

ハイラーキ要素による骨組構造解析

林 正¹・岩崎英治²

¹正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系 (〒 940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

²正会員 工博 長岡技術科学大学助手 工学部建設系 (〒 940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

曲げ及び曲げねじりによるせん断変形を考慮したハイラーキ棒要素を開発し、スレンダーな骨組部材に適用するための次数低減積分法を提案する。ハイラーキ要素は、厳密な変位関数が多項式で表現できない問題に対して有効な要素で、骨組構造物の種々の解析に用いることができる。本文では、静的線形解析について級数の収束性を調べ、従来の要素に比べて極めて精度の高いことを示す。

Key Words : hierarchical beam element, shear deformation, warping torsion, reduced integration, frame analysis

1. まえがき

有限要素法では、解の精度を改善する方法として h 法 (要素細分割法), r 法 (節点移動法) と p 法 (補間関数の高次化法) が知られている。

マトリックス法による骨組構造の線形解析では多くの問題において正解が得られる。変断面材の解析、曲げねじり解析や固有値解析などでは多項式で補間した変位関数が近似式になるために補間誤差を生じるが、h 法を用いて解の精度を上げることができる。しかし、実橋などの大規模構造物の立体解析ではデータの入力作業が大幅に増えるとともに、計算結果のデータ処理量が増大するために実用的に好ましい方法ではない。

このような場合に、p 法を用いるハイラーキ棒要素では、内部自由度 (定義される節点をもたない一般化変位) を付加して補間関数の次数を上げることによって高精度の解を得ることができる。この内部自由度は、要素内で変位を級数展開したときの係数であるので物理的意味に欠けるが、数値計算では展開関数の項数を入力データで指示するだけで変位関数の次数を自由に変えることができるので、入出力データは増加しない。また、全自由度数が同じであれば h 法よりも p 法の方が精度がよいことも長所である。構造全体の解析では、事前に内部自由度を縮約した要素剛性方程式を用いるので、全体解析での内部自由度は 2 節点要素と同じである。

骨組解析で一般に用いられる C^1 級はり要素では、断面の回転角やねじれ率をたわみやねじり角の微係数として表すが、ハイラーキ要素ではこれらの変位を独立に補間する。変位関数に用いる形状関数は、1 次式を初項として内部自由度に用いる高次項を順次加えていく階層的な関数列で、各項は部材両端での境界条件を満た

し、かつ互いに独立な関数であればよいので種々の C^0 連続性の多項式が考えられる。文献 1) には Lagrange 多項式と Legendre 多項式から導かれるハイラーキ要素の形状関数が示されている。Legendre 多項式は直交性があることから、シェルやソリッドのハイラーキ要素によく用いられる²⁾。Szabo ら³⁾は、この 2 次元要素を写像によって平面アーチに変換しているが、曲線座標系では直交性の利点は活かされない。また、高次の Legendre 多項式は長い式になるので、プログラミング作業と計算時間を考えれば簡単な形状関数が好ましい。Surana ら⁴⁾は 2 次元の多節点 Lagrange 要素から 3 節点の平面ハイラーキ棒要素を定式化して、Timoshenko はりの固有振動解析を行っている。

C^0 級要素による薄肉はりの立体解析では、曲げねじりによるせん断変形を考慮するために拡張された Timoshenko 理論が用いられる⁵⁾。Chen ら⁶⁾は、曲げと曲げねじりによるせん断変形を考慮した薄肉はり要素を定式化している。この要素の形状関数には高次の Lagrange 多項式がそのまま用いられているので多節点要素であり、階層的性質をもたない。本論文では、種々のハイラーキ要素で用いられている形状関数よりも簡単な多項式⁷⁾(これをハイラーキ多項式と呼ぶことにする)を使用する。この多項式の関数列とその導関数は漸化式で与えられるのでプログラミングに適しており、他の関数に比べて計算量も少ない。

ハイラーキ要素は他の C^0 級はり要素と同様に、せん断変形を考慮した解析は容易であるが、スレンダーなはりの解析では shear locking の現象が起きる。曲げ解析では有限要素法で用いられている離散 Kirchhoff の方法や次数低減積分法によってこれを防ぐことができる。しかし、曲げねじり解析では研究が少なく、これ

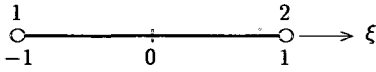


図-1 自然座標

らの手法の効果は十分に解明されていない。先に、拡張 Timoshenko はり要素を用いてせん断変形を無視できる場合の精度を調べたが⁸⁾、このときに用いた C^0 級の形状関数は 1 次多項式で、ハイラーキ多項式の最低次の関数である。したがって、問題によってはある程度の要素分割が必要であったが、はりの解析において一般に用いられる C^1 級要素に比べて良好な結果が得られることを確かめた。

本論文では、 C^1 級要素よりも汎用性のある C^0 級のハイラーキ要素を用いて、ストックリーなはりからスレンダーなはりまで適用できる実用的な骨組要素を開発する。 C^0 級はり要素の定式化は拡張された Timoshenko はり理論^{5), 8)}に基づくものであり、数値計算では効率性に優れている次数低減積分法を使用する。しかし、ハイラーキ要素では次数の異なる多項式を形状関数に用いるために、低減すべき積分点数が定かでない。そこで、曲げ及び曲げねじり解析に必要な離散 Kirchhoff の拘束条件を求め、この結果からハイラーキ要素に有効な次数低減積分法を提案し、この手法の妥当性をひずみエネルギーについての理論的考察から明らかにする。

本要素の有効性を確かめるために一般的な方法として縮約した剛性行列を求め、厳密な剛性行列と比較して級数の収束性と精度を調べる。また、せん断変形を考慮した C^1 級はり要素の式を求め、 C^1 級要素を用いた h 法との効率性を比較する。

2. ハイラーキ棒要素

(1) 変位関数とひずみ表示式

ハイラーキ棒要素は直線材とし、変断面材でもよいが 2 軸対称断面を有するものとする¹。これに、部材軸を x 軸、断面の主軸方向を y, z 軸とする直交デカルト要素座標系 (x, y, z) を設ける。また、図-1 に示すように部材両端の節点を 1, 2 とし、要素の midpoint を原点とする自然座標を ξ とする。 x に関する微分をプライム記号で表すと、次式の関係がある。

$$()' \equiv \frac{d}{dx} = \frac{2}{\ell} \frac{d}{d\xi} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (1)$$

ここに、 ℓ は部材長である。

x 軸上の要素座標軸方向の並進変位を u_0, v_0, w_0 、座標軸まわりの回転角を $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 、全ねじり率を ψ (Saint-Venant のねじりによるねじれ率 θ'_x とは区別する) とし、これらの変位成分は互いに独立とする。7 成分の変位を級数展開したときの係数を一般化変位に選び、各級数項 k ごとに分けてベクトル d_k で表す。

$$d_k = \{ u_k \ v_k \ w_k \ \theta_{xk} \ \theta_{yk} \ \theta_{zk} \ \psi_k \}^T \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

ここに、 $k = 1, 2$ は両端の節点変位、 $k \geq 3$ は内部自由度であり、 m は展開項数である。

7 成分の変位の任意の成分を $d(\xi)$ 、これに対する式 (2) の一般化変位を d_k とすると、成分に関係なく変位関数はすべて同一の次の級数で与えられる。

$$d(\xi) = \sum_{k=1}^m N_k(\xi) d_k \quad (3)$$

$N_k(\xi)$ は形状関数で、次のハイラーキ多項式⁷⁾を用いる。

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4a)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4b)$$

$$N_k(\xi) = (1 - \xi^2)\xi^{k-3} \quad (k \geq 3) \quad (4c)$$

高次の N_k とその ξ に関する導関数 ($\dot{N}_k = dN_k/d\xi$) は次の漸化式で求められる。

$$N_{k+1} = \xi N_k \quad (N_3 = 1 - \xi^2, \ k \geq 3) \quad (5a)$$

$$\dot{N}_{k+1} = \xi \dot{N}_k + N_k \quad (\dot{N}_3 = -2\xi, \ k \geq 3) \quad (5b)$$

断面内の任意点の変位は、断面形状不変の仮定から次式で与えられる。

$$u(x, y, z) = u_0(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) - \omega(y, z)\psi(x) \quad (6a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x) - z\theta_x(x) \quad (6b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x) + y\theta_x(x) \quad (6c)$$

ここに、 u_0, v_0, w_0 と θ_x などには式 (3) を用いる。また、 ω は断面の図心点で正規化されたそり関数である。

式 (6) より、任意点のひずみは次式のように求められる。

$$\varepsilon_x = u'_0 - y\theta'_z + z\theta'_y - \omega\psi' \quad (7a)$$

$$\gamma_{xy} = (v'_0 - \theta_z) - (z + \frac{\partial\omega}{\partial y})\theta'_x + \frac{\partial\omega}{\partial y}(\theta'_x - \psi) \quad (7b)$$

$$\gamma_{zx} = (w'_0 + \theta_y) + (y - \frac{\partial\omega}{\partial z})\theta'_x + \frac{\partial\omega}{\partial z}(\theta'_x - \psi) \quad (7c)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad (7d)$$

ここで、せん断ひずみの右辺第 1~3 項はそれぞれ曲げ、Saint-Venant のねじり及び曲げねじりによるせん断ひずみを表す。

¹ 図心軸とせん断中心軸が一致しない場合には、これらの偏心距離を考慮した断面内の座標変換によって数値計算で処理する。

曲げと曲げねじりによるせん断変形を無視するはりでは、変位成分に次式の従属関係が成り立つ。

$$\theta_x = v'_0, \quad \theta_y = -w'_0, \quad \psi = \theta'_x \quad (8)$$

これを式(7)に用いると、せん断変形を無視したひずみ-変位関係式が得られる。

(2) 剛性方程式

ヤング係数を E 、せん断弾性係数を G として、応力-ひずみ関係式を次式で表す。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (9)$$

要素の仮想ひずみエネルギー

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (10)$$

に式(3),(7),(9)を用いると、通常のマトリックス法の定式化によって線形の剛性行列 k_L が得られる。 k_L を式(2)の d_k に対応して、級数項 k, j に関する (7×7) の小行列 k_{kj} に分割して示すことにする。まず等断面材を考へて、断面内で積分すると k_{kj} の非零要素は次のようになる。

$$k_{kj} = \begin{pmatrix} EA g_{kj} & & & & & & \\ & GA_{sy} g_{kj} & & -GA_{sy} h_{kj} & & & \\ & & GA_{sz} g_{kj} & & GA_{sz} h_{kj} & & \\ & & & G(J+J_s) g_{kj} & & -GJ_s h_{kj} & \\ & & & & GA_{sz} \bar{h}_{kj} & & c_{kj} \\ -GA_{sy} \bar{h}_{kj} & & & & & & d_{kj} \\ & & -GJ_s \bar{h}_{kj} & & & & e_{kj} \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここに、

$$c_{kj} = EI_y g_{kj} + GA_{sz} f_{kj} \quad (12a)$$

$$d_{kj} = EI_z g_{kj} + GA_{sy} f_{kj} \quad (12b)$$

$$e_{kj} = EI_w g_{kj} + GJ_s f_{kj} \quad (12c)$$

$$f_{kj} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 N_k N_j d\xi \quad (13a)$$

$$g_{kj} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 N'_k N'_j d\xi \quad (13b)$$

$$h_{kj} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 N'_k N_j d\xi \quad (13c)$$

$$\bar{h}_{kj} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 N_k N'_j d\xi \quad (13d)$$

$$A = \int_A dA, \quad A_{sy} = k_y A, \quad A_{sz} = k_z A \quad (14a)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (14b)$$

$$I_w = \int_A \omega^2 dA, \quad I_p = I_y + I_z \quad (14c)$$

$$J = \int_A \left\{ \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 + \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \quad (14d)$$

$$J_s = k_x (I_p - J) \quad (14e)$$

A_{sy}, A_{sz} は y, z 方向のせん断力に対する有効せん断面積、 J_s はねじりに対する有効せん断ねじり定数で、 k_y, k_z, k_x はこれらのせん断ひずみエネルギーに対する補正係数である。

式(11)において、部材軸 ξ に関する積分は式(13)の4つの値を求めればよい。変断面材では、 ξ の関数として表した式(14)の断面剛性を積分演算に含めて式(13)の積分値を計算する。例えば、断面積を次式のように表す。

$$1 \text{ 次補間式: } A(\xi) = A_0 - A_{12}\xi \quad (15a)$$

$$2 \text{ 次補間式: } A(\xi) = A_3 - A_{12}\xi + (A_0 - A_3)\xi^2 \quad (15b)$$

ここに、

$$A_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2), \quad A_{12} = \frac{1}{2}(A_1 - A_2) \quad (16)$$

A_1, A_2 は要素の両端での値、 A_3 は中点での値である。さらに高次の補間を行うときには、アイソパラメトリック表示の補間式を用いる。

次に、要素上に作用する分布荷重 q と集中荷重 P を考える。これらの荷重は x 軸に作用するものとし、7次の列ベクトル q, P の各成分は変位成分と同方向で、その順序は一般化変位 d_k に対応した順序とする。 δd_k による仮想仕事から q と P による要素荷重ベクトル(等価節点力) p_k を求めると次のようになる。

$$p_k = \frac{\ell}{2} \int N_k q d\xi + N_k(\xi_c) P \quad (17)$$

ここに、 ξ_c は P の作用点の座標値である。

式(2)の一般化変位に対応して、 d_k の各成分と仕事をする力を成分とする一般化力を f_k とする。

$$f_k = \{ N_k \quad Q_{yk} \quad Q_{zk} \quad M_{xk} \quad M_{yk} \quad M_{zk} \quad M_{wk} \}^T \quad (k=1, 2) \quad (18)$$

ここに、 f_k は要素両端に作用する部材端力で、内部自由度に対する力は零である。

これらのベクトルと式(11)の k_{kj} 及び式(17)の p_k を用いてハイラーキ要素の剛性方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots \\ & k_{22} & k_{23} & \cdots \\ & & k_{33} & \cdots \\ \text{sym.} & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ O \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (19)$$

(3) 剛性行列

式(19)の左辺の係数行列を軸方向の伸縮、 x 軸まわりのねじりと y, z 軸まわりの曲げに関する剛性行列

k_u, k_w, k_v, k_0 に分離すると、式(19)を次式のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} k_u & & 0 \\ & k_w & \\ 0 & & k_v \\ & & & k_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_u \\ d_w \\ d_v \\ d_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_w \\ f_v \\ f_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_u \\ p_w \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} \quad (20)$$

ここに、一般化変位ベクトル d_u, d_w, d_v, d_w と分離された剛性行列は次式で与えられる。

$$d_u = \{ u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \}^T \quad (21a)$$

$$d_w = \{ \theta_{x1} \ \psi_1 \ \theta_{x2} \ \psi_2 \ \theta_{x3} \ \psi_3 \ \dots \}^T \quad (21b)$$

$$d_v = \{ v_1 \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{z2} \ v_3 \ \theta_{z3} \ \dots \}^T \quad (21c)$$

$$d_w = \{ w_1 \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{y3} \ \dots \}^T \quad (21d)$$

$$k_u = EA[k_0] \quad (22a)$$

$$k_w = GJ[k_1] + EI_w[k_2] + GJ_s[k_3] \quad (22b)$$

$$k_v = EI_z[k_2] + GA_{sy}[k_3] \quad (22c)$$

$$k_w = EI_y[k_2] + GA_{sz}[\bar{k}_3] \quad (22d)$$

$k_3(\bar{k}_3$ は k_3 において式(11)の非対角項の符号を換えた行列)は、曲げまたは曲げねじりによるせん断剛性である。曲げねじり剛性を無視するときには、 k_w の k_1 を k_0 とにおいて残りの項を省略する。

級数項を4項用いたときの式(22)の行列は次のようになる。

$$k_0 = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & \frac{16}{3} & 0 \\ \text{sym.} & & & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$k_1 = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{16}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{16}{5} & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$k_2 = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{16}{3} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$k_3 = \frac{1}{6\ell} \begin{pmatrix} 6 & 3\ell & -6 & 3\ell & 0 & 4\ell & 0 & 0 \\ & 2\ell^2 & -3\ell & \ell^2 & -4\ell & 2\ell^2 & 0 & -\frac{2}{5}\ell^2 \\ & & 6 & -3\ell & 0 & -4\ell & 0 & 0 \\ & & & 2\ell^2 & 4\ell & 2\ell^2 & 0 & \frac{2}{5}\ell^2 \\ & & & & \vdots & 32 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{16}{5}\ell^2 & -\frac{16}{5}\ell & 0 \\ \text{sym.} & & & & & & & \frac{96}{5} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{16}{35}\ell^2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

ハイアラーキ多項式は各項が独立であるので、級数項を2項または3項を用いるときには式(23)~(26)の実線で区切った主小行列²⁾を使用する。

3. 拘束条件と次数低減積分

(1) 離散 Kirchhoff 要素

せん断変形が無視できるような細長い部材では、要素内のいたるところで式(8)の拘束条件が課せられるために C^0 級要素で shear locking 現象が起こる。そこで、この拘束条件を要素内の特定の点にだけ課して拘束を緩和する。

まず、 x - y 平面内の曲げ解析を考えて、たわみ v_0 と回転角 θ_z の展開項数をそれぞれ3項用いる。このときの一般化変位 d_v は次のようになる。

$$d_v = \left\{ v_1 \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{z2} \ v_3 \ \theta_{z3} \right\}^T \quad (27)$$

式(8)の第1式に式(3)の変位関数 $v_0(\xi)$ と $\theta_z(\xi)$ を代入して拘束条件式が得られる。式(27)には2つの内部自由度 v_3 と θ_{z3} があるので、有限要素法で最適サンプリング点として用いられる2 Gauss点($\xi = \pm 1/\sqrt{3}$)で拘束を課すと、拘束条件式は次式のようにになる。

$$\begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = [\Gamma_v] \begin{Bmatrix} v_1 \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{z2} \end{Bmatrix}^T \quad (28)$$

ここに、

$$\Gamma_v = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & \ell & 0 & -\ell \\ -\frac{12}{\ell} & -6 & \frac{12}{\ell} & -6 \end{pmatrix} \quad (29)$$

拘束条件を課すために、曲げ変形に関する剛性方程式

$$[k_v]d_v = f_v + p_v \quad (30)$$

を要素両端の自由度 d_a と内部自由度 d_c に分けて次式のように表す。

$$\begin{pmatrix} k_a & k_b \\ k_b^T & k_c \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_a \\ d_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ O \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_a \\ p_c \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ここに、 k_a は (4×4) の行列、展開項数を3項用いたときには k_c は (2×2) の行列である。

²⁾ 主小行列式に対する主小行列をいう。

離散 Kirchhoff 要素では k_v に曲げ剛性 k_2 のみを用いて³、式(28)の拘束条件を式(31)に課して内部自由度を消去する。すなわち、式(28)の左辺を式(31)の d_c に代入し、式(31)の第1,2式のそれぞれの両辺に左から Γ_v を掛けた式を辺追加合わせる。これによつて式(30)は次式のように縮小される。

$$[\tilde{k}_v]d_a = f_a + \tilde{p}_v \quad (32)$$

ここに、

$$\tilde{k}_v = k_a + k_b \Gamma_v + \Gamma_v^T [k_b^T + k_c \Gamma_v] \quad (33a)$$

$$\tilde{p}_v = p_a + \Gamma_v^T p_c \quad (33b)$$

式(29)を代入して得られる剛性行列 \tilde{k}_v と荷重ベクトル \tilde{p}_v は、形状関数にエルミートの3次多項式を用いた慣用の Bernoulli-Euler はりの式に一致する。

曲げねじり解析では、式(8)の第3式を拘束条件に用いる。式(22b)の k_w でせん断剛性 k_3 を省略し、曲げ解析と同様に3項用いて2 Gauss 点で拘束を課すと、縮小した \tilde{k}_2 は通常の剛性行列に一致するが、Saint-Venant のねじり剛性の項 \tilde{k}_1 は一致しない。この理由は後程説明するように、ねじり角を2次式で近似したために生じたものである。曲げねじり解析ではさらに内部自由度 θ_{x4} を加えた次の一般化変位 d_w を用いる。

$$d_w = \left\{ \theta_{x1} \quad \psi_1 \quad \theta_{x2} \quad \psi_2 \quad \theta_{x3} \quad \psi_3 \quad \theta_{x4} \right\}^T \quad (34)$$

2 Gauss 点と要素の midpoint ($\xi = 0$) の3点で拘束を課すと、次式の拘束条件式が得られる⁴。

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta_{x3} \\ \psi_3 \\ \theta_{x4} \end{array} \right\} = [\Gamma_w] \left\{ \begin{array}{c} \theta_{x1} \quad \psi_1 \quad \theta_{x2} \quad \psi_2 \end{array} \right\}^T \quad (35)$$

ここに、

$$\Gamma_w = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & \ell & 0 & -\ell \\ -\frac{12}{\ell} & -6 & \frac{12}{\ell} & -6 \\ -2 & -\ell & 2 & -\ell \end{pmatrix} \quad (36)$$

式(24),(25)の k_1 と k_2 を用いた (7×7) の k_w を式(31)のように分割する。このときの k_c は (3×3) の行列になる。式(36)を式(31)に用いて縮小した行列 \tilde{k}_w は、エルミートの3次多項式を用いた剛性行列と完全に一致する。

以上のように、曲げ解析では式(27)の6自由度、曲げねじり解析では式(34)の7自由度の一般化変位を用いて、エルミート補間による剛性行列の式が求められた。この自由度数の違いは、曲げひずみエネルギーには θ_2 のみが寄与するので v_0 に補間誤差があっても正しい剛性行列が得られるが、Saint-Venant のねじりに

	j = 1	2	3	4
k ^v = 1	1	1	1	2
2	2*	1	2*	2
3		1	1	2
4			2*	2
			2	2
				2
				3*
				3
				3
				4*

図-2 k_3 の厳密積分の積分点数

よるひずみエネルギーには θ_x を用いるので、2次補間の変位関数 θ_x から求めた剛性行列は3次補間による C^1 級要素の式に一致しないことによる。一方、 v_0 と θ_x の微分項に相当する θ_2 と ψ には2次式を用いれば十分である。これを示すために変位場を調べてみる。

式(28)の拘束条件を2次補間の変位関数 v_0 と θ_x に課して両端の節点変位のみで縮約した変位関数 $\tilde{v}_0, \tilde{\theta}_2$ を求めると、これらは Bernoulli-Euler の仮定 $\tilde{\theta}_2 = \tilde{v}'_0$ を満足しない。一方、3次補間の θ_x に式(35)を課して得られる縮約変位関数 $\tilde{\theta}_x$ はエルミート多項式による3次補間の式に一致し、2次補間の変位関数 ψ から求められる縮約変位関数 $\tilde{\psi}$ と拘束条件 $\tilde{\psi} = \tilde{\theta}'_x$ を完全に満たす。したがって、曲げ解析でも式(8)の条件を満足する変位場を用いるためには7自由度が必要である。

(2) 次数低減積分

次数低減積分では被積分項の次数に着目して、式(26)のせん断剛性行列 k_3 のなかで最高次数になる f_{mm} のみに、ガウス求積法において1点低減した選択的次數低減積分法を使用する。したがって、2項用いるときには (4×4) の行列で4つの $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ を、3項以上のときには1つの f_{mm} のみを低減積分する。

図-2は k_3 の厳密積分に必要なガウス積分点数を示す。図中の g_{kj}, f_{kj} などは式(13)の積分値で小行列における要素の並び方を示したものであり、式(26)の要素配列と同じである。これより、次数低減積分では*印の数字を図より1点少なくする。なお、3項以上用いる場合には、低次項の $f_{kk} (k \leq m-1)$ を低減積分しないものとする。また、奇数個の自由度を用いるときには、最高次の f_{mm} は含まれないので、 k_3 の全要素を厳密積分する。この手法の理由は次項の表-1で説明する。

曲げ解析で3項用いる場合には、 k_3 の6行目の対角要素 f_{33} の値を2点積分で求め、これと式(25)の k_2 を k_v に用いて式(30)から内部自由度を消去する。式(31)の第2式から得られる d_c を第1式に代入して静

³ 離散 Kirchhoff 要素では、FEM の通常の定式化に従ってせん断変形によるひずみエネルギーの項 k_3 を省略する。

⁴ 3点拘束では、 $\xi = 0, \pm 1$ で拘束を課しても同じ条件式が得られる。

	j=1	2	3	4
k=1	1	2*	1	2*
	2*	2*	2*	2
		2	2	2
			3*	3
2				3
			2	3*
				3
3				3
			3*	3
				4*
4				4*

図-3 変断面要素の積分点数

の縮約した式は、式(33)において $\Gamma_v = -k_c^{-1} k_3^T$ とおいた式になり、 \tilde{k}_v の右辺の [] 内はゼロになって消える。なお、数値計算では消去演算で縮約操作を行うので、逆行列は用いない。

静的縮約によって求めた行列 \tilde{k}_v は、 C^1 級要素による Timoshenko 通りの剛性行列(付録 I(2)を参照)と完全に一致する。曲げねじり要素では、式(34)の7自由度を用いて式(22)の k_w を静的縮約すると、 \tilde{k}_w は C^1 級要素による式(I.19)の剛性行列とは一致しないが、 $GJ_s \rightarrow \infty$ としてせん断変形を無視した式は曲げねじりの慣用の式と一致する。

せん断剛性が ξ の1次式で変化する変断面要素の k_3 の厳密積分に必要な積分点数を図-3に示す。 k_3 の次数低減積分は、等断面の場合と同様に最高次数である f_{mm} に着目して、これと同じ積分点数の図-3の*印の数字を1点少なくする。低次項の f_{kk} などは低減積分しないので、図の4項(8DOF)を用いるときには3点以下になる。また、自由度数が奇数のときには全要素を厳密積分する。

(3) k_3 の特異性

次数低減積分は積分誤差により k_3 に特異性を導入して、剛性の過大評価を防ぐことが知られている。そこで、 k_3 の階数を調べてみる。

表-1は k_3 の階数を示したもので、1列目は一般化変位の自由度数、すなわち行列の次元数、2列目は式(26)の k_3 の主小行列の階数、3列目は k_3 を図-2の方法で低減積分したときの k_3^* の階数で、数字の*は低減積分を行ったことを示す。4列目は k_3 のみに Kirchhoff の拘束条件を課して縮約した行列 \tilde{k}_3 の階数、最後の列は k_3^* のみを静的縮約した行列 \tilde{k}_3^* の階数で、 \tilde{k}_3 と \tilde{k}_3^* はすべて4次の行列である。横線は、これらの縮約行列が求められないことを表す。

最初の4次の行列 k_3 では階数が2つ低下しているが、これは剛体モードによるものである。これを低減積分することによって k_3^* の階数はさらに1つ低下し

表-1 行列 k_3 の階数

DOF	k_3	k_3^*	\tilde{k}_3	\tilde{k}_3^*
4	2	1*	(2)	(1)
5	2	2	1	1
6	3	2*	1	0
7	3	3*	0	0
8	4	3*	0	—
9	4	4	—	—
10	5	4*	—	—

て、shear locking 現象は現れなくなる⁹⁾。これらの行列では縮約操作を行わないので、 \tilde{k}_3 と \tilde{k}_3^* には同じ値を()で示した。

4自由度の一般化変位に、曲げ解析ではたわみ v_3 、曲げねじり解析ではねじり角 θ_{x3} を加えたときの5次の k_3 では階数は表-1に示すように2のままで増加しない。これは、一般化変位 v_3 または θ_{x3} を加えると k_3 の特異性、すなわち行列の退化次数 d (階数低下の数 $d = n - r$ 。 n は次元数、 r は階数)が1つ増えることを意味する。このことは高次の奇数次の行列について一般的にいえる。一方、偶数次の行列では階数は1つ増えるので退化次数は変わらないが、これを低減積分すると k_3^* の階数は低下して退化次数が1つ増える。

7次の k_3 に式(35)の3点拘束を課した縮約行列 \tilde{k}_3 は完全退化してゼロ行列になる。このときに式(8)の拘束条件は完全に満たされる。 \tilde{k}_3^* では6DOFのときに完全退化しているが、すでに説明したように、式(8)は完全には満足されない。なお、 k_3 または k_3^* の退化次数が5以上のときには独立な拘束条件式が不足するために縮約できないが、要素剛性行列には曲げ剛性またはねじり剛性の k_2, k_1 を加えるので、実際の数値計算では問題はない。

次に、 k_3 の特異性と次数低減積分の関係をひずみエネルギーを用いて調べてみる。曲げまたは曲げねじりによるせん断ひずみエネルギーは同じ形の2次形式で表されるので、曲げによるせん断ひずみエネルギーについて考察する。これを U_s とおいて式を変形すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 U_s &= \frac{1}{2} GA_{xy} d_v^T k_3 d_v = \frac{1}{2} GA_{xy} \ell \sum_{i=1}^r c_i \Gamma_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} GA_{xy} \ell \left(\Gamma_1^2 + \frac{1}{3} \Gamma_2^2 + \frac{4}{5} \Gamma_3^2 + \frac{4}{175} \Gamma_4^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{64}{441} \Gamma_5^2 + \dots \right) \quad (37)
 \end{aligned}$$

ここに、 d_v は式(27)に高次項を加えた曲げ変形の一般化変位ベクトルである。 Γ_i は拘束条件を表し、表-1の k_3 の階数の数 r だけ存在する。8DOFまでの Γ_i は次のようになる。

$$4\text{DOF} : \Gamma_1 = \frac{v_1 - v_2}{\ell} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\Gamma_2^* = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} 5\text{DOF} : \Gamma_1 &= \frac{v_1 - v_2}{\ell} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ \Gamma_2 &= \frac{4v_3}{\ell} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \end{aligned} \quad (38b)$$

$$\begin{aligned} 6\text{DOF} : \Gamma_1 &= \frac{v_1 - v_2}{\ell} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{2\theta_3}{3} \\ \Gamma_2 &= \frac{4v_3}{\ell} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad \Gamma_3^* = \frac{1}{3}\theta_3 \end{aligned} \quad (38c)$$

$$\begin{aligned} 7\text{DOF} : \Gamma_1 &= \frac{v_1 - v_2}{\ell} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{2\theta_3}{3} \\ \Gamma_2 &= \frac{4v_3}{\ell} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \\ \Gamma_3 &= \frac{2v_4}{\ell} - \frac{\theta_3}{3} \end{aligned} \quad (38d)$$

$$\begin{aligned} 8\text{DOF} : \Gamma_1 &= \frac{v_1 - v_2}{\ell} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{2\theta_3}{3} \\ \Gamma_2 &= \frac{4v_3}{\ell} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \frac{2\theta_4}{5} \\ \Gamma_3 &= \frac{2v_4}{\ell} - \frac{\theta_3}{3}, \quad \Gamma_4^* = \theta_4 \end{aligned} \quad (38e)$$

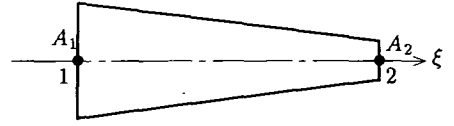


図-4 テーパー付要素

細長いはりでは、せん断剛性をペナルティ数¹⁰⁾と考
えて、 $GA_{sy} \rightarrow \infty$ としたときに要素の全ひずみエネルギー
が最小になるための条件として $\Gamma_i = 0$ が得られ
る。このとき U_s はゼロになる。

6,7 DOF の Γ_i は離散 Kirchhoff 要素で求めた式
(28),(35) の Bernoulli-Euler の拘束条件と同じである
が、6 DOF の Γ_3^* による条件 $\theta_3 = 0$ は過剰な拘束条
件で、この条件のために剛な解が得られる。同様な *
印を付けた過剰拘束条件 Γ_i^* は自由度が偶数のときに
現れて、4 DOF の場合は $\theta_1 - \theta_2 = 0$ の条件によつて
先述の shear locking 現象が起きる。低減積分した k_3^*
ではこれらの Γ_i^* は無くなり、残りの条件は変わらない
ので、 k_3^* の階数は表-1のように1つ少なくなる。

自由度 v_m を加えた奇数次のときには、 k_3 の階数が
増えないので拘束条件の数は変わらない。また、過剰拘
束条件が現れないので、図-2で述べたように厳密積分
を行えばよいことが分かる。なお、拘束条件 Γ_i は k_3
または k_3^* に特異行列に対するガウスの消去法を用いて
求めることができ、消去後の独立な式で与えられる。

変断面要素の場合には、式(37)の有効せん断面積 A_{sy}
を式(15a)の1次式で補間すると、次式のせん断ひず
みエネルギー U_s が求められる。

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{G\ell}{4} (A_{s1} + A_{s2}) \left(\Gamma_1^2 + \frac{1}{3}\Gamma_2^2 + \frac{4}{5}\Gamma_3^2 + \frac{4}{175}\Gamma_4^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{64}{441}\Gamma_5^2 + \dots \right) \\ &\quad - \frac{G\ell}{4} (A_{s1} - A_{s2}) \left(0 + \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_2 + \frac{8}{15}\Gamma_2\Gamma_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{24}{175}\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{128}{2205}\Gamma_4\Gamma_5 + \dots \right) \end{aligned} \quad (39)$$

ここに、 A_{s1}, A_{s2} は要素両端の A_{sy} の値であり、 Γ_i は
式(38)と同一の式である。式(39)の第1式は等断面要

素の式(37)と同じで、第2式が断面変化による補正項
であり、自由度数に応じて2つの式の同じ項数までを
用いるものとする。

9 または 10 自由度を用いたときには、式(39)を次式
のように変形することができる。

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{4} GA_{s1} \ell \left\{ \left(\Gamma_1 - \frac{1}{3}\Gamma_2 \right)^2 + \frac{2}{9} \left(\Gamma_2 - \frac{6}{5}\Gamma_3 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{25} \left(\Gamma_3 - \frac{1}{7}\Gamma_4 \right)^2 + \frac{64}{1225} \Gamma_4^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} GA_{s2} \ell \left\{ \left(\Gamma_1 + \frac{1}{3}\Gamma_2 \right)^2 + \frac{2}{9} \left(\Gamma_2 + \frac{6}{5}\Gamma_3 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{25} \left(\Gamma_3 + \frac{1}{7}\Gamma_4 \right)^2 + \frac{64}{1225} \Gamma_4^2 \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

ここで、 $GA_{s1}, GA_{s2} \rightarrow \infty$ とすると等断面の場合と
同じ条件 $\Gamma_i = 0$ が得られる。なお、図-3の次数低減
積分法を用いた場合には、過剰拘束条件は現れない。

以上の検討から、自由度数が奇数のときには厳密積
分、偶数のときには次数低減積分を用いれば過剰拘束
条件は現れない。また、偶数のときに厳密積分を用い
ても θ_{ym} や ψ_m などの最高次の一般化変位のみ
に過剰拘束が加えられるので(式(38)を参照)、高次要素では
その影響は小さくなる。

なお、低減積分を用いると積分点数が揃うのでプロ
グラミングは容易になり、計算時間はいくらか短くなる。

4. 高次要素

軸伸縮変形に対しては3自由度以上が高次要素であ
るが、曲げと曲げねじり変形では7自由度を縮約した
変位関数がエルミートの3次多項式を用いた変位関数
に一致することから、慣用の C^1 級要素に対して8自
由度以上が高次要素と考えられる。ここでは、これら
の高次要素の精度を検討する。

(1) 変断面軸要素

断面積が ξ 軸方向に直線的に変化する図-4のテーパ
付要素を計算する。式(22a)の軸剛性行列 k_u におい
て、断面積 $A(\xi)$ を式(15a)の1次式で補間して積分し
た k_u を要素両端の自由度 u_1, u_2 のみに縮約すると次
式が得られる。

$$\tilde{k}_u = \frac{E\tilde{A}}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

ここに、 \tilde{A} は縮約剛性における等価断面積である。

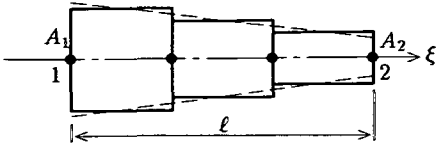


図-5 階段状要素

微分方程式から求めた厳密な値は次式のようになる。

$$A_{exact} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \quad (42)$$

\ln は自然対数を表し、 A_1, A_2 は両端の断面積である。

マトリックス法による変断面材の解析では h 法により、通常図-5のような階段状要素が用いられる。ここでは部材長 l を等分割し、各要素の midpoint における断面積を用いた等断面要素の軸剛性行列を集めた全要素剛性行列を式 (41) のように縮約する。

厳密解に対する h 法と p 法 (ハイアラーキ要素) による \tilde{A} の誤差 (%) を表-2 に示す。DOF は図-4 または図-5 における全自由度 u_m の数である。厳密値は、式 (16) の平均断面積 A_0 で無次元化した値であり、最上段の断面積は断面積の比 A_2/A_1 である。

h 法では要素分割数を 1 つ増やすごとに誤差は半分になるのに対して、p 法では 1 項増やすごとに 1/10 以下に減少して収束性の良いことが分かる。なお、h 法において図-5 の分割された各要素をテーパ付要素として計算しても表-2 と同じ値が得られることから、平均断面積を用いたことによる形状補間の誤差は生じていないので、表-2 における h 法と p 法の差は近似変位関数による差であることに注意して頂きたい。

(2) 変断面曲げ要素

断面 2 次モーメント I_2 が次の 2 次式で与えられる変断面曲げ要素を考える。

$$I_2(\xi) = \frac{I_1}{4} \left\{ (\gamma + 1) + (\gamma - 1)\xi \right\}^2 \quad (\gamma^2 = \frac{I_2}{I_1}) \quad (43)$$

ここに、 I_1, I_2 は要素の両端における値で、 I_1 は板厚とフランジ幅が一定な I 形断面のテーパ付要素の強軸まわりの近似断面 2 次モーメントを表す。

せん断変形を無視した剛性行列 k_v を縮約して次のように表す。

$$\tilde{k}_v = \frac{EI_3}{l^3} \begin{pmatrix} 12K_1 & 6K_2l & -12K_1 & 6K_4l \\ & 4K_3l^2 & -6K_2l & 2K_5l^2 \\ \text{sym.} & & 12K_1 & -6K_4l \\ & & & 2K_6l^2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

ここに、 I_3 は要素の midpoint ($\xi = 0$) での値である。

有効せん断断面積 A_{sy} を ξ の 1 次式で仮定して、両端での断面積比を γ とする。せん断剛性 GA_{sy} を大

表-2 等価断面積の誤差 (%)

Method	DOF	1/2	1/3	1/4	
h	1 elem.	2	3.97	9.86	15.52
	2	3	1.08	2.99	5.13
	3	4	0.49	1.41	2.51
	4	5	0.28	0.81	1.47
	3 terms	3	0.12	0.71	1.66
p	4	4	3.7×10^{-3}	5.2×10^{-2}	0.19
	5	5	1.1×10^{-4}	3.8×10^{-3}	2.1×10^{-2}
	A_{exact}/A_0	2	0.9618	0.9102	0.8656

表-3 等価曲げ剛性の誤差 (%)

Method	$I_2/I_1 = 1/2$		$I_2/I_1 = 1/4$		
	K_3	K_6	K_3	K_6	
h	1 elem.	-13.96	21.67	-22.64	54.72
	2	-2.98	6.12	-3.97	16.90
	3	-1.27	2.77	-1.45	7.80
	4	-0.70	1.57	-0.74	4.44
	5	-0.44	1.01	-0.45	2.86
p	3 terms	2.15	2.71	7.73	12.31
	4	3.7×10^{-2}	4.5×10^{-2}	0.49	0.72
	5	4.9×10^{-4}	5.9×10^{-4}	2.6×10^{-2}	3.7×10^{-2}
	6	3.4×10^{-6}	4.3×10^{-6}	1.2×10^{-3}	1.7×10^{-3}
$K_{i,exact}$	1.1623	0.8219	1.2927	0.6434	

きくすると $A_{sy}(\xi) = const.$ としたときの値に近づくが、数値計算では桁落ちを考慮して midpoint での無次元量で $GA_{sy,3}l^2/EI_3 = 10^8$ とする。

無次元剛性 K_i は等断面要素ではすべて 1 であるので、最大と最小になる K_3 と K_6 の値を表-3 に示す。厳密値はせん断変形を無視した値で、負の誤差は K_i の計算値が厳密値より小さいことを意味する。h 法にはエルミートの 3 次多項式を用いた等断面曲げ要素を使用し、 I_2 には式 (43) に分割した各要素の midpoint の ξ 座標値を代入して求めた値を用いている。

3~6 項用いた p 法と 2~5 要素分割した h 法の自由度数は同じで (6~12DOF)、1 要素は参考までに示した。h 法に比べて p 法の収束性のよいことが分かる。

(3) 曲げねじり要素

等断面の曲げねじり要素について、式 (22b) の曲げねじり剛性行列 k_w の精度を調べる。式 (I.13) の厳密な剛性行列は k_w のように 3 つの行列 k_1, k_2, k_3 に分離することができないので、縮約した \tilde{k}_w を式 (44) のように表すことにする。ここで、 I_3 にはそり 2 次モーメント I_w を用いると、等断面要素では $K_2 = K_4, K_3 = K_6$ になる。

多項式近似によるマトリックス法では、ねじり定数比 $\mu (= GJl^2/EI_w)$ の値が曲げねじり剛性行列の精度に著しく影響する。 $\mu < 1$ のときには慣用の低次要素でも精度はよいが、 μ が大きくなるにつれて精度は悪化する。そこで、I 形断面を想定した値 ($\mu = 10$) と、

表-4 等価曲げねじり剛性の誤差 (%)

Method	$\kappa_x = 0 (10^{-7})$				$\kappa_x = 10$				
	$\mu = 10$		$\mu = 50$		$\mu = 10$		$\mu = 50$		
	K_1	K_3	K_1	K_3	K_1	K_3	K_1	K_3	
h	1 elem.	0.54	2.79	3.34	26.1	0.56	59.3	2.00	1.8×10^2
	3	7.3×10^{-2}	0.12	0.53	1.67	0.10	6.71	0.72	23.6
	5	1.1×10^{-2}	1.7×10^{-2}	9.0×10^{-2}	0.28	4.0×10^{-2}	2.42	0.30	8.81
	7	2.9×10^{-3}	4.5×10^{-3}	2.5×10^{-2}	8.0×10^{-2}	2.0×10^{-2}	1.24	0.16	4.55
p	4 terms	0.54	0.49	3.34	3.70	6.2×10^{-5}	-4.2×10^{-4}	4.1×10^{-3}	-9.8×10^{-3}
	6	4.7×10^{-4}	4.2×10^{-4}	4.5×10^{-2}	4.4×10^{-2}	5.0×10^{-10}	-3.4×10^{-9}	7.9×10^{-7}	-1.9×10^{-6}
	8	-5.1×10^{-7}	-5.9×10^{-7}	1.9×10^{-4}	1.8×10^{-4}	0.0	0.0	3.6×10^{-11}	-8.5×10^{-11}
	$K_{i,exact}$	1.98928	1.29719	5.80609	2.11495	0.91034	0.32642	4.46682	0.56334

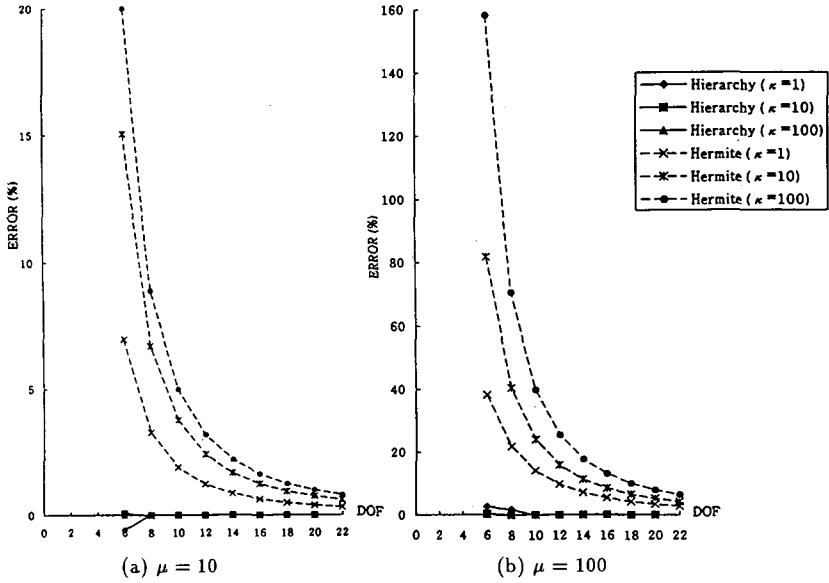


図-6 曲げねじり剛性 K_3 の収束性

$\mu > 100$ の箱形断面では Saint-Venant のねじり剛性のみを考慮すればよいので¹¹⁾、中間的な値 ($\mu = 50$) について検討する。また、曲げねじりによるせん断変形に関するパラメータとして $\kappa_x (= J/J_s)$ を用いる。せん断変形を無視するときには $\kappa_x = 0 (GJ_s \rightarrow \infty)$ になるが、 k_ω が特異になるので $\kappa_x = 10^{-7}$ とする。せん断変形を考慮するときには断面形状によって κ_x の値は無限大 ($J = I_p$ の円形断面。ただし、この場合には純ねじり状態) まで取り得ることと、 κ_x の値が大きいくほどハイラーキ要素の精度はよくなるので、 $\kappa_x = 10$ の場合について計算する。なお、h 法では本文で定式化した式 (I.19) を用いて、せん断変形を無視するときには $\kappa_x = 0 (\therefore \varphi_x = 0)$ としている。

表-4に無次元剛性 K_1, K_3 の値を示す。h 法の 3 ~ 7 要素と p 法の 4 ~ 8 項の自由度数は同じである。 μ の値が大きい 50 の場合でもハイラーキ要素の精度は比較的良好で、せん断変形を考慮した $\kappa_x = 10$ のときは h 法に比べて格段に優れている。表中で誤差が 0.0 の

ときは厳密解と約 16 桁まで一致することを意味する。厳密値より、曲げねじり解析では曲げ解析に比べてせん断変形の影響が大きいくことから、ハイラーキ要素では $GJ_s \rightarrow \infty$ とするペナルティ数を用いずに実断面のせん断剛性を用いれば、実際の応力により近い値が得られるとともに解析精度も向上する。

$\mu = 10, 100$ のときの収束性を図-6に示す。図 (b) のように、 μ の値が大きくなる箱形断面材では、慣用の C^1 級要素の誤差は大きくなるのが分かる⁵⁾。また、p 法は h 法 (エルミート要素) とは逆に、せん断変形の影響が大きくなると精度はよくなる (図中では κ_x を κ で示している)。これより、 C^0 級要素を用いた p 法はせん断変形解析に適した解法であるといえる。

5. 結 論

骨組構造解析の問題で多項式近似による誤差が生じる場合に、通常用いられている要素分割による h 法に

比べて入出力データが少なく精度のよいハイアラーキ棒要素を開発した。本研究では、種々の構造解析の基礎である静的線形解析についての結果から以下の知見が得られた。

- (1) 数値計算が容易なハイアラーキ多項式を用いて、立体解析に必要な軸力要素と、せん断変形を考慮した曲げ要素及び曲げねじり要素を定式化した。
- (2) 級数展開した変位関数に対する次数低減積分法を提案して、その妥当性を理論的に明らかにした。
- (3) ハイアラーキ要素ではせん断変形解析が容易であり、またせん断剛性を考慮する方が精度がよいので、実断面のせん断剛性を用いるのが好ましい。
- (4) ハイアラーキ要素による p 法は、慣用の要素を用いた h 法よりも総自由度数が少なく済む効率的な解析法である。

マトリックス法による非線形解析では、多項式近似による変位関数には補間誤差が含まれているので、この種の問題に対してもハイアラーキ要素は有効であると思われる。終わりに、本研究の資料作成に協力して頂いた大学院生の佐藤貞芳君に謝意を表す。

付録 I はりのせん断変形要素

(1) 曲げねじり要素

せん断変形を考慮した曲げねじりの支配方程式は、文献5) から次式で与えられる。

$$GJ\theta_x'' + GJ_s(\theta_x'' - \psi') = -m_x \quad (I.1)$$

$$EI_w\psi'' + GJ_s(\theta_x' - \psi) = 0 \quad (I.2)$$

ここに、 m_x は部材軸に沿って作用する分布ねじりモーメントである。

これらの式から ψ'' 、 ψ' を順次に消去して次式が得られる。

$$\alpha_x\theta_x'' + \theta_x' - \psi = -\frac{EI_w m_x'}{GJ_s GJ_s} \quad (I.3)$$

$$\theta_x^{(4)} - \left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2 \theta_x'' = \frac{\lambda^2}{GJ\ell^2} \left(m_x - \frac{EI_w}{GJ_s} m_x''\right) \quad (I.4)$$

ここに、

$$\alpha_x = \left(1 + \frac{J}{J_s}\right) \frac{EI_w}{GJ_s} \quad (I.5)$$

$$\lambda^2 = \frac{J_s}{J + J_s} \frac{GJ\ell^2}{EI_w} \left(= \frac{\ell^2 J}{\alpha_x J_s}\right) \quad (I.6)$$

ねじり角の厳密な変位関数 $\theta_x(x)$ を求めるために、式 (I.3) から荷重項を省略した次式を境界条件に用いる。

$$\theta_x = \theta_{xk}, \quad \alpha_x\theta_x'' + \theta_x' = \psi_k \quad (k=1,2) \quad (I.7)$$

ここに、 θ_{xk} 、 ψ_k は要素両端の節点変位 d_w である。

$$d_w = \left\{ \theta_{x1} \quad \psi_1 \quad \theta_{x2} \quad \psi_2 \right\}^T \quad (I.8)$$

式 (I.4) の荷重項を省略した同次方程式の一般解に式 (I.7) を用いて $\theta_x(x)$ が求められる。これを整理して

$$\theta_x(\bar{\xi}) = N_1(\bar{\xi})\theta_{x1} + M_1(\bar{\xi})\psi_1\ell + N_2(\bar{\xi})\theta_{x2} + M_2(\bar{\xi})\psi_2\ell \quad (I.9)$$

と表す。ここに、形状関数 N_k 、 M_k は次のようになる。

$$N_1(\bar{\xi}) = 1 - N_2(\bar{\xi}) \quad (I.10a)$$

$$N_2(\bar{\xi}) = \{(ch - 1)C(\bar{\xi}) - shS(\bar{\xi})\}/D \quad (I.10b)$$

$$M_1(\bar{\xi}) = \{(ch - 1)S(\bar{\xi}) + (sh - \Lambda ch)C(\bar{\xi})\}/(\Lambda D) + (\sinh \lambda \bar{\xi})/\Lambda \quad (I.10c)$$

$$M_2(\bar{\xi}) = \{(ch - 1)S(\bar{\xi}) + (\Lambda - sh)C(\bar{\xi})\}/(\Lambda D) \quad (I.10d)$$

$$D = 2(1 - ch) + \Lambda sh \quad (I.10e)$$

$$C(\bar{\xi}) = \cosh \lambda \bar{\xi} - 1 \quad (I.11a)$$

$$S(\bar{\xi}) = \sinh \lambda \bar{\xi} - \Lambda \bar{\xi} \quad (I.11b)$$

$$\bar{\xi} = x/\ell, \quad 0 \leq \bar{\xi} \leq 1$$

$$\Lambda = \lambda \left(1 + \frac{J}{J_s}\right) \left(\lambda \Lambda = \frac{GJ\ell^2}{EI_w}\right) \quad (I.12a)$$

$$ch = \cosh \lambda, \quad sh = \sinh \lambda \quad (I.12b)$$

式 (I.9) から一般化変位 d_w に対する一般化力を求めて行列表示すると、曲げねじり要素の厳密な剛性行列 k_w が得られる。

$$k_w = \begin{pmatrix} c & d & -c & d \\ e & -d & f & \\ \hline & & c & -d \\ \text{sym.} & & & e \end{pmatrix} \quad (I.13)$$

ここに、

$$c = \frac{\Lambda sh GJ}{D} \frac{GJ}{\ell}, \quad e = \frac{\lambda}{D} (\Lambda ch - sh) \frac{EI_w}{\ell} \quad (I.14a)$$

$$d = \frac{ch - 1}{D} GJ, \quad f = \frac{\lambda}{D} (sh - \Lambda) \frac{EI_w}{\ell} \quad (I.14b)$$

以上の式で $GJ_s \rightarrow \infty$ ($\therefore \Lambda = \lambda = \ell\sqrt{GJ/EI_w}$) とおけば、せん断変形を無視した式になる。

(2) C^1 級はり要素

せん断変形を考慮したはりの解析では、たわみ v と回転角 θ_x 、またはねじり角 θ_x とねじり率 ψ を独立変数とするので、式 (8) の従属関係は成立しない。しかし、曲げねじり剛性において分布ねじりモーメント m_x が一定のときには式 (I.3) より次の関係式が得られる。

$$\psi = \theta_x' + \alpha_x\theta_x'' \quad (I.15)$$

したがって、せん断変形を考慮した C^1 級はり要素では、ねじり角の変位関数のみを用いて定式化することができる。そこで、ねじり角を座標 ξ の 3 次多項式で

仮定して、式(I.7)を満たす近似変位関数 $\theta_x(\xi)$ を求めると、式(I.9)に次の形状関数を用いた式が得られる。

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) + N_s(\xi) \quad (I.16a)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) - N_s(\xi) \quad (I.16b)$$

$$M_1(\xi) = \frac{1}{8}(1-\xi)^2(1+\xi) + \frac{1}{2}N_s(\xi) \quad (I.16c)$$

$$M_2(\xi) = -\frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi) + \frac{1}{2}N_s(\xi) \quad (I.16d)$$

$$N_s(\xi) = \frac{\varphi_x}{4(1+\varphi_x)}\xi(1-\xi^2) \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (I.17)$$

式(I.16)の右辺第1項は、式(1)の自然座標 ξ で表したエルミートの3次多項式で、第2項の N_s は曲げねじりによるせん断変形を表す形状関数である。式中のパラメータ φ_x は次式による。

$$\varphi_x = \frac{12\alpha_x}{\ell^2} \left(= \frac{12J}{\lambda^2 J_s} \right) \quad (I.18)$$

式(7)に式(I.15),(I.16)を用いたひずみを仮想仕事の原理に用いると、式(I.13)の剛性行列 k_w の要素を次式で置き換えた式が得られる。

$$c = \frac{12}{1+\varphi_x} \frac{EI_w}{\ell^3} + (1+\Phi_x) \frac{GJ}{\ell} \quad (I.19a)$$

$$d = \frac{6}{1+\varphi_x} \frac{EI_w}{\ell^2} + \frac{1}{2}\Phi_x GJ \quad (I.19b)$$

$$e = \frac{4+\varphi_x}{1+\varphi_x} \frac{EI_w}{\ell} + \frac{1}{12}(1+3\Phi_x)GJ \quad (I.19c)$$

$$f = \frac{2-\varphi_x}{1+\varphi_x} \frac{EI_w}{\ell} - \frac{1}{12}(1-3\Phi_x)GJ \quad (I.19d)$$

ここに、

$$\Phi_x = \frac{1+60\alpha_x\varphi_x}{5(1+\varphi_x)^2}, \quad \alpha_\omega = \frac{EI_w}{GJ_s\ell^2} \quad (I.20)$$

Timoshenko はりの横断面の回転角に関する支配方程式は式(I.3)と同じ形の式で与えられ、荷重項を省略した式は $x-y$ 平面または $x-z$ 平面解析で次式のようになる。

$$\theta_z = v_0' + \alpha_y v_0''', \quad \theta_y = -w_0' - \alpha_x w_0''' \quad (I.21)$$

ここに、

$$\alpha_y = \frac{EI_z}{GA_{sy}}, \quad \alpha_x = \frac{EI_y}{GA_{sx}} \quad (I.22)$$

したがって、曲げねじり解析と同様に、 $v(\xi)$ または $w(\xi)$ のみを変位関数に用いて Timoshenko はりの C^1 級要素を定式化することができる。これから得られる結果はマトリックス解析で周知のことであるので詳細は省略する。なお、等断面材では v と w の支配方程式は4階微分の項のみで与えられるので、式(I.16)の形状関数 (w では M_1 と M_2 に負号を掛けた式) は厳密な関数になる。また、式(I.19)の右辺第1項で与えられる剛性行列 (I_w を I_x または I_y に置き換えた式) も厳密な式である。ただし、これらの式中のパラメータ

φ_x には次の値を用いる。

$$\varphi_y = \frac{12\alpha_y}{\ell^2}, \quad \varphi_z = \frac{12\alpha_z}{\ell^2} \quad (I.23)$$

以上の式において $\varphi = 0$ とおけば、すべての式はせん断変形を無視した式になる。

(3) 拡張離散 Kirchhoff 要素

離散 Kirchhoff の手法を拡張して、せん断変形を考慮した C^0 級要素を定式化する。この要素も付録 I(2) の C^1 級要素と同じくストックキーなはりからスレンダーなはりまで適用できる。

この要素では、せん断剛性行列 k_3 を用いた式(22)の k_w , k_v または k_w に式(I.15)または式(I.21)を拘束条件として課す。曲げ解析では k_3 に v または w によるせん断ひずみの項が寄与するので、3.(1)で述べた理由により、これらの変位成分を3次以上で補間しないと誤差が生じる。そこで、式(27)の d_w に v_4 を加えて、曲げねじり解析と同じ7自由度要素を用いることにする。

まず、式(I.15)に変位関数 $\theta_x(\xi)$ と $\psi(\xi)$ を用いて3点拘束の条件式を求めると、式(36)の Γ_w の代わりに次式が得られる。

$$\Gamma_s = \frac{1}{8(1+\varphi_x)} \begin{pmatrix} 0 & (1+\varphi_x)\ell & 0 & -(1+\varphi_x)\ell \\ -12/\ell & -6 & 12/\ell & -6 \\ -2 & -\ell & 2 & -\ell \end{pmatrix} \quad (I.24)$$

この条件式を式(22)の k_w に課して縮約すると、やや面倒な変形を解析的に行って式(I.19)と完全に一致することが確かめられる。

Timoshenko はりの場合には式(I.21)を用いると、式(I.24)の φ_x を φ_y または φ_z に置き換えた式が得られる。これを式(22)の k_v または k_w に課すと、縮約された剛性行列は C^1 級はり要素の式と一致する。

なお、式(34)の d_w を用いたハイアラーキ要素の変位関数 $\theta_x(\xi)$ に式(I.24)の3点拘束を課して縮約すると式(I.16)の形状関数を得られる。また、この縮約変位関数 $\tilde{\theta}_x(\xi)$ と $\psi(\xi)$ を縮約した $\tilde{\psi}(\xi)$ は式(I.15)を完全に満足する。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.1, McGraw-Hill, pp.110-149, 1989.
- 2) Szabo, B.A. and Babuška, I.: *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
- 3) Szabo, B.A. and Sahrman, G.J.: Hierarchic plate and shell models based on p-extension, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.26, pp.1855-1881, 1988.
- 4) Surana, K.S. and Nguyen, S.H.: Completely hierarchical two-dimensional curved beam element for dynamics, *Comp. Struct.*, Vol.40, No.4, pp.957-967, 1991.
- 5) 藤谷義信: 薄肉はり構造解析, コンピュータによる極限解析法シリーズ5, 倍風館, pp.163-184, 1990.

- 6) Chen, H. and Blandford, G.E.: A C^0 finite element formulation for thin-walled beams, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.28, pp.2239-2255, 1989.
- 7) 林 正: ハイアラーキ節点帯板法の開発, 土木学会第48回年次学術講演会講演概要集, I-683, 1993.9
- 8) 岩崎英治・林 正・中林隆宏: 拡張 Timoshenko はり要素による細長い部材の非線形解析, 構造工学論文集(土木学会), Vol.42A, pp.263-274, 1996.3.
- 9) G.Prathap and G.R.Bhashyam: Reduced integration and the shear-flexible beam element, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.18, pp.195-210, 1982.
- 10) 前出1), pp.249-256.
- 11) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, 丸善, pp.206-208, 1980.

(1996. 4. 5 受付)

HIERARCHICAL BEAM ELEMENT FOR ANALYSIS OF SPACE FRAMES

Masa HAYASHI and Eiji IWASAKI

Hierarchical beam element is proposed for the matrix analysis of space framed structures. The element is formulated with C^0 continuous polynomials based on Timoshenko beam theory and an expanded warping theory considered shear deformation, and with nodal displacements at the both ends and higher-order internal modes. The generalized displacements, i.e. translations, twist, rotations and warping are interpolated independently, so that the well-known 'shear locking' phenomenon appears in the analysis of Bernoulli-Euler beams. Therefore, an effective reduced integration technique is developed for the bending and warping analysis of slender beams.

It is found by the numerical calculations that the proposed hierarchical elements yield superior accuracy for warping problems, bending problems of a beam with non-uniform cross section.