

確率論に基づいた硬化コンクリート中の気泡径分布、 空気量および気泡相諸特性の測定方法の提案

岩崎訓明

フェロー 工博 東洋大学教授 工学部環境建設学科 (〒350 埼玉県川越市鯨井 2100)

硬化コンクリート中の気泡相は、コンクリートの耐凍害性に対して支配的に影響する。また、最近の画像解析手法の進歩により、切断面に現れる気泡径の分布の測定が可能になっている。そこで、本論文では、多数の球を平面で切断したときに生じる円の半径の分布が、もとの球の半径の分布と確率論的に関係づけられていることに着眼し、確率変数を離散変数に変換することによって、コンクリートの切断面に現れた気泡円の半径の度数分布から、気泡半径の度数分布と単位体積当たりの気泡数を求める具体的な方法を案出した。この方法の正当性は、数値計算と実験によって確かめられた。

また、実用に際して精度上必要な気泡円の測定数と測定面積を χ^2 検定の結果に基づいて提示した。

Key Words : *hardened concrete, measurement method, radius distribution of air voids, air content, air-void parameters, probability theory*

1. 緒 論

硬化コンクリート中の気泡相の詳細を明らかにすることは、コンクリートの耐凍害性を研究する上できわめて重要である。しかし、そのための基本情報である気泡径の分布、およびコンクリート単位体積当たりの気泡数を正確に求める方法はまだ得られていない。

硬化コンクリートの気泡相に関するパラメータの測定方法としては、リニアトラバース法が規格化されているが¹⁾、この方法は、硬化コンクリートの切断面に走査線を引き、その線上にある気泡円の弦の個数と総延長から平均弦長を求めて、空気量、気泡間隔係数などを算出するものであって、実際の気泡半径の分布を知ることはできない。また、最近研究されている平均面積法^{2),3)}は、顕微鏡下での計測に長い時間と労力を要するリニアトラバース法の欠点を画像解析手法を応用して改善するものである。

したがって、もし、実際の気泡半径の分布を測定する方法が開発されれば、コンクリートの空気量、気泡の平均半径、平均比表面積など、気泡相の特性を表すパラメータのほとんどのものを正確に算出することができるばかりでなく、コンクリートの耐凍害性との関係も明確に把握することができる。

また、気泡相の詳細が解明できれば、混和剤の種類による気泡相特性の相違や、凍結融解の繰り返し作用に対して空気量よりもさらに直接的に影響する要因を探るこ

とが可能となり、現在推奨されている空気量よりも小さい空気量で、同一レベルの耐凍害性が得られることも期待される。

そこで、本論文では、硬化コンクリートの切断面に現れる気泡円の直径の度数分布から、確率論に基づいて気泡径の分布を推定する方法を考究し、その正当性を数値計算とモデル実験によって検証した。

また、気泡円についての測定値数および測定面積と推定精度との関係を調べて、推定に必要な測定値数と測定面積を示した。さらに、気泡径分布からコンクリートの空気量、気泡間隔係数、その他のパラメータを算出する計算式も参考として示した。

2. 気泡径分布の測定原理

コンクリート試料を1平面で切断したとき、切断面に現れる気泡の断面を「出現円, appeared circle」、出現円が属していたもとの気泡を「原始球, source sphere」と呼ぶこととし、出現円の半径を x 、原始球の半径を r で表すこととする。

出現円は、原始球のどの部分の切断面であるかによってその半径は $0 \sim r$ の範囲で変化しうから、出現円の半径から原始球の半径を直接知ることはできない。しかし、同じ大きさの球を多数用意して、それぞれの球を無作為に1つの平面で切断したとすると、切断面の半径は一定の法則に従って分布し、球の半径に近いものほど多

く、かつ、球の半径より大きいものは0となる。

したがって、原始球がいろいろな半径をもつ球の集合である場合に、各出現円について、それらが属する原始球の大きさを識別することは不可能であっても、最も大きい出現円の半径から最も大きい原始球の半径を知ることができ、また、前記の分布法則から、最も大きい原始球に属している出現円の半径と個数の分布を求めることができる。そして、1個の出現円は1個の原始球にのみ属し、出現円と原始球は1対1の対応をなしているから、最も大きい原始球に属している出現円の数合計することにより、最も大きい原始球の数を求めることができる。

次に、出現円全体から最も大きい原始球に属するものを差し引き、残りの出現円について同様の方法を適用すれば、2番目に大きい半径をもつ原始球の数が求まる。

これを順次繰り返していけば、全ての原始球について半径と個数が求められることになる。原始球半径の分布が求まれば、気泡径の分布は容易に算出できる。

3. 気泡相の半径分布と出現円の半径分布に関する理論的考察

(1) 半径一定の気泡群から生じる出現円の半径の確率密度関数

コンクリート中にはいろいろな大きさの気泡が含まれている。そこで、まず、これらのうちで半径が r の気泡のみに着目し、そこから生じる出現円の半径がどのような分布をなすかを考える。

気泡の数は非常に多く、かつ無秩序に分布しているものとする、 n 個の気泡球から切り出された出現円の半径 x の分布は、1個の球を n 個の平行な平面で等間隔に切断したときに現れる円の半径の分布に等しい。すなわち、半径 r の n 個の球をそれぞれ1つの平面で切断したときに、ある切断面の半径が x である確率は、半径 r の1個の球を n 個の平面で切断したときに、ある切断面の半径が x である確率に等しい。

次に、半径が r の1個の球に着目し、図-1のように x, z 軸をとって切断面を考える。

その場合には、切断面の半径 x と z との関係は

$$z = r - \sqrt{r^2 - x^2} \quad (1)$$

であり、半径が $x + dx$ の切断面に対応する z を $z + dz$ とすると

$$dz = \left(\frac{dz}{dx} \right) dx = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \quad (2)$$

である。

ここで、 $z = 0 \sim r$ の間を一定間隔 δ の複数の水平面で切断すると、半径が $x < x \leq x + dx$ (以後 $x \sim x + dx$) であるような切断面の数の期待値は dz/δ であり、切断

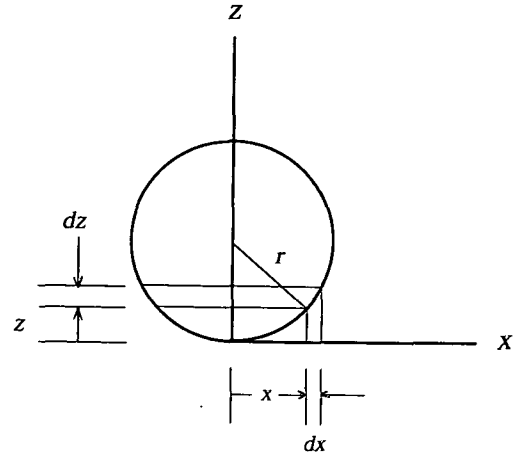


図-1

面の総数は r/δ であるから、このような切断面の出現する確率 P_r は

$$P_r = dz/r = g(x) dx$$

$$g(x) = \frac{x}{r\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (0 \leq x < r) \quad (3)$$

と表される。

したがって、 $g(x)$ は、半径 r の気泡から生じる出現円の半径 x の確率密度関数であり、累積分布関数を $G(x)$ とすれば

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx = 1 - \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \quad (0 \leq x < r) \quad (4)$$

である。

(2) 気泡群の半径の分布と出現円の半径の分布との関係

a) 単位体積当たりの気泡数と出現円数との関係

非常に多くの球形気泡が無秩序に分布しているコンクリートから直方体状の試料を切り出し、切断面である上面全体を測定面として、その面積を A 、高さを H とする(図-2)。

試料に含まれている全気泡のうちで、半径が r の気泡について考えることとし、その総数を N_{tr} とすると、単位体積当たりの気泡数 N_{or} は

$$N_{or} = N_{tr}/AH \quad (6)$$

であり、そのうちで測定面によって切断されているもの、すなわち原始球の数を N_{sr} とすると

$$N_{sr} = 2rN_{tr}/H \quad (7)$$

である。これら2式から N_{tr} を消去すれば、コンクリート単位体積当たりの気泡数と原始球の数との関係を表す次式が得られる。

$$N_{sr} = 2rAN_{or} \quad (8)$$

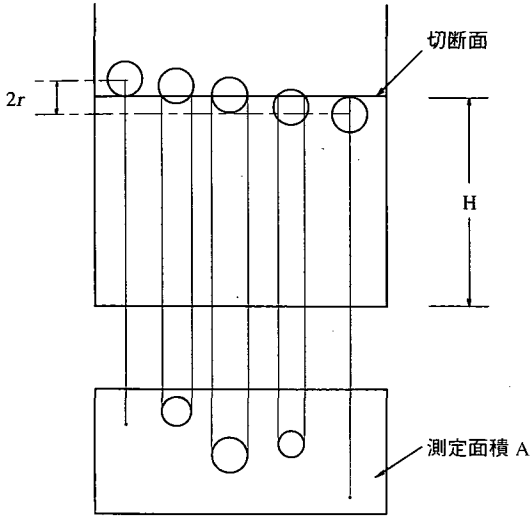


図-2

したがって、半径が $x \sim x+dx$ の範囲にある出現円のうちで、それらの原始球の半球が r であるもの数を n_{xr} とすると、 n_{xr} は単位体積当たりの原始球総数と出現確率の積として得られるから、式(3)、(8)から次式となる。

$$n_{xr} = N_{sr} P_r = 2AN_o r \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \quad (9)$$

b) 気泡半径の分布と出現円半径の分布との関係

単位体積のコンクリート中に含まれる気泡の半径と個数との関係を密度関数 $f(x)$ で表すと、半径が $r \sim r+dr$ の範囲にある気泡の数 $N_o\{r \sim r+dr\}$ は

$$N_o\{r \sim r+dr\} = N_o f(r) dr \quad (0 \leq x < r) \quad (10)$$

ここに、 N_o : 単位体積のコンクリートに含まれる気泡総数

である。

したがって、半径が $x \sim x+dx$ の範囲にある出現円のうちで、半径が $r \sim r+dr$ の原始球に属しているもの数を $n(x, r)$ とすれば、式(9)により

$$n(x, r) = 2AN_o f(r) \frac{xdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \quad (0 \leq x < r, 0 < r < \infty) \quad (11)$$

であり、半径が $x \sim x+dx$ の出現円の数 $n(x)$ 、出現円の総数を n とすると、 $n(x)$ および n はそれぞれ次のようになる。

$$n(x) = 2AN_o \int_0^\infty \frac{xf(r)dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \quad (12)$$

$$n = 2AN_o \int_0^\infty \int_0^r \frac{xf(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx dr$$

$$= 2AN_o \int_0^\infty rf(r)dr = 2AN_o \bar{r} \quad (13)$$

式(13)における \bar{r} は、 r の分布が $f(r)$ である場合の平均値で、

$$\bar{r} = \int_0^\infty rf(r)dr \quad (14)$$

である。

このことから、出現円半径が $x \sim x+dx$ に入る確率を P とすると

$$P = \frac{n(x)}{n} = \frac{x}{\bar{r}} \int_0^\infty \frac{f(r)dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \quad (15)$$

$$= p(x) dx$$

$$p(x) = \frac{x}{\bar{r}} \int_0^\infty \frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \quad (16)$$

となるから、 $p(x)$ は半径 r の分布が $f(r)$ で、平均値が \bar{r} である気泡群から生じる出現円の半径 x の分布密度を表す。

c) 出現円の総数と原始球の総数との関係

半径が $r \sim r+dr$ の範囲に入っている原始球の数を $N_s\{r \sim r+dr\}$ とすると、式(8)、(10)から

$$N_s\{r \sim r+dr\} = 2rAN_o f(r) dr \quad (17)$$

であり、原始球の総数を N_s とすると

$$N_s = 2AN_o \int_0^\infty rf(r)dr = 2AN_o \bar{r} \quad (18)$$

となる。

この式は式(13)の右辺と一致しているから

$$N_s = n \quad (19)$$

となって、原始球の総数と出現円の総数が等しいことが数式の上で示されたことになる。

(3) 気泡群の半径の度数分布と出現円半径の度数分布との関係

a) 離散変数による半径の表示

実測された出現円のデータは、半径がある範囲に入っている出現円の度数で整理される。そこで、度数分布表の階級の間隔を Δx として、出現円の半径 x 、および気泡半径 r を次式で表す。

$$x = i\Delta x \quad (20)$$

$$r = j\Delta x \quad (21)$$

また、階級の数 m とし、 r の最大値を r_m で表すこととして、

$$r_m = m\Delta x \quad (22)$$

とする。

b) 出現円等の個数の表示記号

度数分布表に現れる出現円などの個数を表示するために、以下の記号を用いる。

n : 測定面積 A (mm^2) に含まれる出現円の総数 (個)

$n(i)$: n のうちで、階級 i に入っているものの度数 (個)

$n(j)$: n のうちで、階級 j の原始球に属しているものの総数 (個)

$n(i, j)$: $n(i)$ のうちで、階級 j の原始球に属しているものの数 (= $n(j)$) のうちで、階級 i に入っているものの度数 (個)

N_0 : 原始球, すなわち、測定面によって切断されている気泡の総数 (個)

$N_s(j)$: N_0 のうちで、階級 j に入っているものの度数 (個)

N_o : コンクリート単位体積当たりの気泡数 (個/mm³)

$N_o(j)$: N_o のうちで、階級 j に入っているものの度数 (個/mm³)

N : コンクリート 1 cm³ 当たりの気泡数 (個/cm³) = 1000 N_o (23)

$N(j)$: N のうちで、階級 j に入っているものの度数 (個/cm³) = 1000 $N_o(j)$ (24)

c) 気泡半径の分布密度と出現円半径の分布密度との関係

単位体積のコンクリート中に含まれる気泡の半径の分布密度が $f(r)$ であるとき、階級 j に入る気泡数は

$$N_o(j) = N_o \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} f(r) dr$$

であり、 $f(r)$ の原始関数を $F(r)$ で表すと

$$N_o(j) = N_o [F(j\Delta x) - F((j-1)\Delta x)] \quad (25)$$

である (以後、 $F(j\Delta x)$ 等を $F(j)$ 等で表す)、

また、階級 j に入る原始球の数は、式 (8) から

$$\begin{aligned} N_s(j) &= 2AN_o j \Delta x \\ &= 2AN_o j \Delta x \{F(j) - F(j-1)\} \end{aligned} \quad (26)$$

である。

階級 j の原始球に属している出現円の総数 $n(j)$ は式 (19) により $N_s(j)$ に等しく、これらのうちで階級 i に入るものの数は

$$\begin{aligned} n(i, j) &= N_o(j) \int_{i-1}^i g(x) dx \\ &= \frac{N_s(j)}{j} \{ \sqrt{j^2 - (i-1)^2} - \sqrt{j^2 - i^2} \} \\ &= 2AN_o \Delta x \{ \sqrt{j^2 - (i-1)^2} - \sqrt{j^2 - i^2} \} \\ &\quad \times \{ F(j) - F(j-1) \} \end{aligned} \quad (27)$$

したがって、階級 i に入る出現円の数、出現円の総数、および階級 i の分布密度は次のようになる。

$$\begin{aligned} n(i) &= \sum_{j=i}^m n(i, j) \\ &= 2AN_o \Delta x \sum_{j=i}^m \{ \sqrt{j^2 - (i-1)^2} - \sqrt{j^2 - i^2} \} \\ &\quad \times \{ F(j) - F(j-1) \} \end{aligned} \quad (29)$$

$$n = \sum_{i=1}^m n(i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m n(i, j) \quad (30)$$

$$p(i) = \frac{n(i)}{n} \quad (31)$$

上記の諸式における $F(j) - F(j-1)$ は必ずしも関数 $F(r)$ が既知である必要はなく、数値で与えられていても差し支えない。

d) 階級数の選定

気泡半径の分布を分析するさい、度数分布表の階級の間隔 Δx を選定すれば、階級数 m は出現円半径の最小値と最大値から必然的に定まる。しかし、気泡径がどのような分布法則に従っているかを知るために、分布関数に基づいた理論上の期待度数分布を求めて実測結果と比較しようとする場合には、変数に上限値が存在しないことが多い。

そこで、階級 j に入る気泡の体積と、階級 j 以下の気泡の総体積との比を $\epsilon(j)$ とし、 $\epsilon(j)$ が一定値以下となるような j を階級数 m として選定することとすれば

$$\begin{aligned} \epsilon(m) &= (m-1/2)^3 \{ F(j) - F(j-1) \} \\ &\quad / \sum_{j=1}^m (j-1/2)^3 \{ F(j) - F(j-1) \} < \epsilon \end{aligned} \quad (32)$$

となる m の最小値が階級数である。

ϵ の数値を選定する条件として、空気量の計算結果への影響を考えれば

$$\epsilon = 0.01 \quad (33)$$

とすれば、誤差は空気量で 0.1% 以下となる。

4. 気泡半径の分布の推定方法

(1) 出現円半径の度数分布表の成分の分析

出現円半径の測定結果から、階級の間隔 Δx 、階級数 m の度数分布表が得られたとする。その場合、半径 x が境界値に等しいものは小さい方の階級に入れるものとし、階級 i に入る x の範囲を

$$(i-1)\Delta x < x \leq i\Delta x \quad (34)$$

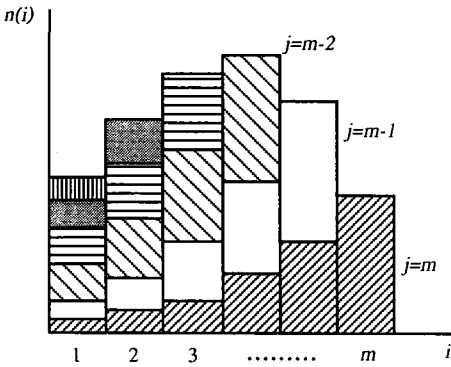
とする。

階級 i に入る出現円の数 $n(i)$ のうち、階級 j に入る原始球に属するものの数は $n(i, j)$ であるが、出現円の半径は原始球の半径をこえないから

$$\left. \begin{aligned} n(1) &= n(1, 1) + n(1, 2) + \dots + n(1, m) \\ n(2) &= \quad \quad n(2, 2) + \dots + n(2, m) \\ &\quad \quad \quad \dots \dots \dots \\ &\quad \quad \quad \dots \dots \dots \\ n(m) &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad n(m, m) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

である。

このことから、出現円半径の度数分布図は、図-3 に示すように、 $j=m \sim 1$ の原始球に属する出現円の、それぞれの度数分布図を重ね合わせたものであることが分かる。



図一三 出現円の度数分布図の成分

(2) 出現円半径の度数分布表から気泡半径の分布を求める手順

a) 原始球半径の度数分布の算出

図一三から明らかなように、 $j=m$ に対する度数分布 $n(1, m) \sim n(m, m)$ は、階級 m の原始球に属する出現円の度数分布であり、その総和は階級 m の原始球数 $N_s(m)$ に等しい。そして、階級 m の出現円は、全てが階級 m の原始球に属しているから $N_s(m)$ と $n(m, m)$ との間には式(27)により

$$n(m, m) = \frac{\sqrt{2m-1}}{m} N_s(m) \quad (36)$$

の関係がある。

すなわち、 $N_s(m)$ は、階級 m の出現円数から次式によって求めることができる。

$$N_s(m) = \frac{m}{\sqrt{2m-1}} n(m, m) \quad (37)$$

$N_s(m)$ が求められれば、階級が $m-1$ 以下の出現円のうちで、階級 m の原始球に属するものの数は全て次式で計算できる。

$$n(i, m) = \frac{N_s(m)}{m} \{ \sqrt{m^2 - (i-1)^2} - \sqrt{m^2 - i^2} \} \quad (i=1 \sim m-1) \quad (38)$$

出現円の度数分布表からこれらを差し引いた残りの度数分布は、最大の階級が $m-1$ であり、階級 $m-1$ の出現円の数は

$$n(m-1, m-1) = n(m-1) - n(m-1, m) \quad (39)$$

で、既知数となる。

したがって、階級 $m-1$ の原始球数 $N_s(m-1)$ は式(37)の m を $m-1$ に置き換えることによって求められ、このような計算を $j=1$ まで繰り返せば、全ての階級について原始球の数が求まる。

実際にこの計算を行う場合、出現円全体から半径の大きい原始球に属するものの数を順次差し引いて行く過程

で、ある階級の出現円数が負数となることがありうる。その場合には、その階級の度数を 0 として扱うものとするが、その結果、負数の絶対値に相当する数だけ原始球と出現円の総数に差が生じ、原始球数の方が多くなる。

そのような矛盾を避けるため、式(37)で求めた原始球数は、各階級から差し引くべき出現円数を算定するための仮の原始球数とし、計算結果とする原始球数は、各階級から順次差し引いた出現円数を $n_c(i, j)$ として、その総和

$$N_q(j) = \sum_{i=1}^j n_c(i, j) \quad (40)$$

を原始球数の推定値とする。

b) 原始球数から気泡数への換算と気泡半径の分布密度の計算

半径が r の原始球数 N_{sr} と単位体積当たりの気泡数 N_{or} との間には、式(8)の関係があるから、階級 j の原始球数が $N_q(j)$ のときは、単位体積のコンクリートに含まれる気泡のうちで、階級 j に入るものの数は

$$N_o(j) = \frac{N_q(j)}{2A_j \Delta x} \quad (41)$$

である。

したがって、階級 j に入る気泡数の分布密度を $f(j)$ とすると

$$f(j) = \frac{N_q(j)}{2AN_{oj} \Delta x} \quad (42)$$

である。

c) 空気量、平均気泡純間隔、および修正気泡間隔係数

上記の方法により気泡半径の度数分布が求められたとき、単位体積のコンクリートに含まれる、階級 j の気泡の体積は

$$V(j) = 4\pi \{r(j)\}^3 N_o(j) / 3 \text{ (mm}^3/\text{mm}^3) \quad (43)$$

$$\text{ただし、} r(j) = (j-1/2) \Delta x \quad (44)$$

であり、コンクリートの空気量を A とすると

$$A = V_o \times 100 \text{ (\%)} \quad (45)$$

ここで、 V_o は単位体積のコンクリートに含まれる気泡の総体積で

$$V_o = \sum_{j=1}^m V_o(j) \text{ (mm}^3/\text{mm}^3) \quad (46)$$

である。

気泡の間隔については、気泡 1 個当たりのセメントペーストの体積（気泡を含まない）に平均半径をもつ気泡の体積を加え、これを立方体とみなしてその中心に気泡がある場合の気泡の純間隔、すなわち、立方体の対角線の長さから気泡の直径を引いた値を平均気泡純間隔 C_L と定義する。そのときは C_L は次式となる。

$$C_L = \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{P_o}{N_o} + \bar{V}_r} - 2\bar{r} \quad (47)$$

ここに、

P_0 : 単位体積のコンクリート中に含まれるペーストの体積 (mm^3/mm^3)

\bar{V}_r : 平均半径をもつ気泡の体積 $= 4\pi\bar{r}^3/3 (\text{mm}^3)$

平均気泡純間隔の 1/2 は、気泡間隔係数における気泡の半径 (体積平均半径に相当する) を平均半径に、また、気泡の体積 (全ての気泡が同じ大きさの球であるとしたときの体積) を平均半径の気泡の体積にそれぞれ置き換えたものであるので、これを修正気泡間隔係数とよび、 L' で表すこととすると

$$L' = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{P_0}{N_0} + \bar{V}_r} - \bar{r} \quad (\text{mm}) \quad (48)$$

である。

5. 本方法の正当性の検証

(1) 数値計算による検証

a) 検証の方法

出現円半径の度数分布から、コンクリート中の気泡半径の分布を求めることができることを確かめるため、数値計算を行った。その手順は以下のとおりである。

- ①: 気泡半径の分布関数 $f(r)$ 、および単位体積当たりの気泡総数 N_0 を与えて、気泡半径の度数分布表を作成する。
- ②: 式(31)により、これに対応する出現円半径の度数分布表を作成する。
- ③: ②で得られた度数分布表を出現円半径についての測定結果と考え、4.(2)で述べた方法を用いて気泡半径の度数分布を推定する。
- ④: ③で得られた度数分布が、①で得られた度数分布と一致しているか否かを χ^2 検定により判定する。

この方法における③の過程には $f(r)$ は関係していない。したがって、③の結果が①に一致した場合には、分布関数が不明の気泡群から生じた出現円半径の度数分布から、気泡径の分布が正しく求められたことになる。

b) 一様分布の場合の計算結果

気泡径分布が $0 \sim r_m (\text{mm})$ の範囲で一様であるとする。その場合には

$$f(r) = 1/r_m, \quad F(r) = r/r_m, \quad F(j) - F(j-1) = 1/m$$

であるから、分布密度は次のようになる。

$$p(i) = \sum_j / \sum_{i,j} \quad (49)$$

$$\sum_j = \sum_{j=i}^m \{ \sqrt{j^2 - (i-1)^2} - \sqrt{j^2 - i^2} \}$$

$$\sum_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m \{ \sqrt{j^2 - (i-1)^2} - \sqrt{j^2 - i^2} \}$$

コンクリート 1 cm^3 中に含まれる気泡総数を 10^4 個、最大半径を 0.50 mm 、平均半径を 0.25 mm 、階級の間隔を 0.05 mm として、気泡半径の度数分布表を作成すると表-1 のようになる。

表-1 気泡半径が一様分布の場合の度数分布表

階級	気泡半径	度数	
j	$r (\text{mm})$	$N_0(j)$	$N(j)$
1	0.00~0.05	1	1000
2	0.05~0.10	1	1000
...
10	0.45~0.50	1	1000
合計	-	$N_0=10$	$N=10000$

表-2 出現円の分布密度と期待度数および気泡径分布の推定結果

階級	Σ_j	分布密度	期待度数	気泡径分布の推定結果
i,j		$p(i)$	$n(i)$	
1	1.99188	0.036216	199.19	998
2	4.04143	0.073481	404.15	999
3	5.35936	0.097443	535.94	1000
4	6.23502	0.113364	623.50	1002
5	6.76814	0.123057	676.81	1001
6	6.99892	0.127253	699.89	1001
7	6.93339	0.126073	693.40	999
8	6.54816	0.119057	654.81	1001
9	5.76421	0.104804	579.42	999
10	4.35890	0.079253	435.89	1000
$\Sigma_{i,j} = 55.00001$		1.000001	5500.00	$N=10000$

この気泡群から生じる出現円の半径の分布密度を式(31)で計算し、出現円を観測する切断面の面積を 1000 mm^2 とすると、この面に生じる出現円の総数は、式(29)、(30)により

$$n = 2AN_0 \Delta x \sum_{i,j} / m = 5500$$

となり、出現円半径の期待度数分布は表-2 の $n(i)$ のようになる。

次に、この期待度数を整数に丸めたものを、半径の分布が未知の気泡群から生じた出現円半径の測定結果であるとする。その場合には、最大の階級 $i=10$ に入っている出現円数は 436 であるから、 $j=10$ に属する仮の原始球数は式(37)により

$$N_0(10) = \left[\frac{m}{\sqrt{2m-1}} n(m_1, m) \right]_{m=10} = 1000.25$$

である。

そして、 $j=10$ に属する原始球から生じたとみなせる出現円半径の分布は、式(38)により

$$n(1, 10) = \frac{N_0(m)}{m} \{ \sqrt{m^2 - (i-1)^2} - \sqrt{m^2 - i^2} \}$$

$$= 5.014$$

$$n(2, 10) = 15.195$$

$$\dots\dots\dots$$

$$n(10, 10) = 435.999$$

となる。

したがって、 $j=10$ に属する原始球の推定値は

$$N_0(10) = 5.014 + 15.195 + \dots + 435.999 = 1000.25$$

となって、仮の原始球数 $N_s(10)$ と一致する。

また、コンクリート単位体積当たりの気泡数は、式 (41), (24) より

$$N_s(10) = \left[\frac{N_g(j)}{2A_j dx} \right]_{j=10} = 1.000 \text{ (個/mm}^3\text{)}$$

$$N(10) = 1000 \text{ (個/cm}^3\text{)}$$

と求まる。

もとの度数分布から、 $n(1, 10) \sim n(10, 10)$ を差し引いた残りの度数分布表は j の最大値が 9 であり、 $n(9, 9) = 411.849$ となるから、 $m=9$ として同様の計算を行うことにより、 $N(9) = 999$ (個/cm³) が得られる。

この計算を $j=1$ まで繰り返した結果を表-2 の右端の欄に示した。これが、もとの気泡径分布に一致していることは明らかであり、表-1 の $N(j)$ との比較のために求めた χ^2 値は 0.014 であった。

理論値との比較における自由度は、階級数に等しく 10 であり、自由度 10 に対する χ^2 分布の値 (以後、 χ^2 分布値を χ_0^2 で表す) は、検定に通常用いられる確率 5% において 18.31 で、 $\chi^2 < \chi_0^2$ である。

これにより、推定結果が理論値に一致していることが確かめられた。

c) 正規分布の場合についての計算結果

気泡半径の分布が正規分布の場合について、次の数値を用いて行った計算結果は表-3 に示したとおりであり、 $\chi^2 = 1.341$, $\chi_0^2 = 21.03$ であった。

$$A = 1000 \text{ mm}^2, N = 10^4 \text{ 個/cm}^3$$

$$\text{平均値 } \bar{r} = 0.25 \text{ mm}, \text{ 標準偏差 } \sigma = 0.05 \text{ mm}$$

d) 指数分布の場合についての計算結果

気泡径の分布が指数分布 $f(r) = \{\exp(-r/\rho)\}/\rho$ の場合について、

$$A = 1000 \text{ mm}^2, N = 10^4 \text{ 個/cm}^3, \bar{r} = 0.25 \text{ mm}$$

の数値を用いて同様の計算を行った結果は、階級数 22, 出現円総数 6059, $\chi^2 = 0.235$, $\chi_0^2 = 33.92$ であった。

(2) 実験による検証

a) 実験方法

(1) で行った数値計算による検証では、与えられた気泡半径の分布から出現円半径の分布を計算する過程と、測定された出現円半径の分布から気泡半径の分布を推定する過程の両方に関数 $G(x)$ が関係している。

そこで、出現円半径の分布に $G(x)$ が関係しない条件で本方法の正当性を検証するため、粒径分布が分かっている球形のインクルージョン (でんぷん質) とマトリックス (寒天質) からなる 2 相系の混合物をつくり、切断面に生じた出現円の直径の分布からインクルージョンの粒径分布と粒子数を求めて、実際の粒径分布および粒子数と比較した。

試験体は $112 \times 160 \times 55$ mm の直方体で、混合物にお

表-3 正規分布についての計算結果

階級 ij	気泡半径 r (mm)	気泡径の 理論度数	出現円の 期待度数	気泡径分布 の推定結果
1	0.100~0.125	49	46	56
2	0.125~0.150	165	143	171
3	0.150~0.175	441	257	436
4	0.175~0.200	919	389	918
5	0.200~0.225	1499	510	1499
6	0.225~0.250	1915	569	1919
7	0.250~0.275	1915	526	1912
8	0.275~0.300	1499	396	1501
9	0.300~0.325	919	238	917
10	0.325~0.350	441	114	443
11	0.350~0.375	165	42	163
12	0.375~0.400	49	12	50
合計		10000	3242	9981

表-4 計測された出現円の度数分布

階級 i	直径 x (mm)	出現円の No.				
		1-100	1-200	1-300	1-400	1-500
1	0~5	4	12	18	27	33
2	5~10	45	95	130	166	197
3	10~15	26	53	94	122	15
4	15~20	25	40	58	85	113
測定面積 (mm ²)		18480	36960	55440	73920	92400

表-5 インクルージョンの粒径分布についての推定結果と精度

階級 ij	粒径の 範囲 x (mm)	実験に 用いた 粒子数	推定された粒子数 推定に用いた出現円の数			
			100	200	300	500
1	0~5	0	0	0	0	0
2	5~10	202	217	238	206	185
3	10~15	131	92	102	127	122
4	15~20	96	106	85	82	96
合計		429	409	425	415	403
	χ^2	-	13.1	14.1	2.24	2.05
	χ^2/χ_0^2	-	2.18	2.35	0.37	0.34

ける粒子相の体積比は 0.448 である。

測定面は試験体を厚さ 1 cm の板状にスライスした切断面で、延べ面積は 92400 mm², 出現円の総数は 500 個であった。

直径の計測は全ての出現円について行い、測定値には通し番号を付けた。表-4 は、その結果を度数分布表にまとめたものである。

b) 粒径分布の推定結果と精度

表-5 は、表-4 の計測結果に 4. で述べた方法を利用して、試験体中に含まれている各粒径の粒子数を推定し、これを実際に用いた粒子数の分布と比較して示したものである。

自由度 3, 確率 5% のカイ二乗分布の値 χ_0^2 は 7.815 で、これに対する χ^2 値の比が 1 よりも小さければ、粒径分布が所要の精度をもって推定できたと考えることができるから、表-5 の結果は $n \geq 300$ で十分な精度が得られていることを示している。

表一六 インクルージョンの体積比の算出

階級 j	r(j) mm	N _o (j) 10 ³ /mm ³	r(j)N _o (j)/N _o mm	V _o (j) mm ³ /mm ³
1	2.5	0	0	0
2	7.5	0.1877	0.999	0.0415
3	12.5	1.1238	1.098	0.1266
4	17.5	0.0974	1.210	0.2733
		N _o =1.409×10 ³ /mm ³	r=3.31mm	V _o =0.441

c) 粒子の体積比と平均粒子間隔

次に、n=500の場合について、式(46)によりインクルージョンの体積比 V_o を求めた。その結果は表一六に示したように 0.441 で、試験体の粒子体積比に近い値となった。

また、平均粒子間隔 C_L を式(47)を用いて求めた結果は 7.6 mm であった。

従来の定義による気泡間隔係数の計算式を用いて、その 2 倍として求めた平均粒子間隔は 7.0 mm であり、式(47)で計算した結果とほぼ等しい値となったが、粒径分布によっては、これらの差が大きくなることもありうると思われる。

6. 測定に必要な出現円の総数および測定面積

(1) 気泡の半径の分布、比表面積、等を求めるために必要な出現円総数と測定面積

5.(1)で行った検証では、出現円の測定総数は一様分布 5500、正規分布 3242、指数分布 6059 であり、これを用いて高い精度で気泡径分布が推定できた。しかし、測定する出現円の数は必要な範囲で少ない方が実用的である。

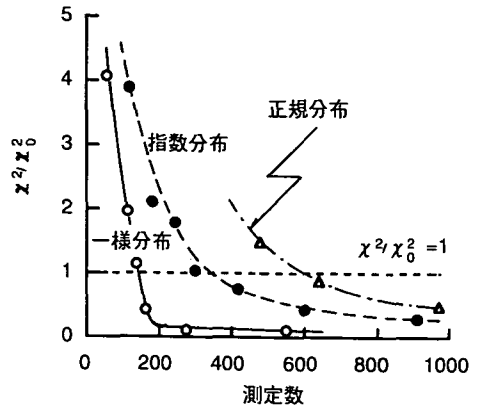
そこで、測定値として用いる出現円の総数を変化させて気泡半径の分布を推定し、推定結果について χ^2 検定を行って、確率 5% で有意となるような出現円数を求めた。

出現円数は測定面積を変化させることによって変化させ、分布の特性値その他は 5.(1)の場合と同一とした。測定数 n と χ^2/χ_0^2 との関係を図示したものが図一四である。

この図において $\chi^2/\chi_0^2 < 1$ となるような n が所要の測定精度を得るために必要な測定数であり、一様分布の場合が最も少なく約 150 個、指数分布、正規分布の場合でそれぞれ約 350 個、および約 600 個である。

以上のことから、分布関数が不明の場合、あるいは一定の分布法則に従っていない場合でも、出現円の測定数が 600 個以上であれば、かなり高い精度で気泡径の分布を知ることができると思われる。

一方、一定の測定値数を得るために必要な測定面積は、気泡の分布密度が低いほど大きくなるから、この場合の所要測定面積を A₁ とすると、A₁ は空気量が少ないコン



図一四 出現円の測定数と推定精度との関係

クリートほど大きくなる。

(2) コンクリートの空気量、気泡間隔係数等の測定に必要な測定面積

a) 空気量の測定に必要な測定面積の算定基準

気泡半径の分布、平均比表面積等は気泡のみに関係した特性値である。これに対して、空気量や気泡間隔係数は、コンクリート中の気泡以外の成分が関係している相対量であるため、コンクリート全体としての平均空気量及び気泡間隔係数を求めるためには、出現円の測定を行う面積をある値より大きくする必要があり、この面積は、切断面に現れる粗骨材粒子について本方法を適用したときに、粗骨材量と粒径分布が正しく推定できるような測定面積に相当する。そして、この面積は粗骨材の最大寸法が大きいほど大きくなる。

そこで、この目的に対して必要な測定面積を A₂ として、これを次のようにして求めた。

すなわち、コンクリート単位体積当たりの粗骨材の総体積と粒径分布が分かっているコンクリートを想定し、骨材粒子を球とみなして 4.(2)の方法で骨材の粒径分布を推定したときに、その精度が一定の水準以上となるような測定面の面積を所要面積(骨材部分を含む)とした。

対象とした粗骨材の最大寸法は 20 mm, 25 mm, 40 mm の 3 種類とし、土木学会の標準粒度に入るように選んだ粒径分布、および粒径区分の中央値を平均粒径として求めた粒子数比を表一七に示した。

コンクリート単位体積当たりの粗骨材の総体積は、表一八に示したコンクリートの配合から算出した。

b) 所要の推定精度を得るために必要な測定面積

粗骨材の総体積と粒径分布から求めたコンクリート 1 m³ 中に含まれる粗骨材の粒子総数は、最大寸法 20, 25, 40 mm でそれぞれ 96.76×10⁵, 5.13×10⁵, 3.85×10⁵ と

表一七 粗骨材の粒径分布

最大寸法 mm	質量比			粒子数比		
	20mm	25mm	40mm	20mm	25mm	40mm
5~10	0.30	0.18	0.14	0.732	0.659	0.683
10~15	0.40	0.27	0.19	0.211	0.213	0.200
15~20	0.30	0.35	0.17	0.058	0.101	0.065
20~25	-	0.20	0.15	-	0.027	0.027
25~30	-	-	0.14	-	-	0.014
30~35	-	-	0.12	-	-	0.007
35~40	-	-	0.09	-	-	0.004

表一八 想定したコンクリートの配合

最大寸法 (mm)	空気量 (%)	W/C (%)	s/a (%)	単位量(kg/m ³)			
				W	C	S	G
20	6.0	50	45	170	340	777	946
25,40	5.0	50	40	158	316	720	1079

なった。

表一七に示されている粒子数比は粒径の分布密度と同義であるから、これと粒子総数とを用いて、5. (1)と同様の方法により、粗骨材の粒径分布を推定した。

図一五は、推定値を表一七と比較して算定した χ^2/χ_0^2 の測定面積による変化を図示したものである。

この結果によれば、 $\chi^2/\chi_0^2 < 1$ となるような測定面積は、最大寸法が大きいほど大きく、20 mm で約 900 cm²、25 mm で約 1300 cm²、40 mm で約 1800 cm² である。

このことから、コンクリートの空気量の推定には、粗骨材の最大寸法に応じて、気泡円の測定を行う面積をそれぞれ 1000 cm²、1500 cm²、2000 cm² などとすればよいと考えられる。

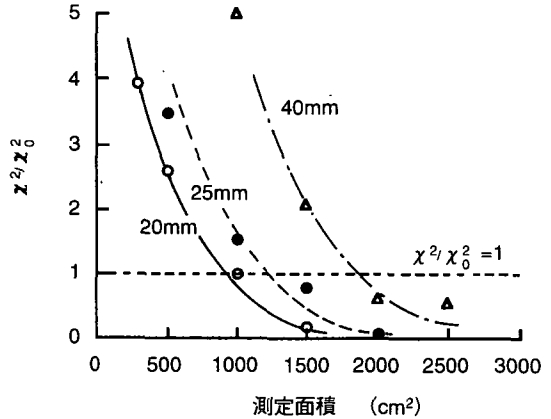
7. 結 論

硬化コンクリートにおける気泡相の基本情報である気泡径分布と単位体積中の気泡総数を測定し、その結果を用いてコンクリートの空気量、気泡間隔係数、その他各種の気泡パラメータを求める方法について研究を行った結果、以下のような結論が得られた。

1) 半径 r の球が無数に存在する場合、それらを1つの平面で無作為に切断したときに生じる円の半径 x の確率密度関数は、 $x/r\sqrt{r^2-x^2}$ である。

この関数を導入することにより、硬化コンクリートを平面で切断したときに現れる気泡円の半径の分布と、コンクリート中の気泡球の半径の分布との関係、および、測定面に現われた気泡円の数とコンクリート単位体積当たりの気泡数との関係を表す理論式が求められた。

2) 前記の解析結果における変数を、連続変数から離散変数に変換し、測定面上の気泡円と、コンクリート中の気泡球の半径の分布密度を、階級数 m 、階級の間隔 Δx の度数分布で表すと、階級 j に入る大きさの気泡球から



図一五 測定面の面積が推定精度におよぼす影響

出現した気泡円のうちで、階級 i に入るもの数 $n(i, j)$ は、階級 j に入っている気泡円の総数 $N_s(j)$ と密度関数の原始関数とにより次式で表される。

$$n(i, j) = \frac{N_s(j)}{j} \{ \sqrt{j^2 - (i-1)^2} - \sqrt{j^2 - i^2} \}$$

そして、測定面上の気泡円全部についての度数分布図は、図一三に模式的に示したように、 $1 \sim m$ の各段階に入る気泡から出現した気泡円についての m 個の度数分布図を重ね合わせたものであることが明らかになった。

3) ある半径の気泡球から出現する気泡円のうちで、最も大きいものの半径は気泡球の半径に等しい。この事実と2)の結論に基づき、前記の式を繰り返し用いて気泡円の度数分布を m 個の成分に分解し、これを再合成することによって、気泡円についての測定結果から気泡径分布を求めることが可能となった。

逆に、気泡半径の分布が数値、または関数で与えられている場合には、切断面に生じる気泡円の半径の分布は、容易に計算することができる。

そこで、一様分布、正規分布、指数分布の3つの場合について気泡径分布を仮定し、それらから算出した気泡円の分布を測定値とみなして、本方法による気泡径分布の推定を行った結果、得られた推定値は仮定した気泡径分布とほぼ完全に一致し、 χ^2 検定によっても高い推定精度が確認された。

次に、粒径分布と粒子数が分かっている球形のインクルージョンとマトリックスからなる試験体を作成し、その切断面に現れた円の計測結果からインクルージョンの粒径分布を推定した。この推定値に対して χ^2 検定を行った結果、測定数が300個以上において良好な推定精度となっていることが示された。

以上の結果は、本方法の理論と推定の計算過程が正しいことを証明するものといえる。

4) 気泡径分布から平均半径、空気量、気泡間隔係数

等を求める計算式は、全ての気泡を大きさの等しい球と仮定しているリニアトラバース法における計算式よりも正確な値を与えるものと考えられるが、実際の測定に当たっては、計測する気泡円の総数と測定面の延べ面積によって推定精度は影響を受ける。

一定の推定精度を得るために必要な計測数と測定面積は、気泡径の分布関数、空気量、および粗骨材の最大寸法によって相違し、分布関数については一様分布、指数分布、正規分布の順で必要な測定値の数は多くなるが、気泡径分布の測定を目的とする場合には、分布関数が不明の場合でも 600 個程度でよいものと考えられる。

また、空気量や気泡間隔係数の測定を目的とする場合には、必要な測定面積は粗骨材の最大寸法が大きいくほど大きくなり、20 mm, 25 mm, 40 mm の場合で、それぞれ 1000, 1500, 2000 cm² 程度で十分な推定精度が得られるものと考えられる。

このように広い面積についての測定は肉眼では困難であるが、画像解析技術を利用することにより、本方法の実用化は可能である。

参考文献

- 1) ASTM C 457: Standard Recommended Practice for Microscopical Determination of Air-Void Content and Parameters of the Air-Void System in Hardened Concrete, ASTM Standards, Part 14.
- 2) 小長井宣生, 大橋猛, 根本任宏: 気泡断面積測定による硬化コンクリートの気泡パラメータの解析理論, 土木試験所月報, No. 396, pp.2-8, 1986.
- 3) 山宮浩信, 児玉和巳: 硬化コンクリート中の気泡分布測定法に関する検討, セメントコンクリート論文集, No. 48, pp.168-173, 1994.

(1996.1.25 受付) °

A PROPOSAL OF NEW METHOD FOR DETERMINATION OF RADIUS DISTRIBUTION OF THE AIR VOIDS AND AIR CONTENT IN HARDENED CONCRETE ON THE BASIS OF PROBABILITY THEORY

Noriaki IWASAKI

The air-void phase has a dominant effect on the frost resistance of the concrete. However, the method for determining the radius distribution of the air voids has not been found. In the present paper, a new method for this purpose is proposed. Its principle is based on a fixed relationship between radius distributions of the spheres and the circles which appear as the sections of them. The procedure consists of the measurement of the circles' diameters, and statistical analysis. The validity of the method has been confirmed by numerical calculations and experiments. The number of circles and the area to be measured are also suggested.