

観測ノイズに影響される同定パラメータの信頼性領域の評価

栗田哲史¹・松井邦人²

¹正会員 工博 東電設計(株)技術開発本部 耐震技術部(〒110 東京都台東区東上野3-3-3)

²正会員 Ph.D. 東京電機大学教授 理工学部建設工学科(〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

本研究は、構造パラメータの同定問題において、観測ノイズが同定パラメータに及ぼす影響を評価する手法として、同定パラメータの観測ノイズに対する感度と誤差伝播則を用いて、同定パラメータの信頼性領域の推定式を提案するものである。また、観測ノイズが同定パラメータに及ぼす影響を小さくする手段として有効と考えられる、先験的情報を用いた同定手法に対する同定パラメータの信頼性領域を推定する手法の定式化を行っている。数値実験による理論検証の結果は良好で、本論で提案した手法の有効性が確認された。

Key Words : confidence region, sensitivity, measurement noise, identified parameter, Bayesian estimation

1. はじめに

著者等は既に、既知パラメータの誤差が同定パラメータに及ぼす影響を、同定パラメータの信頼性領域として評価する手法を提案している¹⁾。これは、同定問題で既知として扱うモデルパラメータに誤差が含まれていた時、同定結果に与える影響を定量的に評価したものである。しかし、前論文の中でも指摘している通り、実際の同定問題ではモデルパラメータの誤差のみでは無く、観測量に含まれる誤差も同定結果に影響を及ぼす要因であり、この影響評価についても行う必要が有る。観測量誤差が同定結果に及ぼす影響に関する既往の検討としては、著者等^{2),3)}は観測ノイズの同定パラメータに対する感度を用いて、観測ノイズの影響を定量的に評価する手法を提案している。また、辻原等⁴⁾は地盤構造の動的パラメータ同定問題において、観測量にノイズを付加して各種同定手法の誤差の影響について比較検討している。更に、吉田等⁵⁾は静的問題を対象として、観測量の分解能及び誤差を様々に変化させたデータを用いて逆解析を行い、観測量の分解能・精度と推定値の精度との関係を検討している。

本論では前論文を補足するものとして、観測ノイズが同定結果に及ぼす影響を同定パラメータの信頼性領域として評価する手法を示す。また、本論では前論文と同様、同定パラメータの信頼性領域の縮小化を目指して、先験的情報^{6),7)}を用いた同定を行った時

の信頼性領域の評価のために必要な誤差の感度を求める式を誘導した。先の論文で提案した理論と本論で示す内容の両者を用いることにより、モデルパラメータ誤差と観測ノイズの影響を合わせた総合的な評価をすることができる。この様な解析は、実問題における同定結果の信頼性評価を行う上で有用である。

以下に、理論式の展開及び簡単なモデルを用いた例題による理論の検証を示す。

2. 同定結果の信頼性領域

(1) 理論式

地震荷重を受ける線形多自由度系の運動方程式は、次式のように表せる。

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = -M\mathbf{1}\ddot{y}_0(t) \quad (1)$$

ここで、 M 、 C 、 K は質量、減衰、剛性マトリックス、 $\ddot{z}(t)$ 、 $\dot{z}(t)$ 、 $z(t)$ は相対加速度、相対速度、相対変位ベクトルを表している。また、 $\mathbf{1}$ は全ての成分が1.0のベクトル、 $\ddot{y}_0(t)$ は地表の地震動(加速度)を表すスカラー量である。モデルパラメータのうち未知の同定パラメータを $X = \{X_1, X_2, \dots, X_M\}^T$ 、既知パラメータを $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_L\}^T$ と表す。いま、観測値として時刻歴の加速度波形を考える。観測点*i*における測定値が $\ddot{u}_i(t)$ 、それに対応する解析値が $\ddot{z}_i(t)$ 、観測ノイズが $\Delta\ddot{u}_i(t)$ で与えられたとすると、以下の関係が得られる。

$$\ddot{u}_i(t) = \ddot{z}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t), \quad i \in A \quad (2)$$

ここで、 A は観測点の集合を表している。いま、観測

ノイズが

$$\Delta \ddot{u}_i(t) = \varepsilon_i \eta_i(t) \quad (3)$$

で表されるものとする。ここで、 $\eta_i(t)$ は最大値(絶対値)を1.0とする正規化された誤差波形であり、 ε_i は最大値を表すスカラー量である。式(2)より最小二乗法の考えに従い、評価関数を時間領域で次式のよう

$$J(X, Y) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i (\ddot{u}_i - z_i(X, Y))^2 dt \quad (4)$$

ここで、積分区間 $t_0 \sim t_1$ は解析時間区間を、 w_i は重み係数を表している。

いま、既知のモデルパラメータは、真値 \bar{Y} が与えられているものとする。観測ノイズが未知パラメータの同定結果に及ぼす影響は小さいと考え、観測点 ℓ における観測ノイズに影響される同定パラメータは、式(3)の関係を用いて

$$\begin{aligned} X &= \bar{X} + \frac{\partial X}{\partial \ddot{u}_i} \Delta \ddot{u}_i \\ &= \bar{X} + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \ddot{u}_i} \Delta \ddot{u}_i \\ &= \bar{X} + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i \end{aligned} \quad (5)$$

と表せる。ここで、 \bar{X} は X の真値で且つ平均値を表している。観測ノイズの分散・共分散が与えられたときの、同定結果の分散・共分散行列は式(5)の関係より、誤差伝播の法則⁸⁾を用いると

$$\Sigma_{XX} = \Gamma_{X\varepsilon}^T \Sigma_{\varepsilon\varepsilon} \Gamma_{X\varepsilon} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ は観測ノイズの分散・共分散行列で、

$$\Sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_1 \varepsilon_L} \\ \sigma_{\varepsilon_2 \varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_2 \varepsilon_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\varepsilon_L \varepsilon_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{\varepsilon_L \varepsilon_L} \end{bmatrix} \quad (7)$$

である。また、 $\Gamma_{X\varepsilon}$ は同定パラメータの観測ノイズに対する感度である。

$$\Gamma_{X\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1M} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{L1} & \cdots & \cdots & \Gamma_{LM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial X_M}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \varepsilon_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon_L} & \cdots & \cdots & \frac{\partial X_M}{\partial \varepsilon_L} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)は次に示す感度方程式²⁾により求められる。

$$\sum_{j=1}^M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} dt \right\} \Gamma_{j\mu} = \int_{t_0}^{t_1} w_i \eta_i(t) \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} dt \quad (9)$$

$$(\ell \in A)$$

$$(k = 1, \dots, M)$$

この時、同定結果が正規分布に従うとすると、確率密度関数は次式のように表される。

$$P(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\Sigma_{XX}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \bar{X})^T \Sigma_{XX}^{-1} (X - \bar{X}) \right\} \quad (10)$$

従って、同定結果の信頼性領域は、信頼度を $1-e$ として、

$$(X - \bar{X})^T \Sigma_{XX}^{-1} (X - \bar{X}) < \chi_{e,M}^2 \quad (11)$$

となる⁹⁾。ここで、 $\chi_{e,M}^2$ は自由度 M 、信頼度が $1-e$ の限界値である。式(11)は確率楕円構造の内部を意味し、 $M=2$ の時は楕円、 $M=3$ の時は楕円体、 $M=4$ 以上の時は超楕円体となる。

(2) 例題

簡単なモデルを用いた数値実験で理論の検証を行う。用いたモデルは図-1に示す2質点系のモデルである。入力波形は、1940年 Imperial Valley 地震の El Centro 波 (NS成分) を最大加速度 300gal に調節して用いた。図中に示した構造パラメータの真値を用いて応答解析を行った結果の、各質点の加速度時刻歴を観測データとして用いた。観測量に混入する観測ノイズは 0.02Hz~25Hz のバンドリミテッド・ホワイトノイズとした。

ここでは、質量 m_1, m_2 を既知の構造パラメータとして、減衰係数 c_1, c_2 および剛性 k_1, k_2 を未知の同定パラメータとした。いま、既知として与える質量は真値が与えられているものとする。理論式の確認のため、平均値が 0.0 となる 1000 組の正規乱数を発生させ、その値を観測ノイズの最大値として実際に同定解析を行い、理論値との比較を行った。観測ノイズの最大値の標準偏差は 60gal とした。また、各観測ノイズ間には相関が全く無いものとした。同定手法には修正 Marquardt 法⁹⁾を用いた。

同定結果と理論値との比較を図-2に示す。図中の確率楕円は自由度 2、信頼度 95% の信頼限界を表して

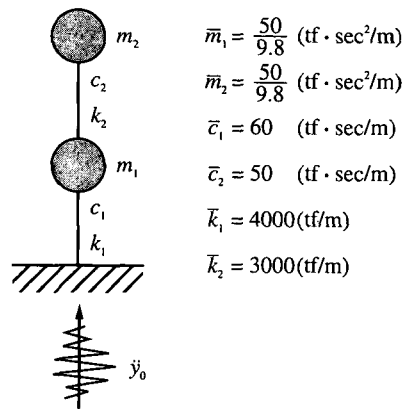


図-1 解析モデル

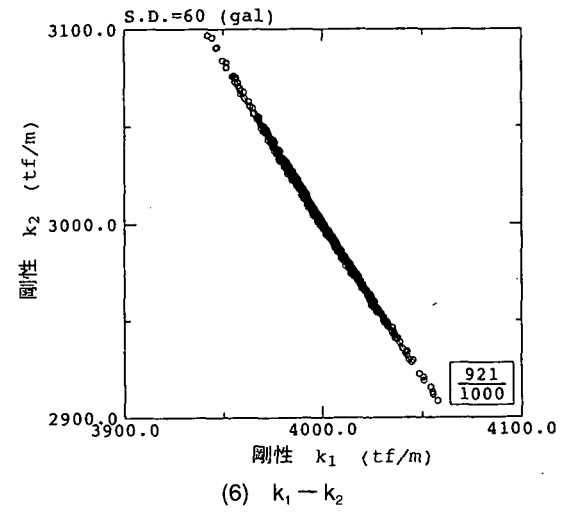
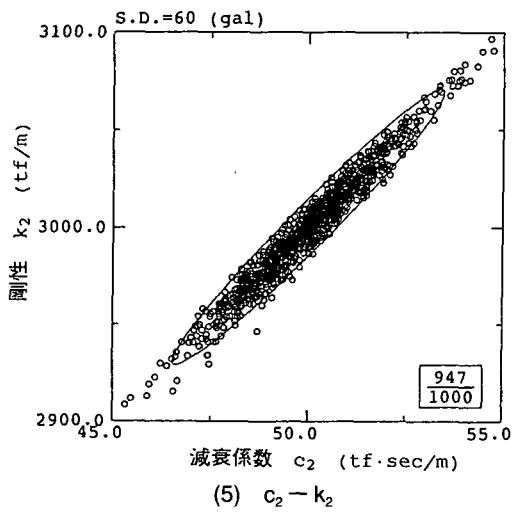
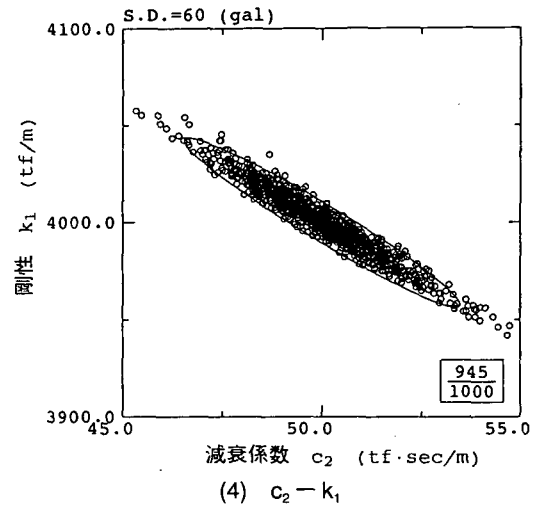
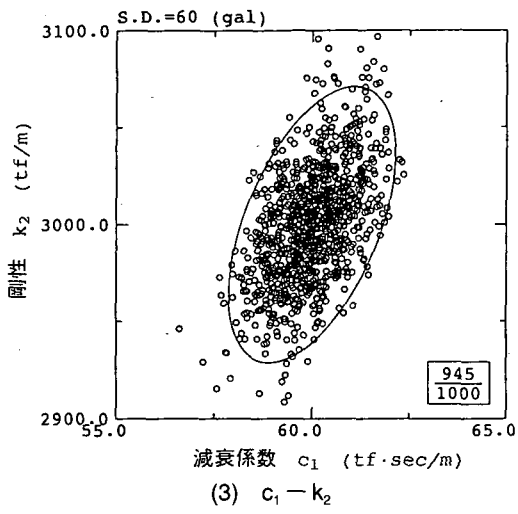
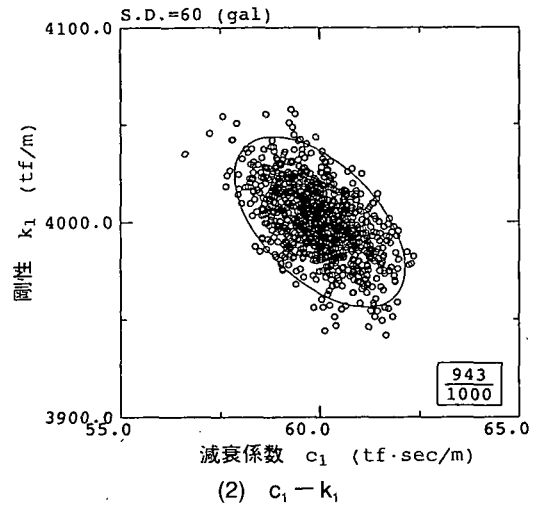
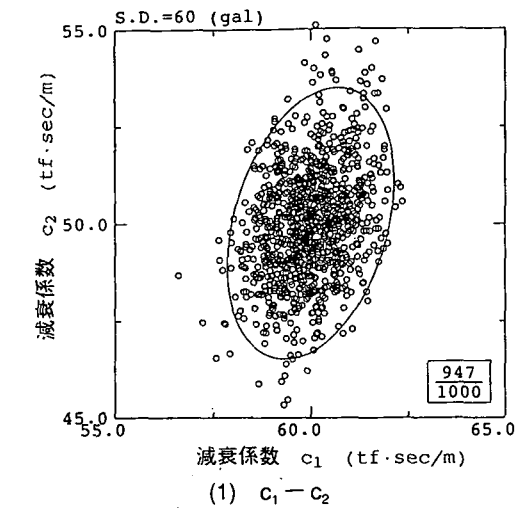


図-2 同定結果の信頼性領域

いる。また、○印は同定結果をプロットしたものである。ここで、同定パラメータは4つあるため、同定パラメータの信頼性領域は自由度4の超楕円体となり図示できない。そこで、2つのパラメータ毎に組合せを作り、自由度2の確率分布として示している。解析の結果、パラメータ間には正負様々の相関が見られる。図より同定結果の分布と確率楕円は良く一致していることが分る。また、図中の矩形枠内の分数は1000組の同定結果のうち確率楕円内に含まれるものの数である。各ケースとも信頼度95%の確率楕円に含まれる同定結果は950/1000に近い値を示しており、理論値との一致度は良いと言える。

以上のように、観測ノイズの同定パラメータに及ぼす影響は、確率楕円による信頼性領域という形で評価できることが確認された。

3. 先験的情報による信頼性領域の縮小化

観測ノイズに影響された同定パラメータの信頼性領域を縮小化する手段として、先験的情報を用いた同定解析が有効と考えられる^{9),10)}。ここで、先験的情報を用いた同定解析とは Bayes 推定のことを指している⁹⁾。先験的情報を用いた同定結果の信頼性領域の評価を行う場合には、同定パラメータの観測ノイズに対する感度を求め直す必要が有る¹¹⁾。従って、以下に Bayes 推定の場合の同定パラメータの観測ノイズに対する感度を求める式を誘導する。次にその感度を用い、簡単な例題に適用して、先験的情報を用いた時の同定パラメータの信頼性領域を求める。

(1) 感度方程式の誘導

先験的情報として、同定パラメータの統計的性質が正規分布で与えられるとき、その平均値及び分散・共分散が以下のように与えられているものとする。

$$E[X] = \bar{X}, \quad E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] = M \quad (12)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値を表している。また、式(3)の観測ノイズの大きさ ε_ℓ の統計的性質が、

$$E[\varepsilon] = 0, \quad E[\varepsilon\varepsilon^T] = R \quad (13)$$

で与えられるとき、Bayes推定の考え方に基づく評価関数は以下ようになる。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^n \{\ddot{u} - \ddot{z}(X)\}^T R^{-1} \{\ddot{u} - \ddot{z}(X)\} dt + \frac{1}{2} (X + \bar{X})^T M^{-1} (X + \bar{X}) \quad (14)$$

いま、観測点 ℓ の観測応答値 \ddot{u}_ℓ が真値 \ddot{u}_ℓ より $\Delta\ddot{u}_\ell$ だけ誤差を含んでおり、その他の観測点の応答には全く誤差が含まれていないとする。観測ノイズの影響により、式(14)の評価関数は

$$J = \frac{1}{2} \int_0^n \{\ddot{u}' - \ddot{z}(\bar{X} + \Delta X^{(\ell)})\}^T R^{-1} \{\ddot{u}' - \ddot{z}(\bar{X} + \Delta X^{(\ell)})\} dt + \frac{1}{2} (\bar{X} + \Delta X^{(\ell)} - \bar{X})^T M^{-1} (\bar{X} + \Delta X^{(\ell)} - \bar{X}) \quad (15)$$

と表すことができる。ここで、

$$\ddot{u}' = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_\ell + \Delta\ddot{u}_\ell \\ \ddot{u}_{\ell+1} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (16)$$

である。また、 $\Delta X^{(\ell)}$ は観測点 ℓ の観測ノイズに影響された同定パラメータ \bar{X} の変動量を表しており、式(5)より

$$\Delta X^{(\ell)} = \Gamma_\ell \varepsilon_\ell \quad (17)$$

と表せる。ここで、

$$\Gamma_\ell = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon_\ell} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \varepsilon_\ell} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_m}{\partial \varepsilon_\ell} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

であり、 Γ_ℓ が同定パラメータの観測ノイズに対する感度ベクトルである。 $\Delta X^{(\ell)}$ の $\ddot{z}(t)$ に及ぼす影響は小さいと考え、Taylor展開により近似的に

$$\ddot{z}(\bar{X} + \Delta X^{(\ell)}) = \ddot{z}(\bar{X}) + H_x \Gamma_\ell \varepsilon_\ell \quad (19)$$

と表せる。ここで、

$$H_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{z}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \ddot{z}_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial \ddot{z}_1}{\partial X_m} \\ \frac{\partial \ddot{z}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \ddot{z}_2}{\partial X_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \ddot{z}_n}{\partial X_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \ddot{z}_n}{\partial X_m} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(17)と式(19)を式(15)に代入して整理すると

$$J = \frac{1}{2} \varepsilon_\ell^T \int_0^n \{\Psi_\ell - H_x \Gamma_\ell\}^T R^{-1} \{\Psi_\ell - H_x \Gamma_\ell\} dt + \frac{1}{2} \varepsilon_\ell^T \Gamma_\ell^T M^{-1} \Gamma_\ell \varepsilon_\ell \quad (21)$$

となる。ここで、

$$\Psi_\ell = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_\ell \\ \psi_{\ell+1} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \eta_\ell(t) \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (22)$$

観測ノイズの大きさ ε_ℓ に関係なく式(21)が最小となる条件より、

$$dJ = d\Gamma_\ell^T \left\{ - \int_0^n H_x^T R^{-1} (\Psi_\ell - H_x \Gamma_\ell) dt + M^{-1} \Gamma_\ell \right\} = 0 \quad (23)$$

式(23)より感度方程式は、

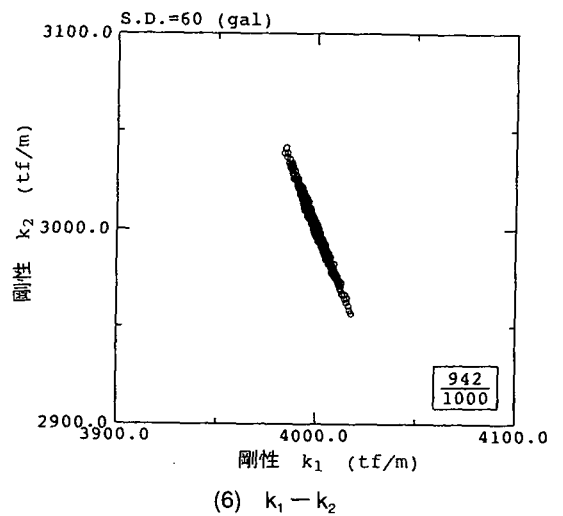
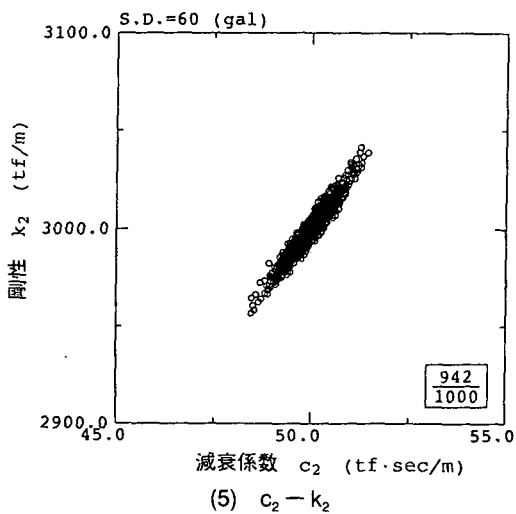
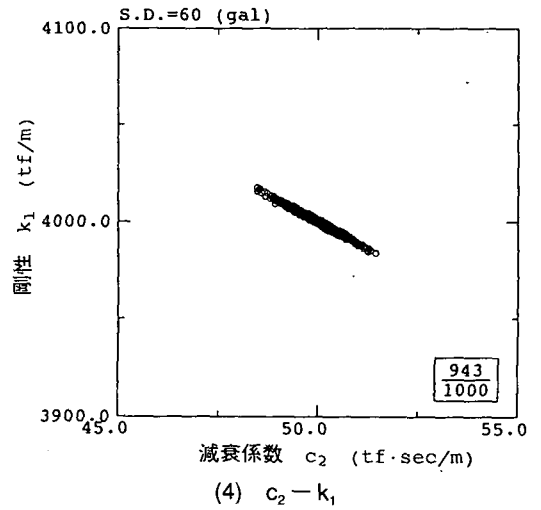
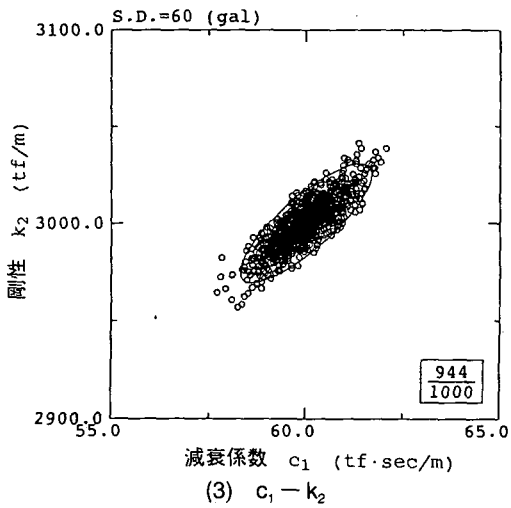
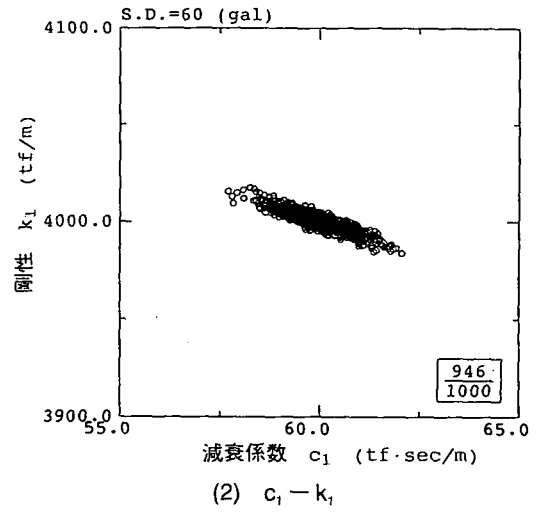
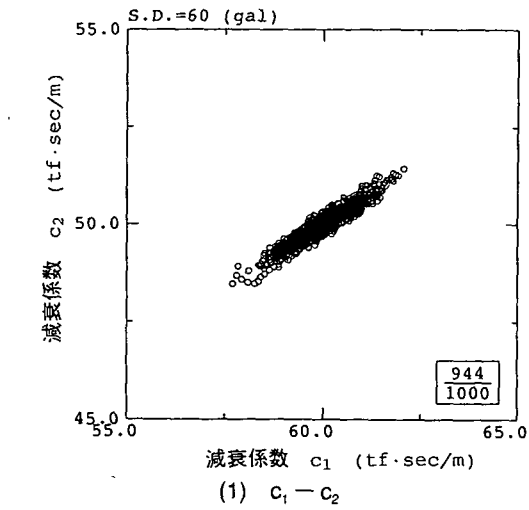


図-3 同定結果の信頼性領域 (先験的情報を用いた場合)

$$\left\{ \int_0^{\ell} H_x^T R^{-1} H_x dt + M^{-1} \right\} \Gamma_{\ell} = \int_0^{\ell} H_x^T R^{-1} \Psi_{\ell} dt \quad (24)$$

($\ell \in A$)

となる。式 (24) の連立方程式を解くことにより感度
が得られ、式 (6) の誤差伝播則から同定パラメータ
の分散・共分散行列が得られる。

(2) 例題

理論を確認するため、2. (2) の例題で使用した2質
点系モデルを用いて同様な方法で数値実験を行った。
観測量に加える観測ノイズは、2. (2) で用いたものを
そのまま使用した。

2. (2) の例題と条件を合わせるために、観測ノイズ
の分散・共分散行列は $R_{ii} = 1.0, (i = 1, 2), R_{ij} = 0.0, (i \neq j)$ とした。また、事前情報としては、減衰係数、剛性
ともに平均値および変動係数 $COV = 0.005$ が与えられ
ているものとした。

同定結果と理論から求めた推定値との比較を図-3
に示す。図中の確率楕円は式 (11) より自由度2、信
頼度95%の信頼限界を表している。このときの同定パ
ラメータの観測ノイズに対する感度は式 (24) の感度
方程式より求めたものである。○印は同定結果をプ
ロットしたものである。全てのパラメータで、事前情
報を用いることにより同定結果のばらつきが小さく
なっている。これは、事前情報として与えた同定パラ
メータの分散が拘束条件として働いていることを示
している。図より同定結果の分布と理論から求めた
確率楕円は良く一致していることが分る。各ケース
とも信頼度95%の確率楕円に含まれる同定結果は
950/1000に近い値を示しており、理論値との一致度
は良いと言える。

4. 結 論

本論文は、動的な構造パラメータの同定問題にお
いて、観測ノイズに影響される同定パラメータの信
頼性領域を推定する手法を提案し、数値実験により
理論の検証を行った。理論の定式化および数値実験

の結果より、結論を以下のように要約できる。

- (1) 観測ノイズに影響される同定パラメータの信頼
性領域は、確率楕円として評価することができ
る。
- (2) 観測ノイズが同定パラメータに及ぼす影響を小
さくすることを目的として、先験的情報を用い
た評価関数の定式化をした場合の同定パラメ
ータの信頼性領域を推定する理論式の定式化を
行った。
- (3) 本論で提案した同定結果の信頼性領域の推定値
は、実際の同定結果の分布と良く一致する。

本論で提案した手法を実用化するにあたり、観測
ノイズの統計的性質の入手の可否が問題となる。こ
れは観測データを十分に蓄積することによって実現
が可能になると考えている。

参考文献

- 1) 栗田哲史, 松井邦人: 既知パラメータの誤差に影響さ
れる同定パラメータの信頼性領域の評価, 土木学会論
文集, No.537/I-35, pp.267-275, 1996年4月。
- 2) Matsui, K. and Kurita, T.: Sensitivities of parameters
due to model errors and measurement noises in
structural identification problems, *Proceedings of JSCE,
Structural Engineering/Earthquake Engineering*,
No.422/I-14, pp.145-154, October 1990.
- 3) 栗田哲史, 松井邦人: 周波数領域の同定問題における
モデルパラメータ誤差, 観測ノイズの影響, 土木学会
論文集, No.525/I-33, pp.163-170, 1995年10月。
- 4) 辻原治, 沢田勉, 平尾潔: 地震時地盤の同定問題に適
用する非線形最適化手法の比較, 土木学会論文集,
No.489/I-27, pp.277-280, 1994年4月。
- 5) 吉田郁政, 豊田耕一, 星谷勝: 2次元FEMを用いた
確率論に基づく逆解析の定式化とその解法, 土木学会
論文集, No.507/I-30, pp.129-136, 1995年1月。
- 6) 松浦充宏: 地球物理学におけるインバージョン理論の
発展, 地震, 第2輯, 第44巻, pp.53-62, 1991年。
- 7) Jackson, D. D. and Matsu'ura, M.: A Bayesian approach
to nonlinear inversion, *Journal of Geophysical Research*,
Vol.90, No.B1, pp.581-591, January 1985.
- 8) 田島稔, 小牧和雄: 最小二乗法の理論とその応用, 東
洋書店, 1986年2月。
- 9) 中川徹, 小柳義夫: 最小二乗法による実験データ解
析, 東京大学出版会, 1982年5月。

(1996. 6. 6 受付)

CONFIDENCE REGION OF IDENTIFIED PARAMETERS DUE TO EFFECTS OF MEASUREMENT NOISE

Tetsushi KURITA and Kunihito MATSUI

This paper presents a method to estimate the effect of measurement noise on identified parameters in structural parameter identification problems. The effects of noise is given as a confidence region of identified parameters using the propagation law of errors and sensitivity of parameters with respect to errors. Furthermore, regarding an identification method based on the concept of prior information, a similar formula for the confidence region is derived. The validity of the formula is confirmed by numerical simulation.