

多孔質飽和弾性体の過渡応答解析 のためのモード合成法の展開

東平光生¹

¹正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278 千葉県野田市山崎2641)

本論文では、多孔質飽和成層弾性体の過渡応答解析のためのモード合成法を展開している。多孔質飽和弾性体の正規モードは骨格と間隙水の内部摩擦の存在によって複素モードとなるが、これらの複素モード間の直交関係式を基礎方程式の対称性に着目して誘導する。誘導のプロセスを通して、正規モード間の直交性が、正規モードが境界条件を満足するという性質に深く関わっていることが示される。次に、正規モード間の直交関係式を用いて、過渡応答波動場を正規モードによって表現する。これによれば、多孔質飽和弾性体の過渡応答は正規モードによって表現されたGreen関数と外力との合成積で表される。

Key Words : *poro-elastic layered medium, normal modes, orthogonality relations, transient response, Green's function*

1. はじめに

臨海地帯の地盤の動的挙動や海底の構造物の周辺地盤の動的挙動を解析する場合に、地盤の間隙水の影響をとらえて行くことは重要であろう。この場合、地盤を多孔質飽和弾性体と考えBiotによって展開された多孔質飽和弾性体の波動伝播の理論¹⁾⁻³⁾を用いて線形理論の範囲内で解析することは、線形解析の簡明さを考えると捨てがたい利点を有すると考えられる。

しかしながら、通常の弾性理論に基づく波動解析に比べれば、多孔質飽和弾性体の理論による波動解析の研究の歴史は新しい。例えば、1990年代に入りBougachらは多孔質飽和成層弾性体に対する薄層要素法を展開している^{4),5)}。また、その後RajakakseおよびSenjuntichaiは離散化近似手法によらない解析解をベースとしたStiffness matrix methodにより2次元多孔質成層飽和弾性体に対するGreen関数を計算している^{6),7)}。既往の多孔質飽和弾性体を伝播する波動問題を扱った研究を概観すると、多孔質飽和成層弾性体の過渡的なGreen関数を合成する観点から、正規モードの性質について論じたものは見あたらない。こうした点から、本研究では多孔質飽和成層弾性体の過渡的なGreen関数の計算手法を正規モードを用いて展開することが目的である。

なお、著者は一連の研究で、薄層要素離散化波数法を用いて通常の弾性体に対する正規モードと過渡応答波動場のGreen関数について論じてきた⁸⁾⁻¹¹⁾。本研究で展開する手法もこれらの研究をベースとするが、ここでは多孔質飽和弾性体を扱う上で薄層要素法が時間

領域Green関数を合成するためには必ずしも適当な方法でないことを示す。そして、その上で正規モードの直交関係式を解析的な観点から誘導する。特に、多孔質飽和弾性体においては、骨格と間隙水の内部摩擦の存在によって、正規モードは複素数となるが、複素モード間の直交関係式を基礎方程式の対称性に着目して誘導する。そして、正規モード間の直交性が正規モードの境界条件を満足する性質に深く関わっていることを示す。次に、これらの直交関係式を用いて、多孔質飽和弾性体の過渡的応答を正規モードを合成することで表現する。これによれば、多孔質飽和弾性体の過渡的応答は正規モードによって表現されたGreen関数と外力の合成積によって表現される。この表現を用いて、多孔質飽和弾性体の過渡的応答についていくつかの考察を行う。

2. 多孔質飽和弾性体の基礎方程式の性質

ここでは、多孔質飽和弾性体の基礎方程式を明示し、基礎方程式に対する同次解および境界条件を考察することで、以降の定式化の基礎を与える。

(1) 基礎方程式

まず、議論の出発点を明確にするために基礎方程式を与えることから始める。基礎方程式はBiotによって与えられており次式となる¹⁾⁻³⁾。

$$\begin{aligned} & ((\lambda + \mu + \alpha^2 M) \nabla \nabla \cdot + \mu \nabla^2) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ & + \alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

$$= \partial_t^2 [\rho u(x, t) + \rho_f v(x, t)] + f(x, t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \alpha M \nabla \nabla \cdot u(x, t) + M \nabla \nabla \cdot v(x, t) \\ & = \partial_t^2 [\rho_f u(x, t) + m^* v(x, t)] + b \partial_t v(x, t) - p(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 ∇ は勾配演算子、 λ と μ はLaméの定数、 α と M はBiotの用いた構成則の係数、 ρ は飽和媒体の質量密度、 ρ_f は間隙水の密度、 m^* は間隙水の密度と間隙の形状によって決められる係数、 b は骨格と間隙水の内部摩擦を表す係数で次式で表わされる⁵⁾。

$$b = \gamma_w \beta^{*2} / \kappa \quad (3)$$

ここに、 γ_w は水の単位体積重量、 β^* は間隙率、 κ は透水係数である。また、 u は骨格の変位場、 v は間隙水と骨格の相対変位、 x は空間座標、 t は時間、 ∂ は偏微分の演算子で、下付きの添字で微分演算のパラメータを示す。また、 f と p は骨格および流体に加わる外力を示す。

(2) Surface vector harmonics によるベクトル場の展開

骨格の変位場および間隙水と骨格の相対変位は Stokes-Helmholtz 分解によって、次のように表わすことができる。

$$u(x, t) = \nabla \varphi_1(x, t) + \nabla \times \nabla \times \psi_1(x, t) e_z + \nabla \times \chi_1(x, t) e_z \quad (4)$$

$$v(x, t) = \nabla \varphi_2(x, t) + \nabla \times \nabla \times \psi_2(x, t) e_z + \nabla \times \chi_2(x, t) e_z \quad (5)$$

ここに、 e_z は鉛直方向の単位基本ベクトル、 $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \chi_1$ および χ_2 はスカラーポテンシャルである。

いま、各ポテンシャルは次のように Fourier-Bessel 級数で表現することができる。

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_j(z, t) Y_{k_n}^m(r, \phi) \\ \psi_j &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_j(z, t) Y_{k_n}^m(r, \phi) \\ \chi_j &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_j(z, t) Y_{k_n}^m(r, \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $a_j(z, t)$ 、 $b_j(z, t)$ ならびに $c_j(z, t)$ は鉛直座標成分 z と時間 t に関する適当な関数で、添字の j はスカラーポテンシャルの添字の 1 と 2 に合わせてとるものとする。また、 Y_k^m は次式で定義される関数である。

$$Y_k^m(r, \phi) = J_m(kr) \exp(im\phi) \quad (7)$$

ここに、 (r, ϕ) は円筒座標系の水平成分であり、 J_m は m 次の第 1 種 Bessel 関数である。また、式(6)に現れる k_n は離散化波数を示し、 $J_m(k_n R) = 0$ を満足することに注意する。ただし、 R は十分大きな正数で、 R の値

は考える Time-window に鏡像ソースからの波動が入り込まないように設定する。

式(6)を式(4)および式(5)に代入することで、骨格および間隙水の変位場が次のように Surface vector harmonics で表されることが理解できる。

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [U_{z k_n}^m(z, t) R_{k_n}^m(r, \phi) + U_{r k_n}^m(z, t) S_{k_n}^m(r, \phi) + U_{\phi k_n}^m(z, t) T_{k_n}^m(r, \phi)] \quad (8)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [V_{z k_n}^m(z, t) R_{k_n}^m(r, \phi) + V_{r k_n}^m(z, t) S_{k_n}^m(r, \phi) + V_{\phi k_n}^m(z, t) T_{k_n}^m(r, \phi)] \quad (9)$$

ここに、 $R_{k_n}^m$ 、 $S_{k_n}^m$ および $T_{k_n}^m$ は Surface vector harmonics¹²⁾ で次式で定義される。

$$\begin{aligned} R_k^m(r, \phi) &= Y_k^m(r, \phi) e_z \\ S_k^m(r, \phi) &= \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \phi) e_r + \frac{1}{k r} \partial_\phi Y_k^m(r, \phi) e_\phi \\ T_k^m(r, \phi) &= \frac{1}{k r} \partial_\phi Y_k^m(r, \phi) e_r - \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \phi) e_\phi \end{aligned} \quad (10)$$

支配方程式にあらわれた骨格変位や間隙水の変位と同様に、骨格や流体に作用する物体力も次のように、Surface vector harmonics で展開できる。

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [F_{z k_n}^m(z, t) R_{k_n}^m(r, \phi) + F_{r k_n}^m(z, t) S_{k_n}^m(r, \phi) + F_{\phi k_n}^m(z, t) T_{k_n}^m(r, \phi)] \quad (11)$$

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [P_{z k_n}^m(z, t) R_{k_n}^m(r, \phi) + P_{r k_n}^m(z, t) S_{k_n}^m(r, \phi) + P_{\phi k_n}^m(z, t) T_{k_n}^m(r, \phi)] \quad (12)$$

(3) 時間-波数領域の基礎方程式

式(8)から式(12)を基礎方程式(1)および(2)に代入することで、次の時間-波数領域の基礎方程式が得られる。

$$L_{k_n}^m q_{k_n}^m = A \ddot{q}_{k_n}^m + B \dot{q}_{k_n}^m + F_{k_n}^m \quad (13)$$

ここに、 $q_{k_n}^m$ および $F_{k_n}^m$ は変位および外力に関するベクトルで、その成分は、

$$q_{k_n}^m = (U_{z k_n}^m, U_{r k_n}^m, U_{\phi k_n}^m, V_{z k_n}^m, V_{r k_n}^m, V_{\phi k_n}^m)^T \quad (14)$$

$$F_{k_n}^m = (F_{z k_n}^m, F_{r k_n}^m, F_{\phi k_n}^m, P_{z k_n}^m, P_{r k_n}^m, P_{\phi k_n}^m)^T \quad (15)$$

式(13)で、 A および B は 6×6 のマトリックスでそ

の成分は,

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & \rho_f & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & \rho_f \\ \rho_f & 0 & 0 & m^* & 0 & 0 \\ 0 & \rho_f & 0 & 0 & m^* & 0 \\ 0 & 0 & \rho_f & 0 & 0 & m^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \text{diag} [0 \ 0 \ 0 \ b \ b \ b] \quad (17)$$

さらに, $L_{k_n}^m$ は微分演算子であり, 次式で定義される.

$$L_{k_n}^m = L_1 \partial_z^2 - k_n L_2 \partial_z - k_n^2 L_3 \quad (18)$$

ここに,

$$L_1 = \begin{bmatrix} \theta + \mu & 0 & 0 & \alpha M & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \alpha M & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 & \alpha M & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & -\alpha M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha M & 0 & 0 & M & 0 \\ -\alpha M & 0 & 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta + \mu & 0 & 0 & \alpha M & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha M & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

であり, $\theta = \lambda + \mu + \alpha M$ とした.

(4) 波数領域の方程式の境界条件

式(13)は水平成層構造を成す媒質に対して適用可能な方程式である. いま, Fig. 1 に示すように剛基盤上の水平成層構造をなす多孔質飽和弾性媒質を考える. Fig. 1 では, たとえば, j 番目の層の材料定数を添字の j で表している. また, h_j は j 番目の層の層厚を表して, z^j は j 番目の層の局所座標とする. すなわち,

$$\begin{aligned} z^j &= 0 \quad (\text{at the lower boundary of the layer}) \\ z^j &= h_j \quad (\text{at the upper boundary of the layer}) \end{aligned} \quad (22)$$

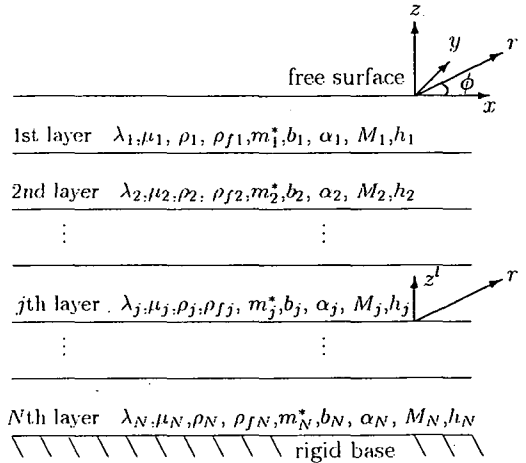


Fig. 1 Geometry of the layered poroelastic medium on a rigid base.

いま, j 番目の層を取り出し, 隣接する層とどのような境界条件で接合されるかを調べてみよう. このために, まず次のような重み付き残差表示を考え, 適当な部分積分によって, どのような境界項が現れるかを見れば良い. すなわち,

$$\int_0^{h_j} \delta q_{k_n}^m T [[L_{k_n}^m - A \partial_t^2 - B \partial_t] q_{k_n}^m - F_{k_n}^m] dz^j = 0 \quad (23)$$

を出発点として部分積分を行う. ここに $\delta q_{k_n}^m$ は $q_{k_n}^m$ の仮想増分である. $\delta q_{k_n}^m$ と $q_{k_n}^m$ について z^j に関する微分演算の対称性が成立するように部分積分を施すことで次式を得る.

$$\begin{aligned} & [\delta q_{k_n}^m T Q_{k_n}^m]_{\Gamma} \\ &= \int_0^{h_j} \delta q_{k_n}^m T [[A \partial_t^2 + B \partial_t] q_{k_n}^m + F_{k_n}^m] dz^j \\ & \quad + W(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m) \end{aligned} \quad (24)$$

ここに, Γ は層境界を表し, $Q_{k_n}^m$ は部分積分の結果得られる, 自然境界条件を表すベクトルである. また, $W(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m)$ の具体的な形は付録に示すこととして, 付録の結果から

$$W(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m) = W(q_{k_n}^m, \delta q_{k_n}^m) \quad (25)$$

の対称性が保証されることに注意する.

また, $Q_{k_n}^m$ の成分を示すと次のようになる.

$$Q_{k_n}^m = (S_{zk_n}^m, S_{rk_n}^m, S_{\phi k_n}^m, P_{k_n}^m, 0, 0)^T \quad (26)$$

ここに, $S_{zk_n}^m, S_{rk_n}^m, S_{\phi k_n}^m$ は, 表面力ベクトルの成分で全応力場で考えたものである. また, $P_{k_n}^m$ は間隙水圧を

示す。これらのベクトルの成分と変位の関係式は付録に示している。

以上の議論で明らかとなることは、自然境界条件には表面力の3成分と間隙水圧の4種類があるということである。自然境界条件のベクトル成分に現れた0を考慮すれば、自然境界条件に対応した基本境界条件は、 $U_{r k_n}^m$ 、 $U_{r k_n}^m$ 、 $U_{\phi k_n}^m$ 、 $V_{z k_n}^m$ となる。このことは、間隙水の変位成分 $V_{r k_n}^m$ および $V_{\phi k_n}^m$ は他の変位成分に従属していることを示している。周波数領域における多孔質飽和弾性体の基礎方程式は骨格変位と間隙水圧を独立変数としたものに変換できること⁷⁾が知られている。このことは、3次元の基礎方程式を骨格変位の3成分と間隙水圧の合わせて4つの独立変数の方程式で表すことができることを示し、間隙水の変位成分の従属性を反映していることに他ならない。

すなわち、時間領域の方程式では未知量は骨格と間隙水の6成分の変位を扱う必要があるが、実質はこの内の2成分は独立な未知量でない。著者は一連の研究⁸⁾⁻¹¹⁾で時間領域の方程式に対し、薄層要素法を展開してきた。しかし、この時間領域の方程式に薄層要素法を適用する場合には、骨格と間隙水の6成分の変位を独立に補間関数を用いて離散化する必要が生じ、間隙水の変位成分の従属性を考慮することは、必ずしも容易でない。このため、変位成分の従属性は、時間領域での薄層要素法の適用を繁雑にすることになり、薄層要素法があまり有効でないことを意味する。ここではこの事情を考慮して、正規モード合成法を主として解析的に展開してゆく。

(5) 多孔質飽和弾性体の基礎方程式の同次解

正規モード合成法を解析的な観点から展開するために、後述のように本研究では伝達マトリックス法に採用している。ここでは、伝達マトリックス法の展開が必要となる、多孔質飽和弾性体の基礎方程式の同次解を誘導しておく。

いま、波動場が角振動数 ω と波数 k を有するものとする。Stokes-Helmholtz分解された変位を基礎方程式に代入し、しかも外力場をゼロと置くことで、各スカラーポテンシャルの方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & ((\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)\nabla^2 + \rho_f \omega^2) \varphi_1 \\ & = -(\alpha M \nabla^2 + \rho_f \omega^2) \varphi_2 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha M \nabla^2 + \rho_f \omega^2) \varphi_1 \\ & = -(M \nabla^2 + (m\omega^2 - i\omega b)) \varphi_2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$(\mu \nabla^2 + \rho \omega^2) \psi_1 = -\rho_f \omega^2 \psi_2 \quad (29)$$

$$\rho_f \omega^2 \psi_1 = -(m\omega^2 - i\omega b) \psi_2 \quad (30)$$

$$(\mu \nabla^2 + \rho \omega^2) \chi_1 = -\rho_f \omega^2 \chi_2 \quad (31)$$

$$\rho_f \omega^2 \chi_1 = -(m\omega^2 - i\omega b) \chi_2 \quad (32)$$

以上の方程式の解は次のように未定係数を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= [A \text{sh}_j + B \text{ch}_j + C \text{sh}_2 + D \text{ch}_2] \times Y_k^m(r, \phi) \\ \varphi_2 &= [A \eta_1 \text{sh}_j + B \eta_1 \text{ch}_j + C \eta_2 \text{sh}_2 \\ &\quad + D \eta_2 \text{ch}_2] Y_k^m(r, \phi) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [E \frac{1}{k} \text{sh}_3 + F \frac{1}{k} \text{ch}_3] Y_k^m(r, \phi) \\ \psi_2 &= \eta_3 [E \frac{1}{k} \text{sh}_3 + F \frac{1}{k} \text{ch}_3] Y_k^m(r, \phi) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \chi_1 &= [G \frac{1}{k} \text{sh}_3 + H \frac{1}{k} \text{ch}_3] Y_k^m(r, \phi) \\ \chi_2 &= \eta_3 [G \frac{1}{k} \text{sh}_3 + H \frac{1}{k} \text{ch}_3] Y_k^m(r, \phi) \end{aligned} \quad (35)$$

ここに、 $A \sim H$ の変数は未定係数を表す。また、式中の sh_j 、 ch_j ($j = 1, 2, 3$)は次式で示される関数である。

$$\begin{aligned} \text{sh}_j &= \sinh(\nu_j z) \\ \text{ch}_j &= \cosh(\nu_j z) \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (36)$$

式(33)から式(36)の η_j および ν_j ($j = 1, 2, 3$)は ω と k ならびに材料定数で決まるパラメータで次式で定義される。

$$\begin{aligned} \nu_j^2 &= \delta_j^2 + k^2, \quad (j = 1, 2, 3) \\ \eta_j &= -\frac{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)\delta_j^2 + \rho \omega^2}{\alpha M \delta_j^2 + \rho_f \omega^2} \quad (j = 1, 2) \\ \eta_3 &= -\frac{\rho_f \omega^2}{m^* \omega^2 - i\omega b} \end{aligned} \quad (37)$$

ただし、パラメータ δ_j ($j = 1, 2, 3$)は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \delta_1^2 &= \frac{-X_b + \sqrt{X_b^2 - 4X_a X_c}}{2X_a} \\ \delta_2^2 &= \frac{-X_b - \sqrt{X_b^2 - 4X_a X_c}}{2X_a} \\ \delta_3 &= \frac{X_c}{X_d} \end{aligned} \quad (38)$$

ここに、 X_a 、 X_b 、 X_c および X_d は、材料定数と ω で定まる定数で次式のようになる。

$$\begin{aligned} X_a &= M(\lambda + 2\mu) \\ X_b &= \omega^2(\rho M + m^*(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M) - 2\alpha M \rho_f) \\ &\quad - i\omega b(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M) \\ X_c &= \omega^4(\rho m^* - \rho_f^2) - i\omega^3 \rho b \\ X_d &= \mu(m^* \omega^2 - i\omega b) \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、ポテンシャルの同次解に指数関数でなく、双曲線関数を用いた理由は、後述の伝達マトリックス法の定式化を容易にするためである。本論文で示す数値計算では双曲線関数を用いたことによる問題は特に生じていないが、正規モード解の収束等に問題が生じる場

合には双曲線関数の代わりに指数関数を用いることは、一つの方法であろう。

各スカラーポテンシャルの解を用いれば、Surface vector harmonics の係数は未定係数を用いて次のように表わすことが可能である。

$$\begin{aligned} U_{zk}^m &= A\nu_1\text{ch}_1 + B\nu_1\text{sh}_1 + C\nu_2\text{ch}_2 + D\nu_2\text{sh}_2 \\ &\quad + Ek^2\text{sh}_3 + Fk^2\text{ch}_3 \\ U_{rk}^m &= Ak\text{sh}_1 + Bk\text{ch}_1 + Ck\text{sh}_2 + Dk\text{ch}_2 \\ &\quad + Ek\nu_3\text{ch}_3 + Fk\nu_3\text{sh}_3 \\ U_{\phi k}^m &= Gk\text{sh}_3G + Hk\text{ch}_3 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} V_{zk}^m &= A\eta_1(\nu_1\text{ch}_1 + B\nu_1\text{sh}_1B) + \eta_2(\nu_2\text{ch}_2C + \nu_2\text{sh}_2D) \\ &\quad + \eta_3(k^2\text{sh}_3E + k^2\text{ch}_3F) \\ V_{rk}^m &= \eta_1(Ak\text{sh}_1 + Bk\text{ch}_1) + \eta_2(Ck\text{sh}_2 + Dk\text{ch}_2) \\ &\quad + \eta_3(Ek\nu_3\text{ch}_3 + Fk\nu_3\text{sh}_3) \\ V_{\phi k}^m &= \eta_3(Gk\text{sh}_3 + Hk\text{ch}_3) \end{aligned} \quad (41)$$

3. 多孔質飽和弾性体に対する正規モード合成法の展開

(1) 正規モードの直交性

正規モード合成法を定式化していくためには、正規モード間の直交関係式を誘導する必要がある。正規モード間の直交関係式を誘導する際にまず注意すべき点は、骨格と間隙水の内部摩擦によって、固有振動数およびモードが複素数になることである。また、基礎方程式の係数はすべて実数で与えられることから、与えられた固有振動数および固有モードの複素共役の関係にある量もやはり固有振動数および固有モードとしての性質を持っている。そして、このことが時間領域解を実関数として与える根拠となっている。

正規モード間の直交関係式を誘導するためには、方程式の対称性を利用する必要がある。そのために、式(13)を次のように書換える。

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A & 0 \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} q_{k_n}^m \\ \dot{q}_{k_n}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{k_n}^m & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{k_n}^m \\ \dot{q}_{k_n}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{k_n}^m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここで、 A と B は対称であることが分かっている。 $L_{k_n}^m$ の対称性は次のように考える。式(13)の正規モードを $y_{k_n}^{m,j}$ とする。ここに、添字の j はモードの次数とする。いま、積分

$$I = \int_{\Omega} y_{k_n}^{m,i}(z)^T L_{k_n}^m y_{k_n}^{m,j}(z) dz \quad (43)$$

を考えよう。ここに、 Ω は正規モードが定義される領域とする。正規モードは境界条件および層間の変位の連続条件および力の釣り合いを満足するから、付録より

次式が成立することが分かる。

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} y_{k_n}^{m,i}(z)^T L_{k_n}^m y_{k_n}^{m,j}(z) dz \\ &= -W(y_{k_n}^{m,i}(z); y_{k_n}^{m,j}(z)) \\ &= -W(y_{k_n}^{m,j}(z); y_{k_n}^{m,i}(z)) \\ &= \int_{\Omega} y_{k_n}^{m,j}(z)^T L_{k_n}^m y_{k_n}^{m,i}(z) dz \end{aligned} \quad (44)$$

ここに、 W は付録で定義された関数であるが、積分の定義域は正規モードが定義されている領域に拡張するものとする。式(44)は、境界条件を満足する正規モードに関しては演算子 $L_{k_n}^m$ は対称であることを示す。

いま、正規モード $y_{k_n}^{m,j}$ に対する固有値を $s_{k_n}^{m,j}$ とする。式(42)において、正規モードと固有値の性質から次式が成立する。

$$s_{k_n}^{m,j} D w_{k_n}^{m,j}(z) = G_{k_n}^m w_{k_n}^{m,j}(z) \quad (45)$$

ここに、

$$D = \begin{bmatrix} B & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{k_n}^m = \begin{bmatrix} L_{k_n}^m & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$w_{k_n}^{m,j}(z) = \left\{ y_{k_n}^{m,j}(z); s_{k_n}^{m,j} y_{k_n}^{m,j}(z) \right\}^T$$

次に、 A 、 B および $L_{k_n}^m$ の持つ対称性を用いれば次式が成立することが分かる。

$$\begin{aligned} \left\langle w_{k_n}^{m,j} | D | w_{k_n}^{m,i} \right\rangle &= \left\langle w_{k_n}^{m,i} | D | w_{k_n}^{m,j} \right\rangle \\ \left\langle w_{k_n}^{m,j} | G_{k_n}^m | w_{k_n}^{m,i} \right\rangle &= \left\langle w_{k_n}^{m,i} | G_{k_n}^m | w_{k_n}^{m,j} \right\rangle \end{aligned} \quad (47)$$

ここに、 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は内積を表し、次のように定義される。

$$\langle u(z) | A | v(z) \rangle = \int_{\Omega} u(z)^T A v(z) dz \quad (48)$$

式(45)および式(47)を用いることで、相異なる固有値を持つ正規モードに対する直交関係式を次のように誘導できる。

$$\begin{aligned} \left\langle w_{k_n}^{m,j} | D | w_{k_n}^{m,i} \right\rangle &= \delta_{ij} \\ \left\langle w_{k_n}^{m,j} | G_{k_n}^m | w_{k_n}^{m,i} \right\rangle &= s_{k_n}^{m,j} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (49)$$

ここに、 δ_{ij} はKroneckerのデルタである。式(45)および式(47)から、式(49)を誘導する方法は、文献¹³⁾に示された対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルの直交性の証明の方法とほとんど同様にできる。

以上に示すように、正規モードが境界条件を満足することで方程式の対称性が導かれ、さらに正規モードが基礎方程式を満足することで、正規モードの直交性が展開されてきた。正規モードの直交性は、正規モードが基礎方程式および境界条件を満足する性質に深く関わっていることが理解できる。

(2) 正規モードによる過渡応答波動場の表現

以上で、正規モードの直交関係式が得られたので、次に正規モードの重ね合わせで、多孔質飽和成層弾性体の過渡的波動場を正規モードの重ね合わせで表現することを考える。

式(42)の $q_{k_n}^m$ および $\dot{q}_{k_n}^m$ を次のように正規モードの重ね合わせで表現する。

$$q_{k_n}^m(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{k_n}^{m,j}(t) \mathbf{y}_{k_n}^{m,j}(z) \quad (50)$$

$$\dot{q}_{k_n}^m(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_{k_n}^{m,j} \beta_{k_n}^{m,j}(t) \mathbf{y}_{k_n}^{m,j}(z)$$

ここに、 $\beta_{k_n}^{m,j}(t)$ は正規モードの時間変動を示す関数である。式(50)を式(42)に代入し、式(47)の正規モードの直交関係式を代入することで次の方程式を得る。

$$\partial_t \beta_{k_n}^{m,j}(t) - s_{k_n}^{m,j} \beta_{k_n}^{m,j}(t) = f_{k_n}^{m,j}(t) \quad (51)$$

ここに、

$$f_{k_n}^{m,j}(t) = \left\langle \mathbf{y}_{k_n}^{m,j} | \mathbf{E} | \mathbf{F}_{k_n}^m \right\rangle \quad (52)$$

であり、 \mathbf{E} は単位マトリックスを示す。いま、 $t < 0$ で $f_{k_n}^{m,j} = 0$ を仮定すれば、式(51)の解は次のように表される。

$$\beta_{k_n}^{m,j}(t) = \int_0^t \exp(s_{k_n}^{m,j}(t-\tau)) f_{k_n}^{m,j}(\tau) d\tau \quad (53)$$

以上の議論から、多孔質飽和成層弾性体の過渡応答解は次のように表される。

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{k_n}^m(r, \phi) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{y}_{k_n}^{m,j}(z) \int_0^t \exp(s_{k_n}^{m,j}(t-\tau)) \left\langle \mathbf{y}_{k_n}^{m,j} | \mathbf{E} | \mathbf{F}_{k_n}^m \right\rangle d\tau \quad (54)$$

ここに、 $\mathbf{H}_{k_n}^m(r, \phi)$ は水平方向に伝播する波動の特性を表すマトリックスでその成分は次のように表される。

$$\mathbf{H}_{k_n}^m(r, \phi) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{k_n}^m(r, \phi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{H}}_{k_n}^m(r, \phi) \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{k_n}^m = [\mathbf{R}_{k_n}^m \ \mathbf{S}_{k_n}^m \ \mathbf{T}_{k_n}^m] \quad (56)$$

前述のように、式(42)の方程式の係数はすべて実数である。このことから固有値 $s_{k_n}^{m,j}$ 、正規モード $\mathbf{y}_{k_n}^{m,j}$ に対して、複素共役にある量、 $\bar{s}_{k_n}^{m,j}$ および $\bar{\mathbf{y}}_{k_n}^{m,j}$ もやはり固有値および正規モードとしての性質を持っている。ただし、変数につけた $\bar{}$ (バー)は複素共役であることを示す。 $s_{k_n}^{m,j}$ と $\bar{s}_{k_n}^{m,j}$ は相異なる固有値であるから、これより $\mathbf{y}_{k_n}^{m,j}$ と $\bar{\mathbf{y}}_{k_n}^{m,j}$ は互いに直交する別の正規モードとなる。通常の複素ベクトル空間で考える内積では、互いに複素共役の関係にある固有関数は直交せず、むしろこれらを用いて固有関数のノルムを定義する。減衰を持った系の複素固有値問題と、通常の複素ベクトル空

間でなされる議論の違いに注意すべきである。また、式(54)では特に明示していないが、モード合成の際にはこの意味で、常に複素共役の関係にある正規モードについても和をとるものとする。そして、この操作によって、波数領域の過渡応答解が実数になることが保証される。波数領域の解を空間領域に変換する際には、マトリックス $\mathbf{H}_{k_n}^m$ が波数領域の解にかかることにより再び複素数となるが、

$$\mathbf{H}_{k_n}^{-m} = \bar{\mathbf{H}}_{k_n}^m \quad (57)$$

の関係式から再び空間領域の解は実数となる。

4. 多孔質飽和成層弾性体に対する伝達マトリックス法

(1) 伝達マトリックス

Fig. 1に示す多孔質飽和成層弾性体の j 番目の層について伝達マトリックスを作成する。以降の議論では混乱の無い限り j 番目の層を表すための添字の j は極力省略する。前述したように、各層における基本境界条件は $U_{zk}^m, U_{rk}^m, U_{\phi k}^m, V_{zk}^m$ であり、自然境界条件は $S_{zk}^m, S_{rk}^m, S_{\phi k}^m, P_k^m$ である。まず、これらの基本境界条件および自然境界条件、未定係数を次のようにベクトル化して表示する。

$$\{\gamma\}_j = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}^T \quad (58)$$

$$\{U\}_j = \{U_{zk}^m, U_{rk}^m, U_{\phi k}^m, V_{zk}^m\}^T \quad (59)$$

$$\{S\}_j = \{S_{zk}^m, S_{rk}^m, S_{\phi k}^m, P_k^m\}^T \quad (60)$$

次に、これらのベクトルを次のようにマトリックスで関係付ける。

$$\begin{cases} \{U\}_j \\ \{S\}_j \end{cases} = \begin{cases} [N(k, \omega, z^j)]_j \\ [L(k, \omega, z^j)]_j \end{cases} \{\gamma\}_j \quad (61)$$

マトリックス $[N(k, \omega, z^j)]_j$ の成分は式(40)および式(41)より明らかであろう。このマトリックスの成分は k, ω および z^j の関数であるので、その点を式(61)では明記している。また、マトリックス $[L(k, \omega, z^j)]_j$ の成分については、付録に示した応力と変位の関係式を用いれば、求めるのは容易であろう。

式(61)を用いて、 j 層の上側と下側の状態ベクトル $\{U, S\}_j^T$ を求めれば、以下ようになる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix}_j^+ = \begin{bmatrix} N(k, \omega, h_j) \\ L(k, \omega, h_j) \end{bmatrix} \{\gamma\}_j \quad (62)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix}_j^- = \begin{bmatrix} N(k, \omega, 0) \\ L(k, \omega, 0) \end{bmatrix} \{\gamma\}_j \quad (63)$$

これらの式のベクトルの添字の+と-は層の上側と下側を示す。式(62)と式(63)から未定係数のベクトルを消

去して、層の上側と下側の境界面の状態ベクトルの関係式を誘導することで、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix}_j^+ = \begin{bmatrix} N(k, \omega, h_j) \\ L(k, \omega, h_j) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N(k, \omega, 0) \\ L(k, \omega, 0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix}_j^- \quad (64)$$

ここで、次のマトリックス $[Q(k, \omega)]_j$ を定義すれば、これは伝達マトリックスとしての性質があることが分かる。

$$[Q(k, \omega)]_j = \begin{bmatrix} N(k, \omega, h_j) \\ L(k, \omega, h_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(k, \omega, 0) \\ L(k, \omega, 0) \end{bmatrix}^{-1} \quad (65)$$

なお、前述のように基礎方程式の同次解には双曲線関数を用いている。このため、局所座標 $z' = 0$ のところでは、 sh_j , ($j = 1, 2, 3$)はゼロとなる。したがって、式(65)の右辺に現れる逆マトリックスを解析的に求めることは困難ではない。この点を含め、本論文で示す数値計算ではマトリックス $[Q(k, \omega)]$ を解析的に求めた結果を用いている。

(2) 多孔質飽和成層弾性体の特性方程式

伝達マトリックス $[Q(k, \omega)]_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ を用いることで、Fig. 1に示す地表面上の状態ベクトルと剛基盤上の状態ベクトルを次のように関連付けることができる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix}_N^+ = [\hat{Q}(k, \omega)] \begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix}_N^- \quad (66)$$

ここに、

$$[\hat{Q}(k, \omega)] = [Q(k, \omega)]_1 [Q(k, \omega)]_2 \cdots [Q(k, \omega)]_N \quad (67)$$

地表面と剛基盤における状態ベクトルのうち、地表面では表面力および間隙水圧がゼロになる。また、剛基盤上では変位がゼロになる。以上の境界条件の基で、式(66)が非自明解を持つための条件は次のようになる。

$$\Delta(k, \omega) = \det [\hat{Q}_{\beta\beta}(k, \omega)] = 0 \quad (68)$$

ここに、 $[\hat{Q}_{\beta\beta}(k, \omega)]$ は、 $[\hat{Q}(k, \omega)]$ の 4×4 のサブマトリックスであり、その位置は次式で示すことができる。

$$[\hat{Q}(k, \omega)] = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{\alpha\alpha}(k, \omega) & \hat{Q}_{\alpha\beta}(k, \omega) \\ \hat{Q}_{\beta\alpha}(k, \omega) & \hat{Q}_{\beta\beta}(k, \omega) \end{bmatrix} \quad (69)$$

式(68)に現れた Δ は多孔質飽和成層弾性体の特性関数と呼ぶべきもので、この特性関数はRayleigh波に関するものとLove波に関する関数に分離することができる。

$$\Delta(k, \omega) = \Delta_R(k, \omega) \Delta_L(k, \omega) \quad (70)$$

ここに、 Δ_R および Δ_L はそれぞれ、Rayleigh波およびLove波の特性関数を表す。

なお、剛基盤上の均質多孔質飽和弾性体のLove波の特性方程式は、以上の定式化をトレースすることで、

$$\Delta_L(k, \omega) = \cosh(\nu_3 h) = 0 \quad (71)$$

になることを示すことができる。ただし、 h は層厚を示す。この方程式は通常の弾性体で得られる剛基盤上のLove波の特性方程式と同じ形式である。式(71)が成立するためには、

$$\nu_3 h = i(2n + 1) \times \pi/2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (72)$$

となる。ここで i は虚数単位を表していることに注意する。式(72)を整理すると、 ω に関する次の3次方程式が得られ、このような場合にはLove波のモードを求めることは難しくない。

$$(\rho m^* - \rho_f^2) \omega^3 - i \rho b \omega^2 - \mu m^* (k^2 + \epsilon_n^2) \omega + \mu i b (k^2 + \epsilon_n^2) = 0 \quad (73)$$

ただし、

$$\epsilon_n = i(2n + 1) \times \pi/2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (74)$$

(3) 特性方程式を解くためのスキーム

ここで得られた特性方程式の解は、骨格と間隙水の内部摩擦によって、一般には複素数となる。したがって、超越方程式の複素解を求めるスキームが必要になる。いま、複素数を z 、ある与えられた超越関数を $f(z)$ とする。そして、超越方程式

$$f(z) = 0 \quad (75)$$

を解くことを考える。ここでは、この超越方程式を解くために、次のNewton-Raphson法のスキームを採用する。

$$z^{(j+1)} = z^{(j)} - \frac{f(z^{(j)})}{f'(z^{(j)})} \quad (76)$$

ここに、 z の添え字の j 繰り返し計算の回数を示す。

超越方程式の複素解を求めるためにNewton-Raphson法を適用する場合、 $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ をどう計算するかが一つの問題である。特に、伝達マトリックス法で得られた多層媒質の特性関数を解析的に微分することは不可能に近い。しかし、幸い複素関数には、導関数の積分表示が次のように与えられている¹⁴⁾。

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z')}{(z - z')^2} dz' \quad (77)$$

ただし、ここでの積分演算に対する積分経路は $f(z)$ が正則な領域に設定するものとする。積分演算は数値微分演算に比べれば、数値的な精度低下を引き落とさないことが期待できる。したがって、ここでは式(76)と式(77)を組み合わせ、超越方程式の複素解を求めて行くことにする。

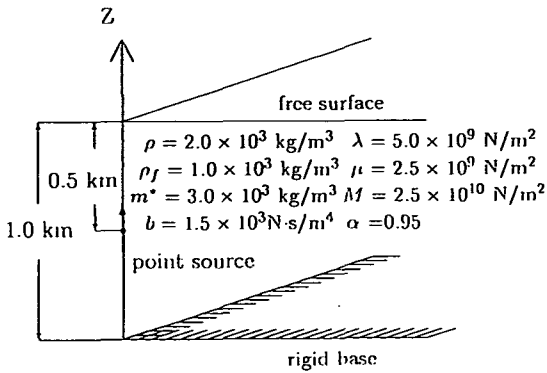


Fig. 2 Homogeneous poroelastic layer resting on a rigid base.

なお、この手法で多数の複素解を求めるためにデフレーションのテクニック¹³⁾を併用する。すなわち、 $f(z)$ の根のうち、 z_1, z_2, \dots, z_n が既知のものとするれば、新たに、関数 $g(z)$ を次のように定義し、前述のスキームを適用する。

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)} \quad (78)$$

関数 $g(z)$ は既知の解をゼロ点としないので、新たな別の解を求めることができる。式(77)を用いれば、 $g(z)$ の導関数も容易に求められることが分かる。

5. 数値計算例

(1) 剛基盤上の均質多孔質弾性体の正規モードの性質

ここでは、ここまで展開してきた手法の妥当性を検証するために、まず、Fig.2に示す解析モデルについて、その正規モードの性質について検討を行う。

Fig. 2の解析モデルは剛基盤の上に均質な多孔質飽和弾性体が厚さ1.0 kmに堆積したモデルであり、その材料定数は、Fig. 2に示すとおりである。Fig. 2において、たとえば間隙率を $\beta^* = 0.2$ と設定すれば、係数 b より透水係数は $\kappa = 0.26$ m/sとなり、ここでの透水係数はかなり大きな設定となる。換言すれば、骨格と間隙水の内部摩擦はここではかなり小さい。

まず、解析モデルに対する正規モードの分散曲線をFig. 3に示す。Fig. 3の分散曲線では、横軸に正規モードの振動数を、縦軸に位相速度をとっている。ただし、複素モードの位相速度は複素角振動数を ω として $\text{Re}(\omega)/k$ で計算し、通常の弾性体のS波の位相速度($\sqrt{\mu/\rho}$)で除して無次元化している。ここで、通常の弾性体とは解析モデルと同じLamé定数と ρ を有するものを示す。

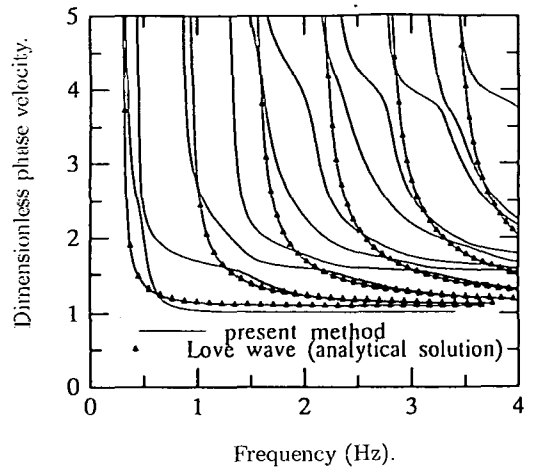


Fig. 3 Dispersion curves for the analyzed model shown in Fig. 2.

また、図中には、式(73)から求めたLove波のモードを比較のためにプロットで表している。Fig. 3の分散曲線より、本手法による結果と3次方程式から求められたLove波の解は良く一致しているまた、Fig. 3より明かなように、多くの正規モードは高い振動数のところで、無次元の位相速度1.1に収束している。このことは、正規モードの重ね合わせで、位相速度が振動数で変化しない実体波が合成されるメカニズムを表すとともに、ここでのS波の速度は通常の弾性体のS波の位相速度より大きいことを示している。

また、これらの多数のモードの中で、一つのモードだけが、最も低い位相速度1.0に収束している。このモードは最も低い位相速度を示すことから、Rayleigh波の基本モードである。ここでも、Rayleigh波の位相速度は、通常の弾性体のRayleigh波の位相速度より大きいことが理解できる。

なお、Biotの論文¹⁾を参照すると、多孔質飽和媒質の圧縮性に関連した実体波には2種類ある。 $b = 0$ として、これらの波動の位相速度を算定すると、それぞれ、5.24 km/sおよび1.35 km/sとなる。Fig.3に示したような位相速度の無次元化を施せば、これらの位相速度はそれぞれ、4.68ならびに1.24となる。Fig.3に見られるRayleigh波の実体波への収束状況を見ると、遅い位相速度を持つP波への収束は見られる。しかし、ここでも収束している位相速度は前述の1.24よりも大きい。

このことは、骨格と間隙水の内部摩擦によって、波動の位相速度が大きくなることを示している。

なお、速い位相速度を持つP波へのRayleigh波の収束はFig. 3の分散曲線からは見られない。しかし、分散曲線の位相速度4付近での高い振動数での折れ曲がり

状況から判断すると、もう少し高い振動数でRayleigh波が速い位相速度を持つP波に収束する可能性も残されている。しかしながら、本解析手法で、高い振動数のモードを求めることはNewton-Raphson法の収束の問題を含め限界もあり、ここでは確かめることができなかった。

次に、多孔質飽和弾性体のモード形状について考察する。Fig. 4に振動数1.0 Hzにおける骨格変位のRayleigh波基本モード(実数部)を示す。ここでは、実線が鉛直変位を、破線が水平変位を示している。Fig. 4より明らかなように、モードの変位振幅の大きな部分は地表面付近にあり、この意味で、Rayleigh波モードの性状は通常の弾性体のものに類似している。

Fig. 5に振動数1.0 Hzにおける骨格変位のRayleigh波基本モード(虚数部)を示す。ここでもFig. 4同様、実線が鉛直変位を、破線が水平変位を表している。Fig. 4とFig. 5の比較で明らかなように、Rayleigh波モードの実数部と虚数部の形状はほぼ逆対称であると言える。すなわち、実数部と虚数部の形状は向きが逆であるが、どちらかの向きを反転させれば、形状そのものはほぼ相似となる。複素モードの形状の実数部と虚数部の形状が相似であることは、実数部と虚数部の違いによる振動の位相ずれが小さい、すなわち、間隙水と骨格の内部摩擦による減衰の効果が小さいことを示している。

Fig. 6に間隙水のRayleigh波モードを示す。ここでは、間隙水と骨格の鉛直方向の相対変位について、実線で実数部を破線で虚数部を表している。また、Rayleigh波の振動数は1.0 Hzである。Fig. 6より明らかなように、間隙水の変位の実数部と虚数部の形状は逆対称である。また、骨格変位と比較すると、骨格変位の方向と逆の方向を示していることが分かる。これは、間隙水は骨格の振動を押さえる働きがあることを示すもので、間隙水と骨格の内部摩擦の効果によるものと考えられることもできる。特に、間隙水と骨格の相対変位は地表面に近づくにつれ大きくなることから、地表面付近で、間隙水は骨格の変位をより拘束するものと言える。

(2) 剛基盤上の多層多孔質弾性体の正規モードの性質

次に、剛基盤上で成層構造を成す多孔質飽和弾性体のRayleigh波モードについて考察を行う。解析モデルをFig. 7に示す。この解析モデルでは、中間部の薄い層にやや軟弱な層を設定している。材料定数はTable 1にまとめている。多孔質飽和弾性体の骨格と間隙水の内部摩擦を表わす係数 b は、透水係数に換算するとFig. 2の解析モデルと同様 $\kappa = 0.26$ m/s程度となる。

Fig. 7の解析モデルに対する正規モードの分散曲線をFig. 8に示す。ここでは、横軸に振動数を、縦軸に

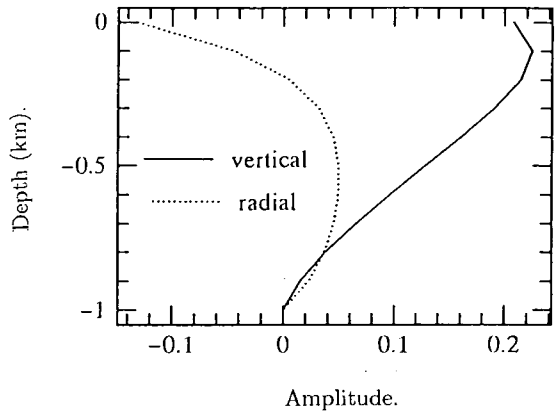


Fig. 4 Real part of the fundamental Rayleigh wave mode for the solid matrix.

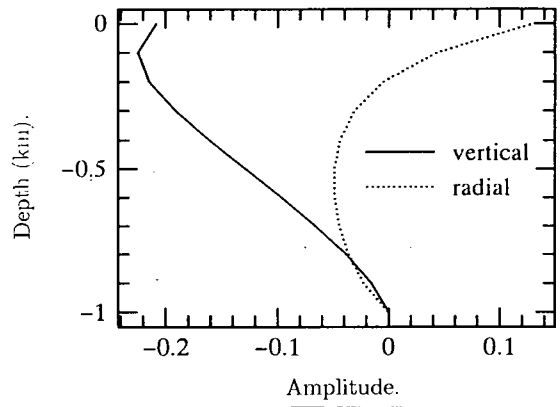


Fig. 5 Imaginary part of the fundamental Rayleigh wave mode for the solid matrix.

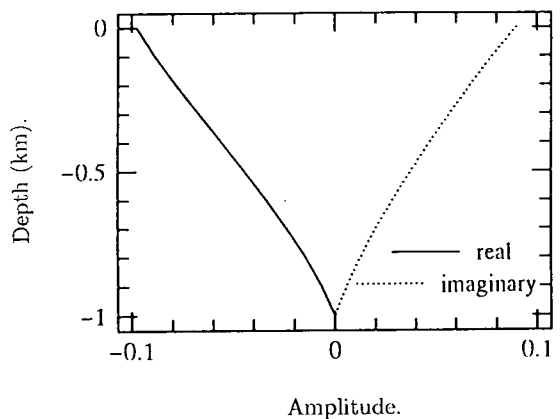


Fig. 6 The fundamental Rayleigh wave mode for the relative displacement of the pore fluid to solid.

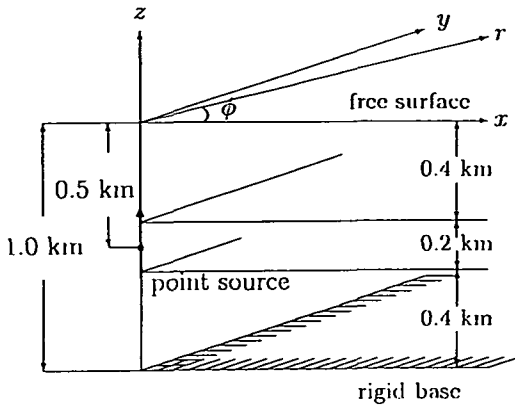


Fig. 7 Analyzed model. Poroelastic layered medium is resting on a rigid base.

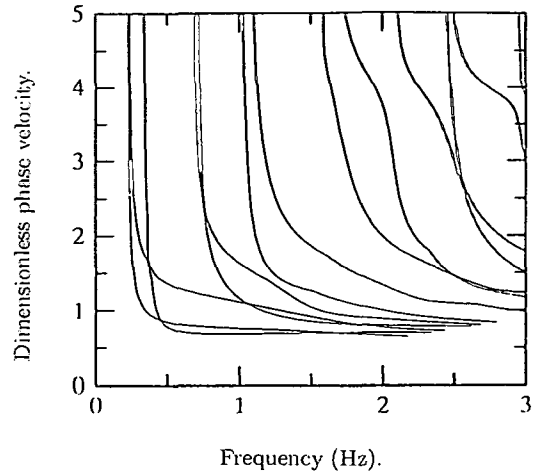


Fig. 8 Dispersion curves for the analyzed model shown in Fig. 7.

Table 1 Constitutive parameters for the analyzed model shown in Fig. 7

layer	μ^\dagger	λ^\dagger	M^\dagger	ρ^\ddagger	ρ_f^\ddagger	$m^*\ddagger$	b^\S	α
1 st	1.25	2.5	25	2	1	3	1.5	0.95
2 nd	0.63	1.3	25	2	1	3	1.5	0.95
3 rd	2.5	5.0	25	2	1	3	1.5	0.95

$\dagger \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $\ddagger \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\S \times 10^3 \text{ N-s/m}^4$

正規モードの位相速度を示している。ただし、ここでの位相速度は最下層でのせん断弾性係数と質量密度で定義される通常の弾性体のS波の位相速度との比をとり無次元化している。ここでの分散曲線はFig.3の分散曲線とほぼ同様な傾向を示しているが、軟弱層の存在により正規モードの位相速度は小さくなっている。この分散曲線でも正規モードの振動数が増加するにつれ、位相速度は一定の値に近づき、非分散性の実体波が生成されて行く様子を示していることが理解できる。なお、Fig. 3同様、分散曲線の中で最も位相速度が小さいものは、Rayleigh波の基本モードである。

Fig. 9に1.0HzにおけるRayleigh波(基本モード)のモード形状を示す。ここではRayleigh波のモードのうち、骨格変位の実数部について示している。図中で実線は鉛直成分を、破線は水平成分を示している。Fig. 9より明らかなようにRayleigh波のモードは中間の軟弱層で増幅を受け、中間の軟弱層でモードの振幅が最大になっている。このため、Rayleigh波のモード振幅

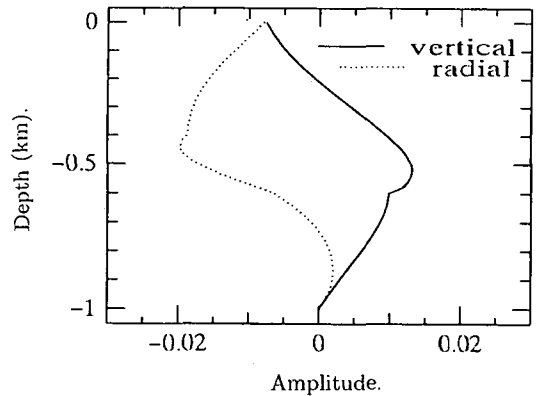


Fig. 9 Real part of the fundamental Rayleigh wave mode for the solid matrix.

の最大値は均質な媒質の場合とは異なり地表面付近にはない。

Fig. 10には、1.0 Hzにおける虚数部のRayleigh波のモード形状を示す。Fig. 9との比較のために、ここでも骨格変位について示している。Fig. 9との比較で明らかなように、Rayleigh波のモード形状の実数部と虚数部の形状はほぼ逆対称であり、どちらかの形状を反転させればほぼ相似形となることが分かる。前述のように、このことは骨格と間隙水の内部摩擦が小さいことを示す。

Fig. 11に、間隙水と骨格の鉛直方向の相対変位に関する1.0 HzのRayleigh波のモード形状を示す。ここでは、実線を実数部、破線を虚数部としている。間隙

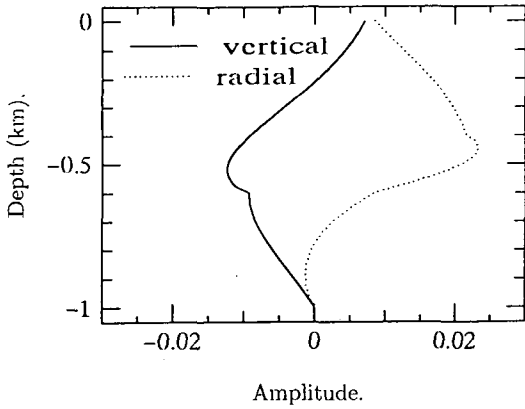


Fig. 10 Imaginary part of the fundamental Rayleigh wave mode for the solid matrix.

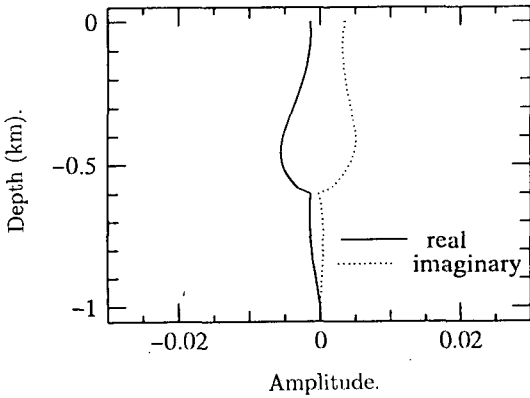


Fig. 11 The fundamental Rayleigh wave mode for the relative displacement of the pore fluid to solid.

水と骨格の相対変位は軟弱層で増幅されている。しかしながら、Fig. 10とFig. 9との比較で明らかなように、間隙水と骨格の相対変位は骨格の変位と地表面付近を除き、逆方向を示している。また、骨格変位も軟弱層で増幅を受けていることから、間隙水は、骨格の変位を拘束しようとする働きがあることを示す。

(3) 時刻歴応答

最後にモードを重ね合わせ時刻歴応答性状を考察する。過渡応答を計算するために、深さ0.5 kmの位置の点に鉛直上向きに作用する立上り時間0.1 s.のランプ関数で表される時間変動の外力を作用させる。ここで、外力の大きさは 1.0×10^{10} Nである。式(54)の収束を考

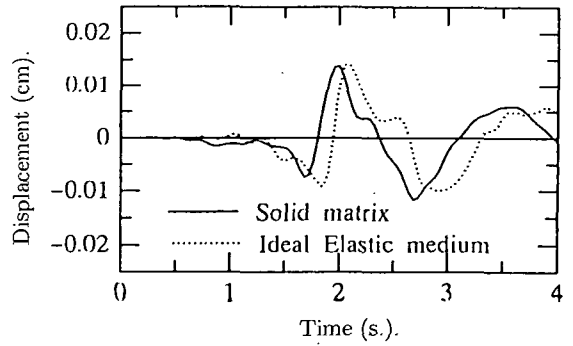


Fig. 12 Vertical displacement for the analyzed model shown in Fig. 2 due to the point load.

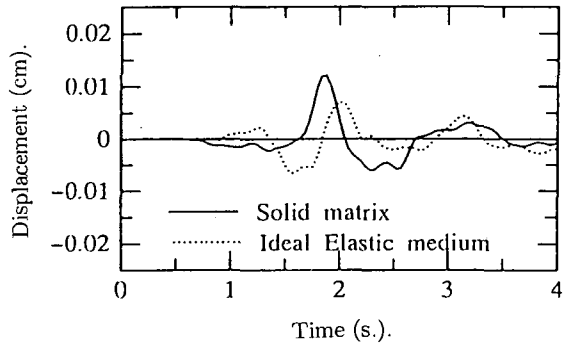


Fig. 13 Horizontal displacement for the analyzed model shown in Fig. 2 due to the point load.

慮し、正規モードを低次のモードを20次まで、離散化波数は19/kmまでとり時刻歴を計算することにする。ただし、前述のように、互いに複素共役のモードを重ね合わせているので、この意味では一つの離散化波数につき、40個の正規モードを考慮していることになる。

Fig. 12はFig. 2の解析モデルにおいて観測点を振源からの水平距離2 kmの位置の地表面にとった場合の骨格の鉛直方向の変位である。ここでは、比較のために、通常の弾性体の時刻歴応答を薄層要素-離散化波数法⁸⁾により求めている。ここで言う通常の弾性体とは、解析モデルFig. 2で定義された λ , μ および ρ の値を有する剛基盤上の厚さ1.0 kmの均質弾性体と言う。

Fig. 12より明らかなように、骨格の変位振幅と通常の弾性体の変位振幅はほぼ等しい。しかし、骨格の振動の位相は通常の弾性体の振動に比べ進んでいる。これは、分散曲線に見られたように、多孔質飽和弾性体の

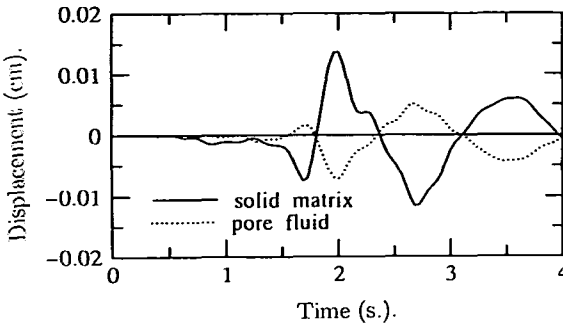


Fig. 14 Comparison of vertical solid displacement with relative displacement for the analyzed model shown in Fig. 2.

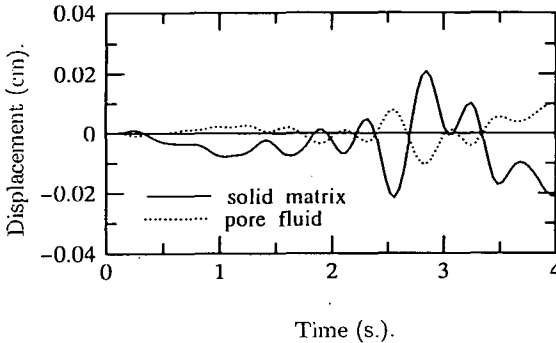


Fig. 15 Comparison of vertical solid displacement with relative displacement for the analyzed model shown in Fig. 7.

正規モードの位相速度は通常の弾性体のものに比べ大きいことに対応している。なお、二つの時刻歴の傾向はほぼ同じであることから、本手法による、多孔質飽和弾性体の応答は適切に求められていると考えられる。

Fig. 13は、Fig. 12と同様な条件で得た水平方向の変位の比較である。これらの時刻歴の特徴は、鉛直方向の変位時刻歴で見られたことと同様、骨格の振動の位相が進んでいることである。しかし、変位振幅については、骨格の方が、通常の弾性体に比べて大きくており、この場合には多孔質飽和弾性体は水平方向に揺れやすいことを示唆している。

鉛直方向の骨格変位と間隙水と骨格の相対変位の時刻歴の比較をFig. 14に示す。Fig. 14によれば、骨格の変位と間隙水と骨格の相対変位の時刻歴の位相はおおむね反転している。このことは、間隙水は骨格の振動を押さえる働きがあることを示し、振動モードで見られた骨格変位を間隙水が拘束する効果が時刻歴応答についても見られることを示す。

最後に、Fig. 7の解析モデルの過渡応答解析結果をFig. 15に示す。過渡応答を計算するための加力の条件はFig. 3の解析モデルの条件と全く同じである。また、過渡応答の計算では、前述のように正規モードを低次のモードを20次まで、離散化波数は19/kmまでとっている。Fig. 15は、鉛直方向の骨格変位と間隙水と骨格の相対変位の時刻歴の比較である。これによれば、骨格の変位と間隙水と骨格の相対変位の時刻歴の位相はおおむね反転している。Fig. 14と同様に、このことは、間隙水は骨格の振動を押さえる働きがあることを示している。また、Fig. 14とFig. 15を比較すると、骨格変位の振幅はFig. 15の方で大きくており、軟弱層での波動の増幅効果も見られる。また、Fig. 15では大きな振幅の波動の到達も遅れており、波動の伝播速度が小さいことに対応している。

以上の結果を見ると、本手法で求めた多孔質飽和成層弾性体の正規モードは軟弱層での増幅が観察されるとともに、骨格と間隙水の内部摩擦の効果も見られる。既往の研究では多孔質飽和成層弾性体の正規モードを直接考察したものは見当たらず、既往の結果との比較はここではできないが、得られた結果は妥当なものであると考えられる。

6. 結論

本論文では、多孔質飽和成層弾性体の過渡応答解析のための正規モード合成法を展開した。ここではまず始めに、多孔質飽和成層弾性体の正規モードの直交関係式を支配方程式の対称性に着目して定式化した。そして、次に正規モードの重ね合わせにより、過渡応答波動場を表現した。これによれば、過渡応答波動場はGreen関数と外力の合成積で表されることになった。また、これらの定式化を基に幾つかの数値計算を行った。これらの数値計算結果は、多孔質飽和弾性体の波動伝播特性を適切に反映し、妥当なものと考えられる。以上より得られた知見をまとめるまとめると次のようになる。

- 1)剛基盤上多孔質飽和弾性体の分散曲線によれば、実体波ならびにRayleigh波の位相速度は、通常の弾性体に比べやや大きくなる。これに対応して、多孔質飽和弾性体の振動の位相は、通常の弾性体の振動の位相に比べやや進んでいる。骨格と間隙水の内部摩擦は波動の位相速度を増加させるものと言える。
- 2)Rayleigh波の振動モード形状によれば、間隙水は骨格の変位を拘束する働きがある。これは、間隙水と骨格の内部摩擦に基づく減衰効果を反映している。

3) 骨格変位の時刻歴と間隙水と骨格の相対変位の時刻歴を比較すると、おおむね位相が反転している。これは、振動モードで見られたような、骨格と間隙水の内部摩擦の効果を表したものである。

付録

この付録の目的は本文の式(24)の誘導過程を示すことである。

まず、式(18)に現れる微分演算子 $L_{k_n}^m$ の中の L_2 を次のように分解する。

$$L_2 = L_2^{(1)} + L_2^{(2)} \quad (\text{A.1})$$

ここに、

$$L_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta & 0 & 0 & -\alpha M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha M & 0 & 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$L_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta & 0 & 0 & \alpha M & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha M & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

であり、 $\zeta = \lambda + \alpha^2 M$ とした。次に、以下の積分を考える。

$$I(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m) = \int_0^{h_j} \delta q_{k_n}^m T L_{k_n}^m q_{k_n}^m dz \quad (\text{A.4})$$

式(A.4)の部分積分によって、次式を得る。

$$I(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m) = [\delta q_{k_n}^m T Q_{k_n}^m]_r - W(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m) \quad (\text{A.5})$$

ここに、 $W(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m)$ は本文の式(24)に現れた汎関数に他ならず、その具体的な形は次のようになる。

$$\begin{aligned} W(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m) &= \int_0^{h_j} [\partial_z \delta q_{k_n}^m T L_1 \partial_z q_{k_n}^m + k_n \delta q_{k_n}^m T L_2^{(1)} \partial_z q_{k_n}^m \\ &\quad - \partial_z \delta q_{k_n}^m T L_2^{(2)} \partial_z q_{k_n}^m + k_n^2 \delta q_{k_n}^m T L_3 q_{k_n}^m] dz^l \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\int_0^{h_j} [\delta q_{k_n}^m T L_2^{(1)} \partial_z q_{k_n}^m - \partial_z \delta q_{k_n}^m T L_2^{(2)} \partial_z q_{k_n}^m] dz^l \\ &= \int_0^{h_j} [q_{k_n}^m T L_2^{(1)} \partial_z \delta q_{k_n}^m - \partial_z q_{k_n}^m T L_2^{(2)} \partial_z \delta q_{k_n}^m] dz^l \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

の性質と L_1 および L_3 が対称行列であることを用い、

$$W(\delta q_{k_n}^m, q_{k_n}^m) = W(q_{k_n}^m, \delta q_{k_n}^m) \quad (\text{A.8})$$

が成立する。また、本文にも示したように、自然境界条件を表すベクトルの成分は、

$$Q_{k_n}^m = (S_{z k_n}^m, S_{r k_n}^m, S_{\phi k_n}^m, P_{k_n}^m, 0, 0)^T \quad (\text{A.9})$$

となるが、その成分は、

$$\begin{aligned} S_{z k_n}^m &= (\lambda + 2\mu + \alpha^2 M) \partial_z U_{z k_n}^m - k_n \lambda U_{r k_n}^m \\ &\quad - k_n \alpha^2 M U_{r k_n}^m - k_n \alpha M V_{r k_n}^m + \alpha M \partial_z V_{z k_n}^m \\ S_{r k_n}^m &= \mu \partial_z U_{r k_n}^m + \mu k_n U_{z k_n}^m \\ S_{\phi k_n}^m &= \mu \partial_z U_{\phi k_n}^m \\ P_{k_n}^m &= \alpha M \partial_z U_{z k_n}^m + M \partial_z V_{z k_n}^m - \alpha M k_n U_{r k_n}^m \\ &\quad - k_n M V_{r k_n}^m \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となるのが部分積分によって示される。本文にも示したように、 $S_{z k_n}^m$ 、 $S_{r k_n}^m$ 、 $S_{\phi k_n}^m$ は表面力ベクトルの成分、 $P_{k_n}^m$ は間隙水圧である。式(A.10)に示された関係式は当然以下の多孔質飽和弾性体の構成方程式¹⁵⁾から得る結果と一致する。

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{div} u + 2\mu \epsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} p \quad (\text{A.11})$$

$$p = -\alpha M \text{div} u - M \text{div} v \quad (\text{A.12})$$

ここに、 σ_{ij} は全応力場で考えたときの応力テンソルの成分、 p は間隙水圧、 ϵ_{ij} は骨格のひずみテンソルの成分である。また、本文に示したように u および v は骨格の変位および間隙水と骨格の相対変位である。

参考文献

- 1) Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I, low frequency range, *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 28, pp. 168-178, 1956.
- 2) Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, II, high frequency range, *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 28, pp. 179-191, 1956.
- 3) Biot, M. A.: Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. Appl. Phys.*, Vol. 33, pp. 1482-1498, 1962.
- 4) Bougacha, S., Roesset, J. M. and Tassoulas, J. L.: Dynamic stiffness of foundations on fluid-filled poroelastic stratum, *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 119, pp. 1648-1662, 1993.
- 5) Bougacha, S., Tassoulas, J. L. and Roesset, J. M.: Analysis of foundations on fluid-filled poroelastic stratum, *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 119, pp. 1632-1647, 1993.
- 6) Rajapakse, R. K. N. D. and Senjuntichai, T.: Dynamic response of a multi-layered poroelastic medium, *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 24, pp. 703-722, 1995.
- 7) Senjuntichai, T.: Green's functions for multi-layered poroelastic media and an indirect boundary element method, *Ph. D. Thesis*, University of Manitoba, Winnipeg, 1994.

- 8) Touhei, T.: A discrete wavenumber and normal mode superposition method for Synthetic Seismograms, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 84, pp. 1473-1483, 1994.
- 9) Touhei, T.: Propagation of normal modes due to impulsive loading to 3-D medium on a rigid basement, *Earthq. Engn. Struct. Dyn.*, Vol. 24, pp. 937-949, 1995.
- 10) 東平光生: 薄層要素-離散化波数法による圧縮性流体層を含む成層弾性体の動的解析手法の展開, 土木学会論文集, No. 507/I-30, pp. 149-158, 1995.
- 11) 東平光生: 薄層要素-離散化波数法による重力場における弾性固体と圧縮性流体層との連成解析手法の展開土木学会論文集, No. 507/I-30, pp. 149-158, 1996.
- 12) Olson, A. H., Orcutte, J. A. and G. A. Frizer: The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, Vol. 77, pp. 421-460, 1984.
- 13) 戸川隼人: 有限要素法による振動解析, サイエンス社, 1975.
- 14) 今村勤: 物理と関数論, 岩波書店, 1981.
- 15) Biot, M. A.: General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.

(1996.8.27 受付)

NORMAL MODE SUPERPOSITION METHOD FOR TRANSIENT RESPONSE ANALYSES OF LAYERED POROELASTIC MEDIA

Terumi TOUHEI

Normal mode superposition method for transient response analyses of layered poroelastic media was developed here. Normal modes here were complex due to the presence of the internal friction between the solid matrix and pore fluid. Orthogonality relations among the complex normal modes were established by using the symmetry of the governing equation. Transient response of layered poroelastic media is expressed by the convolution integral between Green's function and source function, and Green's function is represented in terms of normal modes which show the orthogonality relations. Numerical calculations were carried out to examine the effectiveness of the present method as well as the vibration properties of a poroelastic medium on a rigid base.