

クノイド波動下における層流底面境界層の 解析解とその実験的検証

田中 仁¹・Mutlu SUMER²・Jørgen FREDSE³

¹正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科(〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

²Ph.D. デンマーク工科大学助教授 水工水理研究所(Building 115, DK-2800 Lyngby, Denmark)

³Ph.D. デンマーク工科大学教授 水工水理研究所(Building 115, DK-2800 Lyngby, Denmark)

層流時のクノイド波動下における底面境界層の解析解を導いた。解はフーリエ級数の形で表されている。これにより、アーセル数などの波の諸元が与えられれば、初等関数の計算だけで流速、底面せん断力などを求めることが出来る。計算の結果、谷位相と峰位相での最大せん断力、その位相の進み、境界層厚さなどが、アーセル数の増加に応じて変化し、正弦振動流下とは顕著に異なる特性が見られた。また、底面せん断力の経時変化も正弦波形から大きく異なるようになる。実験によりここに示した理論の妥当性の検証を行った結果、良好な一致が見られた。

Key Words: laminar boundary layer, asymmetric oscillatory flow, cnoidal waves

1. はじめに

過去に行われた波動境界層に関する研究は枚挙にいとまがないが、そのほとんどは正弦振動流を対象にしたものである。しかし、砂移動が活発な浅海域においては波動の非線形性が卓越して来るため、このような正弦波をもとにした知見で現象を説明することには必ずと限界がある。クノイド波理論はこのような浅海域の波動現象を表現するのに適しているが、その表現式の中に Jacobi の楕円関数を含むために取り扱いが煩雑であり、それゆえ、これに伴う底面境界層に関する研究も、浅野ら¹⁾、灘岡ら^{2), 3)}、Larson⁴⁾、田中ら⁵⁾を数える程度で、きわめて情報が乏しい状況にある。

本研究では、層流時のクノイド波境界層の解析解を導き、これをもとにアーセル数の変化に伴う流速分布・境界層厚さ・底面せん断力の変化を調べ、正弦波動下との相違を明らかにした。また、実験値との比較により、ここで得た理論の妥当性を検証した。なお、任意波形の境界層外縁流速の下での線形解はすでに Keulegan⁶⁾により得られているが、積分形で表されている点で、初等関数で表された本研究の解と大きく異なっている。

ただし、ここで得た解は層流に対するものであるため、粗面乱流となることが多い現地スケールの問題に直接的には適用出来ない場合が多いであろうが、以下の点にその価値が見いだされる。まず、非対称振動流の構造がほ

とんど知られていない現在、その基礎的物理現象を理解するのに役立つ。それは、正弦振動流境界層の層流解が現在まで果たしてきた役割を見れば明らかである。今後浅海域における波動の下での net の漂砂量に関する議論を精緻化するためには、非線形波動境界層特有の現象について理解を深めなければならない。第二に、実験室レベルでの現象は層流から遷移域に当たる場合が多いので、そこでの砂移動現象等を考える際には、ここに示す成果が直接的に活用できる。第三に、今後、非対称振動流場での乱流遷移に関する研究が進展すると考えられ、遷移前の諸水理特性(流速分布、摩擦係数など)を十分に把握しておくことにより、遷移点の定義が明確になる。

2. 理論

(1) 境界層外縁流速の初等関数による表現

まず、境界層外縁での境界条件を与える完全流体としての波動解を簡素化された形で表現する。クノイド波の第一次近似理論によれば、水平流速 U の経時変化は次式で与えられる。

$$U = \frac{U_c}{1 - cn^2} \left\{ cn^2 \left(\frac{2Kt}{T} - cn^2 \right) \right\} \quad (1)$$

ここで、 U_c : 峰位相での流速の最大値、 cn : Jacobi の楕円関数、 K : 第一種完全楕円積分、 t : 時間、 T : 周期であり、バーは一周期にわたる平均を表す。さて、Jacobi の楕円

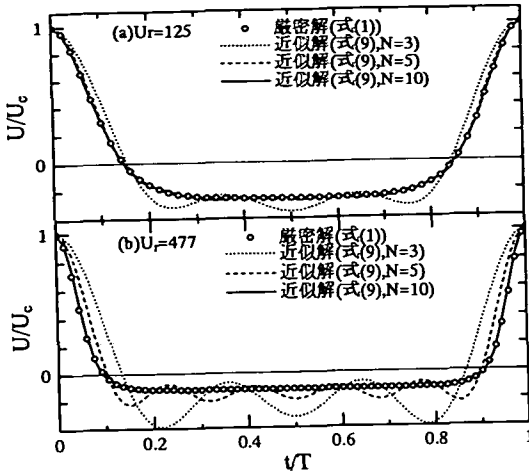


図-1 境界層外縁流速

関数にはノーム q のべき級数で表された次式の様なフーリエ級数展開式⁷⁾がある。

$$cnx = \frac{2\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+1/2}}{1+q^{2m+1}} \cos\left\{(2m+1)\frac{\pi x}{2K}\right\} \quad (2)$$

ここで、 k : 楕円関数の母数である。上式中の q , K , k はアーセル数 $U_r = HL^2/h^3$ (H : 波高, L : 波長, h : 水深) が十分に小さい時, および十分に大きい時に次式で近似される⁵⁾。

アーセル数小の時:

$$q = \frac{3}{64\pi^2} U_r \quad (3)$$

$$K = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$k = 16q \quad (5)$$

アーセル数大の時:

$$q = \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\sqrt{3}U_r}\right) \quad (6)$$

$$K = \frac{\pi^2}{2\ln(1/q)} \quad (7)$$

$$k = 1 \quad (8)$$

そこで、式(2)を式(1)に代入し、さらに上三式を考慮すれば、次式の様なフーリエ級数で表された流速変動式が得られる。

$$U = \frac{U_c}{B_N} \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t) \quad (9)$$

ここで、 ω : 角振動数であり、また式中の係数は次の式で与えられる。

$$a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{n-k-1} + \sum_{k=0}^{N-n-1} A_k A_{k+n} \quad (10)$$

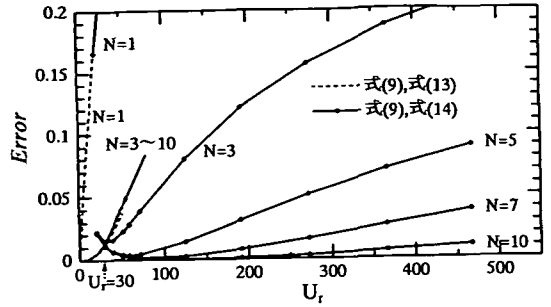


図-2 近似式の誤差

$$A_k = \alpha \frac{q^{k+1/2}}{1+q^{2k+1}} \quad (11)$$

$$B_N = \sum_{n=1}^N a_n \quad (12)$$

$$\text{アーセル数小の時: } \alpha = \frac{1}{\sqrt{q}} \quad (13)$$

$$\text{アーセル数大の時: } \alpha = \frac{4}{\pi} \ln(1/q) \quad (14)$$

式(9)の精度を検討したものが図-1(a), (b)である。アーセル数によっては、多くの項までを必要とすることが分かる。この点を定量的に評価するために、次式により誤差を定義する。

$$\text{Error} = \left[\sum_{i=1}^M \left\{ \frac{U_{i(\alpha)}}{U_c} - \frac{U_{i(\text{ap})}}{U_c} \right\}^2 / M \right]^{1/2} \quad (15)$$

ここで、添字 ex , ap はそれぞれクノイド波第一次近似理論(式(1))および近似式(9)による計算値を表し、 i は一周内の位相を表すインデックスである。分割数 M を1000として行った計算の結果を図-2に示した。式(13)を用いたときの誤差は、当然のことながらアーセル数の増加と共に大きくなる。一方、式(14)を用いた近似式で、小さいアーセル数の時に誤差が大きくなるのは式(6)~(8)の精度が下がるためである。また、大きいアーセル数では図-1(b)に見られるように平坦な谷部の継続時間が長くなり、正弦波からのずれが顕著になるため、これを表現するためにやはり十分な項数 N を必要とする。このため、式(14)による場合、誤差はあるアーセル数で極小値を持つこととなる。図-2より、 $U_r = 30$ をはさんで式(13), (14)を使い分ければ良からう。この時、 $N=10$ 程度にとれば、式(15)により定義される平均誤差は $U_r < 500$ の範囲ではおおよそ1%以内に押さえられることが分かる。以上の式より、アーセル数が与えられれば、特殊関数の計算を経ずに境界層外縁での流速場を求めることが出来る。

(2) 流速・せん断力の解

境界層外縁流速がフーリエ級数により表されたので、

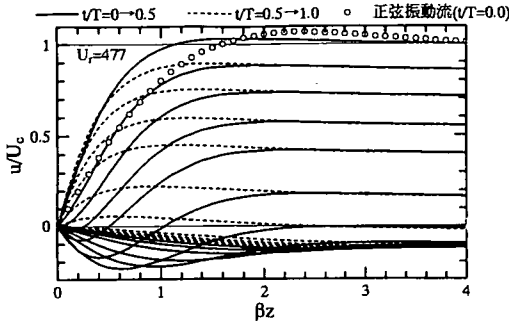


図-3 流速分布

境界層内の流速 u は式 (16) のような重ね合わせにより表現され、さらに、これから得られる底面せん断応力 τ_0 を無次元化して示せば式 (17) の様である。

$$u = \frac{U_c}{B_N} \sum_{n=1}^N a_n \{ \cos n\omega t - \exp(-\beta_n z) \cos(n\omega t - \beta_n z) \} \quad (16)$$

$$\tau^* = \frac{\tau_0}{\rho U_c \sqrt{\omega \nu}} = \frac{1}{B_N} \sum_{n=1}^N \sqrt{n} a_n \cos(n\omega t + \pi/4) \quad (17)$$

ここで、 $\beta_n = \sqrt{n\omega/(2\nu)}$ 、 ν : 動粘性係数、 z : 鉛直座標、 ρ : 流体密度である。ここで、式 (16)、(17) から分かるように、これらの式では境界層外縁流速の評価まで波の非線形性が考慮されているが、境界層内では非線形項を無視している点に注意しなければならない。いわば、クノイド波に対応する非対称振動を行う管内流に対する厳密解となっている。

(3) 摩擦係数

式 (17) より、非対称振動流場での摩擦係数は、次式のように峰位相・谷位相で別々に定義し、代表流速としては峰位相での値を用いれば良い。

$$\tau_{d(c)} = \frac{\rho}{2} f_{w(c)} U_c^2 \quad (18)$$

$$\tau_{d(t)} = \frac{\rho}{2} f_{w(t)} U_c^2 \quad (19)$$

ここで、 $\tau_{d(c)}$ 、 $\tau_{d(t)}$: せん断力の最大値、最小値 (絶対値)、 f_w : 摩擦係数であり、添字 c 、 t はそれぞれ峰位相、谷位相を表す。式 (17) を用いれば、摩擦係数の解析解は次式の様になる。

$$f_{w(c)} = \frac{2}{\sqrt{RE_{(c)}}} \frac{1}{B_N} \text{Max} \left\{ \sum_{n=1}^N \sqrt{n} a_n \cos(n\omega t + \pi/4) \right\} \quad (20)$$

$$f_{w(t)} = \frac{2}{\sqrt{RE_{(t)}}} \frac{1}{B_N} \text{Min} \left\{ \sum_{n=1}^N \sqrt{n} a_n \cos(n\omega t + \pi/4) \right\} \quad (21)$$

ここで、 Max 、 Min は { } 内の最大値および最小値 (絶対値) を取ることを意味する。また、上式中のレイノルズ数 $RE_{(c)}$ は次式で定義される。

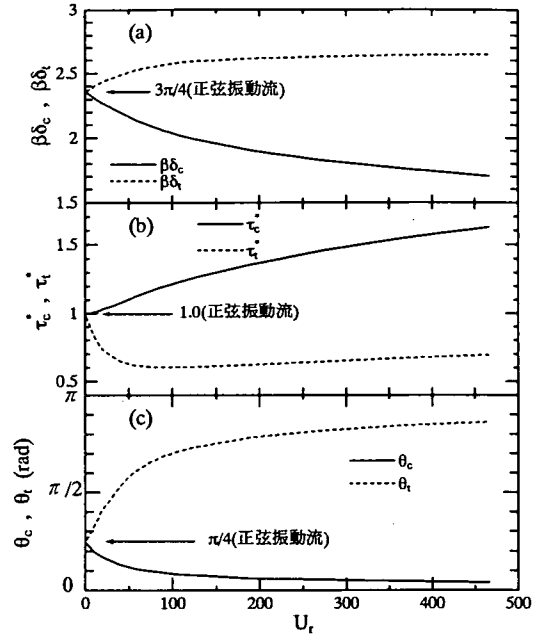


図-4 境界層厚、最大・最小せん断力、位相差

$$RE_{(c)} = \frac{U_c^2}{\nu \omega} \quad (22)$$

式 (20)、(21) を次の層流正弦振動流の摩擦係数 (例えば、Jonsson⁸⁾) と比べれば、摩擦係数に対する波の非対称性の効果が明らかである。

$$f_w = \frac{2}{\sqrt{RE}} \quad (23)$$

ここで、

$$RE = \frac{U_0^2}{\nu \omega} \quad (24)$$

であり、また、 U_0 : 境界層外縁での流速振幅である。式 (20)、(21) 右辺でレイノルズ数の平方根に逆比例する部分は式 (23) と共通しているが、 B_N 、 a_n などがノーム q を介してアーセル数の関数となっており、これにより波の非線形性を加味した式形となっている。

3. 計算結果

(1) 流速分布と境界層厚さ

以下の計算では式 (16)、(17) の項数を10とする。図-3 は $U_c=477$ での速度分布の変化を描いたものである。これは、図-1 (b) の外縁流速に対応するものである。 $v/T=0$ から $v/T=0.5$ には振動流境界層特有の先走り現象が見られる。その後、図-1 (b) に示されたように谷部が平坦であり、ほぼ一定の流速が保持される。このため、通常の平板境界層に類似した境界層の発達を観察される。正流速の加速に転じた後、減速期に見られた顕著な先走りは見

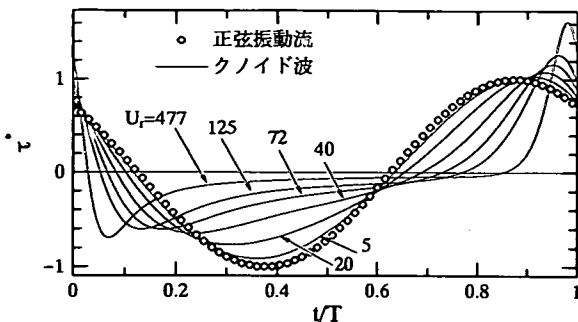


図-5 底面せん断力

られない。このように、非対称振動流においては圧力勾配の変化に応じて複雑な速度分布となり、丸印で示した正弦振動流とは大きく異なった分布を持つ。

図-4(a)には $\beta = \sqrt{\omega/(2\nu)}$ により無次元化した境界層厚さを示した。ここでは、Jensen et al.⁹⁾ にならい、峰位相、谷位相で流速が最大となる点を境界層厚さとしている。なお、クノイド波理論の適用限界は $U_r=25$ 程度とされている¹⁰⁾ が、同図及び以下の図では正弦振動流への漸近の様子を示すために、これ以下の計算結果も示した。アーセル数の増加に伴い、図-3に示したように底面近くの速度勾配がきつくなり、これに呼応して峰位相での境界層厚さは減少する。これに対して、谷部では図-3に示したように定常流的な境界層の発達が見られるため、峰位相より厚い境界層となる。アーセル数の減少に伴い、いずれも正弦振動流の $3\pi/4$ ⁹⁾ に収束することが分かる。

(2) 底面せん断力

次に、式(17)によるせん断力を図-5に示す。アーセル数の増加に伴うせん断力波形の大きな変形が特徴的である。単純に流速波形をある位相角だけ平行移動させた形にはならない点が正弦振動流の解と大きく異なる。アーセル数が大きいほど、最大値・最小値ともに波の峰に近づく傾向が見られる。図によれば、アーセル数が無限となる孤立波において、流速値が常に正であるにもかかわらず、減速期の先走り現象により負のせん断力が生じることを示唆しており、興味深い。

谷位相、峰位相でのせん断力の最大、最小値を図-4(b)に示す。無次元化は式(17)による。峰位相の値はアーセル数と共に滑らかな変化を示すのに対し、谷位相では急激な減少を示した後、増加に転ずる。この減少区間の τ^* は、図-5に見られるように谷位相の負流速時に生じるのに対し、その後の増加に転じた後の値は外縁流速が正から負に変化するゼロダウンクロス点付近で現れる。この様子は図-3においても読みとることが出来る。

流速ピークとの位相差を図-4(c)に示す。アーセル数

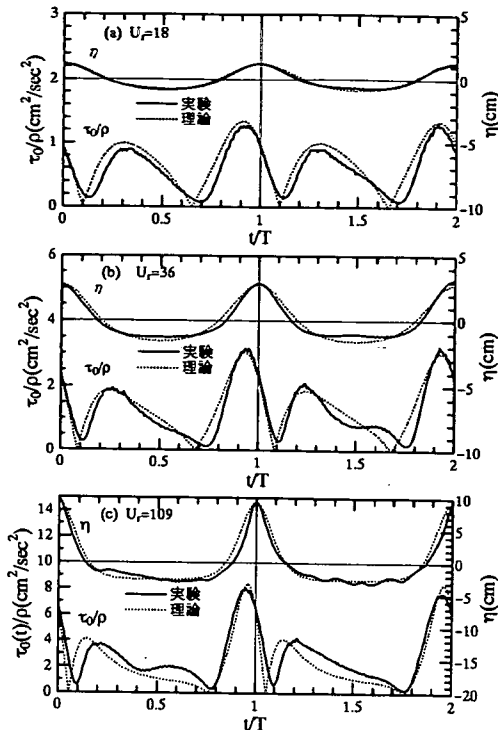


図-6 実験結果

が増加するに従い、峰での最大せん断力は外縁流速最大値とほぼ同時に発生するようになる。また、負の最大値の位相差も正弦振動流の $\pi/4$ から大きくはずれる傾向を示す。以上の図-4、5のいずれにおいても、 $U_r \rightarrow 0$ の極限では正弦振動流の解に漸近することが確認される。

4. 実験との比較

(1) 本研究の実験との比較

実験にはデンマーク工科大学の造波水路を用いた。水路の諸元は、長さ30m、幅80cm、高さ60cmである。水深を20.3cmに固定し、周期を1.5秒、2.0秒の二種とし、波高を各種変化させることにより様々なレイノルズ数、アーセル数での実験を行った。ただし、正弦振動流の限界レイノルズ数を参考にしてレイノルズ数をこれより低く設定した。測定項目は、底面せん断力、境界層外縁流速、および水位変動である。底面せん断力の測定には、すでにJensen et al.⁹⁾、Arnskov et al.¹¹⁾ により使用されているホットフィルム平面センサーを用いた。ただし、その原理上、絶対値しか得られない。流速測定は一成分レーザー流速計を用い、底面より2.8cmの点で境界層外縁流速を測定した。水位変動は容量線式波高計によった。

図-6(a)から(c)にはアーセル数の増加に伴うせん断力の変化の様子を示した。図中には表面波形の実測値も示す。せん断力波形を見ると、特に高いアーセル数時に実

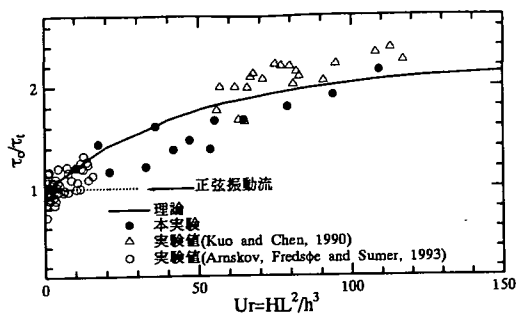


図-7 せん断力の非対称性

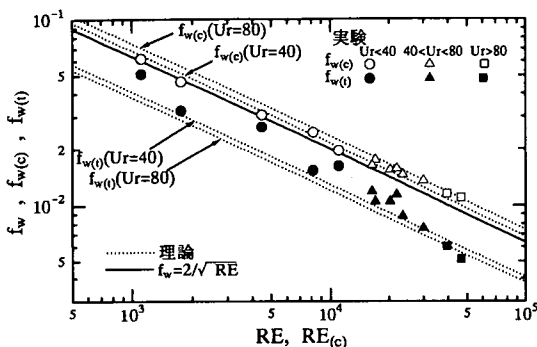


図-8 摩擦係数

験と理論で幾分差違も見られるものの、アーセル数の変化に伴う波形の変化の様子がとらえられている。値自体も比較的近いものとなっている。

図-7は、波の峰のもとで作用する正の最大値 τ_c と谷での負の最小値 τ_t との比を示したものである。図中には、Kuoら¹²⁾、および Arnskov et al.¹¹⁾ によるデータも示した。Kuoら¹²⁾はより低いアーセル数での実験も行っているが、同一実験ケースでの峰位相、谷位相の対応が明確につけられたケースは図示したもののみであった。そのため、低いアーセル数での描点は無い。一方、Arnskov et al.¹¹⁾の実験データのアーセル数はかなり低いことがわかる。これに対し、本研究の実験は広い範囲のアーセル数をカバーしている。実験結果のばらつきは大きいものの、全体的には理論値と良い一致を示している。図-6に見られるように、表面波形には微少な擾乱が重なっており、完全にクノイド波形とはなっていない。この点も、ばらつきの原因のひとつと考えられる。

Kirkgöz¹³⁾は斜面上の波動境界層の計測を行い、やはり、浅水変形に伴い峰位相での底面せん断力最大値が急激に増加することを示しているが、論文に波高に関する記述が無いため、図-7に含めることは出来なかった。

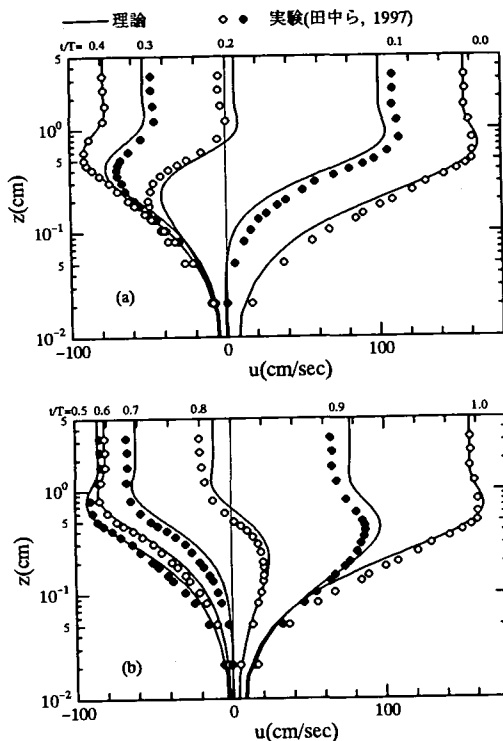


図-9 流速分布

図-8は、本実験による摩擦係数を式(20)、(21)の理論式と比較した結果である。本実験の範囲では、アーセル数とレイノルズ数の大小がほぼ相関しており、このためレイノルズ数の増加に伴い、 $f_w(c)$ 、 $f_w(t)$ とも正弦振動流の式(23)から上下に離れていく。この傾向は理論と良く一致したものになっている。また、定量的にもほぼ満足が行く一致が見られる。

(2) 田中ら⁹⁾の実験結果との比較

図-9は田中ら⁹⁾による層流非対称振動流の流速データとの比較である。実験は管内振動流で行われているため、アーセル数は与えられない。そこで、ここでは実測流速波形から非対称性パラメータ²⁾ $A_s = U_d/(U_c + U_t)$ (U_t : 谷位相での最小流速の絶対値)を算出し、クノイド波理論からこれに対応するアーセル数を求めた。これからノーム q を式(3)あるいは式(6)から計算した後、式(16)により流速を得た。図によれば、主流速がクノイド波の波形から幾分ずれる位相では、鉛直方向に系統的な差違が現れているが、主流速が一致する $\nu/T=0$ 、 $\nu/T=0.5$ 付近ではきわめて良好な一致を示している。

以上の比較より、ここに示した層流境界層理論は各種実験結果を説明するに足る十分な精度を有すると結論することが出来る。

5. おわりに

本研究ではクノイド波動下における層流境界層に関する理論的研究ならびにその実験的検証を行った。主要な結論を以下に示す。

(1) 境界層外縁流速を与える完全流体としての解をフーリエ級数の形で表すことが出来た。係数はアーセル数が与えられれば計算することが出来る。ただし、アーセル数の大小に応じて式を使い分ける必要がある。厳密解との比較により誤差評価を行い、 $U_1 < 500$ の範囲では項数を10程度まで取れば良いことが分かった。

(2) 上記の結果をもとに、境界層内の流速、せん断力、摩擦係数の解析解を得た。摩擦係数の式形は、正弦振動流のそれに非線形性の効果を加味したものになっている。

(3) 解析解から得られる速度分布、境界層厚さ、せん断力時間波形、位相差などを調べた結果、正弦振動流のもとでのそれらと大きく異なる振る舞いを示すことが明らかになった。

(4) 理論値と実験値との比較の結果、両者は良い一致を示し、理論の妥当性が示された。ここに示した摩擦係数の定義法や無次元数による表示法などは乱流時にも適用できるものと考えられ、今後のこの方面の研究の基本的枠組みを提示することが出来たと言えよう。

謝辞: 本研究は、第一著者が鹿島学術振興財団の補助を受けてデンマーク工科大学水工水理研究所に滞在した際に行われたものである。本研究に対して文部省科学研究費、ならびに Danish Research Council (STVF) による研究プログラム“Marin Technique”の補助を受けた。ここに記して、関係各位に謝意を表する。

参考文献

- 1) 浅野敏之, 雨宮 功, 岩垣雄一: 有限振幅波動下における底面摩擦係数の評価に関する研究, 第34回海岸工学講演会論文集, pp.1-5, 1987.

- 2) 瀬岡和夫, 八木 宏, 二瓶泰雄, 野本康介: 非対称振動流の乱流構造特性について, 海岸工学論文集, 第41巻, pp.141-145, 1994.
- 3) 瀬岡和夫, 八木 宏, 二瓶泰雄, 野本康介: 非対称振動流の乱流構造特性-特にレイノルズ数依存性について-, 海岸工学論文集, 第43巻, pp.441-445, 1996.
- 4) Larson, M.: 乱流波動境界層に対する閉形式の解, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.26-30, 1995.
- 5) 田中 仁, 山路弘人, アーマド・サナ, 首藤伸夫: クノイド波を模擬する非対称振動流発生装置の提案とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No.565/II-39, pp.111-118, 1997.
- 6) Keulegan, G.H.: Gradual damping of solitary waves, *J. Res. National Bureau of Standards, RP1895*, Vol.40, pp.487-498, 1948.
- 7) Byrd, P.F and Friedman, M.D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 358p., 1970.
- 8) Jonsson, I.G.: Wave boundary layers and wave friction factors, *Proc. 10th Int. Conf. Coastal Eng.*, pp.127-148, 1966.
- 9) Jensen, B.L., Sumer, B.M. and Fredsøe, J.: Turbulent oscillatory boundary layer at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, Vol.206, pp.265-297, 1989.
- 10) Isobe, M.: Calculation and application of first-order cnoidal wave theory, *Coastal Eng.*, Vol.9, pp.309-325, 1985.
- 11) Arnskov, M.M., Fredsøe, J. and Sumer, B.M.: Bed shear stress measurements over a smooth bed in three-dimensional wave-current motion, *Coastal Eng.*, Vol.20, pp.277-316, 1993.
- 12) Kuo, C.T. and Chang, W.J.: Bottom shear stress and friction factor due to the asymmetric wave motion, *Proc. 22nd Int. Conf. Coastal Eng.*, pp.637-646, 1990.
- 13) Kirkgöz, M.S.: An experimental investigation of plunging breaker boundary layers in the transformation zone, *Coastal Eng.*, Vol.13, pp.341-456, 1989.

(1996.11.7受付)

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION ON LAMINAR BOUNDARY LAYER UNDER CNOIDAL WAVE MOTION

Hitoshi TANAKA, Mutlu SUMER and Jørgen FREDSE

An analytical solution is derived for laminar boundary layer under cnoidal wave motion. The solution is expressed in terms of Fourier series expansion of simple functions. Thus, computation of the velocity and the bottom shear stress can be made very easily. According to detailed analysis of the solution, quantities such as velocity, bottom shear stress, boundary layer thickness and phase difference show considerable difference from those under sinusoidal wave boundary layer. Comparison with present and existing experimental data sets verifies the validity of the theory.