

観測情報に基づく条件付非正規確率場の 推定理論の誘導

星谷 勝¹・野田 茂²・稲田 裕³

¹正会員 工博 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

²正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科 (〒680 鳥取市湖山町南 4-101)

³正会員 工修 清水建設株式会社 和泉研究室 (〒100 東京都千代田区内幸町 2-2-2)

本論文は、非正規分布に従う確率場に関して条件付確率場を推定する理論を誘導し、未観測点におけるサンプル実現値の条件付シミュレーション手法を提案するものである。その理論は、条件付正規確率場の推定手法と非正規確率変数の正規確率変数への変換とを組み合わせ条件付確率密度関数を定義することを基本としている。この手法により、従来正規確率場や一部の非正規確率場に限られていた条件付確率場の推定が、一般的な非正規確率場に対して可能となる。本論文では提案する手法について、数値解析及び理論解析によりその精度を検証する。さらに、最適推定値に関する理論的な検討を行う。また確率場の特性が条件付特性値に及ぼす影響をシミュレーションにより検討し、提案する手法の有効性を示す。

Key Words : *non-Gaussian fields, conditional simulation, stochastic fields, conditional probability density function*

1. 序論

土木・建築等の工学分野の設計・計画では、多くの問題は自然界の作用や現象と関わり合いを持つ。これらは本質的に不確定要因を含むため、その不確定性を考慮しながら評価を行う必要がある。例えば、降水量、風速、地震の頻度とマグニチュード、海洋における波高・波力等の環境変数、またコンクリートや鋼材の強度、地盤定数のような材料特性、さらには観測時の計測誤差等の情報はすべてばらつきを含む。したがって、その情報を基に意志決定を行うためには、物理量を時空間的に不規則に生起あるいは分布する確率変数としてとらえ、確率分布に関する情報を統計的に推定しなければならない。このような確率現象は、対象とする時空間によって確率過程あるいは確率場と呼ばれる。そして観測値を基にして母集団の統計的性質を推定する研究はこれまで多く行われてきた。

これに対して、有限個の既知観測値を条件として、観測前に表現された確率場を更新して得られる事後の確率場は条件付確率場と呼ばれる。条件付確率場の推定問題では、観測点における予測値は観測値と完全に一致することを条件としている。条件付確率場の推定問題に関しては、有限個の観測点にお

ける観測値を基にして未観測点における地盤定数を推定したり、地震動を予測するなど多くの研究が進められてきた。例えば、鈴木・石井¹⁾は土質定数の空間分布を Kriging に基づく手法により推定し、確率有限要素法を用いて地盤の沈下量を予測した。Vanmarcke and Fenton²⁾は空間的、時間的に変動性を持つ条件付確率場の推定問題に対してフーリエ展開と Kriging 法を適用することにより、いくつかの観測点で地震波形が得られた条件の基で未観測点における地震波を求める手法を提案した。また Kameda and Morikawa³⁾ は同様の地震波の確率論的補間問題に対して、フーリエ係数の条件付確率密度関数を導くことにより、解析的に条件付確率過程を求める手法を示した。そして、条件付確率過程の平均値や分散、さらに初期超過確率の解析解を導き、その特性を検討した。

著者の一人は条件付確率場に関する新しいシミュレーション手法を提案した^{4),5)}。そのシミュレーション理論は既観測点の観測値を用いて Kriging により最適な線形補間推定値を求め、誤差項を考慮することにより未観測点の物性値を予測するものである。また、その理論は既往の研究に比べて、予測式が簡単な線形和に基づく理論解で構成されているため、時空間の確率場への適用が容易である。さらに条件付確率密度関数を簡単に誘導することができる。星谷・桑名⁶⁾は、そ

のシミュレーション理論が正規確率場における条件付確率場の理論として厳密解を与えることを理論及び数値計算例により示した。

上記の条件付確率場の推定手法はいずれも正規確率場を対象としており、非正規分布に従う条件付確率場の推定手法の提案はこれまであまり行われていない。野田・星谷⁹⁾は対数正規確率場を対象に条件付確率場の推定理論を導き、条件付シミュレーション手法を提案した。そして理論及び数値解析の結果、i) Kriging による最適推定値は条件付平均値と等しいこと、ii) 推定誤差分散は条件付分散とは異なること、iii) 推定誤差分散は観測位置のみに依存し、観測値には無関係であるが、条件付分散は観測値に依存すること等を示し、ii), iii) が正規確率場とは異なる対数正規条件付確率場の特徴であることを明らかにした。

一方、Elishakoff, Ren and Shinozuka⁸⁾は非正規確率場の条件付シミュレーション手法を示している。その手法は Yamazaki and Shinozuka¹⁰⁾による無条件シミュレーション手法を条件付確率場に拡張したものである。彼らの手法では、非正規確率変数を相関は考慮せず各々正規確率変数に変換し、正規確率場においてサンプルシミュレーションを行う。そして与えられた確率場に変換したサンプル間の相関係数を求め、その値が目標値と一致するまで収束計算をしなければならない。したがって彼らの研究では、数値シミュレーションによる検証が行われているのみで、解析的な評価は行われていない。

星谷¹¹⁾は非正規確率変数の正規確率変数への変換則を応用して、条件付シミュレーション法を一般的な非正規確率場へと拡張している。本論文では星谷の方法を踏まえ、非正規分布に従う条件付確率場を推定する理論的な定式化を行う。具体的には、正規分布に従う条件付確率場の推定手法⁴⁾と相関を考慮した非正規確率変数の正規確率変数への変換とを組み合わせ、条件付確率密度関数を定義するというものである。相関を持つ非正規確率変数の正規確率変数への変換として、Hohenbichler and Rackwitz¹²⁾は Rosenblatt 変換を用い、信頼性理論に基づく構造物の安全性評価に適用した。ところが Rosenblatt 変換ではすべての変数に関する結合分布の情報が必要となる。実際の適用においては、結合分布や条件付分布が既知となるほど十分な情報が得られることは少ない。そこで本論文では、周辺分布と相関係数が既知である非正規確率変数に関する標準正規確率変数への変換法を用いて定式化を行っている。

本論文で提案する手法では、条件付確率場の推定理論を数値解析によらず解析的に導いている。したがって、条件付特性値や最適推定値に関して理論的

な検討を容易に行うことができる。本論文では、対数正規分布に限らない一般的な非正規分布に従う条件付確率場の特徴について理論的な検討を行い、得られた知見を示す。さらにその推定理論に基づく条件付シミュレーション手法を提案し、数値計算による検証を行うと同時に、いくつかの計算例によりその有効性を示す。

2. 問題の設定

ある非正規・非均一確率場において、離散空間位置 i における確率変数を x_i とする。そして $(n-1)$ ケ所の点において観測が行われ、観測値ベクトル $\mathbf{X}_{n-1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}^T$ が得られたとする。

ここでは確率変数 $\mathbf{X}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ について、観測結果または既往の先見知識により与えられる情報に関して、以下の仮定を設ける。

- i) 変数 x_i の周辺確率密度関数 $f_{X_i}(x_i)$ は事前に与えられる。したがって、任意の点 i における無条件平均値 μ_i と無条件分散 σ_i^2 は既知である。
- ii) 次式のように表される x_i と x_j の相関係数 ρ_{ij} は、任意の二点 i と j 間で推定されている。

$$\rho_{ij} = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] / \sigma_i \sigma_j \quad (1)$$

ここで、シミュレーションの定式化は非均一確率場を対象とし、一般的に平均値 μ_i と分散 σ_i^2 は位置 i の関数であり、相関係数 ρ_{ij} は i と j の関数となる。

本論文では、以上の仮定の下で既知の観測データ \mathbf{X}_{n-1} を用いて未観測点 n における物理量 x_n に関して条件付確率密度関数を定義する。そして、 x_n の条件付特性値を推定する理論を導く。またその理論を基にして、未観測点におけるサンプル実現値の条件付シミュレーション手法を導く。さらに漸次拡張方式⁹⁾を適用して、複数の未観測点を含む非正規確率場の条件付シミュレーション手法に展開する。また、未観測点における最適推定値を求めて、推定誤差に関する検討を行う。

3. 非正規分布に従う条件付確率場の推定理論と条件付シミュレーション手法

(1) 等価標準正規変数への変換

ここで提案する手法では、与えられた非正規分布に従う確率変数を等価標準正規確率変数に変換し、正規確率場において条件付特性値を評価することを基本としている。

今、確率変数 $\mathbf{X}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ について、各変数 x_i の周辺確率密度関数 $F_{X_i}(x_i)$ が与えられており、

$F_{X_i}(x_i)$ が連続な増加関数である場合、確率変数 \mathbf{X}_n は、次式で表される等価標準正規変換によって標準正規確率変数 $\mathbf{Z}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$ に変換できる¹³⁾。

$$F_{X_i}(x_i) = \Phi(z_i) \quad (2)$$

ただし、 $\Phi(z_i)$ は標準正規確率分布関数である。

このとき \mathbf{X}_n の結合確率分布関数は、相関係数マトリクスを \mathbf{R}_n とおくと次のように表すことができる。

$$F_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n, \mathbf{R}_n) = \Phi_n[\Phi^{-1}\{F_{X_1}(x_1)\}, \dots, \Phi^{-1}\{F_{X_n}(x_n)\}, \mathbf{R}'_n] \quad (3)$$

ここで $\Phi_n(\mathbf{Z}_n, \mathbf{R}'_n)$ は平均値ベクトル $\mathbf{0}$ 、分散ベクトル $\mathbf{1}$ および相関係数マトリクス \mathbf{R}'_n を有する n 次元の標準正規結合確率分布関数である。ただし、 \mathbf{R}'_n は与えられた \mathbf{X}_n の相関係数マトリクス \mathbf{R}_n から求めるが、その手法は後に示す。

したがって、 \mathbf{X}_n の結合確率密度関数は式 (3) を x_i で偏微分して次式のように求められる。

$$f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n, \mathbf{R}_n) = \varphi_n(\mathbf{Z}_n, \mathbf{R}'_n) \frac{f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)}{\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n)} \quad (4)$$

ここで、 $\varphi_n(\mathbf{Z}_n, \mathbf{R}'_n)$ は n 次元の標準正規結合確率密度関数、 $f_{X_i}(x_i)$ は x_i の周辺確率密度関数、 $\varphi(z_i)$ は標準正規確率密度関数である。

今、非正規確率変数 x_i を標準正規確率変数 z_i の関数として次式のように表す。

$$x_i = g(z_i) \quad (5)$$

ただし、 $g(z)$ は非減少関数である。

式 (5) を式 (2) に代入し、両辺を z_i で偏微分して得られた結果を式 (4) に代入すると、 \mathbf{X}_n の結合確率密度関数は次式のようになる。

$$f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n, \mathbf{R}_n) = \frac{\varphi_n(\mathbf{Z}_n, \mathbf{R}'_n)}{g'(z_1)g'(z_2) \cdots g'(z_n)} \quad (6)$$

式 (6) によって定義される確率分布は Nataf モデルとして知られている¹³⁾。また式 (6) により非正規確率場における \mathbf{X}_n の結合確率密度関数は、標準正規結合確率密度関数 $\varphi_n(\mathbf{Z}_n, \mathbf{R}'_n)$ を用いて表される。したがって、等価標準正規変換式 $g(z_i)$ と相関係数マトリクス \mathbf{R}'_n が与えられ、標準正規結合確率密度関数が求められれば、非正規確率場における結合確率密度関数 $f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n, \mathbf{R}_n)$ が求められる。

(2) 条件付確率密度関数と特性値の誘導

式 (6) より、確率変数 x_i ($i = 1, \dots, n-1$) が与えられた条件下における確率変数 x_n の条件付確率密度関数は、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} f_{X_n}(x_n|c) &= f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n, \mathbf{R}_n) / f_{\mathbf{X}_{n-1}}(\mathbf{X}_{n-1}, \mathbf{R}_{n-1}) \\ &= \varphi(z_n|c) / g'(z_n) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $f_{X_n}(x_n|c)$ は $f_{X_n}(x_n|x_i, i = 1, \dots, n-1)$ 、 $\varphi(z_n|c)$ は $\varphi(z_n|z_i, i = 1, \dots, n-1)$ である。以下、簡単のため任意の確率変数 v_n の条件 $v_n|v_i, i = 1, \dots, n-1$ を $v_n|c$ と表す。

式 (7) により非正規確率場における x_n の条件付確率密度関数が、正規確率場における条件付確率密度関数 $\varphi(z_n|c)$ と等価標準正規変換式 $g(z_n)$ を用いて定義される。

標準正規確率場では、条件付平均値 $\mu_{z_n|c}$ と条件付分散 $\sigma_{z_n|c}^2$ が得られれば、 z_n の条件付確率密度関数は次式のように表すことができる。

$$\varphi(z_n|c) = \varphi\left(\frac{z_n - \mu_{z_n|c}}{\sigma_{z_n|c}}\right) \quad (8)$$

非正規確率場における条件付確率密度関数は、式 (7) と式 (8) によって定義される。

また式 (7) と式 (8) を用いて、非正規確率場における x_n の条件付平均値 $\mu_{n|c}$ と条件付分散 $\sigma_{n|c}^2$ はそれぞれ次のようになる。

$$\mu_{n|c} = \int_{-\infty}^{\infty} g(z_n) \varphi\left(\frac{z_n - \mu_{z_n|c}}{\sigma_{z_n|c}}\right) dz_n \quad (9)$$

$$\sigma_{n|c}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{g(z_n)\right\}^2 \varphi\left(\frac{z_n - \mu_{z_n|c}}{\sigma_{z_n|c}}\right) dz_n - \mu_{n|c}^2 \quad (10)$$

一方、正規確率場における条件付平均値 $\mu_{z_n|c}$ と条件付分散 $\sigma_{z_n|c}^2$ は、星谷⁴⁾により Kriging による線形補間を用いて次のように求められている。

$$\mu_{z_n|c} = \mathbf{Z}_{n-1}^T \mathbf{R}'_{n-1}{}^{-1} \mathbf{S}'_{n-1} \quad (11)$$

$$\sigma_{z_n|c}^2 = 1 - \mathbf{S}'_{n-1}{}^T \mathbf{R}'_{n-1}{}^{-1} \mathbf{S}'_{n-1} \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{S}'_{n-1} = \{\rho'_{1n}, \dots, \rho'_{(n-1)n}\}^T$ は z_i ($i = 1, \dots, n-1$) と z_n との相関係数 ρ'_{in} のベクトルである。

式 (11) と (12) からわかるように、正規確率場における条件付特性値を求めるためには、正規確率場における相関係数マトリクス \mathbf{R}'_{n-1} を求めることが必要となる。ここで、相関係数マトリクス \mathbf{R}'_{n-1} の要素 ρ'_{ij} と \mathbf{R}_{n-1} の要素 ρ_{ij} との関係は、式 (5) と (6) から次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} f_{X_i X_j}(x_i, x_j, \rho_{ij}) dx_i dx_j \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \varphi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij}) dz_i dz_j \end{aligned} \quad (13)$$

未知の相関係数 ρ'_{ij} は、式 (13) を解いて求められ

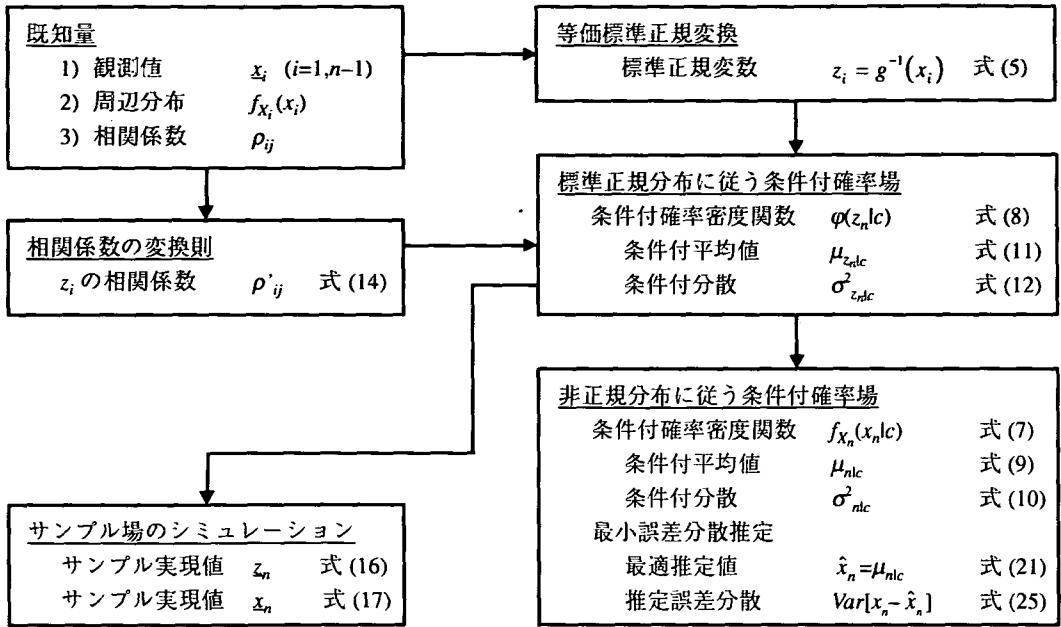


図-1 提案する条件付確率場の推定理論とシミュレーション手法

る。式 (13) は解析的に解くことができる場合もあるが、一般的には収束計算により求める必要がある。Liu and Kiuregian⁽⁴⁾ は最小自乗法によって、式 (13) を満たす ρ'_{ij} の近似式を求めている。そして得られた結果を基に、相関係数の標準正規確率場への変換式を次式のように表している。

$$\rho'_{ij} = F \cdot \rho_{ij} \quad (14)$$

ここで、 F は変換係数であり、相関係数 ρ_{ij} と変動係数 δ_i の関数として表される。

本論文の条件付シミュレーション手法の定式化においても ρ'_{ij} を式 (14) に従って表す。そして、変換係数 F を与えられた確率場に応じて厳密解あるいは近似解により与える。

(3) サンプル場の条件付シミュレーション手法

本節ではサンプル実現値 $\underline{x}_{n-1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}^T$ が与えられた条件の下で、未観測点 n においてサンプル実現値のシミュレーションを行う手順を示す。なお、以下の式中においてサンプル実現値には下線を引き、確定値であることを明示する。

本論文で提案する条件付確率場の推定と条件付シミュレーション手法のフローを図-1 に示す。

始めに、非正規確率場における観測値 $x_i (i=1, \dots, n-1)$ を各々式 (5) により標準正規確率場に変換し、サンプルベクトル $\underline{z}_{n-1} = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}^T$ を導く。また、 ρ_{ij}

および ρ_{in} を式 (14) により変換し、標準正規確率場における相関係数マトリクス \mathbf{R}'_{n-1} と相関係数ベクトル \mathbf{S}'_{n-1} を求める。

このとき式 (11) から、正規確率場における z_n の条件付平均値 $\mu_{z_n|c}$ は次式のように求められる。

$$\mu_{z_n|c} = \underline{z}_{n-1}^T \mathbf{R}'_{n-1}^{-1} \mathbf{S}'_{n-1} \quad (15)$$

一方、条件付分散 $\sigma_{z_n|c}^2$ は式 (12) と同一となる。

式 (15) と (12) の結果を用いて、未観測点 n におけるサンプル実現値 z_n は正規分布 $N(\mu_{z_n|c}, \sigma_{z_n|c}^2)$ に従う乱数として求められ、次式のように表される。

$$z_n = \sigma_{z_n|c} \cdot a + \mu_{z_n|c} \quad (16)$$

ただし、 a は標準正規乱数である。

次に、求められた正規確率場におけるサンプル実現値 z_n を式 (5) に従って与えられた非正規確率場に変換すれば、未観測点 n におけるサンプル実現値 x_n は次式のように求められる。

$$x_n = g(z_n) \quad (17)$$

さらに複数の未観測点を含むサンプル場を求める場合には、文献 4) で示した漸次拡張方式を用いる。すなわち、未観測点において得られたサンプル実現値 x_n を観測値とみなしてサンプルベクトルを $\underline{x}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ とする。そして、次の未観測点 ($n+1$) について上記と同様の手順に従えば、サンプル実現値 x_{n+1}

表一 任意分布に従う確率場の条件付シミュレーションの定式化

分布	確率密度関数 $f_X(x)$	等価正規変換式 $g(z)$	変換係数 F
正規分布	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\sigma z + \mu$	1
対数正規分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$\exp(\zeta z + \lambda)$	$\frac{\ln(1 + \rho_{ij}\delta_i\delta_j)}{\rho_{ij}\sqrt{\ln(1 + \delta_i^2)\ln(1 + \delta_j^2)}}$
指数分布	$\lambda \exp[-\lambda(x-u)] \quad (x \geq u)$ 0 $(x < u)$	$u - \frac{1}{\lambda} \ln[1 - \Phi(z)]$	$1.229 - 0.367\rho_{ij} + 0.153\rho_{ij}^2$
レイリー分布	$\frac{x-u}{\alpha^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)^2\right] \quad (x \geq u)$ 0 $(x < u)$	$\alpha\{-2\ln[1 - \Phi(z)]\}^{1/2} + u$	$1.028 - 0.029\rho_{ij}$
グンベル分布	$\alpha \exp\{-\alpha(x-u)\}$ $\times \exp[-\exp\{\alpha(x-u)\}]$	$u - \frac{1}{\alpha} \ln[-\ln\{\Phi(z)\}]$	$1.064 - 0.069\rho_{ij} + 0.005\rho_{ij}^2$
一様分布	$1/(b-a) \quad (a \leq x \leq b)$ 0 $(x < a, x > b)$	$(b-a)\Phi(z) + a$	$1.047 - 0.047\rho_{ij}^2$

が得られる。その際、計算に必要な相関係数マトリクスの逆行列 \mathbf{R}'_n^{-1} は、文献4)に示された手法により効率的に計算することができる。さらに必要な点だけ漸化的に計算を繰り返せば、条件付サンプル場のシミュレーションを行うことができる。

条件付確率場の統計量は通常のモンテカルロ法と同様に、サンプル場を多数発生させて数値解析により評価する。本研究では、得られた複数のサンプル場から各点における条件付平均値と条件付分散や頻度分布等の統計量を求める。

(4)任意分布に関する条件付シミュレーションの定式化

図-1からわかるように、与えられた確率場の確率変数とその相関係数を標準正規確率場へ変換することができれば、本シミュレーション手法は任意分布に従う条件付確率場に適用できる。本節では具体的に周辺分布を与えたときの定式化の例を示す。そして、定式化に必要な評価式の誘導を表すとともに、シミュレーション手法の任意確率場への適用性を明らかにする。

本研究では実際の工学上の問題への適用を考慮して、評価の対象とする確率場の特性を仮定する。そして周辺分布を表-1に示す6つの分布として与え、定式化を行う。また、5章において数値計算により条件付確率場の特性を比較する。

条件付確率場の推定に必要なとされる情報は、標準正規確率変数との変換式 $g(z)$ (式(5))と標準正規確率変数 z_i の相関係数 ρ'_{ij} の変換式 (式(14))である。表-1に定式化の対象例とした周辺分布の分布型と

その確率密度関数 $f_X(x)$ 、対応して求められる等価標準正規変換式 $g(z)$ および相関係数の変換係数 F の評価式を示す。表中の確率密度関数の記号は各分布の特性を表すパラメータであり、事前分布の平均値及び分散より決められる。

ここで、変換式 $g(z)$ は式(2)より求められる。表-1に示すように、 $g(z)$ は正規分布と対数正規分布の場合には解析的に求められる。しかし、その他の分布に関しては $g(z)$ の式中に標準正規確率分布関数 $\Phi(z)$ が含まれ、変換式について解析的な評価を行うことは難しい。

また相関係数の変換に関する変換係数 F は、正規分布および対数正規分布に関しては理論式、他の4つの分布については Liu & Kiuregian による近似式である。ただし、近似式は $0.1 \leq \delta_i \leq 0.5$ の範囲で求められており、その範囲で有効である。また、近似式の最大誤差は指数分布の場合が1.5%、その他の分布では概ね0%である。

4. 最適推定値に関する検討

(1) 最適推定値の誘導

本章では未観測点における物理量の推定問題に対して、前章で示した条件付確率場の推定理論を基に最適推定値を導き、その推定誤差に関して検討する。

未観測点における物理量 x_n の最適推定値 \hat{x}_n は、推定誤差の自乗が最小となるように決めることができる。ここで自乗誤差の期待値 $E[(x_n - \hat{x}_n)^2]$ は次式で与えられる。

$$E[(x_n - \hat{x}_n)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{n-1}}(\mathbf{X}_{n-1}, \mathbf{R}_{n-1}) \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x_n - \hat{x}_n)^2 f_{X_n}(x_n | c) dx_n \right\} d\mathbf{X}_{n-1} \quad (18)$$

式(18)の被積分関数は非負関数である。したがって次式の条件付誤差 \bar{R}_c が最小となるように \hat{x}_n を決めれば、自乗誤差は最小となる。

$$\bar{R}_c = \int_{-\infty}^{\infty} (x_n - \hat{x}_n)^2 f_{X_n}(x_n | c) dx_n \quad (19)$$

ここで、 \bar{R}_c を最小とする最適推定値 \hat{x}_n の条件は、次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{R}_c}{\partial \hat{x}_n} = 2\hat{x}_n - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{X_n}(x_n | c) dx_n = 0 \quad (20)$$

したがって、条件付誤差 \bar{R}_c を最小とする \hat{x}_n は次式のようになる。

$$\hat{x}_n = \mu_{n|c} \quad (21)$$

式(21)より、最小自乗誤差に基づく最適推定値は条件付平均値と一致することがわかる。

ここで、 \hat{x}_n の平均値 $E[\hat{x}_n]$ を求めると、

$$E[\hat{x}_n] = E[x_n] \quad (22)$$

が成り立つことから、式(21)は不偏推定式であり、同時に最小誤差分散推定式となる。

(2) 推定誤差分散の評価

推定誤差分散が自乗誤差と等しいことを考慮すると、推定誤差分散は次式のように展開することができる。

$$\text{Var}[x_n - \hat{x}_n] = E[x_n^2] - 2E[x_n \hat{x}_n] + E[\hat{x}_n^2] \quad (23)$$

式(23)の右辺第2項について次式が成り立つ。

$$E[x_n \hat{x}_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{X_n}(x_n | c) dx_n \right\} \times f_{X_{n-1}}(\mathbf{X}_{n-1}, \mathbf{R}_{n-1}) d\mathbf{X}_{n-1} \\ = E[\hat{x}_n^2] \quad (24)$$

したがって、推定誤差分散(式(23))は次式となる。

$$\text{Var}[x_n - \hat{x}_n] = E[x_n^2] - E[\hat{x}_n^2] \quad (25)$$

ここで、式(25)の各項は、それぞれ次のように表される。まず、第1項は周辺確率密度関数から、

$$E[x_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 f_{X_n}(x_n) dx_n \\ = \mu_n^2 + \sigma_n^2 \quad (26)$$

のようになる。また、第2項は条件付平均値(式(9))および結合確率密度関数(式(6))を代入して、 \mathbf{Z}_n に関する積分に置き換えると、次式のようになる。

$$E[\hat{x}_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(z_n) \varphi \left(\frac{z_n - \mu_{z_n|c}}{\sigma_{z_n|c}} \right) dz_n \right\}^2 \\ \times \varphi_{n-1}(\mathbf{Z}_{n-1}, \mathbf{R}'_{n-1}) d\mathbf{Z}_{n-1} \quad (27)$$

式(9)と(10)および式(27)に示すように、条件付平均値と条件付分散および推定誤差分散の評価式には変数の変換式 $g(z_n)$ を含む積分が存在する。このため、対数正規分布の場合のように $g(z_n)$ が解析的に積分が可能で与えられる場合(表-1参照)を除いて、一般の非正規分布に対しては数値積分を行う必要がある。特に、推定誤差分散の評価には多重積分が必要となり、その数値処理は必ずしも容易ではない。したがって、非正規分布に従う条件付確率場では、全ての分布に対して条件付特性値の解析的な推定が可能とは限らず、サンプルシミュレーションに基づき数値的に条件付特性値を求めることも必要となる。そして、条件付サンプル場を求める際には、前章で提案した条件付シミュレーション手法が有効となる。

ここで式(21)に示したように、最適推定値は条件付平均値に一致している。しかし式(10)と(25)(および式(26)と(27))とを比較すると、推定誤差分散は条件付分散とは異なることがわかる。さらに、条件付平均値と条件付分散は、観測値によって決められる $\mu_{z_n|c}$ を評価式に含み、その値は観測値に依存する。一方、誤差分散の評価式では、 $\mu_{z_n|c}$ は \mathbf{Z}_{n-1} に関する積分の中に含まれているため、誤差分散の値は観測点の空間位置にのみ依存し観測値には独立である。これらの現象は、非正規確率分布に従う条件付確率場の特徴である。またそれらの特徴は、対数正規分布に従う条件付確率場に関しては野田・星谷⁷⁾により明らかにされている。本検討により、任意の非正規分布に従う確率場について、上記の特徴が成り立つことが解析的に明らかとなった。

次節では、本理論を用い対数正規分布における条件付平均値、条件付分散と推定誤差分散の評価式を導く。そして対数正規分布を前提に定式化した野田・星谷の結果と比較し、本論文による一般化された定式化から野田・星谷の結果が導かれることを示す。

(3) 対数正規確率場における条件付特性値の評価

対数正規分布の等価標準正規変換式は、表-1に示すように次式のようになる。

$$g(z_n) = \exp(\zeta_n z_n + \lambda_n) \quad (28)$$

ただし、 λ_n と ζ_n^2 は $\ln x_n$ の平均値と分散である。

式(28)を式(9)に代入すると、 x_n の条件付平均値は次のようになる。

(4) 野田・星谷の結果との比較

野田・星谷⁷⁾は対数正規確率場における条件付推定問題について、Kriging による推定理論と条件付シミュレーション手法を示した。その手法により得られた結果を本論文の定式化に対応づけ、点 i における観測値 x_i ($i=1, \dots, n-1$) が与えられた条件下で未観測点 n における最適推定値 \hat{x}_n を求める式に変形した結果を以下に示す。

まず、最適推定値 \hat{x}_n の対数 $\ln \hat{x}_n$ を次式に示すように確率変数 x_i の対数の線形和で表す。

$$\ln \hat{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \ln x_i + k \quad (36)$$

そして未知係数 a_i を最小誤差分散の条件を満たすように決定すると、 a_i は次式の連立方程式により与えられる。

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j C'_{ij} = C'_{in} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (37)$$

ただし、 C'_{ij} は $\ln x_i$ と $\ln x_j$ の共分散である。

さらに不偏推定式を満たすように未定数 k を求めると、最適推定値は次式で表される。

$$\hat{x}_n = \exp \left[\left(\ln \mu_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \ln \mu_i \right) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\zeta_i^2 - C'_{in}) \right] \quad (38)$$

ただし、 ζ_i^2 は $\ln x_i$ の分散である。

ここで、 $\ln x_i$ の平均値を λ_i として、式 (38) を対数正規分布のパラメータの関係に基づいて整理すると次式のようにになる。

$$\hat{x}_n = \exp \left[\lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\ln x_i - \lambda_i) + \frac{1}{2} \hat{\gamma}_n \right] \quad (39)$$

ただし、 $\hat{\gamma}_n$ は次式により表される。

$$\hat{\gamma}_n = \zeta_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i C'_{in} \quad (40)$$

また、このとき推定誤差分散 $\text{Var}[x_n - \hat{x}_n]$ は次のように与えられている。

$$\text{Var}[x_n - \hat{x}_n] = \mu_n^2 \exp \zeta_n^2 \left\{ 1 - \exp(-\hat{\gamma}_n) \right\} \quad (41)$$

また条件付分散 $\sigma_{n|c}^2$ は次のようになる。

$$\sigma_{n|c}^2 = \hat{x}_n^2 \left(\exp \hat{\gamma}_n - 1 \right) \quad (42)$$

以上の結果を、前節で求めた本論文の手法による結果と比較する。ここで、共分散 C'_{ij} は、本論文の3章において定義した標準正規確率変数 z_i の相関係数

$$\begin{aligned} \mu_{n|c} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\zeta_n z_n + \lambda_n) \varphi \left\{ \frac{(z_n - \mu_{z_n|c})}{\sigma_{z_n|c}} \right\} dz_n \\ &= \left\{ \frac{1}{\sigma_{z_n|c} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{z_n - (\mu_{z_n|c} + \zeta_n \sigma_{z_n|c}^2)}{\sigma_{z_n|c}} \right\}^2 \right] dz_n \right\} \\ &\quad \times \exp \left(\zeta_n \mu_{z_n|c} + \lambda_n + \frac{1}{2} \zeta_n^2 \sigma_{z_n|c}^2 \right) \quad (29) \end{aligned}$$

式 (29) の {} 内は正規確率密度関数の $-\infty$ から ∞ の積分であり 1 となることから、条件付平均値は次のようになる。

$$\mu_{n|c} = \exp \left(\zeta_n \mu_{z_n|c} + \lambda_n + \frac{1}{2} \zeta_n^2 \sigma_{z_n|c}^2 \right) \quad (30)$$

さらに条件付分散も、式 (28) を式 (10) に代入して式 (29) と同様に整理すると、次式のように表すことができる。

$$\sigma_{n|c}^2 = \mu_{n|c}^2 \left\{ \exp(\zeta_n \sigma_{z_n|c})^2 - 1 \right\} \quad (31)$$

一方、推定誤差分散は以下のように求められる。

まず、対数正規分布のパラメータの関係から式 (26) は次のように表される。

$$E[x_n^2] = \mu_n^2 \exp \zeta_n^2 \quad (32)$$

次に、 $\mu_{z_n|c}$ (式 (15))、 $\sigma_{z_n|c}^2$ (式 (12)) と $(n-1)$ 次元の標準正規確率密度関数

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1}(\mathbf{Z}_{n-1}, \mathbf{R}'_{n-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2} |\mathbf{R}'_{n-1}|^{1/2}} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{Z}_{n-1}^T \mathbf{R}'_{n-1}^{-1} \mathbf{Z}_{n-1} \right] \quad (33) \end{aligned}$$

を式 (30) に代入する。そして得られた結果を式 (27) に代入し、 \mathbf{Z}_{n-1} に独立な項を積分の外に出して式 (29) と同様に整理すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_n^2] &= \exp \left[2\lambda_n + (\zeta_n \sigma_{z_n|c})^2 \right] \times \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2} |\mathbf{R}'_{n-1}|^{1/2}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{Z}_{n-1}^T \mathbf{R}'_{n-1}^{-1} \mathbf{Z}_{n-1} + 2\zeta_n \mathbf{Z}_{n-1}^T \mathbf{R}'_{n-1}^{-1} \mathbf{S}'_{n-1} \right] d\mathbf{Z}_{n-1} \\ &= \exp \left[2\lambda_n + (\zeta_n \sigma_{z_n|c})^2 + 2\zeta_n^2 \mathbf{S}'_{n-1}^T \mathbf{R}'_{n-1}^{-1} \mathbf{S}'_{n-1} \right] \\ &= \mu_n^2 \exp \zeta_n^2 \exp \left\{ -(\zeta_n \sigma_{z_n|c})^2 \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

式 (32) と (34) を式 (25) に代入すると、推定誤差分散は次のように求められる。

$$\text{Var}[x_n - \hat{x}_n] = \mu_n^2 \exp \zeta_n^2 \left[1 - \exp \left\{ -(\zeta_n \sigma_{z_n|c})^2 \right\} \right] \quad (35)$$

ρ'_{ij} と次のような関係がある。

$$\rho'_{ij} = C'_{ij} / \zeta_i \zeta_j \quad (43)$$

式 (43) から、未知係数 a_i の方程式 (37) は未知係数ベクトル $\mathbf{A}_{n-1} = [a_1, \dots, a_{n-1}]^T$ の式として次のように表される。

$$\mathbf{R}'_{n-1} \mathbf{V}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1} = \zeta_n \mathbf{S}'_{n-1} \quad (44)$$

ここで、 \mathbf{R}'_{n-1} と \mathbf{S}'_{n-1} は 3 章で示した z_i の $i=1, \dots, n-1$ 間の相関係数マトリクスと観測点 i と未観測点 n の相関係数ベクトルであり、 \mathbf{V}_{n-1} は次のような標準偏差 ζ_i の対角マトリクスである。

$$\mathbf{V}_{n-1} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & & & 0 \\ & \zeta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (45)$$

式 (40) を \mathbf{A}_{n-1} 、 \mathbf{R}'_{n-1} および \mathbf{S}'_{n-1} を用いて表し、式 (44) を代入する。そして、得られた結果に式 (12) を代入して $\sigma^2_{z_n|c}$ を用いて表すと、式 (40) は次式のように整理される。

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= \zeta_n^2 - \zeta_n \mathbf{S}'_{n-1}{}^T \mathbf{V}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1} \\ &= \zeta_n^2 \left(1 - \mathbf{S}'_{n-1}{}^T \mathbf{R}'_{n-1}{}^{-1} \mathbf{S}'_{n-1} \right) \\ &= \zeta_n^2 \sigma^2_{z_n|c} \end{aligned} \quad (46)$$

また、 $\ln x_i$ と 3 章の標準正規確率変数 z_i との関係は次式のように表される。

$$z_i = (\ln x_i - \lambda_i) / \zeta_i \quad (47)$$

式 (47) を考慮して、最適推定値 (式 (39)) の \exp 中の第 2 項を \mathbf{Z}_{n-1} を用いて表す。さらに、式 (44) と (11) を代入して、 $\mu_{z_n|c}$ を用いて表すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\ln \hat{x}_i - \lambda_i) &= \mathbf{Z}_{n-1} \mathbf{V}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1} \\ &= \zeta_n \mu_{z_n|c} \end{aligned} \quad (48)$$

式 (46) と (48) を式 (39) に代入すると、最適推定値 \hat{x}_n は次式のようになる。

$$\hat{x}_n = \exp \left(\zeta_n \mu_{z_n|c} + \lambda_n + \frac{1}{2} \zeta_n^2 \sigma^2_{z_n|c} \right) \quad (49)$$

式 (49) の最適推定値 \hat{x}_n は、式 (29) で示した本論文の手法から導かれる条件付平均値 $\mu_{n|c}$ と一致している。また式 (21) により最適推定値は条件付推定値と一致することが示されている。したがって、本手法を対数正規分布に従う条件付確率場に適用して得られる最適推定値は、野田・星谷の理論による最適推定値と一致する。

推定誤差分散 $\text{Var}[x_n - \hat{x}_n]$ と条件付分散 $\sigma^2_{n|c}$ に関

しても、同様に式 (46) を式 (41) と (42) に代入して整理すれば、それぞれ次のように求められる。

$$\text{Var}[x_n - \hat{x}_n] = \mu_n^2 \exp \zeta_n^2 \left[1 - \exp \left\{ - \left(\zeta_n \sigma_{z_n|c} \right)^2 \right\} \right] \quad (50)$$

$$\sigma^2_{n|c} = \mu^2_{z_n|c} \left\{ \exp \left(\zeta_n \sigma_{z_n|c} \right)^2 - 1 \right\} \quad (51)$$

式 (50) と (51) は、本論文の定式化から導かれた推定誤差分散 (式 (35)) と条件付分散 (式 (31)) とそれぞれ一致している。

以上の結果から、本論文の理論から導かれる対数正規確率場の条件付特性値と野田・星谷の結果は一致することがわかる。また、本節で示した式の変形から明らかのように、両手法による条件付特性値の誘導の過程はほぼ同じである。野田・星谷の理論では、対数正規分布の性質を考慮して $\ln x_n$ に関して $\ln x_i$ の線形和で表し、直接推定値を求めている。これは正規確率場に変換し、正規確率変数について観測値の線形和で表し推定値を導くことと等価である。したがって、野田・星谷の理論は、等価標準正規確率場に変換を行って条件付確率場を求める本論文の手法と本質的に同じである。

本論文では任意の非正規分布に従う条件付確率場の推定手法を示した。本節において対数正規確率場における条件付特性値を誘導した結果、野田・星谷の定式化が本論文の一般的な定式化に含まれることがわかった。

5. 数値計算による検討

(1) 条件付確率場のシミュレーション手法の検証

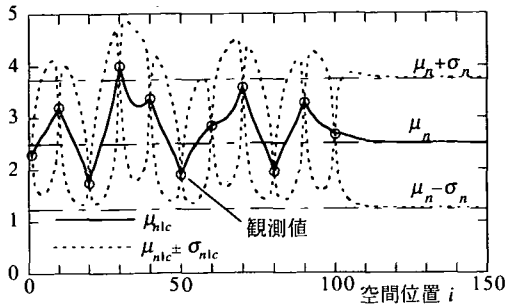
始めに、条件付シミュレーション手法の精度を検証する。ここでは、条件付平均、条件付分散の理論解 (式 (30) および (31)) が導かれている対数正規確率場について、シミュレーションによる結果と理論値の比較を行う。

ここでは簡単のため次元の均一場を対象とする。周辺分布の平均を $\mu = E[x_i] = 2.5$ 、分散を $\sigma^2 = \text{Var}[x_i] = 1.56$ (変動係数 $\delta = 0.5$) として与える。また x_i と x_j の相関係数 ρ_{ij} は次式に従うと仮定する。

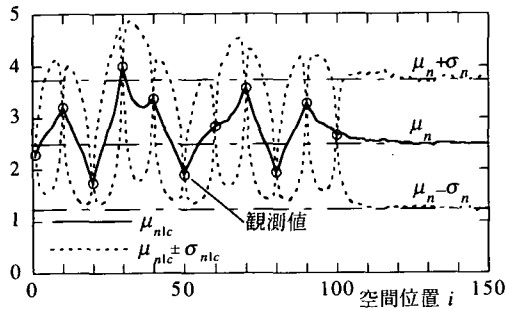
$$\rho_{ij} = \exp[-|i - j|/4.0] \quad (52)$$

さらに観測点は 11 点とする。そして観測点におけるサンプル実現値は、相関を有する確率場の同時シミュレーションによりあらかじめ求める。

図-2 に条件付特性値の比較を示す。(a) が理論解、(b) が条件付シミュレーションによる結果である。条件付シミュレーションでは 2000 個のサンプル場を発生し、得られた結果から各点について統計量を求め



(a) 理論解



(b) シミュレーション解 (2000 サンプル)

図-2 対数正規確率場における条件付特性値の比較

ている。図中の○印は事前に与えた観測値、実線は条件付平均値、破線は（条件付平均値±条件付標準偏差）を表す。また一点鎖線は無条件平均値と（無条件平均値±無条件標準偏差）を表している。理論値とシミュレーションによる結果はほぼ一致しており、ここで提案したシミュレーションの有効性が確認される。また、条件付確率場では観測点から遠くなり観測値の影響が小さくなると、条件付平均値および条件付標準偏差が無条件平均、無条件標準偏差に近づく。シミュレーションによる結果はこのような特性も満足している。

次に、シミュレーションにより発生させた 2000 個のサンプル場について、すべての点間の相関係数を求め、2点間の距離に対してプロットした結果を図-3に表す。図中に、あらかじめ与えた相関係数(式(52))を実線で示した。ただし、ここではシミュレーションによる相関の再現性に注目するため、観測値を各サンプル場ごとにランダムに作成し全体として無条件場となるようにしている。シミュレーションによるサンプル場の相関係数は与えた相関係数をほぼ満足していることが、図-3よりわかる。

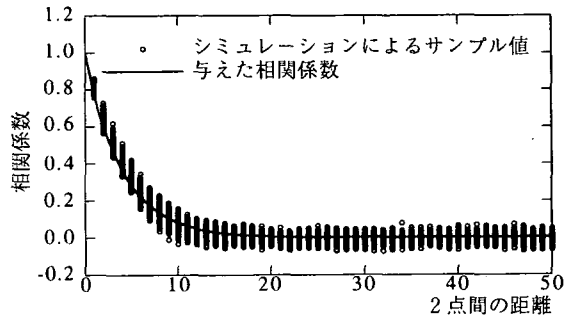


図-3 対数正規確率場における相関係数

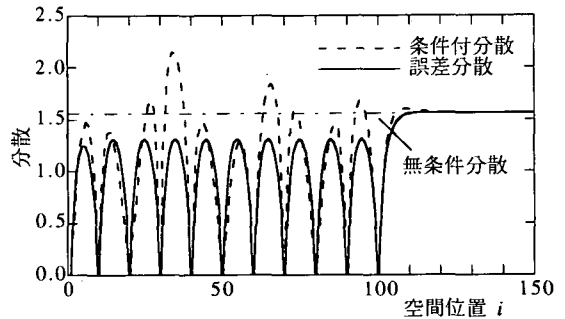
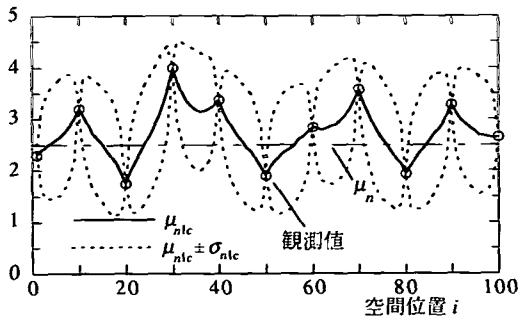


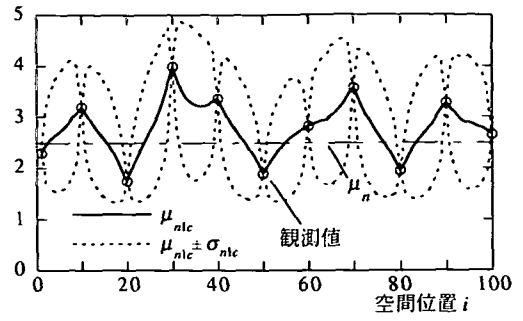
図-4 推定誤差分散と条件付分散の比較

さらに最適推定値と推定誤差分散に関する検討を行う。最適推定値は4章で示したように、図-2の条件付平均値と一致する。また、その推定誤差分散を式(35)に従って求めた結果は図-4の実線のようなになる。推定誤差分散の値は観測値によらず、観測点からの距離のみに依存していることを確認できる。一方、式(31)による条件付分散は図中の破線のようなになる。条件付分散は観測値に依存し、点によっては図中に一点鎖線で示した無条件の場の分散よりも大きくなっている。また両分散とも観測点から離れるに従って、無条件分散に等しくなっている。

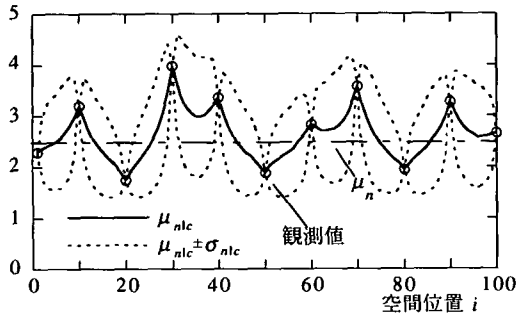
以上の比較より、ここで提案する非正規確率場の条件付シミュレーション手法について対数正規確率場の場合の適用性を確認できる。対数正規確率場の場合、解析的に最適推定値と推定誤差分散が求められるため、ここでは対数正規分布を例として本手法を検証した。しかし、本シミュレーション手法は表-1に示したように、他の非正規確率場に対しても正規場への変換式が異なるだけで、同じように適用できる。したがって、変換の精度が保証されている限りにおいて、任意の非正規確率場の条件付シミュレーションが検証できたと考えられる。



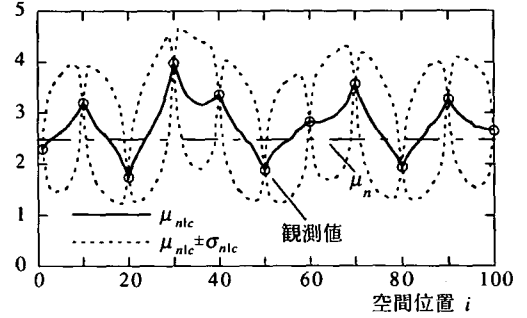
(a) 正規分布



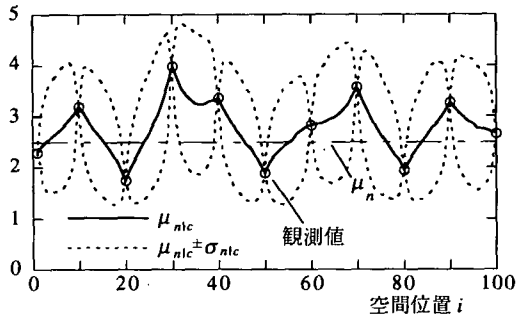
(b) 対数正規分布



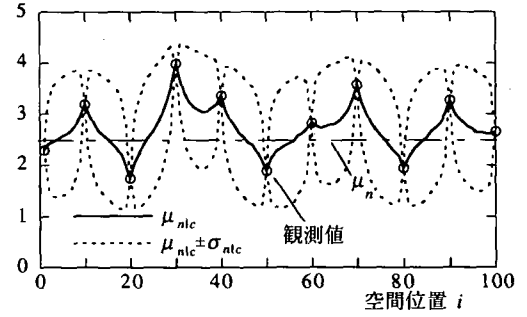
(c) 指数分布



(d) レイリー分布



(e) グンベル分布



(f) 一様分布

図-5 各非正規分布に従う条件付確率場の特性値の比較

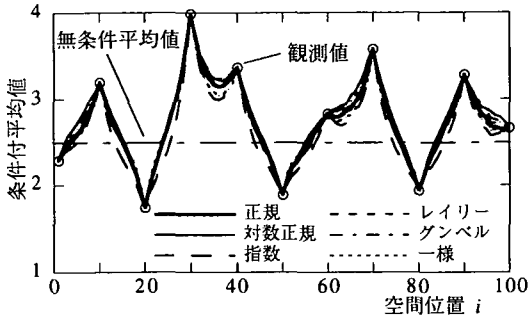
(2) 任意分布に関するシミュレーション結果の比較

任意分布に従う確率場の推定の例として、表-1に示した6種類の分布に従う確率場について条件付シミュレーションを行い、分布型の違いが確率場の推定結果に及ぼす影響について検討する。なお、各周辺分布の平均値、分散が前節の検証の場合と同じになるように各確率密度関数中のパラメータを与える。また、観測点と観測値も前節と同じとする。そして、各分布に関してそれぞれ2000個のサンプル場を発生させ、得られた条件付確率場の特性値を比較する。

図-5に周辺分布が(a)正規分布(b)対数正規分布(c)指数分布(d)レイリー分布(e)グンベル分布(f)一

様分布に従う確率場について、条件付平均値と条件付平均値±条件付標準偏差を示す。図中の一点鎖線は無条件平均値である。どの分布も条件付平均値の傾向はほぼ同じであるが、条件付標準偏差には若干の差異が認められる。その状況を明らかにするため、(a)条件付平均値と(b)条件付分散を比較した結果を図-6に示す。条件付平均値については指数分布の結果がやや他の分布の結果と異なるが、他の分布はほぼ一致している。一方、条件付分散は分布型により差が生じている。対数正規分布における条件付分散は大きく、指数分布では小さい値となっている。

次に条件付確率密度関数について比較検討を行う。



(a) 条件付平均値

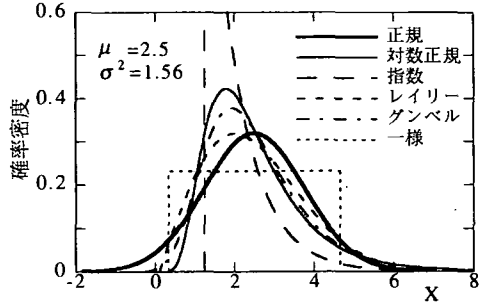
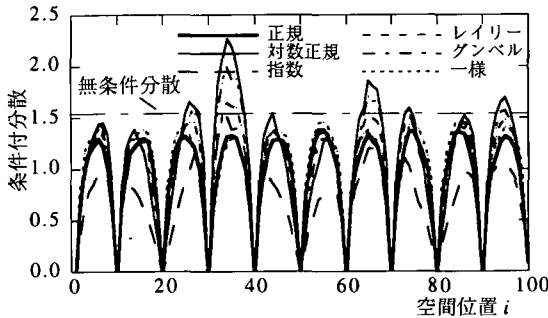
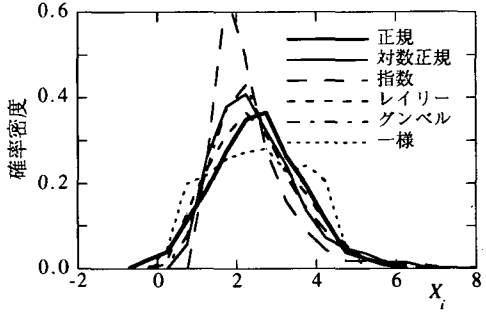


図-7 周辺分布の確率密度関数



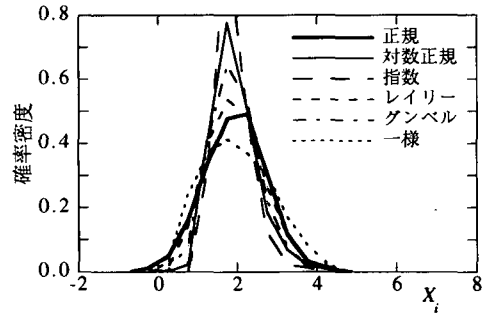
(b) 条件付分散



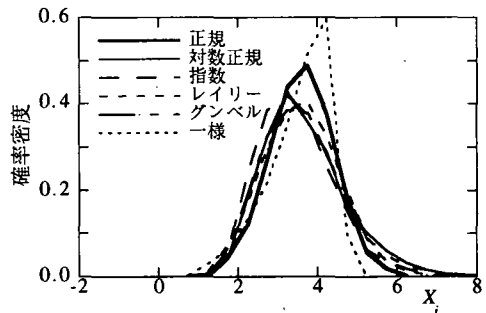
(a) サンプル点 $i=15$

図-6 周辺分布が条件付特性値に及ぼす影響

始めに、事前分布として与えた各周辺分布の確率密度関数の比較を図-7に示す。これに対して、シミュレーションによる2000個のサンプル場について、空間位置 i が $i=15, 19$ および 29 の3点についてサンプル値 x_i の頻度分布を求め、各点について確率密度関数を求めるた結果を図-8に示す。(a)は $i=15$ における結果である。この点は観測点の中間に位置し、観測値の影響が比較的小さいため、条件付特性値は無条件特性値とほぼ等しくなっている。得られた条件付確率密度関数も図-7に示した各分布の周辺確率密度関数とほぼ一致している。本質的に周辺分布が他と異なる指数分布と一様分布を除いて、得られた確率密度関数に大きな差は見られない。(b)は $i=19$ における結果である。この点は無条件平均値よりかなり小さな観測値を持つ観測点 ($i=20$) の近傍に位置する。どの分布型も観測値に引きずられるため、(a)に比べると確率密度関数の形状が X_i の値の小さい方に変形している。また分布のピーク付近や裾野の位置において、分布の値に差が生じている。(c)は無条件平均値よりも大きな観測値を有する観測点 ($i=30$) の近傍に位置する点 $i=29$ における結果である。(b)の結果とは逆に、確率密度関数の形が X_i の値の大きい方に



(b) サンプル点 $i=19$



(c) サンプル点 $i=29$

図-8 サンプル点における条件付確率密度関数

変形している。この場合、 X_i の値の大きい裾野部分における確率密度関数に差が顕著に見られる。

条件付確率場の推定問題としては、地震、風や波などによる荷重さらに形状・寸法や強度などの材料特性などの分布特性を推定し、得られた結果を基にして構造物の安全性を評価するような事例が考えられる。構造物の破壊などに対する安全性を信頼性設計法により評価する場合、強度や荷重に関する確率密度関数の裾野部分が特に重要となる。上で検討したように、観測値や無条件場の平均、分散等の前提条件が等しくても、周辺分布が異なると推定した条件付確率密度関数に差異を生じることがある。特に条件付確率密度関数の裾野部分の大きさが異なる場合がある。このことは、周辺分布の分布型を十分に考慮して条件付推定問題を取り扱うことが重要であることを示唆している。以上の結果、本研究で示した手法により、任意の非正規分布に関して条件付確率場を推定できることは有益であると考えられる。

6. 結論

条件付確率場の推定理論に関してはこれまで多くの研究が進められ様々な知見が得られてきた。しかし、多くの理論は正規確率場に限定されている。本論文では、任意の非正規確率場に関して条件付確率場の推定を行う理論を導き、条件付シミュレーション手法を提案した。そして提案する手法を理論解が得られる対数正規確率場について検証し、その有効性を示した。さらに理論ならびに数値解析により、以下に示すような結果が得られた。

- i) 未観測点における最適推定値は条件付平均値に等しいが、その推定誤差分散は条件付分散とは異なる。これは正規分布の場合と異なる性質であり、対数正規確率場に関してはすでに示されていた。ここでは非正規分布に従う条件付確率場について一般的に成り立つ特徴であることを示した。
- ii) 本論文による一般的な定式化を対数正規確率場に適用して条件付特性値を誘導した結果、対数正規分布を対象として定式化を行った野田・星谷による推定結果と同一となることが理論的に証明された。
- iii) 条件付シミュレーションを行い、未観測点におけるサンプル実現値の確率密度関数を検討した結果、事前分布として与えた周辺分布の分布型によって条件付分布に差が生じることが明らか

になった。したがって、本論文で示したような任意の周辺分布に従う確率場に対して適用することができる条件付確率場の推定理論は重要である。

最後に、本研究の理論は星谷・野田・稲田が共同で開発し、計算による検証は稲田が実行した。

参考文献

- 1) 鈴木誠, 石井清: 土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法, 土木学会論文集, No.394 / III-9, pp.97-104, 1988.
- 2) Vanmarcke, E.H. and Fenton, G.A.: Conditional simulation of local fields of earthquake ground motion, *Structural Safety*, 10, pp.247-274, 1991.
- 3) Kameda, H. and Morikawa, H.: Conditional stochastic processes for conditional random fields, *J. Engrg. Mech.*, Vol.120, No.4, pp.855-875, 1994.
- 4) 星谷勝: 条件付確率場のシミュレーション理論, 土木学会論文集, No.459 / I-22, pp.113-118, 1993.
- 5) Hoshiya, M.: Kriging and conditional simulation of Gaussian field, *J Engrg. Mech.*, Vol. 121, No.2, pp.181-186, 1995.
- 6) 星谷勝, 桑名智英: 条件付確率場のシミュレーション理論の検証, 土木学会論文集, No.477 / I-25, pp.93-96, 1993.
- 7) 野田茂, 星谷勝: 条件付対数正規確率場の同定, 第9回日本地震工学シンポジウム論文集, pp.247-252, 1994.
- 8) Elishakoff, I., Ren, Y.J. and Shinozuka, M.: Conditional simulation of non-Gaussian random fields, *Engrg. Struct.*, Vol.16, No.7, pp.558-563, 1994.
- 9) Ren, Y.J., Elishakoff, I. and Shinozuka, M.: Conditional simulation of multi-variate Gaussian fields via generalization of Hoshiya's technique, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol.5, No.11, pp.2181-2189, 1995.
- 10) Yamazaki, F. and Shinozuka, M.: Digital generation of non-Gaussian stochastic fields, *J. Engrg. Mech.*, Vol.14, No.7, pp.1183-1197, 1988.
- 11) Hoshiya, M.: Conditional non-Gaussian fields, *Proc. of the 6-th U.S.-Japan Workshop on Earthquake Disaster Prevention for Lifeline Systems*, Osaka, Japan, pp.211-219, 1995.
- 12) Hohenbichler, M. and Rackwitz, R.: Non-normal dependent vectors in structural reliability, *J. Engrg. Mech.*, Vol.107, No.6, pp.1227-1238, 1981.
- 13) Ditlevsen, O. and Madsen, H. O.: *Structural Reliability Methods*, pp.115-116, John Wiley & Sons Ltd, 1996.
- 14) Liu, P.L. and Kiureghian, A.D.: Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances, *Probabilistic Engrg. Mech.*, Vol.1, No.2, pp.105-112, 1986.

(1996.5.23 受付)

IDENTIFICATION OF CONDITIONAL NON-GAUSSIAN STOCHASTIC FIELD

Masaru HOSHIYA, Shigeru NODA and Hiroshi INADA

A theoretical formulation is presented to estimate conditional non-Gaussian field when observation is made at some discrete points. The formulation is based on conditional probability function incorporated with mapping of non-Gaussian variable into Gaussian variable. A method of conditional simulation of a sample field at an unobserved point is proposed. Numerical examples are evaluated to illustrate accuracy and efficiency of the proposed method. The best estimator at an unobserved point is derived using least mean square estimation and discussions are made on error variance and conditional properties of the estimator.