

水深積分モデルによる波状路床上の流れの 底面せん断応力解析

細田 尚¹・村本嘉雄²・宮本雅章³

¹正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606 京都市左京区吉田本町)

²正会員 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606 京都市左京区吉田本町)

³正会員 工修 日本道路公団 (〒100 東京都千代田区霞ヶ関3の3の2)

本研究は、小規模河床波の発達領域までを再現するために、実用的には水深積分モデルが便利との観点から、流れの非回転条件と加速・減速効果を考慮することにより流速分布の局所的な変化を積分モデルに導入し、波状路床上の底面せん断応力分布を解析する方法を示した。基礎式は鉛直加速度を考慮した水面形方程式であり、摂動法により導かれた基礎式の2次までの解を求めるとともに、底面せん断応力分布に関する従来の実験結果と比較することにより、解析法の適用性を検証した。

Key Words: open channel flows, flow over a wavy bed, wall shear stresses, perturbation method

1. はじめに

本研究は、正弦波状路床上の流れの底面せん断応力分布について、実用的簡便さの観点から、開水路流れの水深積分モデルを用いて評価する方法について考察している。

波状路床上の流れは、従来より1次元解析法を適用して導かれる鉛直加速度を考慮した水面形方程式を用いる方法¹⁾、および鉛直2次元流れとしての解析法^{2), 3), 4)}によって、波状路床と水面波および水深波の応答、底面せん断応力分布の評価などの研究が行われており、主として解析的に得られた線形解の特性ならびに実験結果との適合性が考察されてきた。

このような波状路床上の流れ解析法を用いて小規模河床波の発生・発達を再現する場合、解析の容易さを考えると、鉛直2次元または3次元モデルより水深積分モデルの適用が可能であれば実用的に便利である。その場合、流れの運動量方程式に現われる底面せん断応力項を精度良く評価する必要がある。

Boussinesqに始まる鉛直加速度を考慮した積分モデルを用いた解析では¹⁾、流速分布の相似性(または一様性)が仮定されており、底面せん断応力の評価も漸変流における通常の抵抗則が用いられているため、せん断応力分布を再現できない。さらに、抵抗則に流脈の漸縮・漸拡による流れの加速・減速効果を考慮した場合においても、モデルの適合性に若干の改善が見られるものの、河床波の発生・発達が再

現可能となる精度は得られていない⁵⁾。

一方、河床波の発生に関して、Kennedy⁶⁾、林⁷⁾は流れをポテンシャル流として扱い、路床近傍の流速と流砂量の位相差を導入することにより河床波の発生を説明している。さらに、中川・辻本⁸⁾は位相差の水理学的意味を明らかにするとともに、流速と路床のせん断応力の位相差を、ポテンシャル流解析から得られる局所流速に加速・減速効果を考慮することで評価できることを示している。

そこで、本研究では鉛直加速度を考慮した波状路床上の開水路流れの基礎式を導くとともに、路床からある程度離れた領域の近似と考えられるポテンシャル流の流速分布を水深積分モデルに導入する方法を示す。さらに、路床近傍での加速・減速効果を併せて考慮することにより、正弦波路床上の底面せん断応力分布に関する従来の実験結果とほぼ適合する結果が得られることを示す。

2. 流速分布の変化を考慮した基礎式とその無次元化

(1) 鉛直加速度を考慮した波状路床上の開水路流れの基礎式

まず、Boussinesqが導いた、鉛直加速度を考慮した波状路床上の水面形方程式の導出過程を簡単に示しておこう。図-1に用いる座標系と記号を示す。

x -方向の流速成分の水深方向分布の一様性を仮

定すると、式 (1) となる。

$$u(x, y) = U(x) \quad (1)$$

ここに、 u : 流速ベクトルの x -方向成分、 U : 水深平均流速。

式 (1) を連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

に代入し、 y から自由水面 y_s まで積分すると式 (3) が得られる。

$$v = nU \frac{dh}{dx} + U \frac{dy_b}{dx} \quad (3)$$

ここに、 v : 流速ベクトルの y -方向成分、 h : 水深、 y_b : 基準面からの路床高さ。また、 n は $n \equiv (y - y_b)/h$ で定義される相対水深を表す。

式 (3) を鉛直方向の運動方程式

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (4)$$

に代入し、 y から自由水面 y_s まで積分すると圧力分布の表示式 (5) が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & gh \cos \theta (1-n) - U^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \frac{1-n^2}{2} \\ & - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} (1-n) + U^2 h \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{1-n^2}{2} + U^2 h \frac{d^2 y_b}{dx^2} (1-n) \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) を運動方程式の x -方向成分に代入し、路床から水面まで積分すると次式となる。

$$\frac{d(U^2 h)}{dx} + \frac{dP}{dx} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{dy_b}{dx} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{d(-\overline{u^2 h})}{dx} \quad (6)$$

ここに、 P は次式で定義される。

$$\begin{aligned} P \equiv \int_{y_b}^{y_s} \frac{p}{\rho} dy = & \frac{gh^2}{2} \cos \theta + \frac{hq^2}{3} \left\{ -\frac{1}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \right\} \\ & - \frac{hq^2}{2} \left(\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} - \frac{1}{h} \frac{d^2 y_b}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 q : 単位幅流量を表す。

式 (6) の右辺最終項は乱れによる運動量輸送項であり、本研究では簡単のため渦動粘性係数 $D = \alpha q$ を用いて次式で評価する。

$$-\overline{u^2 h} = D \frac{dU}{dx} = -D \frac{q}{h^2} \frac{dh}{dx} \quad (8)$$

α は係数であり、本研究では波状跳水を対象に同定された 0.05 を用いる⁹⁾。

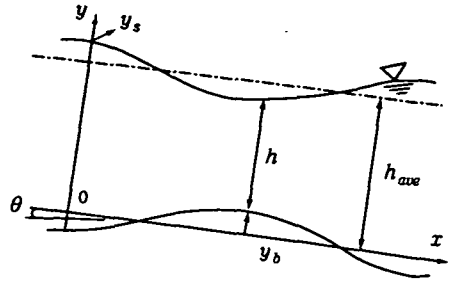


図-1 座標系と記号の説明

(2) 流速分布形の局所的变化を考慮したモデルの改良

流速分布形の変化を正確に考慮するためには、鉛直 2次元流れとしての取扱いが必要と考えられる。しかし、前述のように水深積分モデルを用いて路床のせん断応力がある程度正確に評価できれば、鉛直 2次元解析より河床波の発生・発達への解析が非常に容易である。そこで、次に積分モデルの範囲で底面せん断応力をより精度良く評価する方法を考察する。

河床波の発生に関して、Kennedy⁶⁾、林⁷⁾は流れをポテンシャル流として扱い、路床近傍の流速と流砂量の位相差を導入することにより河床波の発生を説明している。さらに、中川・辻本⁸⁾は位相差の水理学的意味を明らかにするとともに、流速と路床のせん断応力の位相差を、ポテンシャル流解析から得られる局所流速に加速・減速効果を考慮することで評価できることを示した。そこで、本研究では路床からある程度離れた領域の近似と考えられるポテンシャル流の流速分布を水深積分モデルに導入する方法を示し、併せて路床近傍の加速・減速効果を考慮することで底面せん断応力を評価する。

まず路床からある程度離れた領域の流速分布形の変化を、流れの非回転条件を用いて考慮する。すなわち、第 1 近似としての流速の 1 様分布を用いて求めた鉛直流速式 (3) を、非回転条件

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

に代入し、水深積分することによって流速分布の第 2 次近似を求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} u = & \frac{q}{h} + \frac{q}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \left(\frac{1}{3} - n^2 \right) + \frac{q}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} (1-2n) \\ & - q \frac{d^2 h}{dx^2} \left(\frac{1}{6} - \frac{n^2}{2} \right) - q \frac{d^2 y_b}{dx^2} \left(\frac{1}{2} - n \right) \end{aligned} \quad (10)$$

中川・辻本と同様に、式 (11) を用いて流速分布形の変化に伴う底面せん断応力を評価する。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = f u_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} \right) \quad (11)$$

ここに、 Γ : 定数, u_b : 路床近傍の流速であり, 式 (10) に $n=0$ を代入した次式で評価する。

$$u_b = \frac{q}{h} + \frac{q}{3h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{q}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} - \frac{q}{6} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{q}{2} \frac{d^2y_b}{dx^2} \quad (12)$$

流速分布形の変化とともに圧力分布式 (5) も変化するが, 非常に複雑になること, 水面形については従来の解析結果と実験結果がほぼ適合していることから, 簡単のため式 (5) を用いることとする。

3. 波状管路流れの壁面せん断応力への適用

2. で示した基礎式を波状路床上の開水路流れに適用する前に, 自由表面が存在せず断面平均流速が一意に決まる管路流れを対象に, 壁面せん断応力評価モデルの適用性を検証する。

(1) 管路の場合の壁面せん断応力の表示

図-2 に示した波状の壁面を有する円管路の座標系の下で, 開水路流れの場合と同様の壁面せん断応力の表示を導けば, 式 (13) となる。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = f \left(\frac{Q}{\pi h^2} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} h \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{3}{8} h \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \frac{d^2h}{dx^2} + \frac{9}{16} \left(\frac{dh}{dx} \right)^4 + \frac{1}{16} h^2 \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right)^2 \right\} \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} \right) \quad (13)$$

(2) Hsu・Kennedy¹⁰⁾ の実験結果との比較

式 (13) を用いて Hsu・Kennedy が空気流に対して行った波状円管路実験の壁面せん断応力を評価し, 実験結果と比較する。実験条件を表-1 に示した。

Hsu・Kennedy の実験条件の下で $\Gamma=3$ として計算した底面せん断応力分布と実験結果を比較したのが図-3 および図-4 であり, 両者はよく一致していることがわかる。(摩擦係数 f の値は, 摩擦速度の実験結果から定めた。)

4. 開水路流れの場合の摂動解

波状管路の場合と同様に, 波状路床上の流れの底面せん断応力分布を計算する。開水路流れの場合は, 水深または断面平均流速が未知となるため, 底面せん断応力のモデル式 (11) を運動量方程式 (6) (または水面形方程式) に組み込んで水深分布を求めた

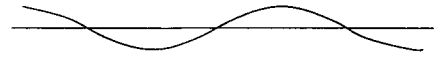


図-2 波状管路の座標系と記号の説明

表-1 Hsu・Kennedy の実験条件

	Wave Length λ (cm)	Amplitude a (cm)	Radius R (cm)	Average Velocity U_0 (cm/s)
Model I	25.39	0.56	12.44	1423
Model II	50.78	0.56	12.44	1423

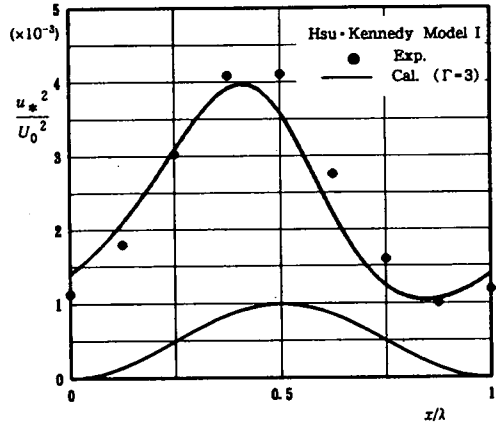


図-3 Hsu・Kennedy の実験結果と解析結果の比較 (Model I)

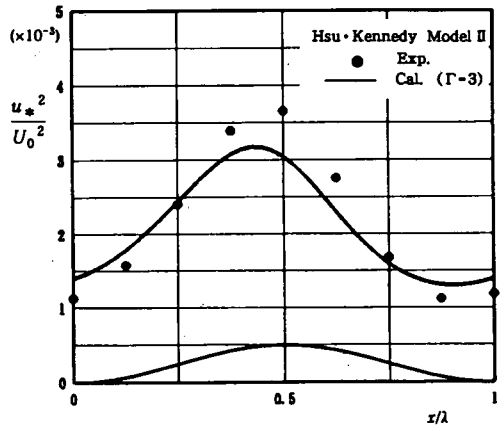


図-4 Hsu・Kennedy の実験結果と解析結果の比較 (Model II)

後、せん断応力分布を評価する。

本研究では摂動法を用いて水深に関する2次までの摂動解を求める。

(1) 基礎式の無次元化

運動量方程式 (6) を単位幅流量 q を用いて U を消去することで水面形方程式に変形した後、無次元化する。図-5に示した波状路床の振幅 a 、波長 λ および河床が平坦な場合の等流水深 $h_0 = (fq^2/g \sin\theta)^{1/3}$ を用いて、式 (14) に示した無次元量を導入し、基礎式を無次元化すれば式 (15) が得られる。

$$\sigma = \frac{x}{\lambda}, \eta = \frac{h}{h_0}, \delta = \frac{y_b}{a}, \varepsilon = \frac{a}{h_0}, \quad (14)$$

$$\mu = \frac{\lambda}{h_0}, Fr_0 = \frac{qh_0}{\sqrt{gh_0 \cos\theta}}$$

$$\frac{1}{3} \frac{d^3\eta}{d\sigma^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \mu^2 \frac{\eta}{Fr_0^2} \frac{d\eta}{d\sigma}$$

$$+ \frac{\mu^2}{\eta} \left(\frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\beta}{\eta} \frac{d\eta}{d\sigma} \right) + \frac{1}{3\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^3 - f\mu^3 (\eta - T)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{d^3\delta}{d\sigma^3} + \frac{\varepsilon}{2\eta} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} - \frac{\varepsilon^2}{\eta} \frac{d\delta}{d\sigma} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} - \mu^2 \varepsilon \frac{\eta}{Fr_0^2} \frac{d\delta}{d\sigma}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} \frac{d\eta}{d\sigma} \left(\frac{d\delta}{d\sigma} \right)^2 + \alpha\mu \left(\frac{1}{\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 - \frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \right) \quad (15)$$

波状路床の振幅 a と平坦河床の等流水深 h_0 の比 ε を摂動のパラメータとして、 η を式 (16) のように表示する。

$$\eta = 1 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \dots \quad (16)$$

摂動のパラメータとして ε の他に波形勾配 $\kappa = a/\lambda$ が考えられるが、その場合の解は本解析結果に $\varepsilon = \kappa\mu$ を代入して得られる。

式 (15) 中、運動量係数 β 、および底面せん断応力項 T を示せば次のようになる。

$$\beta = 1 + \frac{4}{45\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^4 + \frac{\varepsilon^2}{3\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{d\delta}{d\sigma} \right)^2 + \frac{\eta^2}{45\mu^4} \left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \right)^2$$

$$+ \frac{\varepsilon^2\eta^2}{12\mu^4} \left(\frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{3\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^3 \frac{d\delta}{d\sigma} - \frac{4\eta}{45\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 \frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$$

$$- \frac{\varepsilon\eta}{6\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} - \frac{\varepsilon\eta}{6\mu^4} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \frac{d\delta}{d\sigma} - \frac{\varepsilon^2\eta}{3\mu^4} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \frac{d\delta}{d\sigma}$$

$$+ \frac{\varepsilon\eta^2}{12\mu^4} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \quad (17-a)$$

$$T = \frac{1}{\eta^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3\mu^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 + \frac{2\varepsilon}{\mu^2} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d\delta}{d\sigma} - \frac{\eta}{3\mu^2} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon\eta}{\mu^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} + \frac{1}{9\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^4 + \frac{2\varepsilon}{3\mu^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^3 \frac{d\delta}{d\sigma} \right.$$

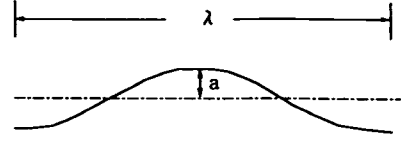


図-5 波状路床の特性量

$$- \frac{\eta}{9\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} - \frac{\varepsilon\eta}{3\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} + \frac{\varepsilon^2}{\mu^4} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{d\delta}{d\sigma} \right)^2$$

$$- \frac{\varepsilon\eta}{3\mu^4} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \frac{d\delta}{d\sigma} - \frac{\varepsilon^2\eta}{\mu^4} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \frac{d\delta}{d\sigma} + \frac{\eta^2}{36\mu^4} \left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \right)^2$$

$$+ \frac{\varepsilon\eta^2}{6\mu^4} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} + \frac{\varepsilon^2\eta^2}{4\mu^4} \left(\frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \right)^2 \left\{ 1 - \Gamma \frac{1}{\mu} \frac{d\eta}{d\sigma} \right\} \quad (17-b)$$

また、 β と T の ε に関する2次のオーダーまでの展開を示せば次のようになる。

$$\beta = 1 + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{45\mu^4} \left(\frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{12\mu^4} \left(\frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12\mu^4} \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \right\} \quad (18-a)$$

$$T = 1 + \varepsilon \left\{ -\frac{1}{3\mu^2} \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} - \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} - 2\eta_1 - \frac{\Gamma}{\mu} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \right\}$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{36\mu^4} \left(\frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{4\mu^4} \left(\frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{2}{3\mu^2} \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma} \right)^2 \right.$$

$$+ \frac{2}{\mu^2} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d\delta}{d\sigma} - \frac{1}{3\mu^2} \frac{d^2\eta_2}{d\sigma^2} - \frac{\eta_1}{3\mu^2} \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} - \frac{\eta_1}{\mu^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2}$$

$$+ \frac{1}{6\mu^4} \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} + \frac{2\eta_1}{3\mu^2} \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} + \frac{2\eta_1}{\mu^2} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2}$$

$$- 2\eta_2 + 3\eta_1^2 - \frac{\Gamma}{\mu} \left(\frac{d\eta_2}{d\sigma} - \frac{1}{3\mu^2} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\mu^2} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} - 2\eta_1 \frac{d\eta_1}{d\sigma} \right\} \quad (18-b)$$

路床高さを

$$\delta = \cos(2\pi\sigma) \quad (19)$$

とおいて式 (15) に代入し、 ε の次数に応じて整理すれば1次と2次のオーダーに関して式 (20) および式 (21) が得られる。

1st order :

$$\frac{1}{3} \frac{d^3\eta_1}{d\sigma^3} + \alpha\mu \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} + \mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{d\eta_1}{d\sigma} - 3f\mu^3\eta_1$$

$$- f\mu \left(\frac{1}{3} \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} + \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} \right) - \Gamma f\mu^2 \frac{d\eta_1}{d\sigma}$$

$$= \left(\frac{2\pi\mu^2}{Fr_0^2} - \frac{(2\pi)^3}{2} \right) \sin(2\pi\sigma) \quad (20)$$

2nd order :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} \frac{d^3 \eta_2}{d\sigma^3} + \alpha \mu \frac{d^2 \eta_2}{d\sigma^2} + \mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{d\eta_2}{d\sigma} - 3f\mu^3 \eta_2 \\
 & - f\mu \frac{1}{3} \frac{d^2 \eta_2}{d\sigma^2} - \Gamma f \mu^2 \frac{d\eta_2}{d\sigma} \\
 = & \frac{2}{3} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} - \left(\frac{\mu^2}{Fr_0^2} + 2\mu^2 \right) \eta_1 \frac{d\eta_1}{d\sigma} \\
 & - 3f\mu^3 \eta_1^2 + \alpha \mu \left\{ \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma} \right)^2 + \eta_1 \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} \right\} \\
 & - f\mu^3 \left\{ \frac{1}{36\mu^4} \left(\frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{4\mu^4} \left(\frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{2}{3\mu^2} \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma} \right)^2 \right. \\
 & + \frac{2}{\mu^2} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d\delta}{d\sigma} - \frac{\eta_1}{3\mu^2} \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} - \frac{\eta_1}{\mu^2} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} + \frac{1}{6\mu^4} \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} \\
 & \left. + \frac{2\eta_1}{3\mu^2} \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} + \frac{2\eta_1}{\mu^2} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} \right\} \\
 & - \mu^2 \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{45\mu^4} \left(\frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{12\mu^4} \left(\frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{12\mu^4} \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} \right\} \\
 & - \frac{(2\pi)^2}{2} \cos(2\pi\sigma) \frac{d\eta_1}{d\sigma} - (2\pi)^3 \sin(2\pi\sigma) \cos(2\pi\sigma) \\
 & + \frac{2\pi\mu^2}{Fr_0^2} \eta_1 \sin(2\pi\sigma) + \Gamma f \mu^2 \left(-\frac{1}{3\mu^2} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\mu^2} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} - 2\eta_1 \frac{d\eta_1}{d\sigma} \right) \quad (21)
 \end{aligned}$$

(2) 1次と2次の摂動解 η_1 を

$$\eta_1 = A_1 \cos(2\pi\sigma + \phi_1) \quad (22)$$

とにおいて式 (20) に代入すれば, A_1 と ϕ_1 の関係式

$$\begin{aligned}
 -A_1 P_1 \sin\phi_1 + A_1 Q_1 \cos\phi_1 &= R_1 \\
 A_1 P_1 \cos\phi_1 + A_1 Q_1 \sin\phi_1 &= S_1 \quad (23)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここに, P_1, Q_1, R_1, S_1 は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 P_1 &= -3f\mu^3 - (2\pi)^2 (\alpha\mu - f\frac{\mu}{3}), \\
 Q_1 &= \frac{(2\pi)^3}{3} - 2\pi\mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) + 2\pi\Gamma f \mu^2, \\
 R_1 &= \frac{2\pi\mu^2}{Fr_0^2} - \frac{(2\pi)^3}{2}, \quad S_1 = -f\mu(2\pi)^2 \quad (24)
 \end{aligned}$$

式 (23) を解けば A_1 と ϕ_1 の表示式 (25) が導かれる。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\sqrt{R_1^2 + S_1^2}}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}}, \quad \cos\phi_1 = \frac{Q_1 R_1 + P_1 S_1}{A_1 (P_1^2 + Q_1^2)}, \\
 \sin\phi_1 &= \frac{Q_1 S_1 - P_1 R_1}{A_1 (P_1^2 + Q_1^2)} \quad (25)
 \end{aligned}$$

A_1 は水深変動と河床変動の振幅比であり, 振幅が最大になる関係式 (共鳴関係式) (26), 振幅最小の関係式 (27) が導かれる。

$$Fr_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2\pi/\mu)^2 + 3\Gamma f + 3}} \quad (26)$$

$$Fr_0 = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi/\mu)} \quad (27)$$

2次の解も η_2 を

$$\eta_2 = A_{20} + A_{22} \cos(4\pi\sigma + \phi_2) \quad (28)$$

として式 (21) に代入すれば, 1次の場合と同様に, 次式が導かれる

$$\begin{aligned}
 A_{20} &= -\frac{B_{20}}{3f\mu^3}, \quad A_{22} = \sqrt{\frac{B_{21}^2 + B_{22}^2}{P_2^2 + Q_2^2}}, \\
 \sin\phi_2 &= \frac{B_{21}Q_2 - B_{22}P_2}{A_{22}(P_2^2 + Q_2^2)}, \quad \cos\phi_2 = \frac{B_{21}P_2 + B_{22}Q_2}{A_{22}(P_2^2 + Q_2^2)} \quad (29)
 \end{aligned}$$

ここに, B_{20}, B_{21}, B_{22} は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 P_2 &= -3f\mu^3 - (4\pi)^2 (\alpha\mu - \frac{f\mu}{3}), \\
 Q_2 &= \frac{(4\pi)^3}{3} - 4\pi\mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) + 4\pi\Gamma f \mu^2, \\
 B_{20} &= -fA_1^2 \left(\frac{3}{2} \mu^3 + \frac{(2\pi)^4}{72\mu} + \frac{(2\pi)^2 \mu}{6} \right) - f \frac{(2\pi)^4}{8\mu} \\
 & - \frac{f}{2} \left(\mu(2\pi)^2 + \frac{(2\pi)^4}{6\mu} \right) A_1 \cos\phi_1 \\
 & + \left(\frac{(2\pi)^3}{4} - \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} - \Gamma f \frac{(2\pi)^3}{2} \right) A_1 \sin\phi_1 \\
 B_{21} &= -f \frac{(2\pi)^4}{8\mu} + \left(\frac{3}{2} f\mu(2\pi)^2 - f \frac{(2\pi)^4}{12\mu} \right) A_1 \cos\phi_1 \\
 & + \left(\frac{(2\pi)^5}{12\mu^2} + \frac{(2\pi)^3}{4} + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} - \Gamma f \frac{(2\pi)^3}{2} \right) A_1 \sin\phi_1 \\
 & + \left\{ \frac{(2\pi)^3}{3} + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} + 2\pi\mu^2 + \frac{(2\pi)^5}{45\mu^2} \right. \\
 & \left. + \Gamma f \left(2\pi\mu^2 - \frac{(2\pi)^3}{6} \right) \right\} A_1^2 \sin 2\phi_1 \\
 & - \left(\frac{3f\mu^3}{2} + \alpha\mu(2\pi)^2 + f \frac{(2\pi)^4}{72\mu} - \frac{(2\pi)^2}{2} f\mu \right) A_1^2 \cos 2\phi_1 \\
 B_{22} &= \frac{(2\pi)^5}{12\mu^2} - \frac{(2\pi)^3}{2} + \left(\frac{(2\pi)^5}{12\mu^2} + \frac{(2\pi)^3}{4} + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} \right. \\
 & \left. - \Gamma f \frac{(2\pi)^3}{2} \right) A_1 \cos\phi_1 - f \left(\frac{3}{2} \mu(2\pi)^2 - \frac{(2\pi)^4}{12\mu} \right) A_1 \sin\phi_1 \\
 & + \left\{ \frac{(2\pi)^3}{3} + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} + 2\pi\mu^2 + \frac{(2\pi)^5}{45\mu^2} \right.
 \end{aligned}$$

$$+f\Gamma\left(2\pi\mu^2 - \frac{(2\pi)^3}{6}\right)A_1^2\cos 2\phi_1$$

$$+ \left(\frac{3f\mu^3}{2} + a\mu(2\pi)^2 + f\frac{(2\pi)^4}{72\mu} - f\frac{(2\pi)^2}{2}\mu\right)A_1^2\sin 2\phi_1$$

ここで、水深を再記すれば次式となる。

$$\eta = 1 + \frac{a}{h_0}A_1\cos(2\pi\sigma + \phi_1)$$

$$+ \left(\frac{a}{h_0}\right)^2(A_{20} + A_{22}\cos(4\pi\sigma + \phi_2)) \quad (30)$$

上式を波状路床の一波長で平均すれば平均水深の表示として次式が得られる。 ε^2 の項が波状路床の効果による抵抗の増加を表している。

$$h_{ave} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda h dx = h_0(1 + \varepsilon^2 A_{20}) \quad (31)$$

式(31)を見かけの抵抗係数として書き表せば次のようになる。

$$f_{ave} = \frac{u_*^2}{u_{ave}^2} = \frac{gh_{ave}\sin\theta}{(q/h_{ave})^2} = f\left(\frac{h_{ave}}{h_0}\right)^3 = f(1 + \varepsilon^2 A_{20})^3 \quad (32)$$

5. 従来の実験結果と解析結果の比較

これまでに導かれた結果と Yuen・Kennedy¹¹⁾の開水路流れを対象に行われた水理実験を比較し、解析法の適用性を検討する。実験は、表-2に示した2通りの滑面波状路床をもちいて upper regimeを対象に行われ、主に水深分布とプレストン管を用いた底面せん断応力分布が計測されている。

まず水面形について、表-3に示した路床2を用いた実験の結果と解析結果の比較を式(11)の定数を $\Gamma=3$ として図-6に示した。解析結果は実験結果にほぼ適合している。

次に底面せん断応力分布の比較を $\Gamma=3$ として図-7に示した。これを見ると、Run245とRun247は解析結果と実験結果の適合性が良いが、Run252と253は適合していない。ほぼ適合しているRun247について、一樣流速を仮定した場合、一樣流速に加速・減速効果を考慮した場合との比較を図-8に示した。一樣流速の場合は分布形の振幅が非常に小さく、これに加速・減速効果を考慮すると振幅は大きくなるが、位相のずれも大きくなり実験結果と適合しなくなる。図-9は路床と水深波の定性的分類を示しており、Region IとⅢは両者がほぼ逆位相の場合(dh/dx と dy_b/dx が異符号)であり、Region IIとIVは同位相(dh/dx と dy_b/dx が同符号)の場合である。Run245、247は路床と水深波が逆位相の

表-2 波状路床の諸元

	波長 λ (cm)	振幅 a (cm)
路床 1	30.48	1.034
路床 2	45.72	0.701

表-3 Yuen・Kennedyの実験の水理諸量

	Depth h_{ave} (cm)	Average Velocity U_{ave} (cm/s)	Froude Number	Friction Factor f_{ave}
Run 245	10.36	115.5	1.15	0.0022
Run 247	10.06	116.7	1.18	0.0018
Run 252	4.27	94.8	1.47	0.0026
Run 253	3.66	80.2	1.34	0.0026

Region IIIにあり、Run 252、253は同位相のRegion IIにある。解析と実験結果との適合性が良い管路流れは逆位相に分類でき、逆位相のとき適合性が良く同位相のとき悪いことがわかる。

河床波の初期の発達・減衰および伝播方向を再現するためには、せん断応力分布の位相差に関して少なくとも $\pi/2$ の精度が必要と考えられる⁸⁾。そこで、誤差の大きい水深変動と路床が同位相の場合についての適合性を改良するため、便宜的ではあるが式(11)中に路床近傍の加速・減速効果を表す項に水深だけでなく路床変動の空間微分を導入した式(33)を考える。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = f u_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} + \Delta \frac{dy_b}{dx} \right) \quad (33)$$

ここに、 Δ : 定数である。

式(33)は、平均流速場が減速領域($dh/dx > 0$)にあっても路床変動が $dy_b/dx > 0$ のとき、流速分布形の路床近傍の変化により底面せん断応力が増加する場合を再現可能にしたものであり、 Γ と Δ を以下のように定めることにより、管路流れ(dh/dx と dy_b/dx が必ず異符号)で得られた結果を修正することなく、せん断応力分布の適合性が改良されることが示される。

すなわち、管路流れでは $y_b = R - h$ であり、 dy_b/dx の項を考慮せずに $\Gamma=3$ 程度で実験結果と適合したことから、 $\Gamma + \Delta = 3$ となるように Γ と Δ を定める。たとえばRun245とRun252の場合の結果を示したのが図-10である。前者は Γ と Δ の組み合わせによる変化は小さいが、後者はかなり変化し、 $\Gamma=2$ 、 $\Delta=1$ のときに実験結果との適合性が良い。

以上の結果は2次の項まで考慮した解析結果を示

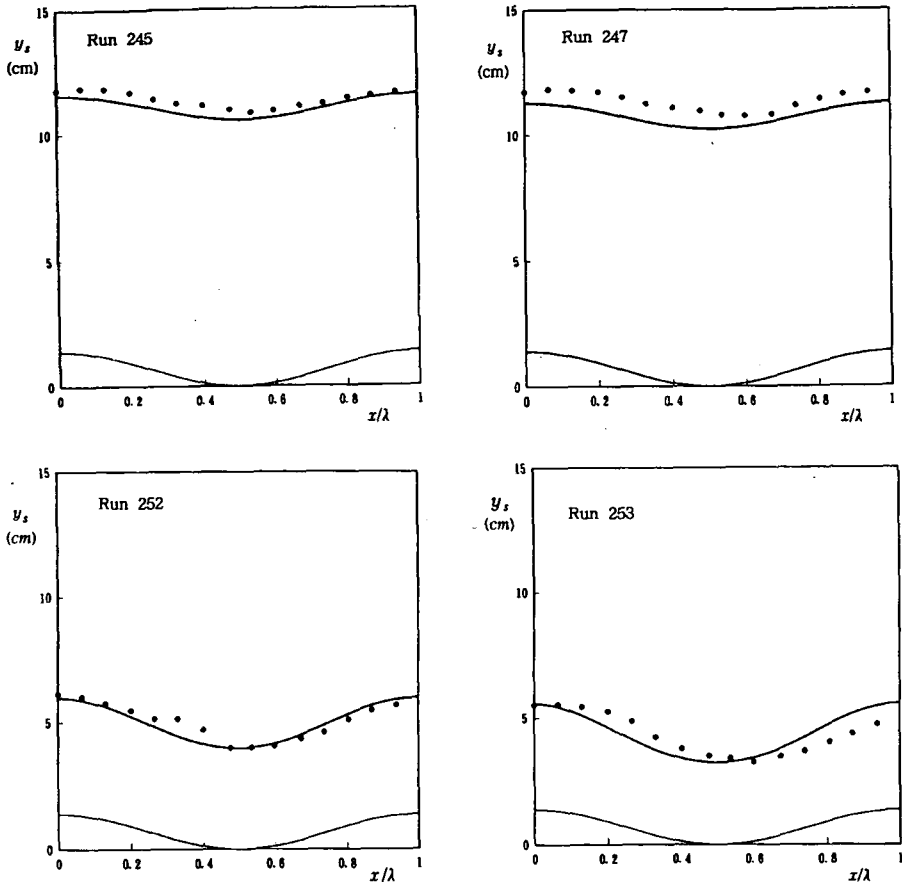


図-6 水面形の比較 ($\Gamma=3$ の結果)

しているが、抵抗係数に及ぼすパラメータである ϵ と波形勾配 a/λ がそれぞれ $0.07 \sim 0.19$ および 0.0153 と小さく、有意な差は認められなかった。ただし、波形勾配 $a/\lambda=0.034$ の波状路床の実験条件では水深分布にかなりの差が生じることが報告されているが⁵⁾、この条件ではせん断応力が計測されていないので示していない。

6. おわりに

本研究は、小規模河床波の発達領域までを再現するためには、実用的には水深積分モデルが便利との観点から、流速分布の局所的な変化を積分モデルに考慮する方法を示し、波状路床上の底面せん断応力分布を評価するための方法を考察したものである。得られた主な結論をまとめると以下ようになる。

(1) 路床よりある程度離れた領域での路床と水面変動の流速分布に及ぼす影響を、流速分布に非回転条件を付加することで考慮することとし、分布形の

変化を水深積分モデルに近似的に導入する方法を示した。

(2) さらに、路床近傍の加速・減速効果を考慮した底面せん断応力の表示式を、鉛直加速度を考慮した水面形方程式に代入し、波状路床上の流れに対する2次までの摂動解を示した。

(3) 本研究で示した底面せん断応力の評価法を波状管路流れに適用し、Hsu・Kennedyの実験結果とよく適合することを示した。

(4) また、波状路床上の開水路流れに対して解析結果と実験結果を比較した結果、路床と水深分布が逆位相のとき(管路流れも逆位相)両者は適合するが、同位相のとき適合せず、加速・減速効果に路床の波形勾配の項を付加することにより修正した。その結果、式(33)の定数が $\Gamma=2, \Delta=1$ のときに実験結果との適合性が良いことが分かった。

これらの結果より、本研究で提案した水深積分モデルを用いて正弦波路床上の流れの底面せん断応力を比較的簡単に見積もることが可能と考えられる。今後、水深積分モデルの利点である数値解析の

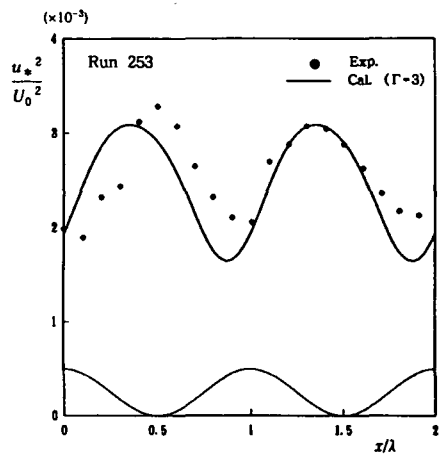
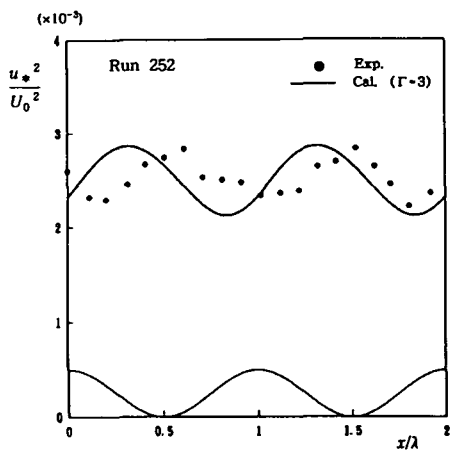
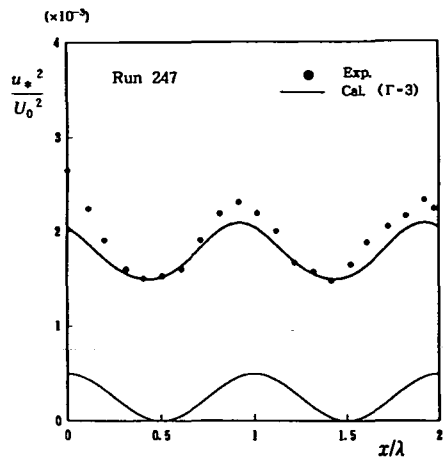
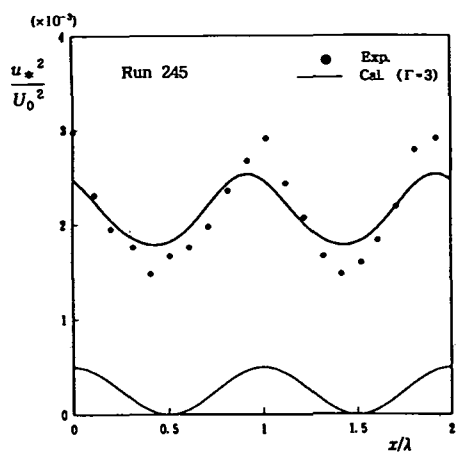


図-7 底面せん断応力分布の比較 ($\Gamma=3$ の場合)

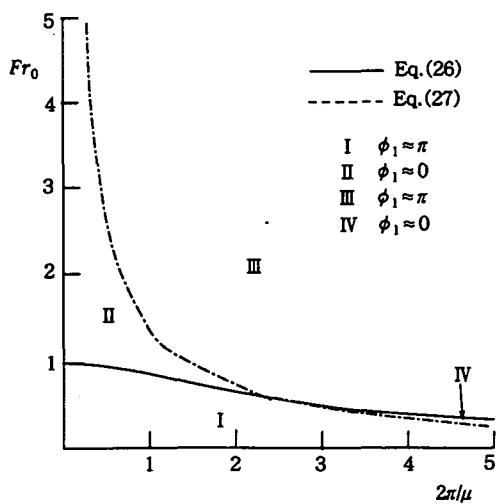
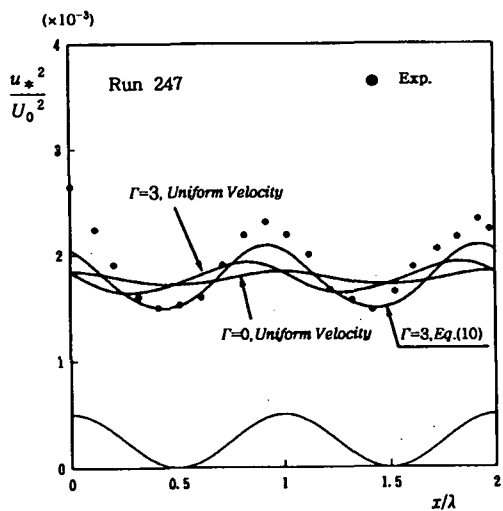


図-8 条件を変化させたときの底面せん断応力分布 (Run247)

図-9 水深変動の位相差の領域区分

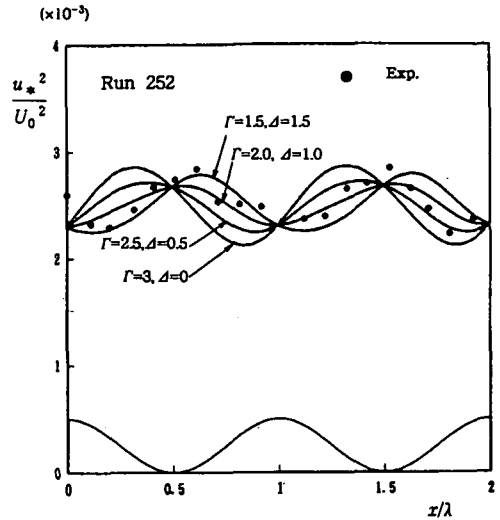
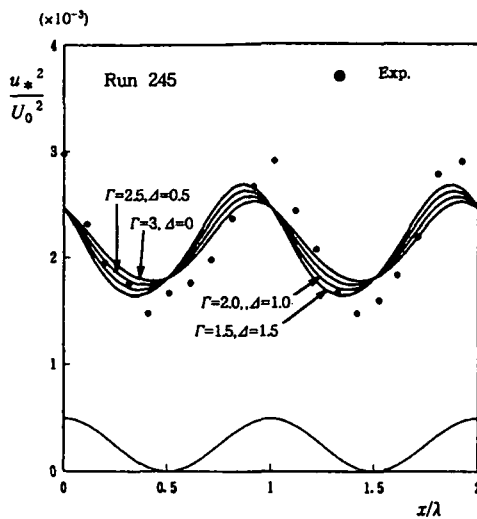


図-10 式 (33) を用いたときの底面せん断応力分布

容易さを生かして、実際の河床波形状に近い形の路床上の流れに適用し、より一層のモデルの検証を進めるとともに、河床波の発生・発達の新現可能性について検討して行きたい。

参考文献

- 1) Iwasa, Y. and Kennedy, J.F.: Free surface shear flow over a wavy bed, *Proc. ASCE*, Vol. 94, HY2, pp.431-454, 1968.
- 2) 日野幹雄, 宮永洋一: 波状境界をもつ二次元管路流の解析, *土木学会論文報告集*, No.264, pp.63-75, 1977.
- 3) 林 泰造, 大西光陽: せん断流モデルによる2次元河床波発生の理論的研究, 第25回水理講演会論文集, pp.85-92, 1981.
- 4) Kobayashi, N.: Turbulent flows over a wavy boundary and formation of bed forms in erodible channels, Dissertation for the degree of Ph D. at MIT, 1979.
- 5) 細田 尚, 村本嘉雄: Upper Regime における波状路床上の流れの非線形解析, *水工学論文集* 第39巻, pp.

- 411-416, 1995.
- 6) Kennedy, J. F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, Vol.16, Part 4, 1963.
- 7) Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, *Proc. ASCE*, Vol. 96, HY2, pp. 357-366, 1970.
- 8) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion, *Proc. ASCE*, Vol.106, HY 12, pp.2029~2051, 1980.
- 9) 細田 尚, 多田彰秀: 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, *水工学論文集* 第38巻, pp.457-462, 1994.
- 10) Hsu, S.T. and Kennedy, J.F.: Turbulent flow in wavy pipes, *J. Fluid Mech.*, Vol.47, pp.481-502, 1971.
- 11) Yuen, A.F.H. and Kennedy, J.F.: A laboratory investigation of free surface flows over wavy beds, *IIHR Report* No.121, Iowa Inst. Hydr. Res., Univ. Iowa, 1971.

(1996.3.1 受付)

BOTTOM SHEAR STRESSES OF FLOWS OVER A WAVY BED BY USING DEPTH AVERAGED FLOW EQUATIONS

Takashi HOSODA, Yoshio MURAMOTO and Masaaki MIYAMOTO

Open channel flows over a wavy bed are investigated theoretically by using the perturbation method for the open channel flow equations. The depth averaged momentum equation including the effect of vertical acceleration is applied to the analysis of free surface profiles and bottom shear stresses. Considering the irrotational condition of flow far from the bottom and the acceleration/de-acceleration effect near the bottom, the local change of the velocity distribution is introduced through the depth integration of the momentum equation in the flow direction. The 1st and 2nd order solutions are derived and are compared with the previous experimental results of depth and bottom shear stresses.