

浅海域における2次非線形長周期波の 方向スペクトル

木村 晃¹・田中耕作²

¹正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム工学科 (〒 680 鳥取市湖山町南 4-101)

²正会員 工修 鹿島道路 (〒 102 東京都千代田区麹町 5-3-1)

浅海域における2次非線形長周期波は湾水振動、浮体の長周期動揺あるいは多段沿岸砂州の原因として最近注目を集めている。すでに木村(1984)によりこの波の平均スペクトルを与える式が与えられているがこの式はかなり煩雑な計算を要する。そこで本研究では、不規則波の方向スペクトルとして通常良く用いられる Bretschneider-光易型、方向分布関数としては合田ら(1975)のモデルを用いて幅広い計算を行い、それに対して簡単な表示による近似を行って、浅海域での2次の方向スペクトルが容易に計算出来るようにしたものである。

Key Words : Irregular waves, nonlinear interaction, long wave, directional spectrum, wave length

1. はじめに

不規則波に含まれる成分波相互の干渉により、2つの成分波の周波数差と和の2次干渉波が発生することを最初に示したのは Tick(1959) である。Longuet-Higginsら(1964)は surf beat に関する研究において、radiation stress が長周期の水位変動をおこすこと、この水位変動が2次干渉波のうち周波数差の波と同じものであることなどを示した。これ以後浅海域でのいくつかの現象とこの波の関連性が研究されている。例えば edge 波に関しては Gallager(1971)、Huntleyら(1981)、浮体の長周期動揺に関しては Bowers(1975)らの研究が行われ、この波の重要性が広く認識されるようになってきている。この2次干渉波の存在は不規則波のワースペクトルを計算することで簡単に確認することが出来る。すなわち、スペクトルはほぼ例外なく平均周期を中心とする大きなエネルギーのピークと、このピークの低周波数側にもう一つ小さなピークが存在する。これが2次干渉波のうち、周波数差の成分波のエネルギーが現れている部分である。一方、周波数差の2次成分波のスペクトルは1次成分波の高周波成分のものと重なるため、そのスペクトルだけを見ることは難しい。

uni-directional な不規則波の2次干渉波のスペクトルの計算法は浜田(1964)によって示された。さらに1次成分波が方向分散性をもつ場合、すなわち方向スペクトルが与えられた場合の2次干渉波、特に長周期波の方向スペクトルの計算法は Sharmaら(1979)ならびに Sand(1982)らによって発表された。しかし、後に示すように2次干渉波の振幅は1次成分波の相互の位相差に依存するため、彼らの与えたスペクトルには1次

成分波の位相の項がそのまま残されている。したがって彼らの結果を用いて2次波のスペクトルを計算するためには、1次波の成分波の振幅、方向分布関数のほかに1次波の位相角に関する情報が必須となる。成分波の位相はランダムで成分波ごとに独立に変化して標準的な位相角は存在しない。したがって彼らの理論では2次波のスペクトル形を確定することが出来ない。木村(1984, 1985)は2次長周期波の平均スペクトルを与える畳み込み積分式を与え、一般的な論議での利用を可能にした。しかし、後に示すようにこの積分式はかなり煩雑な計算を要して簡単には利用しにくい形をしている。関本ら(1995)はすでに1次成分波を長波と仮定した場合についてこの式を簡単に計算するための近似式を与えているが、本研究では入射波のスペクトルとして Bretschneider-光易スペクトルを用いて幅広い条件での計算を行い、長波領域からそれより幾分深い領域までの間の2次長周期波の平均方向スペクトルの定式化を試みた。

2. 2次非線形長周期波の方向スペクトル

ここではまず、木村(1985)による2次非線形長周期波の方向スペクトル理論を簡単に説明する。

1次成分波の方向スペクトルは一般に次のように与えられる。

$$E^{(1)}(f, \theta) = S^{(1)}(f)G^{(1)}(\theta | f) \quad (1)$$

ここに $E^{(1)}$ 、 $S^{(1)}$ および $G^{(1)}$ はそれぞれ1次成分波の方向スペクトル、周波数スペクトルならびに方向分布関数である。また f は周波数、 θ は進行角である。1次

成分波の水面変動は式(1)を用いると次式のように示される。

$$\eta^{(1)}(x, t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} \cos(\Psi_{i_1 i_2}) \quad (2)$$

ここに a_{i_1} , a_{i_2} および $\Psi_{i_1 i_2}$ はそれぞれ

$$a_{i_1} = \sqrt{2S^{(1)}(f_{i_1})} df \quad (3)$$

$$a_{i_2} = \sqrt{G^{(1)}(\theta_{i_2} | f_{i_2})} d\theta \quad (4)$$

および

$$\Psi_{i_1 i_2} = \mathbf{K}_{i_1 i_2} \mathbf{X} - 2\pi f_{i_1} t + \varepsilon_{i_1 i_2} \quad (5)$$

で与えられる。 \mathbf{K} は波数ベクトル, \mathbf{X} は位置を与えるベクトル, ε は初期位相角を表し, 添え字 i_1, i_2 はそれが周波数が f_{i_1} , 進行角が θ_{i_2} の波のものであることを意味する。また周波数が f_{i_1} の波の波数の大きさ (絶対値) は k_{i_1} であらわす。

1次成分波の波形が式(2)のように与えられると, 2次長周期波の波形は次式のように与えられる。

$$\eta_L^{(2)} = \frac{1}{8} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} a_{j_1} a_{j_2} \times \alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2} \cos(\Psi_{i_1 i_2} - \Psi_{j_1 j_2}) \quad (6)$$

ここに

$$\alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \frac{D_{i_1 i_2 j_1 j_2}^- - k_{i_1} k_{j_1} \cos(\theta_{i_2} - \theta_{j_2}) - R_{i_1} R_{j_1}}{2\sqrt{R_{i_1} R_{j_1}}} + R_{i_1} + R_{j_1} \quad (7)$$

$$D_{i_1 i_2 j_1 j_2}^- = \left[(\sqrt{R_{i_1}} - \sqrt{R_{j_1}}) \{ \sqrt{R_{j_1}} (k_{i_1}^2 - R_{i_1}^2) - \sqrt{R_{i_1}} (k_{j_1}^2 - R_{j_1}^2) \} + 2(\sqrt{R_{i_1}} - \sqrt{R_{j_1}})^2 \right] \times \{ k_{i_1} k_{j_1} \cos(\theta_{i_2} - \theta_{j_2}) + R_{i_1} R_{j_1} \} \left/ \left((\sqrt{R_{i_1}} - \sqrt{R_{j_1}})^2 - k_{i_1}^- k_{i_2 j_1 j_2}^- \tanh(k_{i_1}^- k_{i_2 j_1 j_2}^-) \right) \right. \quad (8)$$

および

$$k_{i_1 i_2 j_1 j_2}^- = \sqrt{k_{i_1}^2 + k_{j_1}^2 - 2k_{i_1} k_{j_1} \cos(\theta_{i_2} - \theta_{j_2})} \quad (9)$$

$$R_{i_1} = k_{i_1} \tanh(k_{i_1} h) = (2\pi f_{i_1})^2 / g \quad (10)$$

i_1 と j_1 は1次成分波の周波数, i_2 と j_2 は1次成分波の進行角に対する添え字であり, $i_1 i_2 j_1 j_2$ の添え字を持つ変数は周波数が f_{i_1} と f_{j_2} でそれぞれの進行角が θ_{i_2} と θ_{j_2} の波の干渉により発生した2次長周期波のものであることを意味する。

1次成分波相互の干渉によって発生する2次波にはこれ以外に1次成分波相互の周波数 and の波があるが, この研究では長周期の波を対象としているので, 周波数

差の波だけを取り扱う。したがって式(6)では周波数 and の2次波の項は省略してある。

式(6)を用いると2次長周期波の方向スペクトルが次式のように与えられる。

$$R^{(2)}(f^*, \theta^*) df^* d\theta^* = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} a_{j_1} a_{j_2} \alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2} \times (\cos \varepsilon_{i_1 i_2} \cos \varepsilon_{j_1 j_2} + \sin \varepsilon_{i_1 i_2} \sin \varepsilon_{j_1 j_2}) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} a_{j_1} a_{j_2} \alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2} \times (\sin \varepsilon_{i_1 i_2} \cos \varepsilon_{j_1 j_2} - \cos \varepsilon_{i_1 i_2} \sin \varepsilon_{j_1 j_2}) \right\}^2 \quad (11)$$

ここに f^* , θ^* はそれぞれ2次長周期成分波の周波数と進行角である。式(11)よりわかるように2次の長周期波の方向スペクトルには1次成分波の初期位相角 ε が含まれている。したがって式(11)の $R^{(2)}$ を確定するためにはこれらの値を与える必要があるが, 通常のパワースペクトル計算法では計算の過程で位相角の情報が失われてしまうので計算できない。ところが1次成分波の初期位相角の情報を必要とすることは少ないので, Kimura(1984) は式(11)の位相角を平均した2次長周期波の方向スペクトルの期待値の計算式を次のように与えた。

$$E^{(2)}(f^*, \theta^*) = \frac{1}{4} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1}^2 a_{i_2}^2 a_{j_1}^2 a_{j_2}^2 \alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2}^2 \quad (12)$$

式(11), (12)では i_1 と i_2 に関する和だけが取られているが, これらの添え字を持つ1次成分波は, 次式の周波数 f_{j_1} および進行角 θ_{j_2} を持つ1次成分波と干渉して周波数 f^* , 進行角 θ^* の2次波を発生する。

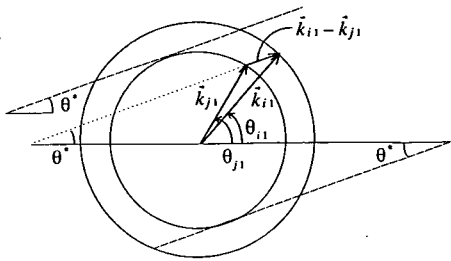
$$f_{j_1} = f_{i_1} - f^* \quad (f_{i_1} > f_{j_1} > 0) \quad (13)$$

$$\theta_{j_2} = \theta^* - \sin^{-1} \{ (k_{i_1} / k_{j_1}) \sin(\theta^* - \theta_{i_2}) \} \quad (14)$$

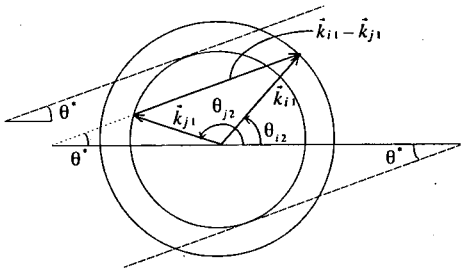
あるいは

$$\theta_{j_2} = \theta^* + \sin^{-1} \{ (k_{i_1} / k_{j_1}) \sin(\theta^* - \theta_{i_2}) \} \quad (15)$$

進行角が式(14)で与えられる波と干渉した場合, 波数の小さい2次長周期波, 式(15)の波と干渉した場合波数の大きな2次長周期波を生じる(木村, 1985)。図-1は波数の大きさが k_{i_1} と k_{j_1} , それぞれの進行角が θ_{i_2} と θ_{j_2} の2つの1次成分波の波数ベクトルと進行角およびそれらの干渉によって生じる2次波の波数ベクトルの関係の1例を示したもので, 図中の円の半径は外側が k_{i_1} , 内側が k_{j_1} である。図に示したように k_{i_1} の先端が上下の破線ではさまれた範囲内の外側の円弧上に存在する場合, この先端の点を通り破線と平行な線(点線)と内側の円弧との交点に先端のくる波数 k_{j_1} の波と干渉して f^* , θ^* の2次長周期波を生じる。2本の破線の間



(a) 波数が小さい場合



(b) 波数が大きい場合

図-1 1次波と2次波の波数ベクトルの関係

でこれに平行な線は無数に引けるので波数が k_{i_1} , k_{j_1} の組み合わせだけでも進行角が θ^* となる2次波は無数に存在する。式(11), (12)の i_1 および i_2 に関する和は i_1 に関しては f_{i_1} が

$$f_{i_1} > f^* \quad (16)$$

i_2 に関しては θ_{i_2} が

$$\theta^* - \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \leq \theta_{i_2} \leq \theta^* + \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \quad (17)$$

および

$$\begin{aligned} \theta^* + \pi - \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \\ \leq \theta_{i_2} \leq \theta^* + \pi + \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \end{aligned} \quad (18)$$

の範囲にあるものに限る。さらに

$$\alpha(f_{i_1}, f_{j_1}, \theta_{i_2}, \theta_{j_2}) = \alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2} \quad (19)$$

のように表示すると式(12)は

$$\begin{aligned} E^{(2)}(f^*, \theta^*) = \\ \frac{1}{4} \int_{f_{i_1}} \int_{\theta_{i_2}} E^{(1)}(f_{i_1}, \theta_{i_2}) E^{(1)}(f_{j_1}, \theta_{j_2}) \\ \times \alpha^2(f_{i_1}, f_{j_1}, \theta_{i_2}, \theta_{j_2}) df_{i_1} d\theta_{i_2} \end{aligned} \quad (20)$$

のように積分形で表すことができる。積分範囲は上述の式(16), (17), (18)で与えられる。この方向スペクトルの周波数スペクトル $S^{(2)}$ と方向分布関数 $G^{(2)}$ を1次成分波のものになってそれぞれ次のように定義する。

$$S^{(2)}(f^*) = \int_{\theta^*} E^{(2)}(f^*, \theta^*) d\theta^* \quad (21)$$

$$G^{(2)}(\theta^* | f^*) = E^{(2)}(f^*, \theta^*) / S^{(2)}(f^*) \quad (22)$$

3. 2次成分波の方向スペクトル

(1) 計算条件

式(20)の計算において、 α は1次波のスペクトル $E^{(1)}$ に関係のない関数であり、 $E^{(1)}$ が与えられると2次波の方向スペクトルが計算できる。ここでは1次波の周波数スペクトルとしてはBretchneider-光易スペクトル、その方向分布関数としては次式の合田らのモデル(1975)を用いた。

$$E_0^{(1)}(f, \theta) = S_0^{(1)}(f) G_0^{(1)}(f, \theta) \quad (23)$$

$$G_0^{(1)}(f, \theta) = \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \cos^{2s}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (24)$$

$$s = \begin{cases} S_{max}(f/f_p)^5 & f \leq f_p \\ S_{max}(f/f_p)^{-2.5} & f > f_p \end{cases} \quad (25)$$

また

$$\begin{aligned} S_0^{(1)}(f) = 0.2573[(H_{1/3})_0^2 / T_{1/3}^4] f^{-5} \\ \times \exp(-1.029 f^{-4} / T_{1/3}^4) \end{aligned} \quad (26)$$

である。添字の0は深海域のものである事を示す。式(23)で与えられる1次波の方向スペクトルの水深ともなう変化は海底地形が平行直線状等深線で急激な勾配の変化はないものとする。次式で計算する事ができる。

$$\begin{aligned} E^{(1)}(f, \theta) = E_0^{(1)}(f, \theta_0) \\ \times \frac{\sinh(2kh)}{\tanh^2(kh) \{2kh + \sinh(2kh)\}} \end{aligned} \quad (27)$$

ここに $E^{(1)}(f, \theta)$, $E_0^{(1)}(f, \theta_0)$ はそれぞれ浅海および深海での方向スペクトル、 h は水深、 f, k は周波数および水深 h での波数、 θ_0 は深海における波の進行角である。

ここでは次に示す条件で計算を行ない、結果に対して近似式による定式化を試みた。すなわち(23)から(27)の各式からわかるように、深海条件での S_{max} , $(H_{1/3})_0$ および $T_{1/3}$ を与えると $E_0^{(1)}(f, \theta_0)$ を確定する事ができる。計算条件は合田ら(1975)の結果を用いて決めた。すなわち彼らは S_{max} と有義波の波形勾配の平均的な関係図を与えている。たとえば、十分に発達した不規則波浪場の方向集中度パラメーターは $S_{max} = 10$ 程度であり、このような波浪場における有義波の波形勾配 $(H_{1/3}/L_{1/3})_0$ は0.037程度の値を示すこと、減衰距離の短いうねりの場合は $S_{max} = 25$ 程度で $(H_{1/3}/L_{1/3})_0$ は0.026程度であることなどが読み取れる。計算ではま

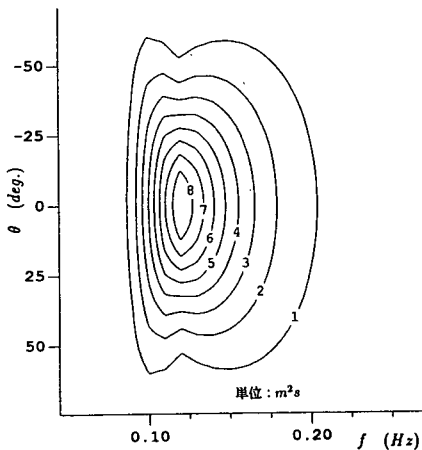
ず $T_{1/3}$ を 8.0, 10.0, 12.0 (s) の 3 ケースとし, さらに合田らの与えた図から S_{max} と平均的な $(H_{1/3}/L_{1/3})_0$ の関係を読み取りそれぞれの周期, S_{max} ごとに $(H_{1/3})_0$ を計算した. 表-1 に $T_{1/3} = 8$ s での S_{max} と $(H_{1/3})_0$ の値を示す. また各ケースとも主波向きは $\theta' = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$, 水深は $h/(L_{1/3})_0 = 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05$ の条件で計算を行った.

表-1 計算条件

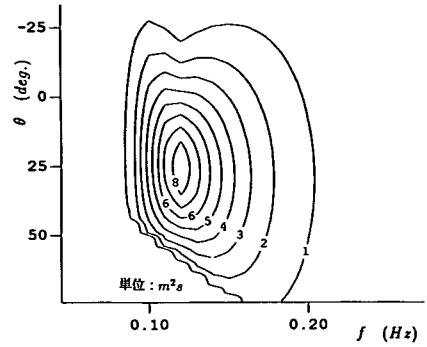
$T_{1/3}$ (s)	S_{max}	$(H_{1/3})_0$ (m)
8	5	4.3
8	10	3.7
8	15	3.3
8	20	3.0
8	25	2.6
8	30	2.2
8	40	1.7
8	50	1.4
8	60	1.2
8	75	1.0
8	100	0.77

(2) 方向スペクトルの変化

図-2 (a), (b) は $S_{max} = 10$, $T_{1/3} = 8$ s, $(H_{1/3})_0 = 3.7$ m の条件で水深 $h/(L_{1/3})_0 = 0.2$ での $E^{(1)}$ を示したもので (a) が $\theta' = 0^\circ$, (b) が 30° の場合のものである. (b) 図の下部に見られる変形は $\theta \geq |90^\circ|$ の波は浅海域に入射しないので $G^{(1)}$ の値を切り落としたことによるものである. 図-3 (a), (b) は図-2 に示した $E^{(1)}$ に対応する $E^{(2)}$ の鳥瞰図を示したものである. 図からわかるように浅海域での $E^{(2)}$ は厚手のカーペットの1辺をつまみ上げたような形状をもつ.

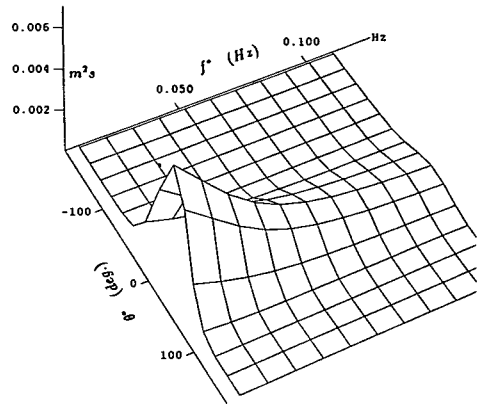


(a) $\theta' = 0^\circ$

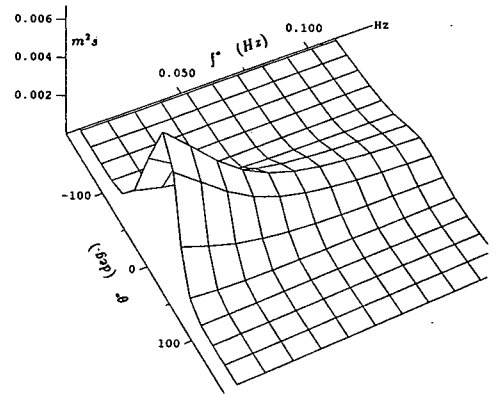


(b) $\theta' = 30^\circ$

図-2 1次波の方向スペクトル



(a) $\theta' = 0^\circ$

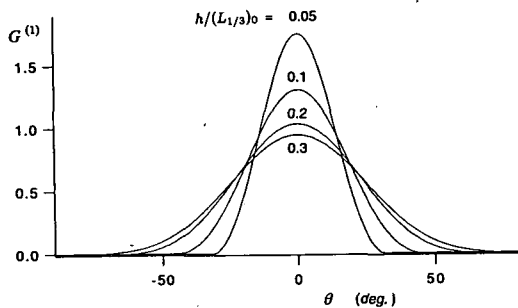


(b) $\theta' = 30^\circ$

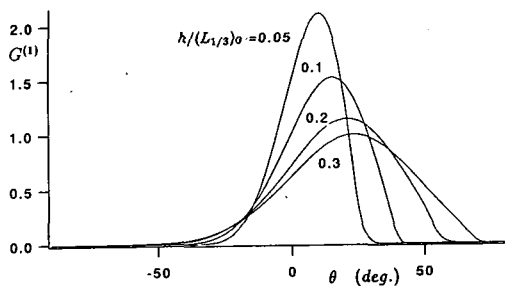
図-3 2次波の方向スペクトル

図-4 (a), (b) および図-5 (a), (b) は図-2, 3 に示した 1 次波および 2 次波のスペクトルの方向分布関数 $G^{(1)}$ および $G^{(2)}$ の水深による変化を示したもので, 図-4 は 1 次スペクトルのピーク周波数 f_p の $G^{(1)}$, 図-

5は $f = 0.01\text{Hz}$ の $G^{(2)}$ の形状を示した。ただし式(12)をそのまま計算すると、深海域では $G^{(2)}$ のピークから $\pm 90^\circ$ 離れた部分に二次的なピークが現れる。これは図-1 (b) に示した1次波の組み合わせのうち θ_{i_1} と θ_{i_2} の関係が式(15) で与えられる2波の干渉によるものである。深海域ではこの波の $E^{(2)}$ への寄与は無視できないが、浅海域においてはこの波の振幅は急激に小さくなる(木村, 1985)。したがって以後この研究では式(15)を満たす波相互の干渉による2次波を無視する。

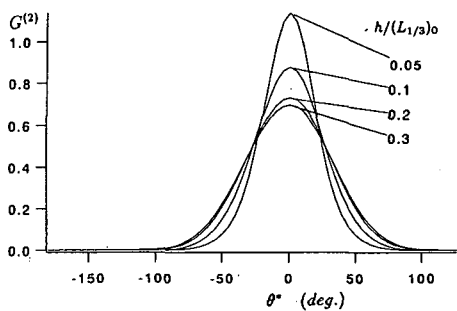


(a) $\theta' = 0^\circ$

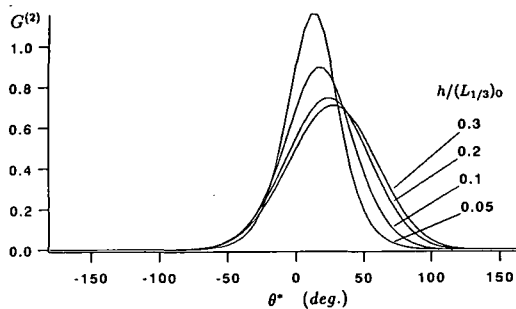


(b) $\theta' = 30^\circ$

図-4 $G^{(1)}$ の水深による変化, ($f = f_p$)

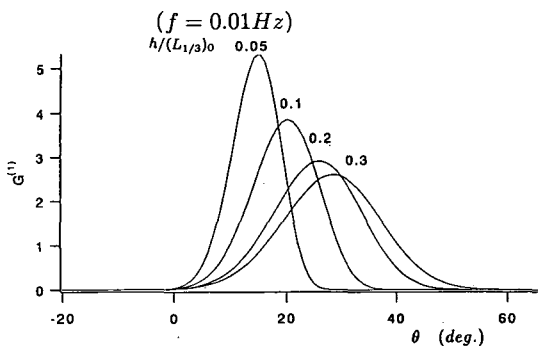


(a) $\theta' = 0^\circ$

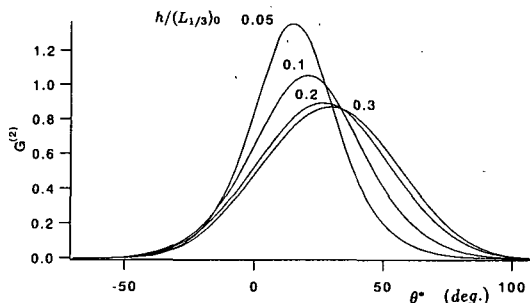


(b) $\theta' = 30^\circ$

図-5 $G^{(2)}$ の水深による変化



(a) $G^{(1)}$ の変化



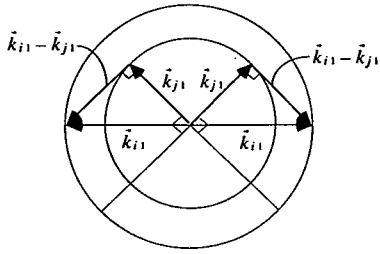
(b) $G^{(2)}$ の変化

図-6 $G^{(1)}$ および $G^{(2)}$ の水深による変化 ($S_{max} = 75$)

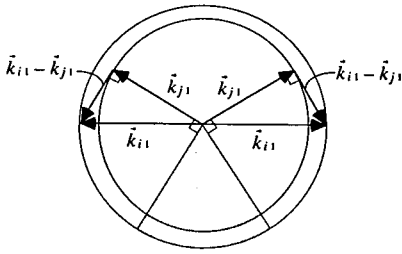
図-4, 5よりわかるように、 $G^{(1)}$ 、 $G^{(2)}$ ともに水深の減少にともなって分布形状が狭くなる。図-4 (b) の $\theta' = 30^\circ$ のケースでは $G^{(1)}$ の方は図-2 の部分で説明したスペクトルの切り落としの影響が見られるが2次波の $G^{(2)}$ では顕著でなくほぼ対称な分布形をしていること、さらに詳細にみると、 $G^{(2)}$ の分布のピークの位置は $S^{(1)}$ の $f = f_p$ における $G^{(1)}$ の分布のピークの位置と同じであること等もわかる。これらの特長はこれ以外の S_{max} のケースでも同様に見られる。たとえば図-6は $S_{max} = 75$, $T_{1/3} = 8\text{s}$, $(H_{1/3})_0 = 0.77\text{m}$ で入射角が $\theta' = 30^\circ$ のケースで図中に示す水深での方向分布関数

を示したもので(a)図が $G^{(1)}$, (b)図が $G^{(2)}$ でそれぞれ $f = f_p$ および $f = 0.01\text{Hz}$ のものである。

図-5, 6からわかるように1次波の進行方向がすべて $\pm 90^\circ$ 以内に集中していても, 2次波の進行角は $\pm 90^\circ$ を越える。図-7はこのことを模式的に示した図である。この図は図-1と同じ半径が k_{i1}, k_{j1} の円であり, 二つの波数ベクトルが図に示すような関係にあるとき, (波数ベクトルの方向は真上の方向を $\theta = 0^\circ$ として $-90^\circ \sim 90^\circ$ の範囲に入っている) 2次波の進行角は $\pm 90^\circ$ を越える。図中の色の暗い部分は進行角が存在しない範囲で, この範囲は k_{i1} と k_{j1} の差が小さいほど狭い。



(a) 波数の差が大きい場合



(b) 波数の差が小さい場合

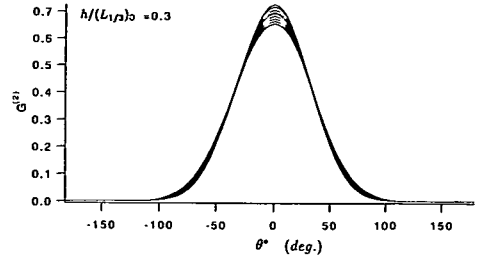
図-7 2次波の波向き範囲(模式図)

4. 2次波の方向スペクトルの近似

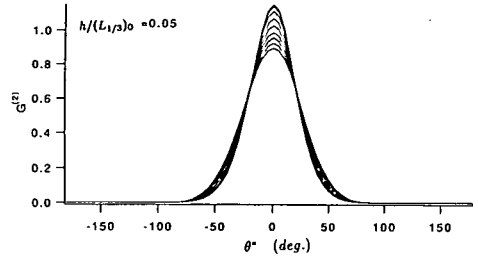
(1) 方向分布関数

ここでは2次長周期波の方向スペクトルに対して簡単な式での近似を試みる。

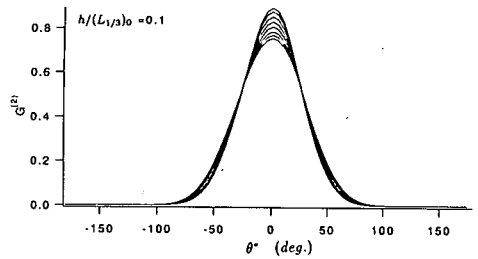
図-8は $S_{max} = 10$, $T_{1/3} = 8\text{s}$, $(H_{1/3})_0 = 3.7\text{m}$, $\theta' = 0^\circ$ の $G^{(2)}$ を示したもので, (a), (b)および(c)はそれぞれ $h/(L_{1/3})_0 = 0.3, 0.1$ および 0.05 の場合をプロットしたもので, 各図において実線は 0.01Hz から 0.1Hz まで 0.01Hz 間隔のものが10本示されている。図中で各線は非常に接近しているので周波数は区別していないが, 周波数が大きくなるにつれて僅かに分布幅が広くなり, 水深が減少すると分布幅の差が幾分拡大するも



(a) $h/(L_{1/3})_0 = 0.3$



(b) $h/(L_{1/3})_0 = 0.1$



(c) $h/(L_{1/3})_0 = 0.05$

図-8 2次波の方向分布関数, ($\theta' = 0^\circ$)

の差は小さい。

この特長は S_{max} , $(H_{1/3})_0$, θ' の値にかかわらず共通にみられる。したがって周波数による $G^{(2)}$ の変化は無視できるとし, 2次波の方向スペクトルをその周波数スペクトルと周波数を含まない方向分布関数の積として表すことにする。すなわち,

$$E^{(2)}(f^*, \theta^*) = S^{(2)}(f^*) G_m^{(2)}(\theta^*) \quad (28)$$

である。方向分布関数 $G_m^{(2)}$ は $G^{(1)}$ と同様に式(24)の形をもつものと仮定し, 式中の s の値は次式のように周波数毎の値にスペクトル値を重みとして平均して計算した。

$$s_{av} = \frac{\sum_{i=1}^N S_i^{(2)} s_i^*}{\sum_{i=1}^N S_i^{(2)}} \quad (29)$$

ここに $S_i^{(2)}$ は $f^* = i\Delta f, (i = 1, N)$ における $S^{(2)}(f^*)$ の値である。ただし $\Delta f = 0.01\text{Hz}$, $N=10$ とした。また s_i^* は $G_i^{(2)}$, $(i = 1, N)$ に対して合田ら(1975)の方法で光易型の方向分布関数のあてはめを行って決定した値である。式(29)の s_{av} の値を次式に代入すると $G_m^{(2)}(\theta^*)$ が決まる。

$$G_m^{(2)}(\theta^*) = \frac{1}{\pi} 2^{2s_{av}-1} \frac{\Gamma^2(s_{av} + 1)}{\Gamma(2s_{av} + 1)} \cos^{2s_{av}}\left(\frac{\theta^*}{2}\right) \quad (30)$$

図-9は s_{av} と $h/(L_{1/3})_0$ の関係を示したもので図中の各線は1次波の S_{max} の値が下から順に5, 10, 25, 50, 75, 100の場合のもので、いずれも $\theta' = 0^\circ$ の場合の結果である。

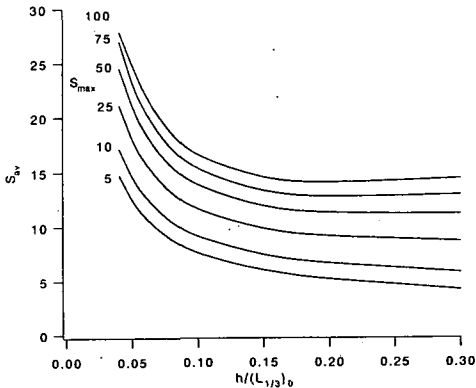


図-9 s_{av} と $h/(L_{1/3})_0$ の関係, ($\theta' = 0^\circ$)

θ' が0でない場合は s_{av} の値は図-9の値より幾分小さくなる。図-10は $\theta' = 0^\circ$ と $\theta' = 15^\circ, 30^\circ$ および 45° の場合の s_{av} の差を示したものである。1次波の S_{max} の値を変えても差の値に変化はないのでここでは表-1のすべてのケースの S_{max} の計算結果の平均値を示した。

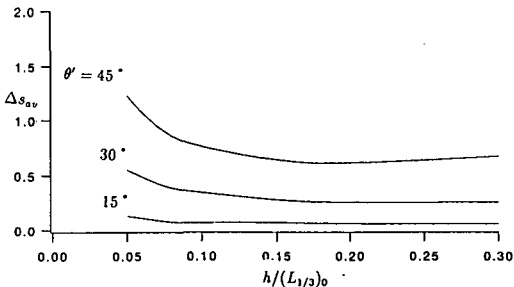
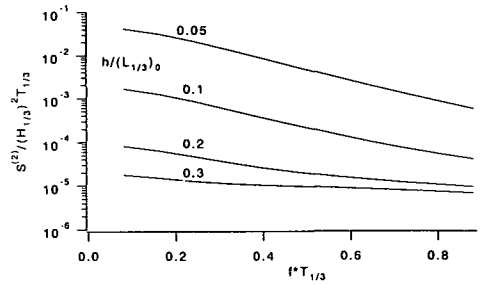
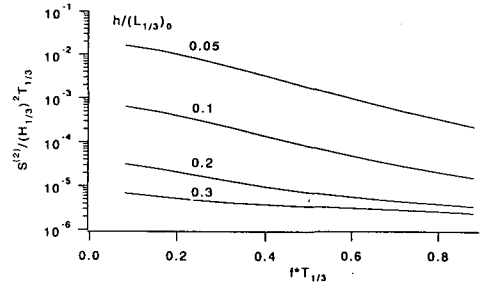


図-10 $(s_{av}|\theta'=0) - (s_{av}|\theta'=15,30,45)$ と $h/(L_{1/3})_0$ の関係

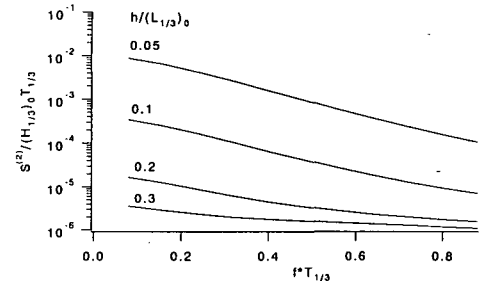
θ' が0でない場合には、まず図-9から s_{av} の値を読みとり、その値から図-10の値を引いた値を式(30)に代入すれば良い。周期を $T_{1/3} = 10\text{s}, 12\text{s}$ と変えた場



(a) $S_{max} = 10$



(b) $S_{max} = 25$



(c) $S_{max} = 75$

図-11 $S^{(2)}(f^*) / ((H_{1/3})_0^2 T_{1/3})$ と $f^* T_{1/3}$ の関係, ($\theta' = 0^\circ$)

合でも、波形勾配が表-1のものと同しくなるように $(H_{1/3})_0$ を選ぶと、ここで示したものと全く同じ結果が得られるのでこれらについては省略する。

(2) 周波数スペクトル

ここでは2次波の周波数スペクトル $S^{(2)}(f^*)$ の近似について説明する。図-11は $S^{(2)}(f^*) / ((H_{1/3})_0^2 T_{1/3})$ と $f^* T_{1/3}$ の関係を示したもので、それぞれ(a)は $S_{max} = 10, T_{1/3} = 8\text{s}, (H_{1/3})_0 = 3.7\text{m}, \theta' = 0^\circ$, (b)は $S_{max} = 25, T_{1/3} = 8\text{s}, (H_{1/3})_0 = 2.6\text{m}, \theta' = 0^\circ$, (c)は $S_{max} = 75, T_{1/3} = 8\text{s}, (H_{1/3})_0 = 1.0\text{m}, \theta' = 0^\circ$ のケースのものである。各図とも図中の実線は上から順に $h/(L_{1/3})_0 = 0.05, 0.1, 0.2$ および 0.3 の水深のもの

である。図からわかるようにすべての線は片対数紙上でほぼ直線的に変化している。したがってここでは周波数スペクトルを次式で近似する。

$$\ln \left(\frac{S^{(2)}(f^*)}{(H_{1/3})_0^2 T_{1/3}} \right) = a f^* T_{1/3} + b \quad (31)$$

a, b の値は上式の両辺を 0.01 Hz から 0.1 Hz の範囲で積分した値の差が最小になるように最小二乗法で計算した。図-11 に示したすべてのケースの a と b の値の水深による変化を示したものが図-12 である。図中で右上がりの線が a の値、左上がりの線が b の値を示したものである。b の線は上から順に $S_{max}=10, 25$ および 75 の結果である。a の値への S_{max} の影響は非常にわずかで無視できる。0.05 < $h/(L_{1/3})_0 < 0.3$ の範囲で a および b の値をそれぞれ次式で近似する。

$$a = c_1 \{h/(L_{1/3})_0\} + c_2 \quad (32)$$

$$b = c_3 \log \{h/(L_{1/3})_0\} + c_4 \quad (33)$$

S_{max} の値と c_1, c_2, c_3 および c_4 の関係を示したものが図-13 である。図より c_1 と c_2 および c_3 は S_{max} の値に関わらずほぼ一定と見なして良い。

計算結果を平均すると

$$c_1 = 18.0, \quad c_2 = -6.5, \quad c_3 = -10.8$$

となる。しかし c_4 は $S_{max} \leq 20$ の範囲ではほぼ一定値 $c_4 \approx -16.8$ をとるものの $S_{max} > 20$ では S_{max} の増加に応じて緩やかに減少し、 $S_{max}=25$ では $c_4 \approx -17.0$ 、 $S_{max}=75$ では $c_4 \approx -18.5$ となる。以上の結果より十分発達した風波の場合 ($S_{max} = 10$)

$$a = 18.0 \{h/(L_{1/3})_0\} - 6.5 \quad (34)$$

$$b = -10.8 \log \{h/(L_{1/3})_0\} - 16.8 \quad (35)$$

となる。 $S_{max}=25, 75$ の場合には式(35)の右辺第2項の定数をそれぞれ $-17.0, -18.5$ と変えれば良い。以上は1次波の卓越波向きが等深線に直角な場合の結果である。波向きが等深線と直角方向に対して角度をもつ場合、a の値の変化はほぼ無視し得るが、b の値は幾分か

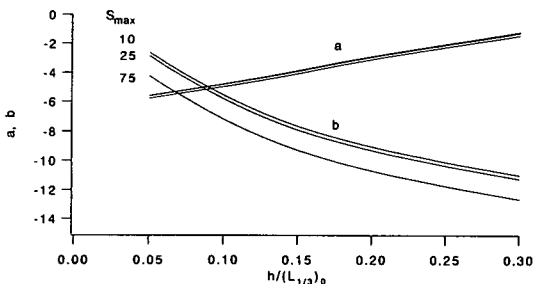


図-12 a, b と $h/(L_{1/3})_0$ の関係, ($\theta' = 0^\circ$)

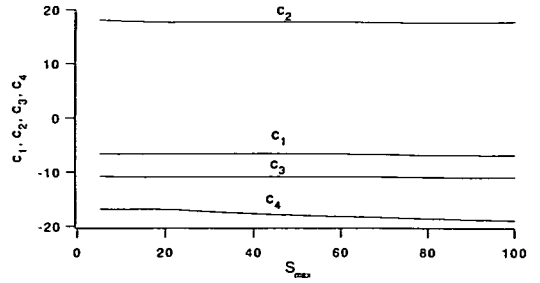


図-13 S_{max} の値と c_1, c_2, c_3 および c_4 の関係, ($\theta' = 0^\circ$)

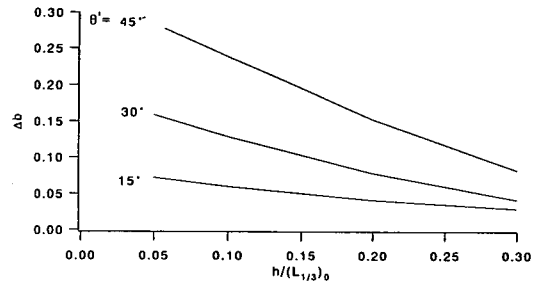


図-14 $\Delta b = b|_{\theta'=0} - b|_{\theta'=15,30,45}$ と $h/(L_{1/3})_0$ の関係

さくなる。図-14 は b の値の減少量 Δb と $h/(L_{1/3})_0$ の関係を示したもので、図中の実線は上から $\theta=45^\circ, 30^\circ$ および 15° の場合のものである。 S_{max} が変化してもほぼ同じ Δb の値が得られたのでここでは表-1 のすべてのケースの平均値を示した。

周期を $T_{1/3} = 10s, 12s$ と変えた場合でも、波形勾配が表-1 のものと等しくなるように $(H_{1/3})_0$ を選ぶと、ここで示したものと全く同じ結果が得られるのでこれらについては省略する。

(3) 近似式の検証

図-15 の各図はこの節で示した2次波の方向スペクトルの近似式と、式(12)による計算結果を比較したものである。(a), (b), (c) の各図は図-11 の(a), (b), (c) の条件で、 $h/(L_{1/3})_0 = 0.1$ の場合の式(12)の計算結果(破線)と近似式(実線)を用いた場合の結果を比較したものである。

図からもわかるように両者の対応は非常によい。また図-16 は $S_{max}=10$ で、 $(H_{1/3})_0 = 3.7m, T_{1/3} = 8s, h/(L_{1/3})_0 = 0.1, \theta' = 30^\circ$ の場合の近似式(実線)と式(12)(破線)による計算結果を比較したものである。

入射波が等深線に対して角度をもつ場合には、近似式で計算を行った結果を、すべての周波数で1次成分波のスペクトルのピーク周波数の当該水深での進行角だけシフトする。図からもわかるように入射角が0でない場合も両者の対応は良好である。これ以外のケースでもここに示したものと同一程度の結果が得られる。

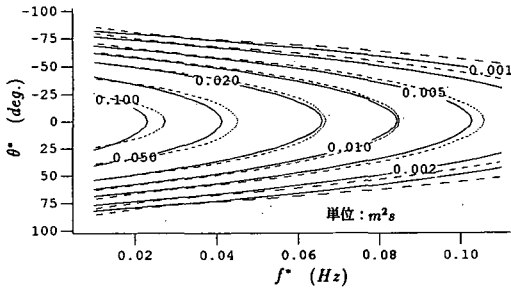
また、2次長周期波の2乗平均値 $\overline{\{\eta_L^{(2)}\}^2}$ は

$$\overline{\{\eta_L^{(2)}\}^2} = \int_0^\infty S^{(2)}(f^*) df^* \quad (36)$$

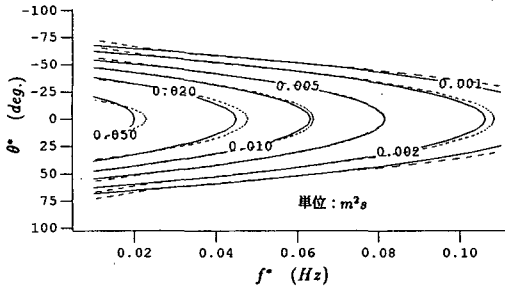
の関係に式(31)を代入して

$$\frac{\overline{\{\eta_L^{(2)}\}^2}}{(H_{1/3})_0^2} = \frac{\exp\{c_3 \log\{h/(L_{1/3})_0\} + c_4\}}{-c_1\{h/(L_{1/3})_0\} - c_2} \quad (37)$$

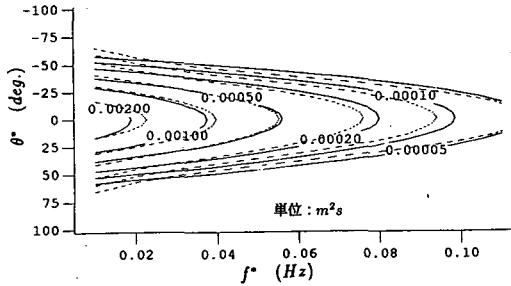
を得る。



(a) $S_{max} = 10$



(b) $S_{max} = 25$



(c) $S_{max} = 75$

図-15 2次波の方向スペクトルの比較
実線：近似式、破線：(12)式

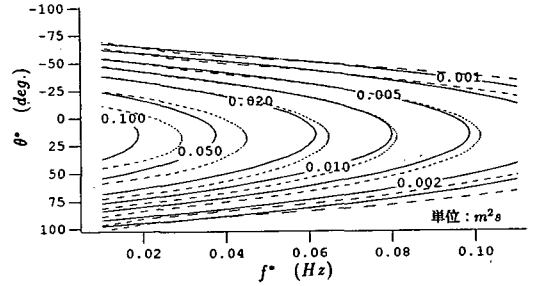


図-16 2次波の方向スペクトルの比較
実線：近似式、破線：式(12)
($\theta^* = 30^\circ$)

5. 2次波の波長

2次の非線形干渉波は微小振幅波と違い、周波数(周期)が決まっても波数は一義的に決定されない。すでに図-1に示したように周波数が f^* 、方向角が θ^* の2次波を生じるような2つの1次波の組み合わせは無数に存在して、それぞれの組み合わせごとに波数の大きさは異なる。ここでは2次長周期波の周波数と波長の関係について説明する。

(1) 波長の計算

図-1に示したように、2次波の周波数を f^* 、進行角を θ^* と特定してもその波数は1次波の組み合わせにより変化する。ここでは波長を

$$L_{i_1 i_2 j_1 j_2}^- = 2\pi/k_{i_1 i_2 j_1 j_2}^- \quad (38)$$

と定義する。図-17の実線は $S_{max} = 10$ 、 $(H_{1/3})_0 = 3.7m$ 、 $T_{1/3} = 8s$ 、卓越波向きが 0° 、1次波の水深波長比 $h/(L_{1/3})_0 = 0.2$ の場合で、発生する2次波の周波数が $f^* = 0.01Hz$ 、方向角が $\theta^* = 0^\circ$ となる波の波長ごとのエネルギーの値を $E^{(2)}(f^*, \theta^*)$ で割った値を示した。図から波長はかなりの幅で変化していることがわかる。また点線は同じ条件で $h/(L_{1/3})_0 = 0.05$ の場合の同じ関係を示したものである。水深が浅くなってもやはり波長はかなりの幅で変化する。

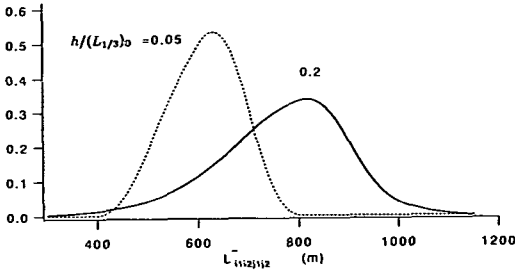
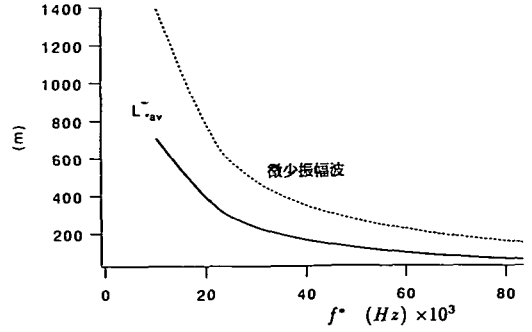
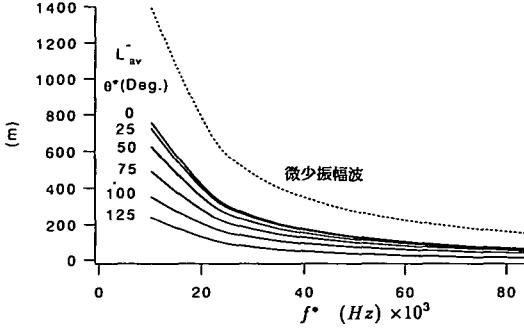


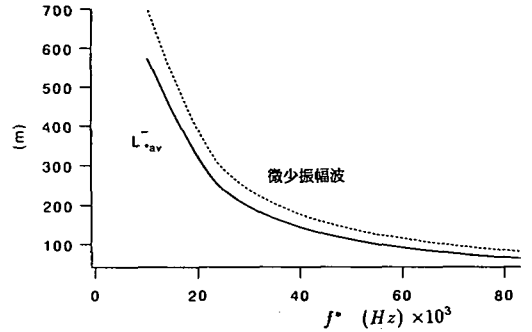
図-17 波長の分布



(a) $h/(L_{1/3})_0 = 0.2$



(a) $h/(L_{1/3})_0 = 0.2$

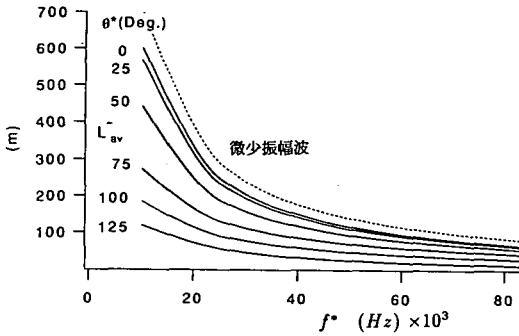


(b) $h/(L_{1/3})_0 = 0.05$

図-19 $L_{*av}^-(f^*)$ と f^* の関係

ケースの $L_{av}^-(f^*, \theta^*)$ と f^* の関係を示したもので (a) が図-17の実線に、(b) が点線に対応する波長の平均値である。図中で点線は微小振幅波理論による波長と周波数の関係であり、実線は上から順に $\theta^* = 0^\circ, 25^\circ, 50^\circ, 75^\circ, 100^\circ$ および 125° の場合のものである。

図からわかるように、 $L_{av}^-(f^*, \theta^*)$ は微小振幅波理論による値より何れの場合も小さく、さらに θ^* が大きくなるにつれて微小振幅波理論との差が大きくなる。 S_{max} を変えて計算した結果は S_{max} の値にかかわらずここに示したものとほぼ等しい値が得られた。さらに



(b) $h/(L_{1/3})_0 = 0.05$

図-18 $L_{*av}^-(f^*, \theta^*)$ と f^* の関係

しかし、ここではあえて次式で $L_{i_1 i_2 j_1 j_2}^-$ の平均値 $L_{av}^-(f^*, \theta)$ を定義して平均値について若干の検討を行った。

$$L_{av}^-(f^*, \theta^*) = \frac{\sum_{i_1} \sum_{i_2} E^{(1)}(f_{i_1}, \theta_{i_2}) E^{(1)}(f_{j_1}, \theta_{j_2}) \times \alpha^2(f_{i_1}, f_{j_1}, \theta_{i_2}, \theta_{j_2}) L_{i_1 i_2 j_1 j_2}^- df_{i_1} d\theta_{i_2}}{\sum_{i_1} \sum_{i_2} E^{(1)}(f_{i_1}, \theta_{i_2}) E^{(1)}(f_{j_1}, \theta_{j_2}) \times \alpha^2(f_{i_1}, f_{j_1}, \theta_{i_2}, \theta_{j_2}) df_{i_1} d\theta_{i_2}} \quad (39)$$

i_1 と j_1 および i_2 と j_2 にはそれぞれ式(13)および式(14)の関係が成立している。図-18 (a), (b) は図-17の

$$L_{*av}^-(f^*) = \frac{\sum_{\theta^*} \sum_{i_1} \sum_{i_2} E^{(1)}(f_{i_1}, \theta_{i_2}) E^{(1)}(f_{j_1}, \theta_{j_2}) \times \alpha^2(f_{i_1}, f_{j_1}, \theta_{i_2}, \theta_{j_2}) L_{i_1 i_2 j_1 j_2}^- df_{i_1} d\theta_{i_2} d\theta^*}{\sum_{\theta^*} \sum_{i_1} \sum_{i_2} E^{(1)}(f_{i_1}, \theta_{i_2}) E^{(1)}(f_{j_1}, \theta_{j_2}) \times \alpha^2(f_{i_1}, f_{j_1}, \theta_{i_2}, \theta_{j_2}) df_{i_1} d\theta_{i_2} d\theta^*} \quad (40)$$

によりエネルギーの重みをつけて θ^* に関して波数を平均した結果を示したものが図-19 (a), (b) である。計算条件はそれぞれ図-17のケースのものと同じである。 $S_{max} = 25, 75$ のケースも比較したが S_{max} の値による影響は非常に小さくここに示したものとほぼ同じ値が得られた。微小振幅波理論との比は $h/(L_{1/3})_0 = 0.2$

のケースで約0.5, $h/(L_{1/3})_0 = 0.05$ のケースで約0.8である。理論値との比は周波数にかかわらずほぼ一定である。

6. おわりに

この研究では浅海域での2次長周期波の平均スペクトルの近似式を与えた。入射波のスペクトルとしては良く用いられる Bretschneider-光易型, 方向分布関数としては合田等によって定式化された光易型の方向分布関数を用いた。近似式は沖合いにおける波浪条件すなわち S_{max} と $(H_{1/3})_0$ を与えると簡単な計算により, 当該水深における2次波の方向スペクトルを計算することが出来る。ただし, 合田ら(1975)による S_{max} と有義波の波形勾配の平均的關係を用いているので $T_{1/3}$ は S_{max} と $(H_{1/3})_0$ が与えられると自動的に決まる。この近似式が適用できる範囲は1. で説明した2次波の理論と現象の適合性に左右される。水深の大きな領域は, $h/(L_{1/3})_0 > 0.3$ では $S^{(2)}(f^*)$ が極めて小さくなり, 最早この種の2次波を特に考慮する必要がなくなること, これより深くなると(15)式が無視できなくなること等をあわせて考えると $h/(L_{1/3})_0 = 0.3$ がおよその有効限界である。一方浅海側では(7)式の $\alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ の値は水深の減少とともに増大し, $h/(L_{1/3})_0 = 0.01$ より浅くなると2次長周期波の2乗平均値と1次波の有義波高がほぼ同じオーダーとなる(37式)。したがって浅海側でも適用限界をもつはずであるが, これは碎波などこの理論で考慮していない現象の影響も考えて決定する必要がある。

この研究は著者らが1987年から1988年(田中は大学院修士過程在学中)に実施した研究と木村が最近行った追加計算をあわせたものである。

参考文献

- 1) 木村 晃:非線形長周期波の2次元スペクトル, 第32回海岸工学講演会論文集, pp.154-158, 1985.
- 2) 合田良実, 鈴木康正:光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折, 回折計算, 港湾技研資料, No.230, 45p., 1975.
- 3) 関本恒浩, 水口 優:非線形2次長周期波の方向スペクトル, 海岸工学論文集, Vol.42, pp.286-290, 1995.
- 4) 浜田徳一:表面波の2次干渉(2), 第12回海岸工学講演会講演集, pp.1-6, 1965.
- 5) Bowers, E.C.: Long period oscillations of moored ships subject to short wave seas, *Trans. Roy. Inst. Naval Archit.*, Vol.118, pp.1-8, 1975.
- 6) Gallager, B.: Generation of surf beat by non-linear wave interaction, *J. Fluid Mech.*, Vol.49, Part1, pp.1-20, 1971.
- 7) Huntley, D.A., R.T. Guza and E.R. Thornton: Field observation of surf beat. I. Progressive edge waves. *J. Geophys. Res.* 86: pp.6451-6466, 1981.
- 8) Kimura, A.: Averaged two-dimensional low-frequency wave spectrum of wind waves, *Comm. on Hydr. Dept. of Civil Eng. Delft Univ. of Tech.*, 54p. 1984.
- 9) Longuet-Higgins M.S. and R.W. Stewart: Radiation stresses in water waves: a physical discussion, with applications, *Deep Sea Res.*, Vol.11, pp.529-569, 1964.
- 10) Sand, S.E.: Long waves in directional seas, *Coastal Eng.*, 6, pp.195-208, 1982.
- 11) Sharma, J.N. and R.G. Dean: Development and evaluation of a procedure for simulating a random directional second order sea surface and associated wave forces, *Ocean Eng.*, Rept. No.20, Dept. of Civil Eng., Univ. of Delaware, 139p., 1979.
- 12) Tick, L.J.: A non-linear random model of gravity waves, *J. Math. Mech.*, 8, pp.643-652, 1959.

(1995・12・13 受付)

DIRECTIONAL SPECTRA OF THE 2ND ORDER LONG WAVE IN A SHALLOW WATER REGION

Akira KIMURA and Kohsaku TANAKA

2nd order non-linear long waves have attracted special interest recently to be a driving force in several phenomena such as a harbour resonance, a slow drift oscillation of floating body and a formation of multiple longshore bars in a shallow water region along the coast. Kimura(1984) gave a convolution to give an averaged directional spectrum of the 2nd order long waves giving the first order directional wave spectrum. Since the convolution involves a complex integral kernel, long complex calculations are necessary. The present study deals with a simple modeling of the 2nd order long wave spectrum giving the 1st order directional spectrum used by Goda et al. (1975) in a shallow water region.