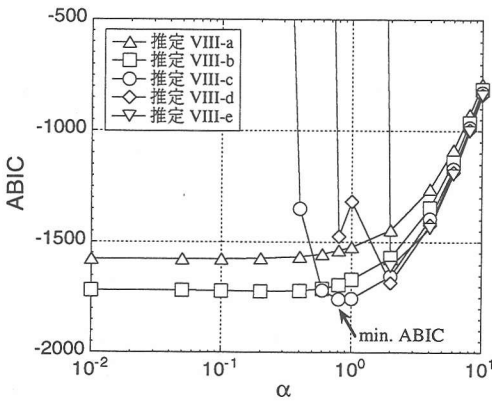


図-24 α と ABIC の関係 (観測誤差モデル)

の不確実性も考慮する目的からモデルの評価基準として ABIC を導入し、カルマンフィルタのシステム誤差と観測誤差を適切に選定すると共に、複数の解析モデル代替案の中から ABIC が最小になるモデルを選定することで相対的かつ客観的なモデル選定を行い、同時に未知パラメータである透水係数を推定する手法を提案した。

(b) 新たに ABIC の逐次計算法を示した。この方法により、各解析モデル代替案ごとに拡張カルマンフィルタに基づく透水係数の空間分布推定を行うと共に、それと併行して ABIC の逐次計算を行うことが可能である。したがって、新たな追加観測データを加えて推定値を更新する場合、それまでの推定過程で得られた ABIC の値に、追加された観測データによる ABIC の増減を加算して総和を求めることが可能になり、原位置で得られる観測データの追加に対処して、時系列の中のそれぞれの時点で最も効率的なモデル選定が可能になる。

(c) 模擬観測データを用いた推定シミュレーションにより、透水係数 (対数透水係数) の確率特性の初期設定、透水係数の領域区分、初期地下水位、境界地下水位、貯留係数 (有効間隙率)、観測誤差のモデル選定を行い、妥当なモデル選定結果が得られた。ただし、観測点よりも未知パラメータ数が多い場合、特定の試験結果に対してのみ最適化されたモデルは、未知パラメータ全体に対して必ずしもよい推定結果を与えているとは言えない。この解決のためには、位置を変えた複数の試験結果の利用ならびに未知パラメータ数を制限するための領域区分モデルの選定が考えられる。位置を変えた複数の試験結果を順次利用すると、情報量が増加するのに伴いより詳細な領域区分モデルが選定され、情報量とモデルの複雑さのバランスの観点から妥当な結果が得られる。

(d) 対象とするモデル条件以外にも同時にモデル誤差の大きな条件が存在する場合、その影響 (感度) の大きさによっては適切なモデル選定が不可能になる場合がある。これは ABIC の導出に漸近理論が用いられているためと考えられ、比較的真的条件に近いモデル同士を比較しなければ適切なモデル選定は不可能になる。この解決のため、推定結果に対する解析モデルの条件設定や観測点配置について、必要に応じて感度解析を行うことも重要であり、ある時点で選定されたモデルの妥当性は次なる予測を通して検証され、目的に応じてより良いモデルに改良される必要がある。ABIC によるモデル構築 (選定) は、その選定過程 (推定過程) を通して複雑な状況の中から問題を絞り込み、その推定に基づく予測結果の検証を通して問題の本質を見極める有効な手段になるものと考えられる。

(e) 位置を変えた複数の試験結果を利用する場合、利用順序が推定結果に与える影響についても考察した。その結果、本手法では観測誤差が同一であれば、未知パラメータ全体に対して感度の大きな試験結果を初期段階で用い、局所的にしか感度を持

たない試験結果を最終段階に用いるよう利用順序を調整する方が、最終的に最適な推定結果が得られる。その理由として、利用順序を変えても得られる相互情報量はほぼ同一であるが、初期段階に領域全体でよりよい推定値が得られるほど、後続する試験結果に対する予測誤差が小さくなるためである。この結果は、推定過程において後続する試験結果に対する予測精度がよいモデルほど、利用した試験以外の観測値に対しても予測精度がよくなることを期待した選定結果である。ABICにはこのような判断基準が内在しており、予測のためのモデル選定として統計的に自然な評価基準と考えられる。

付録 A 時系列モデルの尤度計算と ABIC

システム状態方程式と観測方程式は式 (7), (5) で与えられるものとし、ここでは w_t は技術者が設定したシステム誤差成分、 α が未知の超パラメータであり、 αw_t が真のシステム誤差を与える場合を考える。したがって超パラメータの関数としてベイズモデルの対数尤度が求められる。

時間ステップ 1 から N までの観測データ $\mathcal{Y}_N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ が未知パラメータベクトル θ によって規定されるとする。長さ N の時系列データが与えられた時、 N 次元の同時確率密度関数が $p_{\mathcal{Y}_N}(y_1, y_2, \dots, y_N | \theta)$ で表されるとすると、超パラメータ λ の下でベイズモデルの尤度 (Bayesian likelihood) は以下の式で与えられる。

$$L(\lambda) = \int p_{\mathcal{Y}_N}(\mathcal{Y}_N | \theta) p_{\theta}(\theta | \lambda) d\theta \quad (\text{A.1})$$

ここで未知パラメータベクトル θ に換えて、観測データ \mathcal{Y}_N を規定するパラメータとして状態ベクトルの時系列 $\mathcal{X}_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を考える。さらに、この \mathcal{X}_N を規定する超パラメータとして式 (6) で導入した α を考える。すなわち、式 (7) において x_t に基づき有限要素法と透水係数の定常性から求められる $f_t(x_t)$ および技術者が設定したシステム誤差成分 w_t に対して、 α の設定が次のステップにおける x_{t+1} を規定するものとする。これを各時間ステップに関して繰り返すことで、最終的に時系列 \mathcal{X}_N が α により規定されるものとする。以上の考えに従い、超パラメータ α の下でのベイズモデルの尤度を求める。具体的には式 (A.1) に換えて以下の式が得られる。

$$L(\alpha) = p_{\mathcal{Y}_N}(y_1, y_2, \dots, y_N | \mathcal{X}_N, \alpha) \\ = \prod_{t=1}^N p_{y_t}(y_t | \mathcal{Y}_{t-1}, \mathcal{X}_t, \alpha)$$

$$= \prod_{t=1}^N \int p_{y_t}(y_t | x_t) p_{x_t}(x_t | \mathcal{Y}_{t-1}, \mathcal{X}_{t-1}, \alpha) dx_t \quad (\text{A.2})$$

システム状態方程式と観測方程式が線形で状態ベクトル x_t と観測誤差 v_t が正規白色性を有する場合は、任意の時間ステップ t において状態ベクトル x_t の事前分布、ならびに観測ベクトル y_t の事後分布と事前分布は以下の正規分布で与えられる。

$$p_{x_t}(x_t) = p_{x_t}(x_t | \mathcal{Y}_{t-1}, \mathcal{X}_{t-1}, \alpha) \\ = p_{x_t}(x_t | \hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}^*) \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} |P_{t/t-1}^*|^{-1/2} \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_t - \hat{x}_{t/t-1})^T P_{t/t-1}^{*-1} (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$p_{y_t}(y_t | x_t) = p_{y_t}(y_t | x_t, R_t) \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} |R_t|^{-1/2} \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_t - G_t x_t)^T R_t^{-1} (y_t - G_t x_t) \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$p_{y_t}(y_t) = p_{y_t}(y_t | \mathcal{Y}_{t-1}, \mathcal{X}_{t-1}, \alpha) \\ = p_{y_t}(y_t | \hat{x}_{t/t-1}, D_{t/t-1}) \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} |D_{t/t-1}|^{-1/2} \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1})^T D_{t/t-1}^{-1} (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1}) \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$D_{t/t-1} = G_t P_{t/t-1}^* G_t^T + R_t \quad (\text{A.6})$$

式 (A.3) の $P_{t/t-1}^*$ は式 (11) で与えられる推定誤差分散共分散行列の予測値であり、時間ステップ t において事前分布の分散共分散行列である。本手法では観測方程式は線形であるが、システム状態方程式は非線形である。このため上記の式 (A.3), (A.4), (A.5) は厳密には正規分布とならない。拡張カルマンフィルタでは一次近似により線形化を行っており、その誤差もシステム誤差に含めて考え、上記の確率分布として等価な正規分布を仮定する。

本来、ABIC は式 (A.1) に基づき式 (1) で定義されるが、ここでは式 (A.2) に基づき次の式 (A.7) で ABIC を定義する。これは式 (A.3), (A.4) により、時系列データ \mathcal{Y}_N が得られた後の ABIC(α) は、観測ベクトル y_t が得られた下でのベイズモデルの各対数尤度 $\ell_t(\alpha)$ (log-Bayesian likelihood) の総和で与えられることに基づく。ただし、ここでは $2 \times (\text{number of hyperparameters})$ を

省略している。

$$\begin{aligned} ABIC(\alpha) &= -2 \log L(\alpha) \\ &= \sum_{t=1}^N (-2) \ell_t(\alpha) = \sum_{t=1}^N ABIC_t(\alpha) \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\begin{aligned} ABIC_t(\alpha) &= -2 \ell_t(\alpha) \\ &= -2 \log \int p_{y_t}(y_t | x_t, R_t) \\ &\quad \cdot p_{x_t}(x_t | \hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}^*) dx_t \end{aligned} \quad (A.8)$$

カルマンフィルタの観測更新アルゴリズムは、観測ベクトル y_t が得られた後の状態ベクトル x_t の事後確率から最尤推定値を求めるアルゴリズムである。これには式 (A.9) のベイズの定理が用いられる。

$$p_{x_t}(x_t | y_t) = \frac{p_{y_t}(y_t | x_t) p_{x_t}(x_t)}{p_{y_t}(y_t)} \quad (A.9)$$

式 (A.9) の左辺の事後確率を最大にする x_t を求めると、これが観測更新アルゴリズムによる推定値 (ベイズ推定値) となる。実際、式 (A.3), (A.4) を式 (A.9) の右辺分子に代入すると式 (A.10) が得られる。

$$\begin{aligned} p_{y_t}(y_t | x_t) p_{x_t}(x_t) &= p_{y_t}(y_t | x_t, R_t) p_{x_t}(x_t | \hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}^*) \\ &= (2\pi)^{-(m+n)/2} \cdot |R_t|^{-1/2} \cdot |P_{t/t-1}^*|^{-1/2} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_t - G_t x_t)^T R_t^{-1} (y_t - G_t x_t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (x_t - \hat{x}_{t/t-1})^T P_{t/t-1}^{*-1} (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) \right\} \end{aligned} \quad (A.10)$$

この指数部の行列の式展開に逆行列補題 (matrix inversion lemma) を用いると、同時確率密度関数は以下の式 (A.11) のように展開することができる。

$$\begin{aligned} p_{y_t}(y_t | x_t) p_{x_t}(x_t) &= p_{y_t}(y_t | x_t, R_t) p_{x_t}(x_t | \hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}^*) \\ &= (2\pi)^{-(m+n)/2} \cdot |R_t|^{-1/2} \cdot |P_{t/t-1}^*|^{-1/2} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_t - \hat{x}_{t/t-1})^T P_{t/t-1}^{-1} (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1})^T (D_{t/t-1})^{-1} (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1}) \right\} \end{aligned} \quad (A.11)$$

ただし、上記の各ベクトルと行列は以下で与えられる。

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t [y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1}] \quad (A.12)$$

$$K_t = [G_t^T R_t^{-1} G_t + P_{t/t-1}^{*-1}]^{-1} G_t^T R_t^{-1} \quad (A.13)$$

$$P_{t/t} = [G_t^T R_t^{-1} G_t + P_{t/t-1}^{*-1}]^{-1} \quad (A.14)$$

また、式 (A.9) の右辺分母は式 (A.5) で与えられることから、最終的に式 (A.9) の右辺を計算した結果の対数尤度をとると、事後確率 $p_{x_t}(x_t | y_t)$ に関する最尤推定値は以下の評価関数を最小にする x_t になる。

$$J_t(x_t | y_t) = (x_t - \hat{x}_{t/t})^T P_{t/t}^{-1} (x_t - \hat{x}_{t/t}) \quad (A.15)$$

この関数を最小にする推定値は $\hat{x}_{t/t}$ として式 (A.12) から与えられる。これはベイズ推定値でもある。したがって、カルマンフィルタの観測更新アルゴリズムにおいて、式 (A.12), (A.13), (A.14) はそれぞれフィルタ方程式、カルマンゲイン、推定誤差分散共分散行列となる。

一方、ABICの計算において、式 (A.11) は式 (A.8) の被積分関数でもあることから、式 (A.11) を式 (A.8) に代入し、対数尤度から $ABIC_t(\alpha)$ の算定式を求めることができる。その結果、以下の式 (A.16) が得られる。

$$\begin{aligned} ABIC_t(\alpha) &= -2 \ell_t(\alpha) \\ &= -2 \log \left[(2\pi)^{-m/2} \cdot |R_t|^{-1/2} \cdot |P_{t/t-1}^*|^{-1/2} \right. \\ &\quad \cdot |P_{t/t}|^{1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1})^T (D_{t/t-1})^{-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1}) \right\} \\ &= m \cdot \log(2\pi) + \log |R_t| \\ &\quad + \log |P_{t/t-1}^*| - \log |P_{t/t}| \\ &\quad + (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1})^T (D_{t/t-1})^{-1} (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1}) \end{aligned} \quad (A.16)$$

以上は時間ステップ t における観測更新アルゴリズムを対象とした算定である。これを式 (A.7) に代入するとカルマンフィルタの時間更新アルゴリズムに従って N ステップまでの時系列データに対する $ABIC(\alpha)$ が求められる。

$$\begin{aligned} ABIC(\alpha) &= \sum_{t=1}^N ABIC_t(\alpha) \\ &= mN \cdot \log(2\pi) + \sum_{t=1}^N \log |R_t| \\ &\quad + \sum_{t=1}^N \left\{ \log |P_{t/t-1}^*| - \log |P_{t/t}| \right\} \\ &\quad + \sum_{t=1}^N (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1})^T (D_{t/t-1})^{-1} (y_t - G_t \hat{x}_{t/t-1}) \end{aligned} \quad (A.17)$$

参考文献

- 例えば、講座「地盤工学における逆解析」、土と基礎、Vol.43, No.4-No.12, Vol.44, No.1, No.3-No.7, 1995-1996.
- 久保司郎：逆問題、計算力学とCAEシリーズ10、培風館、1992.

- 3) Yeh, W. W.-G. : Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology : the inverse problem, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.95-108, 1986.
- 4) Carrera, J. and Neuman, S. P. : Estimation of aquifer parameters under transient and steady state conditions : 1, 2 & 3, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.199-242, 1986.
- 5) Sun, N.-Z. : *Inverse Problems in Groundwater Modeling*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- 6) Arai, K., Ohnishi, Y. and Kasagawa, M. : Parameter estimation of unconfined aquifer by measuring change of groundwater level, *Soils and Foundations*, Vol.25, No.4, pp.129-134, 1985.
- 7) 大西有三, 井尻祐二 : 不均質地盤における浸透流の逆問題解析手法に関する基礎的研究, *土木学会論文集*, 第376号 / III-6, pp.121-130, 1986.
- 8) 青木一男, 嘉門雅史 : 不均質地盤における帯水層定数の同定について, *土木学会論文集*, 第382号 / III-7, pp.91-99, 1987.
- 9) 本城勇介, 森嶋章 : 地下水浸透流解析モデルのパラメータ推定 : 推定の不確実性とその予測への影響, *土木学会論文集*, 第400号 / III-10, pp.215-224, 1988.
- 10) 河野伊一郎, 西垣誠, 竹下祐二 : 逆解析手法を用いた被圧帯水層における揚水試験結果の解析方法, *土質工学会論文報告集*, Vol.29, No.2, pp.159-168, 1989.
- 11) 長谷川高士, 村上章, 浜口俊雄 : 拡張カルマンフィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水変動量評価による揚水量決定, *土木学会論文集*, 第505号 / III-29, pp.297-305, 1994.
- 12) 本城勇介 : 地下水浸透流解析モデルのパラメータ推定 : 最適モデルの選択, 第24回土質工学研究発表会, pp.1647-1650, 1989.
- 13) 本城勇介, 福井宏行, 小川正二 : 拡張ベイズ法による広域地下水モデルの逆解析 : 定常データに基づく場合, *土木学会論文集*, 第535号 / III-34, pp.93-102, 1996.
- 14) Neuman, S. P. and Yakowitz, S. : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 1. theory, *Water Resources Research*, Vol.15, No.4, pp.845-860, 1979.
- 15) Honjo, Y., Liu, W.-T. and Guha, S. : Inverse analysis of an embankment on soft clay by extended Bayesian method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.18, pp.709-734, 1994.
- 16) 堀宗朗, 山口栄輝, 細川直行 : 岩盤の有効浸透係数の限界値の推定や確率論的推定に関する基礎的研究, 第9回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.133-138, 1995.
- 17) 奥野哲夫, 鈴木誠 : 不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水系数の空間分布推定法, *土木学会論文集*, No.469 / III-23, pp.93-102, 1993.
- 18) 奥野哲夫, 鈴木誠, 市川康明 : 複数の揚水試験結果を用いた透水系数の空間分布推定と地下水流動の将来予測, *土木学会論文集*, No.493 / III-27, pp.165-174, 1994.
- 19) 奥野哲夫, 鈴木誠 : ベイズ決定理論と観測的方法を用いた掘削工事における最適排水量の設定とその更新, *土木学会論文集*, No.523 / III-32, pp.69-81, 1995.
- 20) Akaike, H. : Likelihood and Bayes procedure with discussion, Bernaldo, J. M., DeGroot, M. H., Lindley, D. V. and Smith, A. F. M. (eds.), *Bayesian Statistics*, Valencia University Press, pp.143-166, pp.185-203, 1980.
- 21) 赤池弘次 : 事前情報の選択とその応用, *ベイズ統計学とその応用* (鈴木雪夫, 国友直人 編), 東京大学出版会, pp.81-98, 1989.
- 22) 赤池弘次監修 : 時系列解析の実際 I, II, (赤池弘次, 北川源四郎 編), 朝倉書店, 1994, 1995.
- 23) Akaike, H. : Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, 2nd Inter. Symp. on Information Theory, Petrov, B. N. and Csaki, F. (eds.), Akademiai Kiado, Budapest, pp.267-281, 1973.
- 24) Akaike, H. : A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-19, pp.716-723, 1974.
- 25) 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎 : *情報量統計学*, 共立出版, 1983.
- 26) 北川源四郎 : *FORTRAN 77 時系列解析プログラミング*, 岩波書店, 1994.
- 27) 片山徹 : *応用カルマンフィルタ*, 朝倉書店, 1983.
- 28) 有本卓 : *カルマン・フィルター*, 産業図書, 1977.
- 29) Bui, H. D. (青木繁 他 訳) : *材料力学における逆問題*, 裳華房, 1994.
- 30) de Marsily, G. : *Quantitative Hydrogeology*, Academic Press Inc., 1986.
- 31) 田中靖治, 奥野哲夫, 鈴木誠 : 透水系数の空間分布を考慮した地下水解析手法の提案, *土木学会論文集*, No.517 / III-31, pp.83-92, 1995.
- 32) 吉田郁政, 豊田耕一, 星谷勝 : 時間更新を考慮した逆解析と観測点配置の評価指標, *土木学会論文集*, No.543 / I-36, pp.271-280, 1996.

(1996. 12. 4 受付)

OPTIMUM GROUNDWATER MODELING AND IDENTIFICATION OF HYDRAULIC CONDUCTIVITIES BASED ON *ABIC* AND EXTENDED KALMAN FILTER ALGORITHM

Tetsuo ÔKUNO, Makoto SUZUKI and Yusuke HONJO

In the application of the inverse analysis to the field of geotechnical engineering, it is important to take into account of the uncertainty of both the modelings and their parameters, because the information of the subsurface is limited in many cases. We propose a new technique for both the model selection and the parameter identification based on the *ABIC* (Akaike Bayesian Information Criterion) minimization method and the extended Kalman filter algorithm. A recursive calculation technique for *ABIC* with the Kalman filter algorithm is also proposed. We demonstrate the availability of the proposed technique. Particularly, 1)the prior stochastic distribution of the hydraulic conductivities, 2)the zonation, 3)the initial condition, 4)the boundary condition, 5)the specific storage coefficient and 6)the observation noise are selected as the optimum modeling. The order of the data using of plural pumping tests is also discussed. The estimation of the system noise plays an important role, because the system noise is influenced by the modeling error.