

[討議・回答]

西村宣男
小野 潔 共著
池内智行

“単調載荷曲線を基にした繰り返し塑性履歴を受ける鋼材の構成式”への討議・回答

(土木学会論文集, No.513/I-31 1995年4月掲載)

▶討議者 (Discussion) ————— 水野英二 (名古屋大学)・宇佐美勉 (名古屋大学)・沈 赤 (長大)
Eiji MIZUNO, Tsutomu USAMI and Chi SHEN

1. はじめに

繰り返し荷重が作用する下での鋼素材の応力-ひずみ関係式は、1960年代の Mróz の多曲面モデルや1970年代の Dafalias・Popov の二曲面モデルなどに始まり、最近では降伏棚を有する構造用鋼材に対する修正二曲面モデル^{1),2),3)}が討議者らにより提案されている。これら塑性論に基づいた構成則モデルでは、降伏関数、流れ則および硬化則の三つの仮定が用いられている。特に、この構成則モデルを特徴付けるものは硬化則であり、多くの研究者により様々な硬化則が提案されている。

1995年1月の阪神・淡路大震災を契機として、鋼素材の繰り返し変形特性に関する研究は、今後の土木鋼構造物の耐震設計の研究を遂行するにあたり基礎的な役割を担うものと期待され、重要な課題の一つとして位置づけられつつある。これらの研究成果が、今後多くの研究者・技術者に利用されるためにも、構成則モデルの開発は、以下のような基本的な条件を満たす必要があると思われる。

- 1) 種々の荷重状態下での実験データに基づいた詳細な考察より、モデルに対する検証がなされていること。
- 2) 構成則モデルに数学上の統一がとれていること。
- 3) モデルパラメータの数は最小限数にとどめ、それらは簡単な実験条件から決定されること。さらに、パラメータの決定法が明確にされていること。
- 4) モデルが有限要素法などに採り入れ易く説明されていること。

以上の観点に基づいて、以下の討議を行う。

2. 討 議

討議論文は、従来の研究（例えば、多曲面モデルや二曲面モデルなど）とは異なった観点より、境界曲面の概念を用いず、鋼材の繰り返し挙動の解明を行っており興味深い。

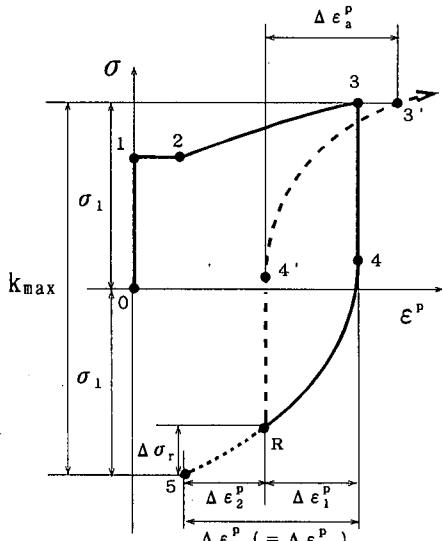


図-1 非線形遷移領域での荷重の反転

以下では、討議論文のモデリングに対して討議者らの意見を述べたい。

(1) 鋼材の繰り返し曲線のモデル化

討議者らがこれまでに行った鋼材の引張・圧縮繰り返し載荷実験より得たデータの範疇で知る限り、繰り返し幅を引張側と圧縮側とで等しくした繰り返し載荷（両振り載荷）より得られる包絡曲線は単調引張載荷曲線と必ずしも一致しない。このことは高ひずみ域で、かつ一サイクル中の塑性変形量（応力幅）が大きければ大きいほど明確である。著者らの構成則モデルを用いて、両振り載荷による繰り返し挙動を予測してみる。これは、著者らが討議論文で述べる所の「非線形遷移領域上での荷重の反転」の場合に相当する。図-1には、非線形遷移領域上（点R）で荷重を反転させた時の再載荷曲線（R-4'-3'）を示す。ここで、R-4'は弾性域、4'-3'は非

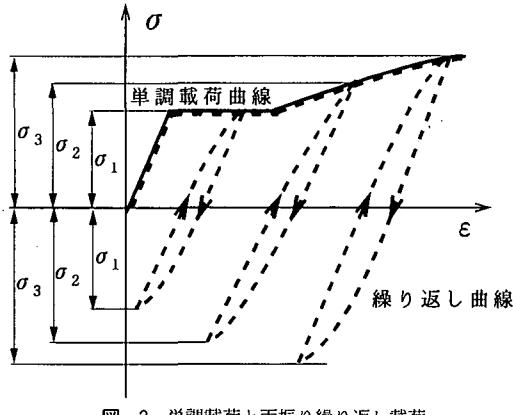


図-2 単調載荷と両振り繰り返し載荷

線形遷移領域である。図中、 σ は軸応力、 ϵ^p は塑性軸ひずみである。

非線形領域 ($4'-3'$) での塑性ひずみの大きさ ($\Delta\epsilon_a^p$) は次式で求められる（詳細は、著者らの論文の式（7）を参照のこと）。

$$\Delta\epsilon_a^p = \Delta\epsilon^p - \Delta\epsilon_b^p - \Delta\epsilon_c^p \frac{\Delta\sigma_r}{\kappa_{\max}} \quad (1)$$

いま、両振り載荷の場合は点 R が点 5 に相当する場合であるので、 $\Delta\epsilon_a^p$ は $\Delta\epsilon^p$ となる。これは、著者らの論文の式（1）で与えられる量であり、図-1 の除荷曲線（4-5）の塑性ひずみ量に等しい。すなわち、両振り載荷の予測に対しては、著者らのモデルでは元の点に戻ってくる。結局、両振り繰り返し載荷の包絡曲線は単調載荷曲線と等しいことになり、両振り 1 サイクル中の塑性変形の影響が考慮されない結果となる。この概念図を図-2 に示す。図中、それぞれ実線は単調載荷曲線を、破線は繰り返し載荷の包絡曲線を示す。

著者らの一軸状態における実験結果とモデルによる予測結果は、論文をみると限らずよく一致しているが、以上のことは、ひずみが小さい降伏棚内での一軸両振り繰り返し挙動の予測、高ひずみ域での一軸両振り繰り返し挙動の予測、さらには討議者らが行った二軸応力非比例載荷状態下での両振り繰り返し硬化（Cyclic Hardening）の予測⁴⁾には、影響があると思われる。

（2） 降伏棚内の繰り返し載荷

著者のモデルでは降伏棚の総和が一定値を超えない限り消失しないと仮定しているため、降伏棚内の両振り繰り返し載荷では降伏棚の消失が起こらないことになる。討議者らは、塑性変形量によって降伏棚の長さが減少する実験結果⁵⁾を得ている。参考までに討議者らによる SS400 鋼材の単調引張載荷および降伏棚内での繰り返し載荷実験結果をそれぞれ図-3 および図-4 に示す。降伏棚内で繰り返し載荷すると降伏棚の長さ（図中の←

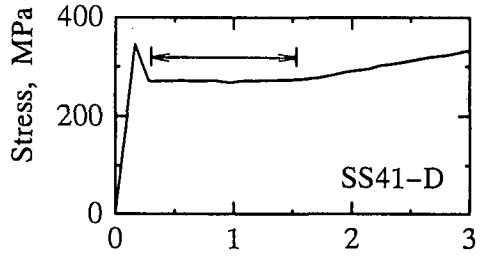


図-3 単調載荷曲線

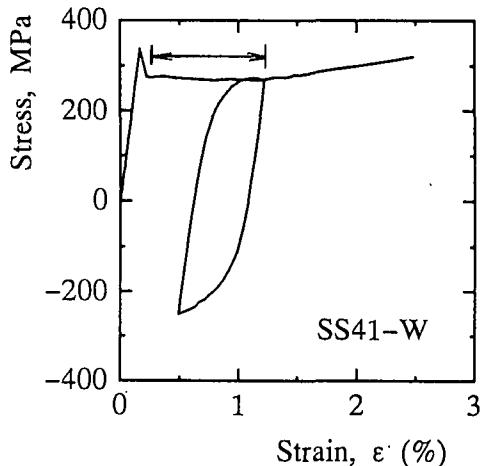


図-4 繰り返し載荷曲線

→の長さ）が短くなることが分かる。

著者らは討議者らの文献 5) を引用し、一般に再載荷曲線の挙動が、図-1 の (R-4'-3') 曲線のようになると、モーデリングを行っているが、これは討議者らが仮想境界線を導入する上で曲線 (R-4'-3') のような挙動を予測しないようにと論じた部分の箇所を誤用しているものと思われる。この曲線については何ら実験的な根拠はない。よって、著者らによる「非線形遷移領域上の荷重の反転」に関するモーデリング、特に式（1）は意味のないことであると思われる。

（3） 予測曲線の不連続性

図-5 に示すような再載荷曲線上の点 S からの荷重の反転を考える。著者らは、前項（1）と同様な考え方により再除荷曲線 (S-4"-5") を求めている。単調載荷曲線上の点 5' に移るまでの塑性ひずみの大きさ $\Delta\epsilon_a^p$ は、式（1）を用いて決定される。特別な場合として、除荷点 S が点 4'（弹性域と塑性域との境界点）に限りなく近い状態を考えてみよう。この場合、 $\Delta\epsilon_a^p$ は次式で与えられる。すなわち、

$$\Delta\epsilon_a^p = \Delta\epsilon^p - \Delta\epsilon_b^p \quad (2)$$

よって、点 4' からの再除荷曲線は 4'—R—5' となる。

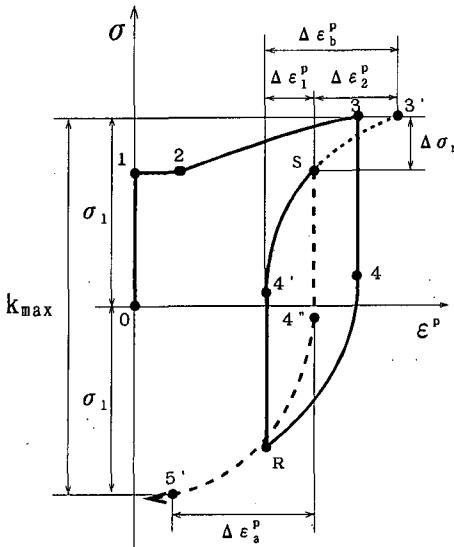


図-5 非線形遷移領域での荷重の再反転

一方、図-2において、点Rから再載荷を行った後点4'からの再除荷曲線は4'-R-5となる。このことより、点4'近傍で再除荷する場合に、再除荷曲線の数理上の不連続性を生ずることになる。

(4) 硬化則ならびに曲面の移動

降伏曲面の移動 α_{ij} を討議論文では次式で与えている。すなわち、

$$\alpha_{ij} = S_{ij} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa / S_{ij} \right) \quad (3)$$

しかし、この関係式は図-6に示すように内側の負荷曲面が外側の記憶曲面と接し、かつ現在の応力点がその接点（例えば、点3）上にある場合には良いが、そうでない場合には適切ではない。すなわち、現在の応力点 S_{ij} （図中の点3）が点4まで弾性的に変化し塑性状態に入った場合に、式(3)が用いられることになり負荷曲線の中心がジャンプする。その結果、図-6に示す円（破線）になる。これはモデルの数理上の不連続性を意味する。

一方、塑性ひずみ空間に最大塑性振幅を定義しているが、その曲面の中心の移動に関して記述されておらず、また、その後の理論展開についての記述が無く、多軸応力下での構成則の誘導に関して不明な部分が多い。

(5) モデルパラメータ

一般にモデルパラメータは単純な実験データから決定されるべきである。討議論文では、討議者らの二軸応力状態でのSS400鋼材の繰り返し実験データを引用して、著者らのモデルの有効性を論じており、修正二曲面モデルの精度よりも良いとの結論を出している。討議者らは、一軸応力状態での繰り返し載荷データを用いてパラメ

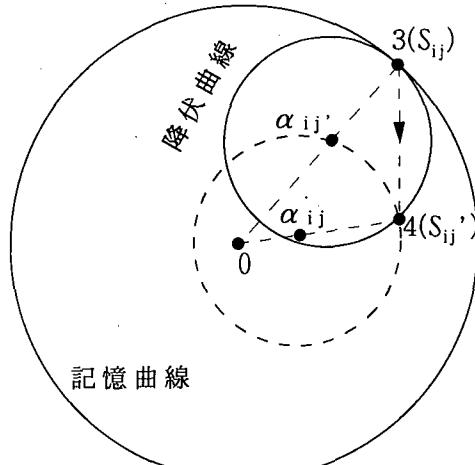


図-6 降伏曲面のジャンプ

タを設定し、それを用いて二軸応力状態での挙動を予測している。一方、討議論文中には明確に記述されていないが、著者らはSS400鋼材の一軸応力状態の実験データから決定したパラメータ（討議論文の表-1~4の値）ではなく、討議者らの二軸応力状態の実験データ⁵⁾を用いていくつかのパラメータを再度、設定し直してモデル予測を行っていると思われる。すなわち、予測する実験データからパラメータを決定するということで、完全な予測になっていない。このことは、著者らが提案しているモデルのパラメータ値（討議論文の表-1~4の値）の一般性を欠くものであり、冒頭で述べた基本条件3)に反する。

以上、(1)~(5)の項目に関して著者らのご意見を賜りたい。

参考文献

- 田中良仁、水野英二、沈赤、宇佐美勉：降伏棚を有する鋼材の繰り返し塑性モデル、構造工学論文集、土木学会、Vol. 37A, pp. 1-14, 1991年。
- 水野英二、沈赤、宇佐美勉：鋼部材の繰り返しねじり実験と二曲面モデルによる数値シミュレーション、構造工学論文集、土木学会、Vol. 39 A, pp. 221-234, 1993年。
- Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T. : A generalized two-surface model for structural steels under cyclic loading, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.10, No.2, pp.23-33, 1993.
- Mamaghani, H.P., Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T. : Cyclic behavior of structural steels-Part I : Experiments, Proc. ASCE, Vol.121, EM 11, 1995.
- Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T. : Development of cyclic two-surface model for structural steels with yield plateau, NUCE Research Report, No.9302, March, 1993.

(1995.10.16受付)

1. はじめに

著者らの論文に対して、貴重なご討議をいただき感謝したい。まず、著者らの構成式の概要について述べた後、討議に対する回答を示す。著者らの構成式の特徴は、繰り返し塑性履歴を受ける鋼材の応力-ひずみ関係の予測に対して単調載荷曲線を用いることである。この構成式を提案するにあたり当初は著者らも、討議者らと同様に2曲面モデルを修正して実験結果に近づけようと試みた。しかし研究を進めるにしたがい、修正を加えることがモデル化を複雑なものとし有限要素法への適用が難しくなると考えられ、またそのような手法に限界を感じた。そのような状況の下で、2曲面モデルにとらわれず、多数の実験結果の考察より繰り返し載荷時においても単調載荷曲線を用いて応力-ひずみ関係を求める発想にいたった。

この構成式は有限要素法への適用を前提とし応力-ひずみ関係をすべて式数で表現した。また有限要素法への適用を簡単にするため、モデルパラメータの数を必要最小限にとどめ、基本的な材料定数である弾性係数、降伏応力、ひずみ硬化開始ひずみを含め全部で12個とした。さらに、それらの定数を決定する実験については、単調載荷試験、弾性域の減少を調べる試験、ひずみ0を中心とした両振り試験の3つとし、パラメータの決定法についても論文中で述べている。また、多数の実験結果とシミュレーション結果との比較を行いモデルに対する検討を加えた。これらのことより、討議者らが冒頭で述べた1)~4)の条件は満たしているものと考えている。

それでは、討議者らの質問についての回答を以下に示す。ここで討議者らの質問(2)の後半の質問については降伏棚内での繰り返し載荷にはあたらないため(1)の中で回答した。

2. 回 答

(1) 鋼材の繰り返し曲線のモデル化について

著者らの構成式で繰り返し載荷より得られる包絡線と単調載荷曲線が一致するのは以下の場合である。

- ① 降伏棚内で繰り返し載荷した場合
 - ② 応力振幅が過去の最大応力と等しくなった場合
- ①の場合については図-1に示す実験結果のように降伏棚内においては単調載荷曲線と繰り返し曲線は一致しており問題ないとと思われる。また②の場合についても図-2のaの部分に示すようにほぼ同じ点に戻ってきており実験的に正しいことを確認している。さらに、非線形遷

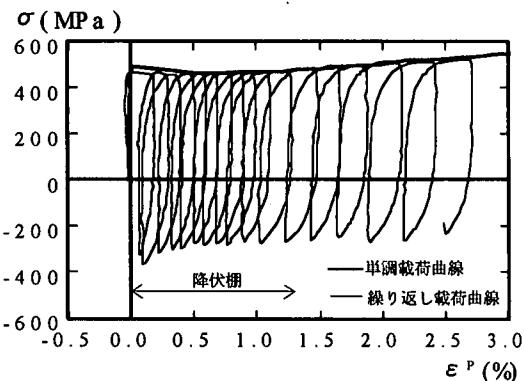


図-1 単調載荷曲線と繰り返し載荷曲線

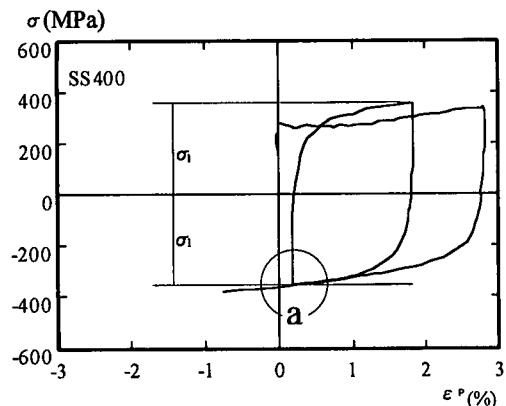


図-2 等応力振幅で両振りを行った実験

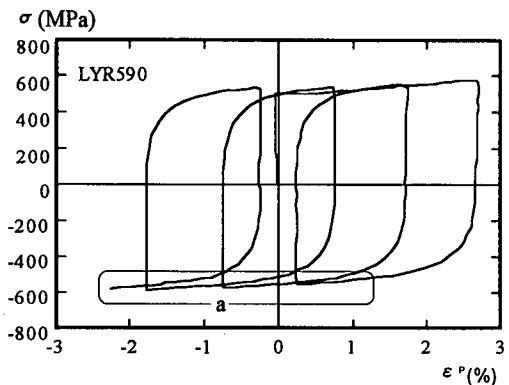


図-3 非線形域の途中で荷重を反転した実験

移領域での繰り返しのとき図-1(討議)に示すようにR-4'-3'となることは図-3のaの部分に示されるよう実験によって観察されており実験的根拠は十分ある。

表-1 SS 400 材の降伏棚の長さの合計 (%)

載荷回数	1回目	2回目	3回目	合計
供試体1	0.37	0.41	0.43	1.21
供試体2	0.58	0.52	-	1.10
供試体3	0.58	0.74	-	1.32
供試体4	0.28	0.14	0.85	1.27
合計	-	-	-	1.23

(注)単調載荷時の降伏棚の長さ=1.25%

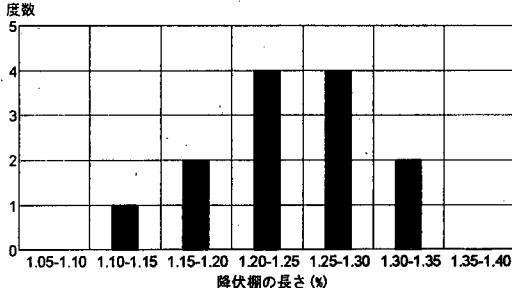


図-4 単調載荷時の降伏棚の長さのばらつき

(2) 降伏棚内での繰り返し載荷

著者らは、降伏棚内で繰り返し載荷を行い表-1に示すように多少ばらつきはあるものの降伏棚の総和が単調載荷時の降伏棚の長さに達するまでは消失しないとの結果を得た。これは、中村ら¹⁾も実験を行った結果、同様の結果を得ている。さらに降伏棚内において、塑性変形を受けても降伏棚の総和が単調載荷時の降伏棚の長さに達するまでは消失しないことは図-1の降伏棚内での応力-ひずみ関係が繰り返しを受けた場合と単調載荷の場合で一致していることよりも分かる。

さて、図-4(討議)においては塑性変形を受けると降伏棚の長さが短くなるような実験結果が示されている。このような実験結果となった原因として次の2つが挙げられると思われる。

① 降伏棚とひずみ硬化の区別

この図では、討議者がどのように降伏棚とひずみ硬化域の区別をしたか明確ではないが応力-ひずみ曲線の曲率が変化する点のように思われる。しかし、著者らは下降伏点での応力の大きさに注目して降伏棚とひずみ硬化の区別を行っている。図-4(討議)においては降伏棚の進行とともに応力がわずかに低下しており右側の矢印のところで曲率が変化した後、実際に応力が下降伏点の応力の大きさに達するのは、矢印の範囲よりもあと約1.4%前後となる。このように降伏棚とひずみ硬化の区別の仕方により降伏棚の長さは微妙に変化する。

② 実験値のばらつき

①のような理由を考えたとしても図-4(討議)での降伏棚の長さは、単調載荷時の降伏棚の長さに比べ0.1%ほど短い。その理由として実験値のばらつきが挙げられる。著者らの13回の単調載荷試験より得られた

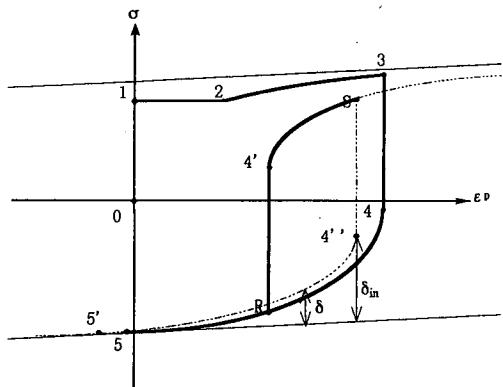


図-5 2曲面モデルでの荷重の反転

降伏棚の長さのばらつきの程度を図-4に示す。図より平均値1.25%を中心として±0.1%程度のばらつきを示している。

(3) 予測曲線の不連続性

図-1(討議)において、点Rまで載荷が進んでいる状態を考える。その後、点4'に達するまで除荷を行い、さらに点4'から再載荷を行うとする。すると、そのときの応力-ひずみ曲線はR-4'-R-5となり、R-5の長さは $\Delta\epsilon^p$ となる。一方、図-5(討議)において、点4'まで載荷が進んでいる状態を考える。ここで、引張側の非線形遷移領域の塑性ひずみの長さは $\Delta\epsilon^p$ となり点3-Rの塑性ひずみの幅よりも少し長くなる。したがって、図-5(討議)において点Sが点4'に重なる場合R-5'の長さは $\Delta\epsilon^p - \Delta\epsilon^p$ となり $\Delta\epsilon^p$ よりも短くなる。そのため、討議者らは図-1(討議)と図-5(討議)で不連続性を生じると指摘している。しかし、これは2曲面モデル、修正2曲面モデルにおいても同様のことといえる。図-5においても点Sが点4'に重なる場合、応力-ひずみ曲線は点Pから垂直に立ち上がるためR-5と重ならず不連続となってしまう。2曲面モデルにおいても同様であるように、このような場合はR-5の予測曲線を用いるべきであって、点Sが点4'に重なる場合とされること自体が不自然であると思われる。

(4) 硬化則ならびに曲面の移動

降伏曲面の中心移動について論文中の説明では不十分であったため、ここでもう一度降伏曲面の中心移動について説明する。

a) 偏差応力が降伏曲面上かつ記憶曲面上にある場合

$$\alpha_{ij} = S_{ij} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa / |S_{ij}| \right) \quad (1)$$

b) 偏差応力が降伏曲面上にある場合

$$d\alpha_{ij} = C (\bar{S}_{ij} - S_{ij}) \quad (2)$$

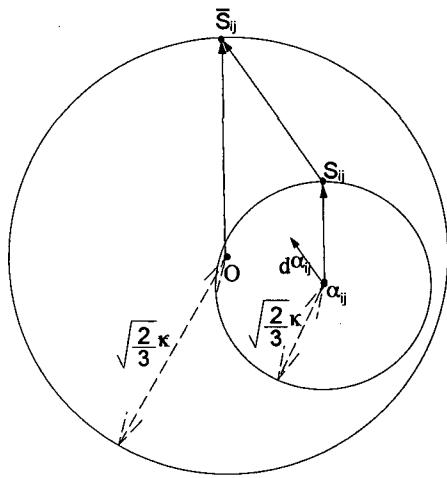


図-6 降伏曲面の中心移動

表-2 引張試験結果より得られた定数の違い

	E	σ_y	$\epsilon_{p_{st}}$	$E_{p_{st}}$	σ_u
SS400	2.11×10^6	2.8×10^3	1.53×10^{-2}	5.25×10^4	5.07×10^3
STKR400	2.02×10^6	2.3×10^3	1.70×10^{-2}	5.03×10^4	3.85×10^3

注) 単位: $\epsilon_{p_{st}}$ 以外すべて kgf/cm²

$$\text{ここで, } \bar{S}_{ij} = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} (S_{ij} - \alpha_{ij}),$$

$$C = \frac{(S_{ij} - \alpha_{ij})dS_{ij} - \frac{2}{3}\kappa dk}{(S_{ij} - \alpha_{ij})(\bar{S}_{ij} - S_{ij})}$$

$$(\because df = 3(S_{ij} - \alpha_{ij})dS_{ij} - 3(S_{ij} - \alpha_{ij})d\alpha_{ij} - 2\kappa dk = 0)$$

c) 偏差応力が降伏曲面内にある場合

$$d\alpha_{ij} = 0 \quad (3)$$

また、論文中では塑性ひずみ空間に最大塑性ひずみ振幅を定義して、この値によって弾性域の減少を表現していた。しかし、その後定式化が複雑になることや、過去に受けた塑性履歴ひずみを示すパラメータが単調載荷曲線上の塑性ひずみと最大塑性ひずみ振幅の2種類となってしまう煩雑さを避けるため最大塑性ひずみ振幅は用いないこととした。ここで、弾性域の減少は式(4)に示すように最大塑性ひずみ振幅のかわりに単調載荷曲線上の塑性ひずみの関数とした。

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1-c}{(\epsilon_{p_{max}} + 1)^n} + c \quad (4)$$

(5) モデルパラメータ

討議者らは薄肉角形鋼管に軸力と繰り返しねじりを与えることで、2軸応力状態での繰り返し試験を行っている。この試験に用いられた供試体はJIS 3466に示されている薄肉角形鋼管を焼き鈍ししたもので、JIS規格によれば使用している鋼種はSS400とほぼ同質のSTKR

400となっている。しかし、表-2に示す討議者の引張試験結果を見る限りでは、2つの鋼種で定数が同じ値を示していない。そこで著者らは試験で求めたSS400の定数で2軸応力状態のシミュレーションを行うことは不可能と考え、討議者らの行った2軸繰り返し載荷試験の実験データよりSTKR400の定数を求めた。つまり、著者らはSS400とSTKR400は実験結果より同質の材料とはみなせないと判断したため、討議者らの実験データよりSTKR400の定数を求めたものであり討議者らの示した3)の条件に反するものではない。さらに、定数は討議者らの行った2軸繰り返し試験のなかでも軸力を0として繰り返しねじりを与えた1軸応力状態(純せん断)の試験より定数を求め、論文の図-22~24に示すような二軸応力状態のシミュレーションを行った。よって、予測を行った実験データから直接定数を求めたわけではない。

参考文献

- 中村恒善, 鎌形修一: 非定常履歴単軸構成法則とその部材解析への応用, 日本建築学会論文報告集, 第300号, pp.11-17, 1981.
- Lee, C.G., Chang, K. and Sugiura, K.: The experimental basis of material constitutive laws of structural steel under cyclic and nonproportional loading 平成3年度科学研究費補助金研究成果報告書, pp.3-14, 1991.
- Mroz, Z.: On the description of anisotropic work-hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.163-175, 1967.
- Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: A model of non-linearly hardening materials for complex loading, *Acta Mecanica*, Vol.21, pp.173-192, 1975.
- Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: Plastic internal variables fromalism of cyclic plasticity, *Trans. ASME, Jour. Appl. Mech.*, pp.645-651, 1975.
- Petersson, H. and Popov, E.P.: Constitutive relations for generalized loadings, *Proc. of ASCE*, Vol.103, No.EM 4, pp.611-627, 1977.
- 皆川勝, 西脇威夫, 増田陳紀: 多曲面塑性モデルによる鋼引張圧縮部材の履歴応力-ひずみ関係の推定, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.193-206, 1986.
- Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T.: A generalized two-surface model for structural steels under cyclic loading, *Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol.10, No.2, pp.23-33, 1993.
- Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T.: Development of Cyclic Two-surface Model for Structural Steels with Yield Plateau, *NUCE Reserch Report*, No.9302, March, 1993.
- Yokoo, Y., Nakamura, T. and Komiyama, T.: Nonstationary hysteretic uniaxial stress-strain relations of a wide-flange steel (Part I), *Trans. of AJI*, No.259, pp.53-63, 1977.
- Yokoo, Y. and Nakamura, T.: Nonstationary hysteretic uni-axial stress-strain relations of a wide-flange steel (Part II), *Trans. of AJI*, No.260, pp.11-18, 1977.

- II), *Trans. of AJ*, No.260, pp.71-80, 1977.
- 12) 修行稔:定軸力と繰り返し曲げ荷重を受ける鋼構造部材断面の塑性挙動について(その1), 日本建築学会論文報告集, 第323号, pp.1-11, 1983.
- 13) 西村宣男, 小野潔, 池内智行, 新家徹:各種鋼材の繰り返し塑性履歴特性に関する実験的研究, 鋼構造論文集,
- No. 1, 1994.
- 14) Komatu, S. and Sakimoto, T.: Elasto-plastic behavior of thin-walled steel tubes under-combined forces, *Proc. of JSCE*, No.235, 1975.

(1996.7.2受付)