

# 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと 逆解析への応用

浜口 俊雄<sup>1</sup>・村上 章<sup>2</sup>・長谷川 高士<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 農修 京都大学大学院助手 農学研究科地域環境科学専攻 (〒 606-01 京都市左京区北白川追分町)

<sup>2</sup>正会員 農博 京都大学大学院助教授 農学研究科地域環境科学専攻 (〒 606-01 京都市左京区北白川追分町)

<sup>3</sup>正会員 農博 京都大学大学院教授 農学研究科地域環境科学専攻 (〒 606-01 京都市左京区北白川追分町)

非定常な地下水流動平面モデルを考えた場合、地下水の流動に応じて、対象領域内における不透水性基盤層標高の高い周辺領域で地下水面の端部が移動する。本論文は、地下水深を表す変数を0-拡張することにより、地下水貯留域の境界線となる地下水面端部の移動を表現し得る地下水モデルの定式化を行った。また、その定式に基づいた有限要素解析法を提案し、解析例により本修正モデルの有効性を検証した。続いて、同モデルを拡張Kalmanフィルタ有限要素法による逆解析に応用し、透水係数の同定を行った。さらに、逆解析後の対象領域における揚水運営の一例として、揚水限界基準を評価した揚水システムを提案し、数値解析を通して、本運営の特長を見い出した。最後に、以上の3項目に関する今後の検討課題についてまとめた。

**Key Words :** groundwater model, zero-extention, moving boundary, identification, Kalman filter, finite element method, pumping rate

## 1. はじめに

非定常不圧地下水の平面モデルは、地下水の常時貯留する領域内において、Dupuitの仮定の下で導かれている。そのため、3次元解析に比べ、地下水流動を平易かつ迅速に計算できる特長がある。すなわち、有効間隙率を扱うことによって、不圧地下水面の鉛直移動条件なしに水面挙動を簡便的に求め得る。特に広域にわたる地下水を考察する場合、平面解析は効率良く計算処理を行えるため、しばしば利用される。例えば、地下ダム<sup>1)</sup>設計資料とするための地下水流況や地下ダム湖貯留量算出を目的とした計算に平面解析を扱う。この地下ダムというものは、帯水層内の地下水の流れをせき止めて貯留したり、塩水の浸入を阻止することを目的として建造される。その立地条件の1つに、集水域が水位境界または分水嶺(0流量境界)で閉包され、かつ不透水性基盤層が地下谷状をなす広域地下水盆地領域が貯留域であることが挙げられる。

このような領域の地下水挙動を把握する場合、傾斜基盤の標高が高い周辺領域において、地下水貯留域の渚線、すなわち自由水面の端部が、降雨等の涵養により、傾斜基盤に沿って移動する<sup>2),3)</sup>。換言すれば、上記周辺領域において、この端部が水位変化(鉛直移動)とともに、平面領域変化(水平移動)も同時に生じる。上記の自由水面端部を移動境界といい、本論文では自由水面端部の水位が基盤層標高と一致する地点をもって、移動境界位置と見なす。ところで、幾つかの相(異なる

物理モデルの支配領域)間において考察対象の物理量が相互流入出したことで界面位置が定まる問題を指してStefan問題<sup>4)-6)</sup>という。いまStefan問題としての広義的な認識の上に立ち、先の移動境界問題を眺めてみる。同問題は、地下水と大気からなる平面モデルの自由水面位置が外部から涵養された水量に左右されながら定まるため、二次元単相Stefan問題と位置づけられる。

本文では、第一の検討課題として、平面的な境界移動を取り扱うべく従来の平面モデルに修正を施し、定式化を行うとともに、数値解析によって、修正モデルの有効性を検証する。まず、地下水位を表す変数に着目し、この変数を0-拡張理論(Zero-extention theory)<sup>4)</sup>と呼ばれる手法で拡張することにより、物理的解釈が可能な変数を定義する。次に、得られた拡張変数を従来の地下水モデルに適用し、移動境界を有しながら地下水盆地で成立するように同モデルを修正し、この修正モデルから拡張基礎方程式を導き出す。さらに、本論文は有限要素法への適用を考え、導かれた同方程式から解析領域全体に対する有限要素方程式を得る。ここで、非貯留域の涵養は貯留されずに貯留域へ流入するが、上記方程式ではこの現象を表現し得ないことから、同域における巨視的な検討を施した修正項目を有限要素方程式に組み込み、現実に近い地下水挙動を表現する。この式変形により、移動境界を含む有限要素方程式が示される。最後に、仮想地盤を用いた順解析例を挙げ、地下水面の状況変化と境界の移動を検証する。

続いて、第二の検討項目として、第一の検討課題か

ら得られたモデルに対して、逆解析を試みる。ここでは、涵養量や地盤物性の異なる3通りの数値実験を行い、本修正モデルの逆解析への応用について検討する。ここでは、順解析で作成した模擬観測値を用いて、拡張Kalmanフィルタ有限要素法<sup>7)-9)</sup>によるパラメータ同定を行う。本逆解析では、特に、移動境界の挙動がパラメータの同定精度に及ぼす影響を熟考する。

最後に第三の検討項目として、透水係数同定後において、計画的に需要揚水量を得ることを念頭に置くとともに、揚水に関する限界基準を設けて、過剰揚水に関する諸問題抑制のための揚水量決定法を提案する。本揚水解析は一例として揚水限界基準に地下水位を採用する。当論文では、各井戸の揚水量が一定の場合と本揚水量決定法の場合での結果を比較し、提案された揚水運営法の有効性を検証する。

まず2.節で、従来の地下水流動モデルと所与の境界条件について述べた後、移動境界より上流域の流動について考察を行うとともに、次節で用いる0-拡張理論を紹介する。3.節では、地下水位変数の拡張をもとに、修正地下水モデルの誘導および定式化を行い、有限要素法に適用する。数値解析により、同修正モデルの有効性を検証する。4.節では、修正モデルを用いた同定手法および逆解析例を示す。5.節では、限界基準を設けた揚水を行う場合の揚水量調整法を提案し、解析によって有用性を検討する。最後に、6.節において、本論文の結果をまとめている。

## 2. 従来モデルと移動境界

### (1) 基礎方程式

従来の非定常の不圧地下水平面モデルでは、Dupuitの仮定を基に考える微小柱状体の連続式にDarcy則を適用して得られる非定常な基礎方程式は、

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left\{ k(h-b) \frac{\partial h}{\partial \xi_i} \right\} + \varepsilon \quad (i=1,2) \quad (1)$$

で表される。ここに、 $h$ :地下水位、 $b$ :不透水性基盤層標高、 $\lambda$ :有効間隙率、 $k$ :透水係数、 $\varepsilon$ :涵養量を示す。なお、本文中において、変数 $\xi_1, \xi_2$ はそれぞれ $x, y$ を示している。式(1)の応用として、藤縄は広域地下水盆における基礎方程式を、式(2)で表記した<sup>10)</sup>。

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left\{ k(h'-b) \frac{\partial h}{\partial \xi_i} \right\} + \varepsilon \quad (i=1,2) \quad (2)$$

$$\text{ただし、} \quad h' = \begin{cases} b_0 & (h \leq b_0) \\ h & (b_0 < h \leq g_s) \\ g_s & (h > g_s) \end{cases} \quad (3)$$

ここに、 $b_0$ :非貯留域の臨界地下水流動のためのダミー定数、 $g_s$ :地表高である。式(2)は、非貯留域の流動も貯留域と同様に取り扱う簡便モデル式である。本論文

は、上記と異なるアプローチから、簡便に広域地下水流動を取り扱えるモデルを提案する。

### (2) 境界条件

概して、不圧地下水の境界には、空間的な固定位置を予め与え得る境界2種類と与え得ない境界2種類がそれぞれ存在する。前者は、1)水位境界: $S_h$ と2)流量境界: $S_q$ 、後者は地下水と大気との界面である自由水面のうち、定常状態の3)自由境界: $S_f$ と非定常状態の4)移動境界: $S_t$ に各々分類される<sup>5)</sup>。平面問題においては、有効間隙率の適用により、自由水面の昇降を通して、平面の水面挙動として考察し得る。従来の平面問題では、全て空間固定境界で与えられ、領域は $S_h$ または $S_q$ により閉包される。各々の境界条件は、

$$h = \hat{h} \quad \text{on } S_h \quad (4)$$

$$k(h-b) \frac{\partial h}{\partial n} = -\hat{q} \quad \text{on } S_q \quad (5)$$

で表される。ここに、 $\partial h / \partial n$ は $h$ の境界に対する法線方向微分を表す。本論文では、1.節に述べたような広域地下水盆を考察領域としている。この様な盆状領域における不圧地下水挙動を考察すると、降雨等の涵養による水位変動の結果、基盤層標高の高い周辺領域における自由水面の端部が傾斜基盤に沿って移動し、平面領域変動が生じる。移動境界と見なす同端部の移動境界の空間位置は、平面モデルという観点から、地下水端部の水位が傾斜した基盤層標高と一致する地点であると考えられる。よって、領域内で境界が移動し得る場合は、先述の空間固定境界 $S_h, S_q$ に加えて、移動境界 $S_t$ が存在し、移動境界条件が、

$$h = b \quad \text{on } S_t \quad (6)$$

で与えられる。非定常問題の場合、式(6)が時間変数 $t$ と空間変数 $\xi_1, \xi_2$ で構成されることから、移動境界 $S_t$ は時間依存境界であることが伺える。

### (3) 背水域の定義

いま、有効間隙率が比較的大きく、基盤が急傾斜している領域を持つ地下水盆を考える。これは実際の地下水盆で見受けられる特徴である。 $S_t$ よりも上流域における涵養水の実挙動を、以下の様に考えた理想モデルとして捉える。 $S_t$ より上流域では、実際の涵養水に関して、地下水として貯留する性状よりも、傾斜基盤に沿って下流へ流動する性状の方が卓越しているため、同領域の涵養水は最終的に $S_t$ へ流入するものと思われる。故に、実際の $S_t$ における流量条件は、 $S_t$ の上流域における涵養量の関数で表されると考えられる。いま、 $S_t$ より上流域の涵養が傾斜基盤に沿って地下水貯留域へ流入し、この貯留域を間接的に涵養する現象に関して、その $S_t$ より上流域を指して、地下水の「背水域」と

呼ぶものと定義し<sup>9)</sup>、以下に本文で用いる。よって、平面モデルの移動境界問題を扱う場合、背水域では従来モデルに修正が必要であると思われる。

#### (4) 0-拡張理論

まず、0-拡張理論の定義について詳述する。ある空間領域  $D$  と空間変数  $x$  の存在を仮定し、 $D$  に包含された領域  $\Omega$  とその補領域  $\bar{\Omega}$  に  $D$  を分ける。同時に、 $\Omega$  では変数値が定義されるが、 $\bar{\Omega}$  では値が存在しないような変数  $p(x)$  を考える。ここで  $p(x)$  が  $\bar{\Omega}$  において値 0 をとるものと拡大解釈し、 $p(x)$  を全体  $D$  で再定義する。この変数値拡大解釈が「0-拡張理論」と称される。

同理論を用いて Stefan 問題を解く河原田の仮想領域法<sup>4)</sup>の特徴は、以下のようである。

- 上記領域  $D$  が解析に都合が良い様に適当に定められており、同時に所与の境界条件が0-拡張変数  $p(x)$  に合うように拡張されている。
- 連続かつ滑らかな特性関数を交えたペナルティ項を基礎方程式に付加し、この項が上記領域  $\Omega$  で影響し、領域  $\bar{\Omega}$  で影響しないようにしている。
- 付加した方程式を  $D$  で空間積分し、積分ペナルティ法で近似的に解く。

河原田の仮想領域法は、ペナルティ法の一つであり、適切なペナルティ数が与えられれば、解が厳密解に漸近して近似解となる解析手法である。ペナルティ法は、ペナルティ定数の取り扱い次第で解が変わり、厳密解が分からない場合の多い移動境界問題では、ペナルティ数の近似解に対する適切さの評価が一般に難しい。

### 3. 修正モデルと定式化

#### (1) 拡張変数

筆者らは河原田の仮想領域法を用いず、0-拡張理論の根本に立ち戻り、同理論を独自解釈して得られた、変数の新たな0-拡張解析手法を本文で示す。

図-1のように、空間固定境界で閉包される対象領域を  $V$  とおき、 $V$  において  $h \geq b$ 、 $h < b$  の成立するような時間依存の部分空間領域をそれぞれ  $V_F^t$ 、 $V_E^t$  とおく。

領域  $V$  において物理的解釈が可能であるように、拡張すべき水位変数  $h$  に対して0-拡張 ( $h$  の直接的0-拡張)を試みるのではなく、地下水深変数  $h - b$  の0-拡張 ( $h$  の間接的0-拡張)を施した。いま、地下水位  $h$  の0-拡張変数  $\tilde{h}$  を、

$$\tilde{h} = b + (h - b) \cdot u\{h - b\} \quad (7)$$

で定義し、擬似地下水位と命名する。ここに、 $u\{\bullet\}$  は超関数の単位階段関数であり、先述の特性関数の役割を担っている。 $\tilde{h}$  は、視覚的に図-2のようであり、貯水

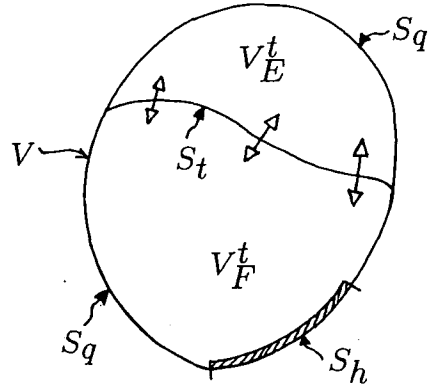


図-1 平面領域概念

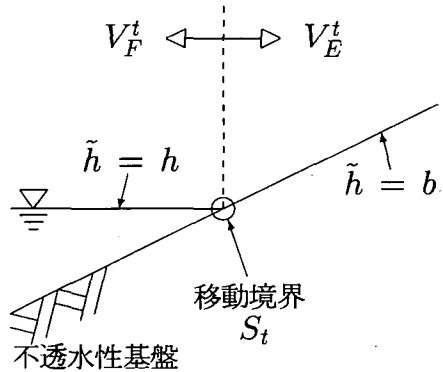


図-2 拡張変数概念

域  $V_F^t$  においては地下水位に、 $V_F^t$  の背水域である  $V_E^t$  においては基盤層標高にそれぞれ一致するのである。

次に、河原田の方法とは異なり、特性関数が超関数となる点に注目する。式(7)で定義された  $\tilde{h}$  に関する数学的考察を行い、連続性・微分可能性について検証する。

$$\tilde{h} = \begin{cases} b & \text{in } V_E^t \\ h(=b) & \text{on } S_t \\ h & \text{in } V_F^t \end{cases} \quad (8)$$

から、領域  $V$  における  $\tilde{h}$  の連続性が明らかに成立する。いま、変数  $\xi_1, \xi_2$  に加え、全微分の考察で表記簡略のため  $\xi_3 = t$  とおく。このとき、 $\tilde{h}$  の全微分は

$$d\tilde{h} = \frac{\partial b}{\partial \xi_i} d\xi_i + \left[ u\{h - b\} + (h - b) \cdot \delta\{h - b\} \right] \times \frac{\partial(h - b)}{\partial \xi_i} d\xi_i \quad (9)$$

$$= \frac{\partial b}{\partial \xi_i} d\xi_i + u\{h - b\} \cdot \frac{\partial(h - b)}{\partial \xi_i} d\xi_i \quad (10)$$

( $i = 1, 2, 3$ )

で与えられる。ここに  $\delta\{\bullet\}$  は、 $u\{\bullet\}$  の導関数であるデルタ関数を示す。式(9)においてデルタ関数を因数に持つ項は、 $(h - b)$  を試験関数と見なしてデルタ関数の定義に従い計算すると恒等的に0となり、式(10)に至るのである。既往の関数の定義に従えば、式(10)の  $S_t$  に

おける左方極限值と右方極限值が擬して相異なるため、同位置では全微分不可能である。このことは、図-2でも明らかに見受けられる。そこで本論文では、超関数の広義的立場から  $d\bar{h}$  の数学的性質をうかがう。試験関数を用いた超関数の広義的な定義 (Schwarz の超関数) から、

- (a) 任意次数の導関数 (全微分) が求まる、
- (b) 不連続関数が (全) 微分可能である、
- (c) 連続と不連続の事象をひとまとめに表現できる、
- (d) 解析演算 (微分積分等) の他に合成積・演算子変換などが随意行える、
- (e) (偏) 微分方程式の理論中に不連続関数を含めることが可能である、

等が言える<sup>11)</sup>。なお  $\bar{h}$  は先述のとおり連続であるため、簡条項目 2., 3., 5. に関して留意しなくてよい。  $b$  が時間  $t (= \xi_3)$  に独立であることに留意しながら、式 (10) を領域毎に表せば、

$$d\bar{h} = \begin{cases} \frac{\partial b}{\partial \xi_i} d\xi_i & \text{in } V_E^i \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi_i} d\xi_i & \text{in } V_F^i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11)$$

となる。式 (11) は  $S_i$  上で不連続であるが、超関数として定義されていれば簡条項目 6. が使える。以上より  $\bar{h}$  は、空間的・時間的な連続性および微分可能性が超関数の意味で広義的に保証され、修正モデルを導く際に何ら数学的問題のないことが示された。

## (2) 修正モデル

本節では、従来モデルの特長を継承しながら移動境界を含有した修正モデルを作成する。修正項目として、まず Darcy 則の拡張について考察する。従来の Darcy 則は、領域  $V_F^i$  において成立し、平面等方浸透の場合、流速  $v_i$  は、

$$v_i = -k \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi_i} \quad \text{in } V_F^i \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

で表される。一方、 $V_E^i$  における流速  $v_i$  は、次の様な仮定の下で導出された。 $V_E^i$  が  $V_F^i$  に対する背水域 (2.(3) 節参照) であるとおく。背水域  $V_E^i$  は、対象の地下水盆地内でも上流周辺に位置することが多く、

- (a) 地下ダム建造が可能なるほどに有効間隙率が大きければ、 $V_E^i$  内の涵養水は重力水となって貯留されず低水頭方向へ移動する傾向を示す。
- (b) 広域地下水盆地の上流域における不透水性基盤が急傾斜かつ長大であるならば、同域上での  $V_E^i$  の水頭勾配の殆どは傾斜基盤面に対して平行となる。

上記は「有効間隙率が大きい」・「急傾斜の傾斜基盤面が長大」という理想的仮定の下で成り立つと見込まれる項目である。よって、こうした仮定が成立しない場合に

は適用出来ないと思われる。広域地下水盆地全域における地下水解析を行う場合、背水域モデルの利用から平面飽和・不飽和二相に準じるように簡便化した飽和単相モデル導出のため、全域での巨視的検討が重要である。本論文では、上記項目に従うような  $V_E^i$  での涵養水挙動がこの巨視的検討に差し支えない理想挙動であると考えた。さて平面地下水モデルでは、透水係数でなく透水係数に水深を乗じたもの (透水量係数) で地盤の透水性を評価する。 $V_E^i$  における透水量係数は、水深が 0 であるため 0 となる。このことに先程の簡条書きで記した涵養水挙動を加味すれば、 $V_E^i$  には基盤面に沿って層厚 0 の帯水層が横たわっているように解釈し得る。よって  $V_E^i$  における流速は、

$$v_i = -k \frac{\partial b}{\partial \xi_i} \quad \text{in } V_E^i \quad (i = 1, 2) \quad (13)$$

となる。ここで  $\bar{h}$  の定義式 (7) により、式 (12), (13) を総じて、

$$\bar{v}_i = -k \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi_i} \quad \text{in } V \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

を得る。これを平面拡張 Darcy 則と呼ぶことにする。

次の修正項目として、不圧地下水平面流動の基礎方程式の拡張について検討する。従来と同様に微小柱状モデルから  $\bar{h}$  に関する連続式を導き、さらに平面拡張 Darcy 則を用いると、以下の式 (15) が得られる。

$$\lambda \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left\{ k(\bar{h} - b) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi_i} \right\} + \varepsilon \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

先述の平面拡張 Darcy 則作成の段階では、背水域  $V_E^i$  において帯水層厚 0 の流動モデルを仮定したため、 $V_E^i$  において涵養は貯留されるのみであって、背水域モデルとして  $V_F^i$  域へ流入するように式 (15) は記述されていない。この不具合に対するモデル修正は 3.(3) 節における有限要素方程式に課すこととする。

いま、考察領域の等方透水性を仮定し、各時刻毎の平均水深  $d_0 = \bar{h} - b$  を用いて透水量係数部を定数化し、近似的に線形化した拡張基礎方程式 (16) を得る。

$$\lambda \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = k d_0 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi_i} \right) + \varepsilon \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

広域地下水盆地の地下水平面流動を解析する場合の簡便な計算方法として、従来モデルでもよく用いられる手法である。式 (16) をもとに、次節で数値計算のための離散化方程式を誘導する。

## (3) 有限要素法への適用

本文では、線形化拡張基礎方程式 (16) を有限要素法に適用し、地下水盆地全体の視野から  $V_E^i$  に関する水の流動を検討して有限要素方程式を導く。

境界条件式 (4), (5) に留意しながら領域  $V$  において積分した弱形式を求める。次に、空間において形状関数  $\phi$

により離散化する。続いて、時間差分パラメータ  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) を用いて  $\tilde{h}$  を時間展開し、 $\partial \tilde{h} / \partial t$  に関して時間差分を行う<sup>9)</sup>。積分領域  $V$  を  $V_E^t$  と  $V_F^t$  に分割して表記すると、式(17)~(22)を得る。

$$A \tilde{h}_{t+1} = B \tilde{h}_t + \omega_{t+\theta} \quad (17)$$

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \theta S \quad (18)$$

$$B = \frac{1}{\Delta t} M - (1 - \theta) S \quad (19)$$

$$M = \int_{V_F^t} \lambda \phi^T \phi dV + \int_{V_E^t} \lambda \phi^T \phi dV \quad (20)$$

$$S = \int_{V_F^t} k d_0 \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi_i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} dV \quad (21)$$

$$\omega_{t+\theta} = - \int_{S_{q_F^t}} \hat{q} \phi^T dS + \int_{V_F^t} \varepsilon \phi^T dV + \int_{V_E^t} \varepsilon \phi^T dV \quad (22)$$

ここに、 $S_{q_F^t}$  は  $V_F^t$  の流量境界を示す。式(17)~(22)から、流動項における領域  $V_E^t$  の積分および涵養項における  $V_E^t$  の流量境界の積分が0となり、領域  $V_E^t$  に関する項が  $M$  項の一部および  $\omega_{t+\theta}$  項の一部のみになっており、流動項が0であることがわかる。よって、 $V_E^t$  における水の挙動は一旦貯留した後に領域  $V_F^t$  へ流動することがわかる。ここでは、地下水盆全体の視野から  $V_E^t$  に関する水の流動を考慮する。背水域  $V_E^t$  における涵養は、2.(3)節で述べた流動で  $S_t$  を経て  $V_F^t$  へ流入する。よって、 $S_t$  の流入項  $\zeta_{t+\theta}$  は、 $V_E^t$  における涵養項を変数に用いて表現し得ると仮定し、式(23)~(25)で定義する。

$$\zeta_{t+\theta} = \int_{S_t} \hat{q}_t \phi^T dS \quad (23)$$

$$\hat{q}_t = \sum_{n \geq 0} \gamma_{t-n} \int_{V_E^{t-n}} \varepsilon \phi^T dV \quad (24)$$

$$0 \leq \gamma_\tau \leq 1, \quad \sum_{\tau \leq t} \gamma_\tau = 1 \quad (25)$$

式(24)での  $n$  に関する総和は、背水域  $V_E^{t-n}$  からの、遅延時間が  $n$  の流入量を逐次重ね合わせたものである。 $\gamma_\tau$  は、時刻  $t$  において、 $V_E^{t-n}$  からの総流入量に対する、時間遅れ  $(t - \tau)$  を生じた流入量の割合を示しており、遅延比係数と呼ぶことにする。 $\gamma_\tau$  は実測や模型実験などによって決まるものである。上記背水域モデルの解析時の使い方は、以下の様である。まず、時刻  $\tau_0$  における背水域上の涵養は、同時刻以降の境界移動の有無に関わらず、基準とおいた  $\tau_0$  時の移動境界位置へ遅延を伴いながら流入するものとあえて設定する。その後、移動境界位置が経時的に変化するため、その都度流入対象位置の修正を施す。同時に遅延を伴う流入量も、式(24)における  $\gamma_{t-n}$  を、それまでの経緯も加味して式(25)が成り立つように逐次調整処理することで、上記変化に対応させ得るのである。ところで、上記変形を施した後の鉛直方向涵養項は式(26)で表され、式(17)を整理

すると式(27)となる。

$$\omega'_{t+\theta} = - \int_{S_{q_F^t}} \hat{q} \phi^T dS + \int_{V_F^t} \varepsilon \phi^T dV \quad (26)$$

$$A \tilde{h}_{t+1} = B \tilde{h}_t + \omega'_{t+\theta} + \zeta_{t+\theta} \quad (27)$$

いま未知量解を求める上で、時刻  $t$  および  $t+1$  における水位ベクトル  $\tilde{h}_t$  の成分を、領域  $V_E^t$  に関わる量 (添字  $E$ ) と領域  $V_F^t$  に関わる量 (添字  $F$ ) に分割して考察する。

$$\tilde{h}_t = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{h}_t^F \\ \tilde{h}_t^E \end{array} \right\}, \quad \tilde{h}_{t+1} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{h}_{t+1}^F \\ \tilde{h}_{t+1}^E \end{array} \right\} \quad (28)$$

他の行列項やベクトル項も同様に

$$M = \left[ \begin{array}{cc} M^F & O \\ O & M^E \end{array} \right], \quad S = \left[ \begin{array}{cc} S^F & O \\ O & O \end{array} \right] \quad (29)$$

$$\omega'_{t+\theta} = \left\{ \begin{array}{c} \omega'_{t+\theta}^F \\ o \end{array} \right\}, \quad \zeta_{t+\theta} = \left\{ \begin{array}{c} \zeta_{t+\theta}^F \\ o \end{array} \right\} \quad (30)$$

$$A = \left[ \begin{array}{cc} A^F & A^{FE} \\ A^{EF} & A^E \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{cc} B^F & B^{FE} \\ B^{EF} & B^E \end{array} \right] \quad (31)$$

となる。式(29)の  $M$  について、式(20)の第一項は  $M_F$  成分のみ、式(20)の第二項は  $M_F$  成分のみ有する行列を各々表す。また、式(31)の各成分行列はそれぞれ、

$$A^F = \frac{1}{\Delta t} M^F + \theta S^F, \quad A^{FE} = O \quad (32)$$

$$A^{EF} = O, \quad A^E = \frac{1}{\Delta t} M^E \quad (33)$$

$$B^F = \frac{1}{\Delta t} M^F + (1 - \theta) S^F, \quad B^{FE} = O \quad (34)$$

$$B^{EF} = O, \quad B^E = \frac{1}{\Delta t} M^E \quad (35)$$

である。以上から、

$$A^F \tilde{h}_{t+1}^F = B^F \tilde{h}_t^F + \omega'_{t+\theta}^F + \zeta_{t+\theta}^F \quad (36)$$

$$A^E \tilde{h}_{t+1}^E = B^E \tilde{h}_t^E \quad (37)$$

式(36),(37)を拡張有限要素方程式と呼ぶことにする。さらに、式(36),(37)から得られる時刻  $t+1$  の未知量解を数式で表現する。時刻  $t+1$  の未知量は、水位境界以外の節点に関する水位ベクトル成分、および、水位境界の節点に関する流入出力ベクトル成分である。いま各ベクトル  $\tilde{h}_{t+1}^F$ ,  $\tilde{h}_t^F$ ,  $\tilde{h}_{t+1}^E$ ,  $\tilde{h}_t^E$ ,  $\omega'_{t+\theta}^F$ ,  $\zeta_{t+\theta}^F$  に対して、水位境界以外の節点に関する成分 (添字1) と水位境界の節点に関する成分 (添字2) に分割表記した後<sup>9),12)</sup>、水位境界  $S_h$  における移動境界流入量が0 ( $\zeta_{t+\theta}^{F,2} = o$ ) であることに留意しながら各未知量について解けば、

$$\tilde{h}_{t+1}^{F,1} = (A_{11}^F)^{-1} \left[ B_{11}^F \tilde{h}_t^{F,1} + B_{12}^F \tilde{h}_t^{F,2} - A_{12}^F \tilde{h}_{t+1}^{F,2} + \omega'_{t+\theta}^{F,1} + \zeta_{t+\theta}^{F,1} \right] \quad (38)$$

$$\tilde{h}_{t+1}^{E,1} = \tilde{h}_t^{E,1} \quad (39)$$

$$\omega'_{t+1}^{F,2} = \frac{1}{\theta} \left[ A_{21}^F \tilde{h}_{t+1}^{F,1} + A_{22}^F \tilde{h}_{t+1}^{F,2} - B_{21}^F \tilde{h}_t^{F,1} - B_{22}^F \tilde{h}_t^{F,2} - (1 - \theta) \omega'_{t+\theta}^{F,2} \right] \quad (40)$$

$$\omega'_{t+\theta}^{F,2} = (1 - \theta) \omega'_{t+\theta}^{F,2} + \theta \omega'_{t+1}^{F,2} \quad (41)$$

を得る。式(38),(40)がともに領域 $V_F^1$ のみの方程式であり、また式(39)が領域 $V_E^1$ のみの方程式である。領域 $V_F^1$ および式(23)を定め得たとき、 $S_i$ をもつ地下水解析は、 $\bar{h}^{E,i}$ を定常的に扱い、かつ $V_F^1$ 内のみの部分的非定常計算をすれば十分であるとわかる。

#### (4) 有限要素上の移動境界

平面飽和・不飽和二相問題を扱う場合、水頭値として0以上はおろか負値も取り得るため、固定有限要素網内においても、自由水面端部である移動境界 $S_i$ が様々な平面的形状を成し得る。一方、本論文は、本来上記二相問題であるものを飽和のみの単相問題として取り扱っている。一般に単相問題では、移動境界位置を単相における変数値のみから定めなければならない。平面地下水流動問題に言及すれば、移動する地下水端部の位置を地下水位のみから特定することが必要である。

本論文は、固定された有限要素網に対して、境界 $S_i$ の位置(平面的形状)を要素の各辺々によって近似したモデルとする。その位置は、 $V_F^1$ および $V_E^1$ の混在する要素の辺々に近似配置されるものと定める。これにより、当モデルでは $S_i$ 上の節点における地下水深は0以上の扱いであることが分かる。また、 $S_i$ は時間に依存して移動する境界である。すなわち、本モデルにおける $S_i$ 上の地下水位は、基盤高より高い(水深が0以上の)状態で経時的に変化することを表す。よって当モデルに関する $S_i$ の境界条件は、水位を与える条件でなく、流量を与える条件が適していることが分かる。このことは、背水域モデルによって導出された式(23)の見解と一致する。つまり、

$$k(h-b)\frac{\partial h}{\partial n} = \hat{q}_i (> 0) \quad \text{on } S_i \quad (42)$$

と言える。よって上記式(42)は、従来使うべき飽和・不飽和二相間の結合条件<sup>5)</sup>を、背水域モデルの利用から平面二相に準じるように簡便化した飽和単相モデルに対して課した式であると解釈できる。また、 $S_i$ は離散的に移動するため、移動基準を設けねばならない。本論文の全解析における $S_i$ の離散的移動条件に、一例として、 $S_i$ 上の節点の $\bar{h}$ 値が、

- 上昇移動条件：その上流節点の $b$ を上回ること
- 下降移動条件：その位置の $b$ よりも下回ること

を与えた。上昇時の貯留地下水が比較的穏やかな水面勾配をもつと予想されるので、本上昇条件は上流節点まで水面上昇している十分条件である。また、 $S_i$ 移動時に上記条件を処理し易くするため、基盤高分布をもとにして、できるだけ流線網に近い有限要素メッシュを分割作成する。固定要素網を用いる理由の1つは、後述の逆解析への高い適応性にある。

#### (5) 逆解析例

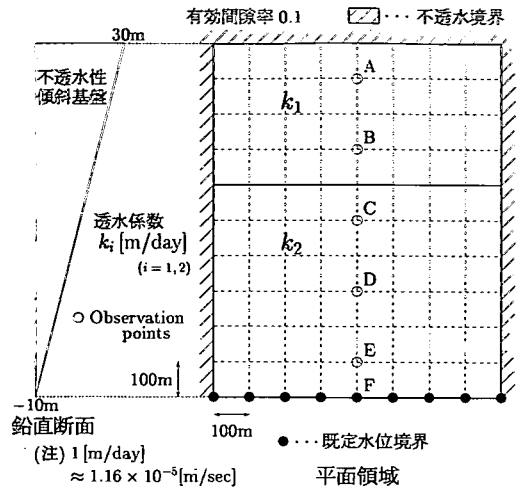


図-3 仮想地盤

解析例として、図-3に示す仮想地盤を考える。その要素メッシュは、前節の考え方に従って作成した。 $k_1 = k_2 = 100(\text{m/day})$ の等方均質地盤とし、与地盤に対して模擬的な涵養を与え、1日を1ステップとした計2カ月分61ステップの数値計算を行った。本解析では、背水域モデルの一例として、地下水が最も激しい挙動をするように、遅延がない背水域流入( $\gamma_i = 1$ )を考えた。模擬観測値から水位挙動の結果を考察する。図-4は解析結果を示す。ここに、上図が模擬降雨・涵養量を、中図が水位境界 $S_h$ 上のF点における流出量を、下図が観測水位変化を表す。上図においては、棒グラフが模擬降雨量を示し、破線が模擬涵養量をさす。また、下図においては、模擬観測点A~Eにおける水位変動を各記号において表現する。水位グラフが定常値を示す(観測地点が $V_E^1$ 内にある)期間では、基盤層標高と一致しており、 $\bar{h}$ の定義から水深0となっていることがわかる。また、定常状態と非定常状態が入れ替わるとき(下図中の矢印)に、移動境界 $S_i$ が観測点上を通過しているといえる。なお、実際の地下水位観測では、計測装置に地下水存在の反応が無かった場合に従来では観測不能もしくは観測値欠損扱いとなっていたが、本論の擬似地下水位の利用によって、観測値は基盤層標高と同一の値として与えられる。今掲げた観測値は、該当の観測地点において「地下水が無い」というデータを観測値として取り込んでいるという解釈ができる。この解釈の利点は、次の4.節で詳述する。

$\bar{h}$ をふまえながら図-4を眺めると、A, B, C各観測点周辺では、23~30日目と46~50日目において、急激な水位上昇とともに $S_i$ が上流へ移動していることがわかる。また、 $S_i$ の下流への移動による通過がA地点は34・55日目に、B地点は41日目に、C地点は15日目におい

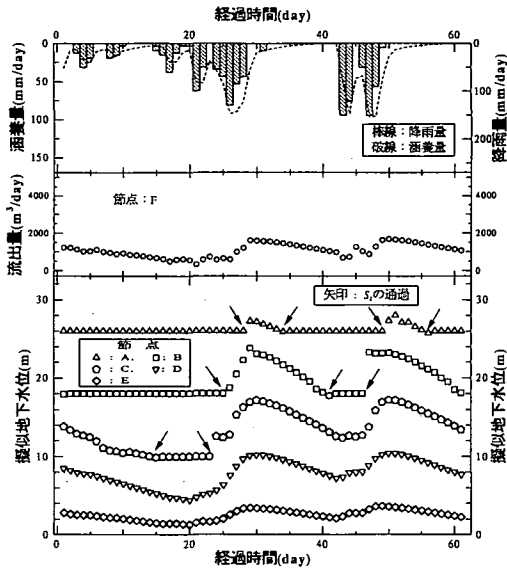


図-4 順解析結果

て認められる。移動境界  $S_t$  の挙動と水位変化を念頭に置いて中図を見れば、急激な涵養によって水位が降下傾向から上昇傾向に転じた際に、流出量は一旦減少することが21日目と43日目より見て取れる。このことは、上昇傾向に変わった直後の  $S_t$  周辺域の地下水面勾配だけは下流移動時に比べて緩やかになり、その周辺域よりも下流に位置する領域への流動が停滞して、上記の流出量減少が起きたものと思われる。本解析では  $S_t$  を扱うモデルの適用性を計るため、一気に大きな涵養を与え、 $S_t$  の急激な上流移動を生じさせている。C点では24日目、B点では46日目にあたる  $S_t$  の急上昇通過の際、下図から、背水域からの涵養水の流入によって、 $S_t$  周辺域は水位が急上昇したものの、その下流域の水位はあまり急激に上昇なかったと分かる。概して、貯留域全体の水面勾配は全般に穏やかなため流速は小さなものであり、 $S_t$  周辺域でも低流速であることは当てはまる。故に、急上昇時に  $S_t$  周辺域で地下水が一時的に停滞されてしまうと思われる。停滞された地下水は  $S_t$  の下流域へ流れることで、下流域の水位と水面勾配が大きくなり、3日間程で  $V_F^2$  の水面勾配は滑らかな分布になると推測される。このことは、下図24~26日目・46~49日目において確認できる。F点に最も近いE点の水位が上昇に変化しているにも関わらず、中図より同期間中のF点ではほとんど同じ流出量であることが見受けられ、このことから上記推測が正しいと考え得る。その後の  $S_t$  の急激な上昇移動は、 $V_F^2$  全域での水面勾配が比較的急になっているため、上記のような地下水停滞状態は起きずに滑らかに動く。このことは、27~29日目・49~55日目の下図・中図から確認できる。

以上から、 $S_t$  に与える移動境界条件の精度もしくは

$S_t$  の移動間隔の狭さ (有限要素網の細かさ) が十分であれば、本修正モデルによる解析は信用できるものと思われる。よって数値解析により、適切な移動条件下では移動境界の平面挙動を表せることが期待される。

#### 4. 逆問題解析への応用

##### (1) 逆解析手法

本節では、境界の移動を伴う地下水挙動の観測による透水係数の同定、非定常な水位の推定および水位境界上での流量推定に関する結果の精度について検討することを目的とする。本文の逆解析手法として、観測更新する拡張 Kalman フィルタ有限要素法を用いる。図-5は、そのアルゴリズムを示す。

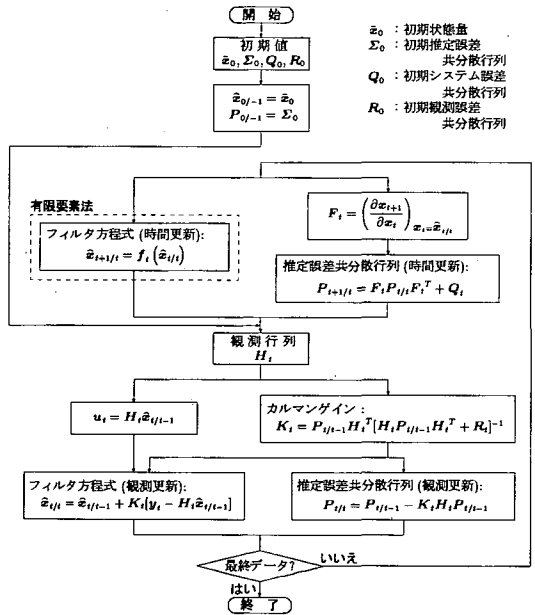


図-5 拡張 Kalman フィルタ有限要素法

まず、定常な透水係数ベクトル  $k_t$  を同定する際の計算精度向上を目的として、その常用対数  $L_t$  をとる<sup>13)</sup>。

$$L_t = \log_{10} k_t \quad (43)$$

$$L_{t+1} = L_t \quad (44)$$

状態量  $x_t$  を

$$x_t = \begin{Bmatrix} \tilde{h}_t^{F,1} \\ \tilde{h}_t^{E,1} \\ \omega_t^{F,1} \\ L_t \end{Bmatrix} \quad (45)$$

とおく。状態方程式は、式(38)~(40)および(44)となる。これらの方程式をもとにして、以下のような時間

更新のフィルタ方程式を得る.

$$\hat{h}_{t+1/t}^{F,1} = (A_{11}^F)^{-1} \left[ B_{11}^F \hat{h}_{t/t}^{F,1} + B_{12}^F \hat{h}_{t/t}^{F,2} - A_{12}^F \hat{h}_{t+1/t}^{F,2} + \omega_{t+\theta}^{F,1} + \zeta_{t+\theta}^{F,1} \right] \quad (46)$$

$$\hat{h}_{t+1/t}^{E,1} = \hat{h}_{t/t}^{E,1} \quad (47)$$

$$\hat{\omega}_{t+1/t}^{F,2} = \frac{1}{\theta} \left[ A_{21}^F \hat{h}_{t+1/t}^{F,1} + A_{22}^F \hat{h}_{t+1/t}^{F,2} - B_{21}^F \hat{h}_{t/t}^{F,1} - B_{22}^F \hat{h}_{t/t}^{F,2} - (1-\theta) \hat{\omega}_{t/t}^{F,2} \right] \quad (48)$$

$$\hat{L}_{t+1/t} = \hat{L}_{t/t} \quad (49)$$

観測方程式, 観測更新フィルタ方程式, 観測行列および状態遷移行列は, 参考文献 9) に準じて算出しているが, 同文献中の  $q$  を  $\omega$  に置換して参照されたい. また非定常逆問題解析では, 時系列観測データに基づいて同定・推定する状態量を更新する. それ故, 観測参照データの累積から得られた結果が同解析の最適解となる. こうした逆解析解の見識から, 当逆解析の諸結果は計算終了時をもって評価される.

## (2) 同定・推定結果

実地盤の逆解析では実際の観測値を用いるのに対し, 仮想地盤の逆解析では, 順解析による地下水挙動の一部を模擬的に観測値として用いた. なお, 水位量・流出量推定誤差共分散の初期値は事前分布の平均値を与え, 透水係数の初期値は 200(m/day) とした. また観測は, 3.(5) 節図-4 の水位図における擬似地下水位と同様に, 節点 A~E の計 5 点における  $\hat{h}$  を, 定義式 (7) に従う観測値として計測するものとした. 当論文は 3.(5) 節で記述したように「地下水が無い」という状態を観測値として捉える工夫を凝らしている. 本節では, 移動境界問題に対して先述の観測値を活用した新たな逆解析手法を試みる. 与条件下で, 後述の 3 例から本モデル逆問題への適用性を検討する.

解析結果を考察するにあたり, 計算結果を表す図の構成を述べる. 上から順に, 模擬降雨・涵養量, 透水係数の同定値, 水位境界上の F 地点における流出量, 観測点 A~E における水位変化をそれぞれ表しており, 以降ではそれぞれ涵養図, 同定図, 流量図, 水位図と呼ぶ. 涵養図において, 棒グラフは設定降雨量, 破線はそれに伴う地下水への涵養量  $\epsilon$  を描いている. 同定図においては, 破線が真の設定値, 実線が同定結果を示している. 流量図では記号が真の設定値, 実線が推定結果を与えている. なお, 以降の解析例では, 透水係数の初期値が大きいことから, 全例で推定流量が大きく出ている. 最後の水位図では, 各地点におけるの記号が観測値, 実線が推定結果となっている.

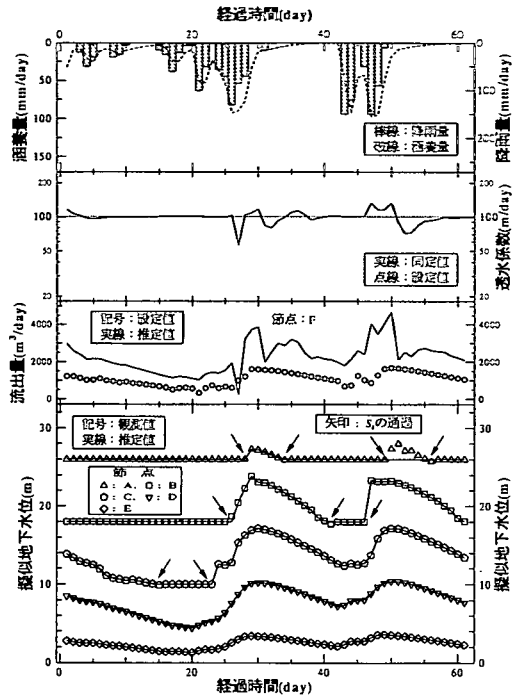


図-6 逆解析結果 (ケース 1)

### a) 逆解析例 1

先の順解析例と同一の等方均質地盤および涵養を用いて,  $S_2$  が二度大きな昇降を生じた場合の逆解析について検討した.

図-6 は逆解析結果を示している. 水位図から, 観測点における  $\hat{h}$  の推定は, Kalman フィルタにおける推定誤差分散値を検討したところ, A 地点での 50~55 日間と B 地点での 26 日目を除き, 十分な精度で行えている. よって, 移動境界  $S_2$  の挙動も十分推定できたといえる.

透水係数の同定結果は, 同定図を通して以下のことが見てとれる. 同定値は 26 日目までに一度は真値に収束するものの, 27~39 日においては急激な水位上昇すなわち  $S_2$  の上流側への移動により, 比較的激しく同定値が変化した. 以降 46 日目に至るまで再び収束に向うものの, 47 日目から再度  $S_2$  が上流側へ移動するために, 同定値が再度大きく更新され, 最終日までに 3 たび収束したのである. 平たく言って, この同定値の乱れは逆解析に有りがちな事前情報の非適切性によって引き起こされている. この問題は, 事前情報, 特にプロセスノイズ (モデル誤差共分散値) を操作することで解決できる. なお本稿の全逆解析では,  $S_2$  が逆解析に及ぼす影響を検討しやすくするために, プロセスノイズを操作して, 作意的に観測したばかりの水位情報の重みを大きくしている. 左記に留意して全解析例を考察いただきたい. 全例とも同定値が乱れている原因は, 移動境界を伴う本解析モデルの非適切さではなく, あくま



で事前情報の問題にあることを、予めここに強調して記す次第である。

順解析例設定の特徴をふまえ、いま、 $S_L$ の移動が同定に及ぼす影響について考察する。 $S_L$ が離散的に移動しない際には、 $S_L$ の下流域では空間固定境界の逆解析と同じ扱いとなり、同定値は真値へ収束していく。一方、 $S_L$ が離散的に上昇移動し、かつ、新たに貯水域となった部分領域に観測点が含まれていた際、水位図と同定図から、影響を及ぼさない場合と及ぼす場合の2通りあるとわかる。前者は、この観測点からのデータがもたらす流動履歴情報が豊富な状態での更新状況であり、後者は逆にそういった情報が極めて乏しく非適切な状態での更新状況である。ここに、流動履歴情報とは、過去の $V_L^*$ に取り込まれた際に得られた地下水観測値から時系列的に更新作成された事前情報（更新直前の同定・推定値およびその推定誤差共分散値）のうち、地下水位に関する部分のことを指す。この後者において、観測水位が定常値から急上昇を示したとき、予測推定水位に対する観測更新が十分に追従できず、推定水位が全体的に低くなり、本アルゴリズムが次時刻での観測更新時に、透水係数を小さくして水位上昇を促そうとしたものと思われる。この同定挙動がB地点の観測で26～28日目に現れている。この時刻後の同定挙動は、一旦乱れた推定水位や透水係数の時間・観測両更新による収束過程と考えられる。また二度目の水位急上昇の観測時には、A, B地点周辺域の推定水位が、過大推定の履歴を残していたことから、予測時に真値より過大に推定され、観測更新では十分な水位低下を招けず、結果的に透水係数を大きくとったと推察される。したがって、49～56日目にA地点で水位上昇による貯水が観測されても、 $S_L$ の下流域の水位を低下させるべく、透水係数を大きく更新したものと思われる。51日目以降では、再び予測・観測更新によって同定・推定値を収束させていると思われる。

#### b) 逆解析例2

例1では $S_L$ の大きな昇降現象を二度に渡って取り扱った。その際、 $S_L$ の移動距離が上昇時は十分であったのに対し、下降時は十分とはいえないものであった。そこで、例1と同一な地盤のもとで、 $S_L$ が大きな上昇後、すぐに大きな下降(最下流付近まで下降)を生じた場合の逆解析について検討した。本涵養には、前半1カ月分(1～31日目)は例1と同一の涵養を、後半は乏しい涵養を採用することで、所望の $S_L$ の挙動を準備し得た。

図-7に逆解析結果を与える。水位図から、各地点の推定値は、例1と同様全ての解析時期で精度良く推定がなされていることがうかがえる。同定図から、透水係数の同定は、解析期間前半は例1と同様の結果であるが、後半は、39日まで流量推定と同様の挙動を示した

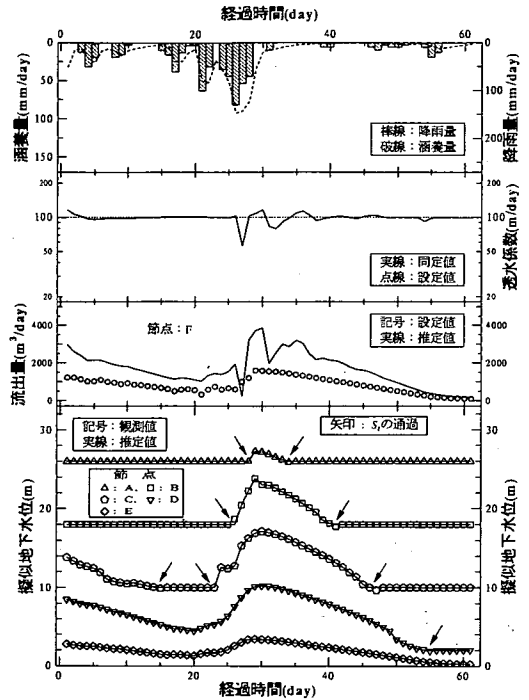


図-7 逆解析結果 (ケース2)

後、かなりの高精度で収束している。このことから、 $S_L$ の下降挙動が生じて、水位推定に関しても流動履歴情報の豊富な条件下で更新するため、透水係数の同定条件も良好であったと思われる。

#### c) 逆解析例3

いままでの考察は均質地盤に対して行われた。本例は、非均質地盤への適用性を考察するため、図-3において、全体の平均が100(m/day)であるような $k_1 = 70$ (m/day),  $k_2 = 120$ (m/day)の透水係数分布を有した等方地盤を用いる。観測点はA, Bの2地点が上流域に、C, D, Eの3地点が下流域に含まれている。涵養量の設定は、例2と同一のものを用いて、 $S_L$ が急上昇をした後に大きく下降していく場合の逆解析について検討した。

結果を図-8に示す。2つの透水係数の分布境界は、B地点とC地点の間に位置している。水位図を見て、C地点では25～27日目において水位推定値が真値からはずれているが、これは、例1のB地点26日目と同様の現象であり、この説明は省略する。他の水位推定値は真値にほぼ一致していることがわかる。次に同定結果を考える。いま上流域、下流域の透水係数の同定値をそれぞれ $k_1, k_2$ とおく。先の例と同様に、いずれの領域の同定値も、解析期間の途中で同定結果が大きな観測更新を受けていることがわかる。その大幅な更新時期では、興味深いことに均質地盤の場合と非均質地盤の場合との同定特性の比較によって、逆解析システムが上・下流域のいずれで流量を不足または過剰と推定し

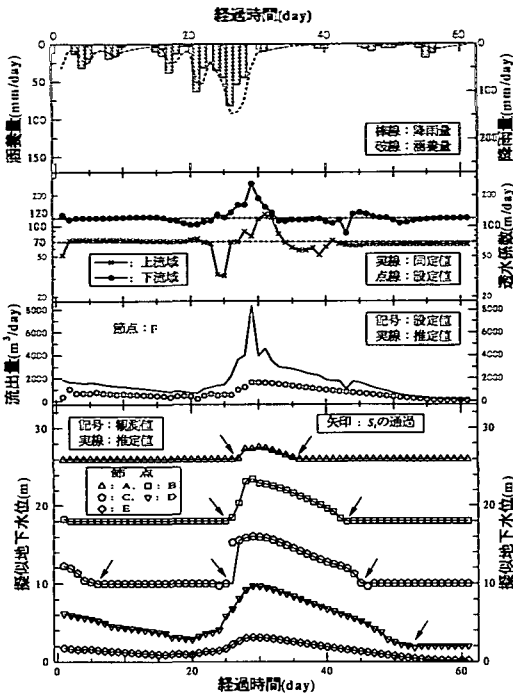


図-8 逆解析結果 (ケース3)

て透水係数を更新したかを知ることができる。 $S_t$ の急上昇過程には、まず、上流域の $k_1$ のみが例1に詳述した理由から小さな値に更新され、それによって貯水量の過剰分を観測量に合わせて下流域、上流域の順に透水係数を大きくし収束しようとしていることがわかる。その後の $S_t$ の穏やかな下降移動に合わせて、 $k_1$ のみが小さな値に更新されて、最終的に両同定とも収束に向かった。ただし、43日以降は上流域の2観測点の水深が0の状態(「貯留無し」というデータ)を観測していた結果、観測更新の同定システムで用いる透水観測情報不足が起り、更新が停止して収束しまったと思われる。それ故、真値に対して、 $k_2$ は約0.22%の誤差で収束しているにもかかわらず、 $k_1$ は約5.5%の誤差で収束している。この問題は今後の課題ではあるが、上流域にも水位情報履歴が蓄積されていくに従い、観測情報不足に陥ったときの流域同定値は、真値に収束していくものと期待される。

## 5. 限界基準による揚水計画

### (1) 揚水限界基準

本節では、前節のようなパラメータ同定結果の活用として、揚水運営について考える。広域地下水盆を対象として、計画的に需要揚水量を得ることは重要なことである。揚水計画を立てるに際し、まず揚水井配置や各井戸の揚水量を決める必要があるが、これらを同

時に定めることは難しい問題である。本節では、揚水井配置が定まっている場合の、各揚水井の汲み上げ量に論点をおく。筆者らは以前に、地下水位変動量を評価して揚水量を決定する方法を提案した<sup>9)</sup>。当論文では着眼点を変え、一部の井戸からの過剰揚水が原因となる諸問題の防止を考えた揚水量決定法を述べる。

先述の揚水諸問題は、揚水基準を適切に設けることによって回避し得る。すなわち、各井戸で限界基準に達していない状態ならば揚水を行うが、基準に達した時点で作業を停止できる揚水法を考案すればよい。こういった基準には観測可能な地下水位を選ぶのが適当である。以降では、基準となる水位を「揚水限界水位」と呼び、 $\ell$ で表すものとする。この $\ell$ の設定は、塩水浸入や地盤沈下などの諸問題の防止のために行う様々な解析を通じて決めるべき1つの課題である。本節では $\ell$ が得られたものとし、一例として0-拡張理論を利用した式(50)であるとする。

$$\ell = b + (c - b) \cdot u\{c - b\} \quad (50)$$

ここに、 $c$ は貯水域での揚水限界水位を示す空間関数である。上記の解析から得られるような、水面から取水可能な位置までの水深を、揚水限界水深 $d_0$ とおき、式(51)で示す。

$$d_0 = (\bar{h} - \ell) \cdot u\{\bar{h} - \ell\} \quad (51)$$

$$= \begin{cases} (\bar{h} - c) \cdot u\{\bar{h} - c\} & (c \geq b) \\ \bar{h} - b & (c < b) \end{cases} \quad (52)$$

ここに、恒等的に $\bar{h} \geq b$ であることを用いた。

### (2) 揚水量決定

本節では、対象の揚水井はそれぞれ他の井戸の影響圏外にあるという条件下で、揚水に余裕のある井戸を中心として需要揚水量 $R_t$ を汲み出せるような各井戸揚水量の算定方法を定める。

まず、軸対称条件下での揚水井水位低下量 $s$ を与えるTheis式(53)を、揚水量 $q$ について整理する。無次元変数 $u = \lambda r^2 / 4k d_0 \Delta t$ が非常に小さい場合、近似式(54)を得る。

$$q = \frac{4\pi s k d_0}{W(u)} \quad (53)$$

$$\approx \frac{4\pi s k d_0}{\ln \frac{2.25 k d_0 \Delta t}{\lambda r^2}} \quad (54)$$

ここに、 $\Delta t$ :揚水時間、 $s$ :水位低下量、 $r$ :井戸半径、 $W(u)$ :井戸関数を表す。さらに、 $\Delta t, r, \lambda, k$ を所与の値とすれば、 $C_0 = \ln(2.25 \Delta t / \lambda r^2)$ を定数として、以下の比例式(55)を得る。

$$q \propto \frac{k d_0}{\ln(k d_0) + C_0}$$

$$= z \frac{\frac{kd_0}{\ln(kd_0)}}{1 + \frac{C_0}{\ln(kd_0)}} = \varphi \quad (55)$$

$C_0$ の真数部分が1に近づく $\Delta t$ を設定した場合、 $\left| \frac{C_0}{\ln(kd_0)} \right| \ll 1$ が言え、

$$\varphi \approx z \frac{kd_0}{\ln(kd_0)} \left\{ 1 - C_0 \frac{kd_0}{\ln(kd_0)} \right\} \quad (56)$$

となる。ここで、式(56)の第二項は $C_0$ が極めて微小であれば無視でき、最終的な近似比例式(57)は、以下の式(57)になる。

$$q \propto z \frac{kd_0}{\ln(kd_0)} \quad (57)$$

いま、揚水量決定に際し、5.(1)節の揚水限界水深 $d_0$ に注目する。限界基準にまで至る揚水量 $q$ を汲み出す際の水位低下量 $z$ は $d_0$ に等しくなる。このとき、式(57)から式(58)の様な比例関係が言える。

$$q \propto d_0 \frac{kd_0}{\ln(kd_0)} \quad (58)$$

以降、第 $i$ 揚水井に関する文字数は、添字に $i$ を付記する。第 $i$ 揚水井における式(58)右辺を式(59)のように $a_i$ と表記した場合の、揚水量 $q_i$ は式(60)で決定する。つまり、水深および限界水深を評価した重みを用いて揚水することを目的とした。

$$a_i = \frac{d_i^2}{d_0^2} \frac{kd_i^2}{\ln(kd_i^2)} \quad (59)$$

$$q_i = \frac{a_i}{A} \cdot R_t \quad \left( A = \sum_i^n a_i \right) \quad (60)$$

ここに、 $n$ ：揚水井総数である。これによって、取水に適した井戸から揚水することができ、数々の揚水諸問題を防止し得る。次節では、パラメータ同定後の本提案揚水手法について数値実験で検討する。余談ながら、本提案手法は、実問題を意識して考案されたため、数値解析なしで実問題へと容易に適用し得る揚水手法である。これは、限界水深と井戸地点の透水量係数さえ計測すれば、直ちに各 $a_i$ が算出できるという事柄に基づいて言えることである。

### (3) 揚水解析例

$R_t = 172.8 \times 5 = 864(\text{m}^3/\text{day})$ とにおいて移動境界FEM解析を行った。解析時は、本手法の効果を調べるため、できるだけ水位変化に富んだ状況を設定する意味で、前節の逆解析例1と同一の涵養および地盤を再び用いた。また、A~E各地点で水位観測を行い、各点は同時に揚水井も兼ねているものとし、式(50)の $c$ は一定値0を与えた。

図-9は、本提案法に基づき、各井戸の揚水量を調整した解析と、揚水の無い(自然流動)解析の結果に対して、両者の水位比較および前者の揚水量変動を示した

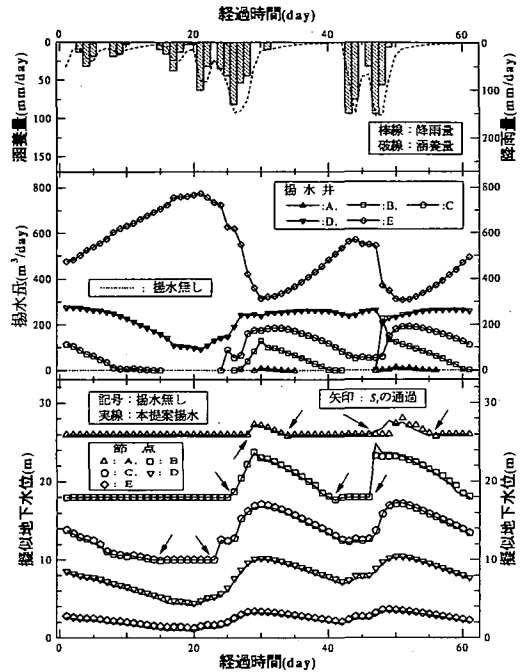


図-9 水位変動と揚水量 (比較1)

ものである。各観測点A~Eでの水位変化図において、記号は自然流動時の水位変化を、実線は本揚水手法を施したときの水位変化を表す。図-9から、微量に水位が低下しているものの、ほぼ一致していることが認められる。47~50日目において、A, B地点で両者の流況が少々異なるが、この現象は、提案した揚水の施行により、動水勾配がなだらかであった上流域に急激な涵養供給があったため、急に下流へ流れず貯水され、自然時よりも早期に $S_2$ が上流へ移動したと推測できる。よって、局所的な過剰揚水を引き起こし易い領域であっても、本手法で揚水すれば、自然状態に近いか、むしろ、穏やかな動水勾配となるため、環境面でも有効性が高いと思われる。揚水量図は、各井戸での揚水量変化を描いている。これより、貯留水の無い地点では揚水が止まり、その分を、揚水に余裕のある他の井戸で補っていることが見てとれる。

図-10は、限界水位を下回らないように、各井戸から一定揚水量である揚水解析と揚水しない解析の両結果に対して、水位比較および一定揚水と本提案揚水とでの総揚水量を表している。水位図では、記号が揚水しない場合の、実線が一定揚水の場合の結果である。図-10から、水位は、一定揚水時の方が、特に上流側で、自然な状態よりも貯水量不足に陥っており、それ故、水位変化しやすくなっていることがわかる。水位に関する結果が総揚水量にも反映している。総揚水量図では、点線が本手法の揚水による結果を、棒グラフが一定揚水による結果を与えている。一定揚水の場合、しばし

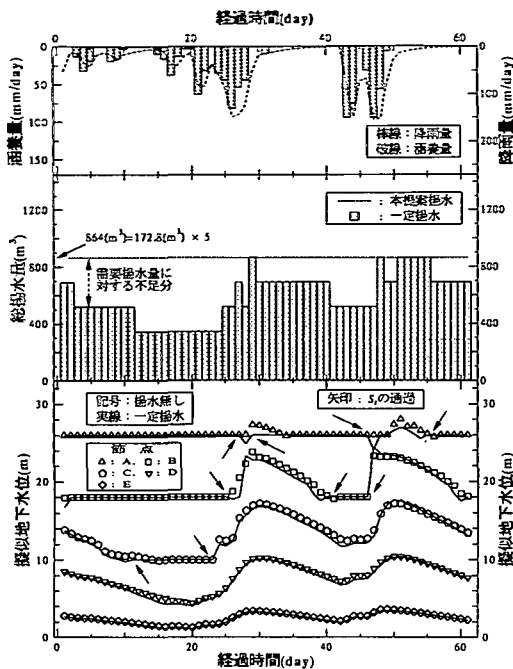


図-10 水位変動と揚水総量(比較2)

ば限界水位以下となるA, B, C地点の揚水井からは取水できないため、 $R_t$ を満足し得ない。一方、本手法揚水の場合、常時 $R_t$ を確保している。総じれば、この手法による揚水運営は、解析期間の至る時期における $R_t$ の常時確保および過剰揚水や偏揚水による諸問題の抑制に関して有用性に富むといえる。

## 6. 結論

本論文では、水深を表す変数の0-拡張により得られた擬似地下水位を導入することで従来のモデルを修正し、移動境界を含む解析領域の有限要素方程式を表すことに成功した。また、 $S_t$ の離散的な上昇・下降両移動条件に一例をおき、仮想地盤における数値実験から境界移動を確認した。結果から、 $S_t$ 移動の解析システムは十分に機能していることが分かった。

本モデルを逆解析へ応用する場合、従来と何等変わることはないアルゴリズムで同定した。同定精度の検討に3例を用いたが、いずれも同定値は収束した。移動境界の挙動に関わらず、従来と同様に可同定性が保たれることがわかった。

本論文では、移動境界解析を用いながら需要揚水量を確保できるように調整した揚水量を算出し、その効果を確認した。本揚水量決定法を用い、更に予め取水しやすい位置に大きな揚水設備を置けば、一層効率的な揚水運営を目指せるものと思われる。

今後、(1) 移動境界の離散的な上昇移動条件を、鉛直断

面または3次元での解析により検討し、その精度を上げる必要がある、(2) 背水域処理における遅延比係数 $\gamma_r$ を実験などから定める必要がある、(3) 非均質地盤は2領域のみからなる分布で計算を行ったが、多領域の分布でも観測値と分布を増やすことで同定可能であることを確認しなければならない、(4) 限界水位 $\ell$ の最適な設定基準を検討すべきである、という課題を検討していきたい。

## 参考文献

- 1) 長谷川高士：地下ダム、技術手帳、土と基礎、第41巻、第3号、pp.67-68、1994。
- 2) 岡 太郎：移動境界を考慮した有限要素法による地下水平面解析、応用水文、第4巻、pp.17-21、1992。
- 3) 浜口俊雄、長谷川高士、村上 章：境界移動を伴う地下水流動モデルの逆解析手法、第44回応用力学連合講演会講演予稿集、pp.287-288、1995。
- 4) 河原田秀夫：自由境界問題 理論と数値解法、東京大学出版会、1989。
- 5) 齋藤武雄：移動境界伝熱学、養賢堂、1994。
- 6) 山口昌哉、野木達夫：ステファン問題、産業図書、1977。
- 7) 村上 章、長谷川高士：Kalman フィルター-有限要素法による逆解析と観測節点配置、土木学会論文集、No.388/III-8、pp.227-235、1987。
- 8) Murakami, A. and Hasegawa, T.: Application of Kalman filtering to inverse problems, *Theoretical & Applied Mechanics* 42, pp.3-14, 1991。
- 9) 長谷川高士、村上 章、浜口俊雄：拡張 Kalman フィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定、土木学会論文集、No.505/III-29、1994。
- 10) 藤縄克之：地下水涵養源としての農業用水の役割、農業土木試験場報告、Vol.21、pp.127-141、1981。
- 11) 高橋宣明、松浦武信、吉田正廣、篠塚寿夫：現代工学のための超関数入門、現代工学社、1993。
- 12) 奥野哲夫、鈴木 誠：不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水系数の空間分布推定法、土木学会論文集、No.469/III-23、pp.93-102、1993。
- 13) Freeze, A.R.: A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, *Water Resour. Res.*, Vol.11, No.5, pp.725-741, 1975。
- 14) Neuman, S.P. and Witherspoon, P.A.: Analysis of nonsteady flow with a free surface using the finite element method, *Water Resour. Res.*, Vol.7, No.3, pp.611-623, 1971。
- 15) 土質工学会編：地下水入門、土質工学会、1983。

(1996. 2. 5 受付)

# GROUNDWATER MODEL IN CONSIDERATION OF MOVING BOUNDARIES IN A TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS AND ITS APPLICATION TO AN INVERSE ANALYSIS

Toshio HAMAGUCHI, Akira MURAKAMI and Takashi HASEGAWA

This paper describes the performance of a proposed two-dimensional groundwater model with moving boundaries by employing the zero-extension theory. Charged fronts under unsteady conditions are recognized as moving boundaries. There are three principal parts to the proposed method. The first and second parts consist of directly and inversely analyzing the presented model in a hypothetical basin, respectively. After solving the inverse problem, the third and last part contains a description of the procedure adopted to determine pumping rates with a constraint for pumping demands. Numerical results of direct and inverse problems for the proposed model support the validity of the proposed method in this paper.