

# 幾何学的非線形構造系の数理分岐解析法

岡澤重信<sup>1</sup>・藤井文夫<sup>2</sup>・宇佐美勉<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 学生会員 工修 日本学術振興会特別研究員 名古屋大学大学院工学研究科博士課程(後期課程)

(〒464-01 名古屋市千種区不老町)

<sup>2</sup> Dr.-Ing. 岐阜大学助教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸)

<sup>3</sup> フェロー D.Sc. 工博 名古屋大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻  
(〒464-01 名古屋市千種区不老町)

幾何学的非線形構造系のつり合い経路上で出現する分岐点の数理的処理には、高度な計算戦略が要求される。本研究では計算力学の立場から、構造系の分岐現象を汎用的に解明することのできる数理理論を提案する。対象とする分岐現象は単純分岐のみならず多重分岐や頂上分岐など、これまで解析が困難とされてきた分岐現象をも扱っている。提案する数理理論により実用的に分岐解析を行うことができることを例題計算を通して示す。

**Key Words:** bifurcation, stability, computational mechanics, eigenpair, pinpointing, path-switching

## 1. 序論

近年多く見られる薄肉部材やスレンダーな部材で構成される構造系は、幾何学的に高次の非線形挙動を示し、この非線形性を伴う分岐座屈現象を解明することは構造系の安全性の検討や合理的な設計においても必要不可欠である。実際の構造系は何らかの初期不整を有し、その結果分岐点は消滅し荷重極大点となり、完全系の分岐経路にすり寄ったつり合い経路になる場合が多い。したがって、これまでの多くの分岐座屈に関する研究は、ただ単に初期不整を有する不完全系の、分岐点の消滅したつり合い経路を追跡することによって代用してきた<sup>1), 2)</sup>。しかし一般に初期不整モードとして採用される最小固有値の固有モードが実際の座屈モードに一致するとは限らず<sup>2), 3)</sup>、さらにある特定モードの初期不整の結果から他のモードの初期不整に対する結果を予測することは完全系を解かない限り不可能である(特に多重分岐の場合)。すなわち、完全系についてきちんと分岐点の位置を求め、後座屈挙動も明らかにしたうえでまず分岐構造を解明する。そしてそのあとではじめて不完全系の挙動について議論するのが正しい手順である。

分岐構造を解明するための研究は、すでに Koiter<sup>4)</sup> や Britvec<sup>5)</sup>、Thompson/Hunt ら<sup>6)</sup>によって一般安定理論として確立されているが、この理論は実務計算の立場からすると非現実的な側面も見受けられる。

例えば座屈解析においては、具体的で効果的な分岐点の精算方法が提案されていない。また後座屈解析においても、分岐方程式で必要とされる高次項の評価は実際の FEM コードにおいては困難で、仮に分岐方程式を導くことができたとしても、それをどう解くかという非線形解法の問題に突き当ることなどがあげられる。

1980 年代後半に入り、非線形有限要素法の高度な解析手法や計算機ハードウェアの急速な進歩に伴い、問題を汎用的に解くことのできる計算技法が注目を浴びてきている<sup>7)</sup>。細野<sup>8), 9)</sup>による弧長法を用いた分岐解析は、分岐問題の解法の先駆的な役割を果たし、それ以後多くの研究がなされている。例えば後藤ら<sup>10), 11), 12), 13)</sup> はグリーンヒル問題<sup>10)</sup>などの弾性分岐のみならず、弾塑性分岐問題の解析手法<sup>11)</sup>を提案し、さらにそれらを塑性分岐による局所化問題の解析に応用している<sup>12), 13)</sup>。また数理的な分岐解析法の研究が進む一方で、池田ら<sup>14), 15)</sup>は構造系の群対称性に起因する多重分岐現象について、群論的なアプローチで理論展開を試みている。

しかしながら分岐解析を実用的に行うためには、どのような構造系についても、分岐点の位置を的確に精算でき、分岐経路への切り換えを確実に行うことができる汎用的な数理理論が要求される<sup>7)</sup>。例えば分岐点の位置を求めるために現在広く用いられている bracketing<sup>16)</sup> のテクニックは、分岐点までの距離や分岐点の通過に反応する計量を逐次モニタ

一しながら *bi-section* などで目標点を挟みこむ方法である。しかしこの方法では収束に至るまでにわざらわしい手続きが要り、効果的な方法ではない。またこの *bracketing* を多少修正する試み<sup>16), 17)</sup> もなされているが大きな改善は見られない。また分岐経路への切り換え方法については、分岐点からクリティカルな固有ベクトル方向の予測子によって分岐経路へ移行する研究<sup>8), 9), 18), 19)</sup> がなされているが、予測子の中に含まれる不定係数が試行錯誤的に仮定され、分岐経路へのアクセスが常に成功するわけではない。また剛性行列  $K$  の微分情報から分岐解が満たすつり合い方程式を誘導し、分岐解を予測する方法<sup>19), 20), 21)</sup> もあるが、分岐方程式と同様に  $K$  の微分項が必要とされる。

筆者らはこれまでに上記の問題点を解決する分岐解析法<sup>22), 23), 24), 25)</sup>を開発してきたが、本論文では、まずこれらの計算手法の簡単なレビューを行う。分岐点に直接的に収束させることのできるピンポイント法<sup>22)</sup>で分岐点の位置を精算後、線形項までを用いた実用的な2種類の経路切り換え法<sup>23), 24), 25)</sup>により、まず先に主経路から分岐経路に乗り移り、その後、分岐経路を追跡して枝分かれの形状を判明することにより分岐構造を解明できるとする立場をとる。したがって一般安定理論<sup>4), 5), 6)</sup>のように高次項を用いて先に分岐構造を特定して分岐方向を予測するのではなく、全く逆の手順で、分岐経路を探査し、その後、経路の枝分かれ状況から分岐構造を判別する計算力学的なアプローチを採用する。

固有ペアの数理から特異剛性方程式の同次解と特解とを実用的に計算できることは本論文で述べる新たな知見である。さらにそれらを基にした頂上分岐方向の予測方法も新たなる見識である。すなわち本論文では、これまでに個々に発表してきた分岐解析手法に、これらの新たな知見を加味することにより統合した数理分岐解析法として提案する。そして提案するすべての数理手続きの妥当性を例題計算を通して検討する。ここでは単純分岐のみならず多重分岐や頂上分岐など様々な分岐現象をも汎用的に扱えることを示す。なお筆者らによる分岐解析法を、立体骨組構造系の有限変位・分岐問題に今回初めて応用した。

## 2. 数学的背景

構造系の分岐現象の特異性を特徴づけるには、剛性行列の固有ペア(固有値とそれに対応する固有ベクトル)を用いると都合がよい。固有ペアを操作す

ることによって剛性行列の特異性をうまく処理することが可能である<sup>26), 27)</sup>。そこでまず本研究で必要とされる固有ペアの数理に関する数学的背景について簡単に述べる。

### (1) 正則剛性方程式の解

$N$  個の自由度  $u$ 、单一荷重変数  $p$  で支配される構造系(保存系)の  $N$  本のつり合い方程式は、つぎのように示すことができる。

$$E(u, p) = 0 \quad (1)$$

式(1)をつり合い点で線形化すると

$$Kdu - dpe = 0 \quad (2)$$

ここで  $K$  は剛性行列で、 $e$  は規定された荷重ベクトル(一定)である。

$K$  を、その固有値  $\lambda_j$  と正規化した固有ベクトル  $\theta_j$  を用いてスペクトル展開すると

$$K = \sum_{j=1}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (3)$$

$K$  が正則行列である場合には

$$K^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \theta_j \theta_j^T \quad (4)$$

また式(2)の左辺第2項の  $dpe$  を固有ベクトルで展開すると

$$dpe = dp \sum_{j=1}^N (\theta_j^T e) \theta_j \quad (5)$$

そして式(4), (5)を用いると、式(2)で荷重増分  $dp$  を規定した場合の解  $du$  は

$$du = dp \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j^T e}{\lambda_j} \theta_j \quad (6)$$

と表現することができる。

### (2) 修正剛性方程式の解

$K$  の  $s$  番目の固有ペア  $(\lambda_s, \theta_s)$  を用いて、剛性行列をつぎのように修正する。

$$\tilde{K} = K + \lambda_s^* \theta_s \theta_s^T \quad (7)$$

ここで  $\lambda_s^*$  は任意に規定する定数である。

式(7)に式(3)を代入すると

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{j=1, \neq s}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T + (\lambda_s + \lambda_s^*) \theta_s \theta_s^T \quad (8)$$

となり、 $\mathbf{K}$ と $\tilde{\mathbf{K}}$ の固有ベクトルは同一となる。

式(2)の代わりに、式(7)の $\tilde{\mathbf{K}}$ を係数行列に持つ修正剛性方程式

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{d}\mathbf{u}} = d\mathbf{p}\mathbf{e} \quad (9)$$

を考えると、その解は

$$\tilde{\mathbf{d}\mathbf{u}} = dp \left( \frac{\theta_s^T \mathbf{e}}{\lambda_s + \lambda_s^*} \right) \theta_s + dp \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \theta_j \quad (10)$$

となる。式(6)と式(10)を比較すると、解ベクトルの中では $\theta_s$ の混入度のみが影響を受けており、他の固有ベクトルの混入度には全く影響がなく、注目する固有ベクトルの混入度を制御できることが分かる。

### (3) 特異剛性方程式の解

式(2)の剛性行列が特異行列

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (11)$$

である場合、クリティカルな固有ペア $(\lambda_s, \theta_s)$ を用いてその特異性を特徴づけることができる。

$$\lambda_s = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{K} \theta_s = 0 \quad (13)$$

式(2)の解 $\mathbf{d}\mathbf{u}$ が存在するためには、式(6)の右辺の固有ベクトル $\theta_s$ の重みについて、分母の $\lambda_s$ がゼロであるから分子についても

$$\theta_s^T \mathbf{e} = 0 \quad (14)$$

が成立する必要がある。したがって、式(2)の解 $\mathbf{d}\mathbf{u}$ の一般形はつぎのようになる。

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \mathbf{d}\mathbf{u}_h + \mathbf{d}\mathbf{u}_p \quad (15)$$

ここで、式(15)の右辺の第1項、第2項はそれぞれ同次解 $\mathbf{d}\mathbf{u}_h$ と特解 $\mathbf{d}\mathbf{u}_p$ であり

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{u}_h = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{u}_p = d\mathbf{p}\mathbf{e} \quad (17)$$

また

$$\mathbf{d}\mathbf{u}_h = C \theta_s \quad (18)$$

$$\mathbf{d}\mathbf{u}_p = dp \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \theta_j \quad (19)$$

である。式(18)の $C$ は $(0/0)$ による不定係数である。さらに $d\mathbf{u}_p$ の中には固有ベクトル $\theta_s$ が含まれないので、同次解 $\mathbf{d}\mathbf{u}_h$ と特解 $\mathbf{d}\mathbf{u}_p$ は直交する。すなわち

$$\mathbf{d}\mathbf{u}_h^T \mathbf{d}\mathbf{u}_p = 0 \quad (20)$$

特解 $\mathbf{d}\mathbf{u}_p$ を与える式(19)は、クリティカルな固有ペア以外のすべての固有ペアを必要とするため工学的には有用でない。そこで式(17)から特解 $\mathbf{d}\mathbf{u}_p$ を求めるを考える。しかし式(17)の $\mathbf{K}$ は特異行列であるためこのままでは解くことができないので、式(7)により修正剛性行列 $\tilde{\mathbf{K}}$ を作成する。この $\tilde{\mathbf{K}}$ はもはや特異行列ではなく、

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{d}\mathbf{u}}_p = d\mathbf{p}\mathbf{e} \quad (21)$$

を解くと、式(10)、(12)より

$$\tilde{\mathbf{d}\mathbf{u}}_p = dp \left( \frac{\theta_s^T \mathbf{e}}{\lambda_s^*} \right) \theta_s + dp \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \theta_j \quad (22)$$

式(14)、(19)、(22)より

$$\mathbf{d}\mathbf{u}_p = \tilde{\mathbf{d}\mathbf{u}}_p \quad (23)$$

となり、式(7)で規定すべき値 $\lambda_s^*$ の影響は全く消滅する。これは重要な認識である。

### (4) 固有値の感度

固有値 $\lambda_s$ とそれに対応する $\theta_s$ の標準固有値問題

$$[\mathbf{K} - \lambda_s \mathbf{I}] \theta_s = 0 \quad (24)$$

$$|\theta_s| = 1 \quad (25)$$

の剛性行列 $\mathbf{K}$ に $\Delta \mathbf{K}$ だけの微小変動があったとき

$$[(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) - (\lambda_s + \Delta \lambda_s) \mathbf{I}] \{ \theta_s + \Delta \theta_s \} = 0 \quad (26)$$

となる場合を考える。ただし

$$|\theta_s + \Delta \theta_s| = 1 \quad (27)$$

$|\Delta \theta_s|$ は微小であるから

$$\Delta \theta_s^T \Delta \theta_s \approx 0 \quad (28)$$

として無視すれば(線形近似の仮定)

$$\theta_s^T \Delta \theta_s = 0 \quad (29)$$

そして $\Delta \mathbf{K}$ による固有値の変動量 $\Delta \lambda_s$ は1次のオーダーでつぎのように予測できる<sup>28)</sup>。

$$\Delta \lambda_s = \theta_s^T \Delta \mathbf{K} \theta_s \quad (30)$$

さらに  $K$  は通常  $u$  のみに依存するため、  $\Delta u$  の変動があった場合、  $\Delta K$  は差分近似でつぎのように評価できる。

$$\Delta K = \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \{ K(u + \varepsilon \Delta u) - K(u) \} \quad (31)$$

ここで  $\varepsilon$  は差分近似の際のインターバルである。したがって式(30), (31)から注目する固有値の変動量  $\Delta \lambda_s$  は

$$\Delta \lambda_s = \theta_s^T \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \{ K(u + \varepsilon \Delta u) - K(u) \} \theta_s \quad (32)$$

と求めることができる。

### 3. 特異点の精算法

分岐構造の解明は、まず分岐点の位置(座標)を精確に求めるところから始まる。Wriggers ら<sup>29), 30)</sup>が1988年に発表した "Extended System" は、特異点の条件式として、N本のつり合い方程式(33)とN本の固有方程式(34)、それに1本のスカラー式(35)の計(2N+1)本の方程式

$$E(u, p) = 0 \quad (33)$$

$$K\theta = 0 \quad (34)$$

$$|\theta| = 1 \quad (35)$$

をニュートン・ラフソン法により解き、特異点におけるN個の変位  $u$ 、クリティカルな固有ベクトル  $\theta$ 、それに荷重変数  $p$  の計(2N+1)個の未知量 ( $u, \theta, p$ ) を反復法で決定するものである。

これに対して本研究で提案するピンポイント法では、N本のつり合い方程式と剛性行列  $K$  の固有値がゼロとなる条件として

$$E(u, p) = 0 \quad (36)$$

$$\lambda = 0 \quad (37)$$

を採用する(固有ペアの下添え字 "s" は省略)。Wriggers ら<sup>29), 30)</sup>の論文のなかでは式(33-35)の他にも数組の "Extended System" の可能性が検討されているが、式(36), (37)は彼らの論文にはなかった発想である。式(36), (37)の解法ステップはつぎのようである。

特異点の近傍にある任意点(つり合い点又は非つり合い点)において式(36), (37)を線形化すると

$$K\delta u - \delta p e = -E \quad (38)$$

$$\delta \lambda = -\lambda \quad (39)$$

まず

$$K\delta u_E = -E \quad (40)$$

および、 $\delta p = 1$  に対して

$$K\delta u_e = +e \quad (41)$$

式(40), (41)からそれぞれ  $(\delta u_E, \delta u_e)$  について解き、式(38)より

$$\delta u = \delta u_E + \delta p \delta u_e \quad (42)$$

となる。この  $\delta u$  に対応して固有値の変動量  $\delta \lambda$  はつぎのようになる。

$$\delta \lambda = \delta \lambda_E + \delta p \delta \lambda_e \quad (43)$$

なお  $(\delta \lambda_E, \delta \lambda_e)$  はそれぞれ  $(\delta u_E, \delta u_e)$  による固有値の変動量で、これは前述の式(32)を用いてそれぞれつぎのよう求めることができる。

$$\delta \lambda_E = \theta_E^T \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \{ K(u + \varepsilon \delta u_E) - K(u) \} \theta_E \quad (44)$$

$$\delta \lambda_e = \theta_e^T \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \{ K(u + \varepsilon \delta u_e) - K(u) \} \theta_e \quad (45)$$

式(43)を式(39)に代入して  $\delta p$  について解き、式(42)と合わせて、つぎのような修正解  $(\delta u, \delta p)$  が十分にゼロになるまで反復計算を行うことによって、特異点のピンポイントが可能となる。

$$\begin{cases} \delta p = -\frac{\lambda + \delta \lambda_E}{\delta \lambda_e} \\ \delta u = \delta u_E + \delta p \delta u_e \end{cases} \quad (46)$$

なお、この方法はニュートン・ラフソン法をベースとする局所的非線形解法であるため、あらかじめ特異点に十分接近しておく必要がある。任意のつり合い点や非つり合い点から、特異点近傍まで接近することのできる大域的収束性を有するバイパス法、ホモトピー法<sup>22), 31), 32)</sup>も著者らによって考えられている。本研究においてはつり合い経路の追跡過程において、 $K$  の負の固有値の個数に変化が見られた時点でこの局所的なピンポイントスキームに切り換えることとする。この際特異点を通過直後のつり合い点を反復法の初期値とする。

またピンポイントされた特異点が分岐点か荷重極限点であるかの判別は、クリティカルな固有ベクトルを  $\theta$  とした場合、つぎのようになる<sup>33)</sup>。

$$\begin{cases} \theta^T e \neq 0 & \text{荷重極限点} \\ \theta^T e = 0 & \text{分岐点} \end{cases} \quad (47)$$

## 4. 分岐方向の予測

ここでは2章で述べた固有ペアの数学的考察とともに分岐点からの分岐方向を予測する。なおこれらの数学的考察では分岐構造が既知であることを仮定しているが、線形項までを用いた分岐解析を目指す本論文において、後の5章で分岐経路への実用的切り換え法を考える際に、重要な情報を与えてくれる。

いま、固有ペア  $(\lambda_1, \theta_1) (s=1)$  がクリティカルとなる分岐点  $(u_B, p_B)$  からの主経路に沿う接線ベクトルを  $(du_I, dp_I)$ 、分岐経路に沿うそれを  $(du_{II}, dp_{II})$  とする。

### (1) 非対称分岐

非対称分岐点での線形化方程式

$$Kdu_I = dpe \quad (48)$$

$$Kdu_{II} = dpe \quad (49)$$

の解は、特解を  $du_p$  とすると式(15-19)よりそれぞれ

$$du_I = C_I \theta_1 + du_p \quad (50)$$

$$du_{II} = C_{II} \theta_1 + du_p \quad (51)$$

ただし  $du_p$  は式(19)の右辺において  $s=1$  として求めた特解である。式(50), (51)から

$$du_{II} = C \theta_1 + du_I \quad (52)$$

ただし

$$C = C_{II} - C_I \quad (53)$$

ここで  $du_I$  は厳格には評価不可能であるが、分岐点付近での主経路上の正則つり合い点において、単位荷重増分 ( $dp=1.0$ ) に対する変位増分ベクトル  $\delta$  を用いて十分な精度でつぎのように近似できる。

$$du_I \approx dp\delta \quad (54)$$

ここに

$$K\delta = +e \quad (55)$$

である。したがって非対称分岐方向は

$$\begin{Bmatrix} du_{II} \\ dp_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C\theta_1 + dp\delta \\ dp \end{Bmatrix} \quad (56)$$

と予測できる。

### (2) 対称分岐

対称分岐経路については荷重増分がゼロであるから、式(49)は

$$Kdu_{II} = 0 \quad (57)$$

となり、式(51)からもただちに

$$\begin{Bmatrix} du_{II} \\ dp_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{II}\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

となる。したがって対称分岐経路は分岐点からクリティカルな固有ベクトルの方向に伸びることがわかる。

### (3) 頂上分岐

荷重極限点から分岐経路が伸びる頂上分岐では

$$Kdu_I = 0 \quad (59)$$

$$Kdu_{II} = dpe \quad (60)$$

これらの特異剛性方程式の解はそれぞれ、式(59)より

$$\begin{Bmatrix} du_I \\ dp_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_I\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

式(60)より

$$\begin{Bmatrix} du_{II} \\ dp_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{II}\theta_1 + du_p \\ dp \end{Bmatrix} \quad (62)$$

特解  $du_p$  は、式(21-23)より、修正剛性行列

$$\tilde{K} = K + \lambda_1^* \theta_1 \theta_1^T \quad (63)$$

を用いて

$$\tilde{K}du_p = dpe \quad (64)$$

と求めることができる。

ほとんどの頂上分岐点では主経路と分岐経路が直交し、その場合は

$$du_I^T du_{II} = 0 \quad (65)$$

すなわち、式(61)より

$$\theta_1^T du_{II} = 0 \quad (66)$$

式(66)と、式(62)の同次解と特解との間の関係

$$\theta_i^T d\mathbf{u}_p = 0 \quad (67)$$

を考慮すると

$$C_{II} = 0 \quad (68)$$

したがって、式(65)が成立する場合の頂上分岐方向は、特解のみを用いてつぎのように表現することができる。

$$\begin{cases} d\mathbf{u}_{II} \\ dp_{II} \end{cases} = \begin{cases} d\mathbf{u}_p \\ dp \end{cases} \quad (69)$$

なお、 $dp_I = dp_{II} = 0$  の場合の頂上分岐点では 2 組の固有ペアがクリティカルとなる<sup>23), 24)</sup>。

## 5. 分岐経路への実用的切り換え法

分岐点を精算した後は分岐経路への切り換えを行い、さらにその分岐経路を追跡することによって後座屈挙動が明らかになる。本研究では、線形項までを用いた 2 種類の経路切り換え方法を提案する。

### (1) $\xi$ -追跡法

荷重レベルを分岐荷重  $p_B$  から少しずれた  $p_A$  に固定して、主経路上のつり合い点 A から分岐経路上のつり合い点 C へ切り換えることを考える。いま主経路上の現在点 A と分岐経路上の目標点 C を結ぶ軌道  $\xi$  をつぎのように定義する(図-1)。

$$F(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (70)$$

ただし

$$F(\mathbf{u}, q) = E(\mathbf{u}, p_A) - q f \quad (71)$$

ここで  $q$  はかく乱用の荷重変数で、 $f$  は  $q$  の荷重ベクトル(一定)であり、その設定方法には任意性がある。軌道  $\xi$  に沿って  $q$  の値は変化し、 $q=0$  となる度に軌道  $\xi$  はつり合い経路と交差する。よって  $q$  の符号変化がモニターされた時点で分岐経路上の近似解 C'を得ることができる。つまり、ここで提案する経路切り換え法は、分岐方向予測子を試行錯誤的に仮定して分岐経路への移行<sup>8), 9), 18), 19)</sup>を試みるのではなく、規定された荷重レベル  $p_A$  において、新しい荷重ベクトル  $f$  を作用させ、分岐経路に載るまで変形を押し進める大域的非線形解法<sup>32)</sup>である。したがって  $f$  として最も有望なものは、現在点 A におけるクリティカルな固有ベクトル  $\theta_A$  である。

$$f = \theta_A \quad (72)$$

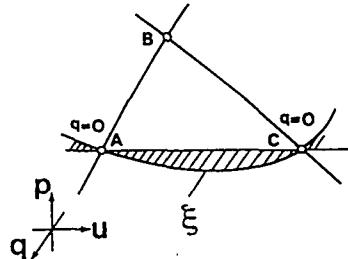


図-1  $\xi$ -追跡法

この根拠は 4 章でも述べたように、対称分岐においては、式(58)のように分岐経路が分岐点 B からクリティカルな固有ベクトルの方向に伸びていること、さらに非対称分岐においても、図-1 の点 B から A への変位増分ベクトルを  $d\mathbf{u}_I$  とした場合、式(52)のように分岐経路が点 A からクリティカルな固有ベクトルの方向に伸びているからである。ゆえに式(72)のように設定することによって、軌道  $\xi$  の点 A における接線ベクトル(式(85)の  $t_A$ )と、分岐経路の点 B における接線ベクトルをそれぞれ変位空間に投影すると両者はほぼ平行となり、目標点 C までより近い道のりをたどることが可能となる。

式(72)のように  $f$  を設定した後は、式(70)で定義された軌道  $\xi$  の軌道追跡の問題に帰着される。この軌道追跡には予測子と修正子を 1 サイクルとした弧長法が用いられる。弧長法には変位制御法、荷重制御法等があるが、ここでは弧長制御法を採用する。式(71)を線形化すると

$$Kd\mathbf{u} - dq f = -\mathbf{F} \quad (73)$$

予測子は現在のパスポイントからその軌道の接線方向に解を前に進める推進力となるものである。現在点 A は軌道  $\xi$  のパスポイントであるから、式(73)の右辺項がゼロとなり、そして予測子のステップサイズを  $\Delta\xi$  と規定した場合、予測子  $(d\mathbf{u}, dq)$  を求めるために解くべき方程式は、つぎの(N+1)本である。

$$Kd\mathbf{u} - dq f = 0 \quad (74)$$

$$d\mathbf{u}^T d\mathbf{u} + dq^2 = (\Delta\xi)^2 \quad (75)$$

式(74)と式(75)を解くと

$$dq = \pm \frac{\Delta\xi}{\sqrt{d\mathbf{u}_f^T d\mathbf{u}_f + 1}} \quad (76)$$

$$d\mathbf{u} = dq d\mathbf{u}_f \quad (77)$$

ここで

$$Kdu_f = +f \quad (78)$$

予測子により軌道 $\zeta$ から離れた点を再び軌道 $\zeta$ に引き戻すために、修正子による反復計算を行う。修正子の拘束条件としては、これまでに数多く提案されているが<sup>34), 35), 36)</sup>、例えば予測子 $(du, dq)$ と修正子 $(\delta u, \delta q)$ を直交させると、修正子 $(\delta u, \delta q)$ を求めるために解くべき(N+1)本の方程式は

$$K\delta u - \delta q f = -F \quad (79)$$

$$du^T \delta u + dq \delta q = 0 \quad (80)$$

式(79)と式(80)を解くと

$$\delta q = -\frac{du^T \delta u_F}{du^T \delta u_f + dq} \quad (81)$$

$$\delta u = \delta u_F + \delta q \delta u_f \quad (82)$$

ここで

$$K\delta u_F = -F \quad (83)$$

$$K\delta u_f = +f \quad (84)$$

本研究では、この分岐経路への切り換え方法を「 $\zeta$ -追跡法」と呼ぶことにする(図-1)。軌道 $\zeta$ が主経路と分岐経路とを結んでいるため、この軌道 $\zeta$ を追跡すれば確実に分岐経路に到達できる。その反面、軌道追跡に比較的多くの計算労力を必要とする。そこでより簡便な探査方法としては直線探査法がある。

## (2) 直線探査法

軌道 $\zeta$ を変位空間に投影してできる曲線を $\zeta$ とし、点Aにおけるその単位接線ベクトル $t_A$ の指す直線方向を $\eta$ とする(図-2)。ここで $t_A$ は

$$t_A = \frac{du_A}{|du_A|} \quad (85)$$

で定義される。また $du_A$ は点Aにおける剛性行列を $K_A$ として

$$K_A du_A = +f \quad (86)$$

を解いて求まる。点Aでの変位を $u_A$ として、 $\eta$ に沿う変位をつぎのように仮定する。

$$u(\eta) = u_A + \eta t_A \quad (87)$$

そして $\eta$ を増分変化させながら、 $\eta$ 方向に $\pi$ の停留点C'を直線探査する。この直線探査の停止条件は、不つり合い力 $E(\eta)$ と探査方向 $t_A$ の直交条件で、

$$E^T t_A = 0 \quad (88)$$

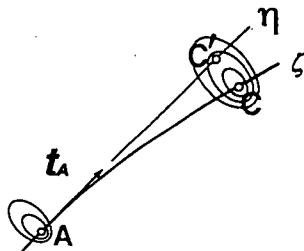


図-2 直線探査法

となり、この点C'が直線 $\eta$ に沿って目標のつり合い点Cに最も近い点となる(図-2)。直線探査法は連立方程式の解法を必要とせず、計算労力が少なくて済む実用的な方法である。しかし、 $\zeta$ の曲率が大きい場合や、探査方向が目標点の方向から著しく外れる場合などは、直線探査法は機能せず、ときには停止条件(88)を満たす点が存在しない場合もある。

## (3) 分岐解の精算

$\zeta$ -追跡法と直線探査法は、分岐経路上のつり合い解の近似値C'を与えるにすぎない。そこで得られた近似解C'を初期値として、荷重制御法(荷重レベル固定)で、つぎのようなニュートン・ラプソン法で解Cの精算を行う。

$$K\delta u = -E \quad (89)$$

## (4) 多重分岐

分岐点において、 $K$ の複数個の固有値が同時にゼロとなる多重分岐においては、クリティカルな複数個の固有ベクトルの線形結合もまた、その多重固有値の固有ベクトルとなるため、対称性に起因する群論的多重分岐<sup>14), 15)</sup>の場合を除いては、分岐経路の本数や方向をあらかじめ予測することは不可能である。そのため荷重ベクトル $f$ は、単純分岐の場合の式(72)のように一意に決定することはできない。そこで荷重ベクトル $f$ を不定パラメーター( $\alpha, \beta$ )を用いてつぎのような線形結合で定義する<sup>23), 25)</sup>。

分岐点において2個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ がゼロとなるときは、クリティカルな2個の固有ベクトルを $\theta_1, \theta_2$ とすると

$$f = \cos \alpha \theta_1 + \sin \alpha \theta_2 \quad (90)$$

3個のゼロ固有値( $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ )が発生する場合は、クリティカルな固有ベクトル $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ によって

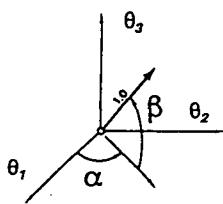


図-3  $\alpha$  と  $\beta$

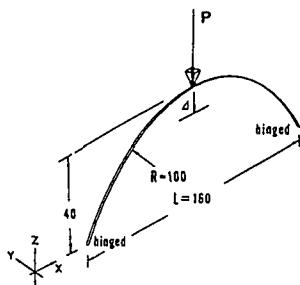


図-4 立体アーチ

$$f = \cos \alpha \cos \beta \theta_1 + \sin \alpha \cos \beta \theta_2 + \sin \beta \theta_3 \quad (91)$$

そして、不定パラメーター ( $\alpha, \beta$ ) を増分的に変化させることによって、( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) が張る空間の全円周上、全球面上をくまなく探査する(図-3)。

### (5) 頂上分岐

荷重極限点を通過するときは通常  $K$  の負の固有値の個数に変化が見られるが、変化がなければそこから分岐経路が伸びる頂上分岐となる。頂上分岐の場合には、分岐点のピンポイントを行った後、式(69)の特解のみによる予測子によって分岐経路への移行が可能である。荷重増分を小さく設定する限り、式(89)の反復計算は実際にはほとんど必要ない。

## 6. 例題

### (1) 立体アーチ<sup>37), 38)</sup>

図-4 の立体アーチで、両端は共に Y 軸回りの回転のみを許す。構造系の初期形状は図-4 の通りであり、ヤング係数  $E=100$ 、ポアソン比  $\nu=0.25$ 、断面は  $1.0 \times 1.0$  の正方形断面とする。3 次元はり要素<sup>39)</sup>により構造系を 8 要素で多角形近似して計算を行った。図-5 に示すつり合い経路の脇に示してある整数が接線剛性行列  $K$  の負の固有値の個数である。こ

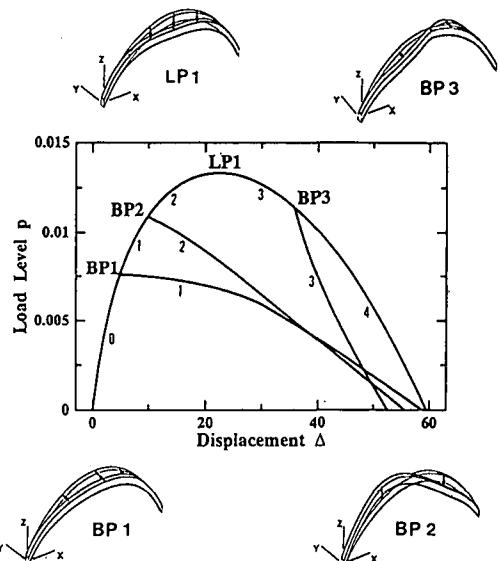


図-5 立体アーチのつり合い経路

の負の固有値の個数をモニターすることにより特異点のピンポイントと分岐経路への切り換えを行った。

Meek<sup>37), 38)</sup>は同じ構造系の計算を行っているが、最後の分岐点 BP3 を見逃している。Meek が定式化した有限要素<sup>37), 38), 40), 41)</sup>は軌道追跡には有用であっても、それが分岐解析についても使えるとは限らない。分岐解析において有用な要素とは、分岐点や荷重極限点などの特異点に敏感に、かつすべて検出もなく反応するものであり、単に主経路のみを精度よく追跡できるだけのものでは決してない。

### (2) 多重分岐モデル<sup>23), 25)</sup>

図-6 のような、剛体と弾性バネから成るモデルを考える。いま初期座屈領域のみを対象とするために自由度 ( $\Omega_1, \Omega_2$ ) が微小量であることを仮定すると、無次元化されたポテンシャルエネルギーはつぎのように簡略化される。

$$\pi(\Omega_1, \Omega_2, p) = 2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - p \left\{ \frac{1}{2} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \left( \frac{1}{4} \right) \frac{\Omega_1^4}{2 - \Omega_1^2} + \left( \frac{1}{4} \right) \frac{\Omega_2^4}{2 - \Omega_2^2} \right\} \quad (92)$$

このモデルでは  $p=4.0$  においてゼロ固有値が 2 個の多重分岐が発生する。そこで分岐荷重の上側  $p=4.2$  と下側  $p=3.7$  の荷重レベルにおいてそれぞれポテンシャルの等高線を描いたのが図-7 である。つり合い点は、分岐荷重の上側においては主経路上のみであるのに対して、下側では主経路以外に 8 個存在する。

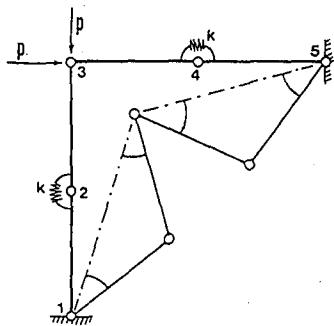


図-6 多重分岐モデル

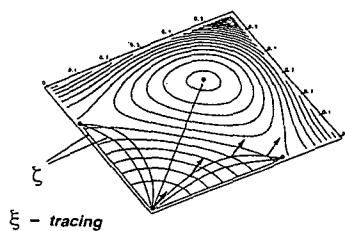
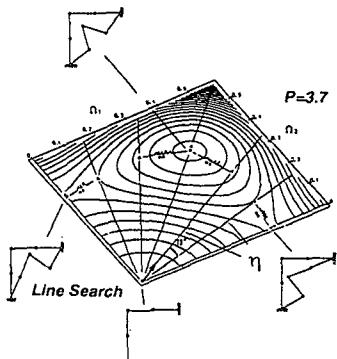


図-8 多重分岐モデルにおける $\xi$ -追跡法と直線探査法

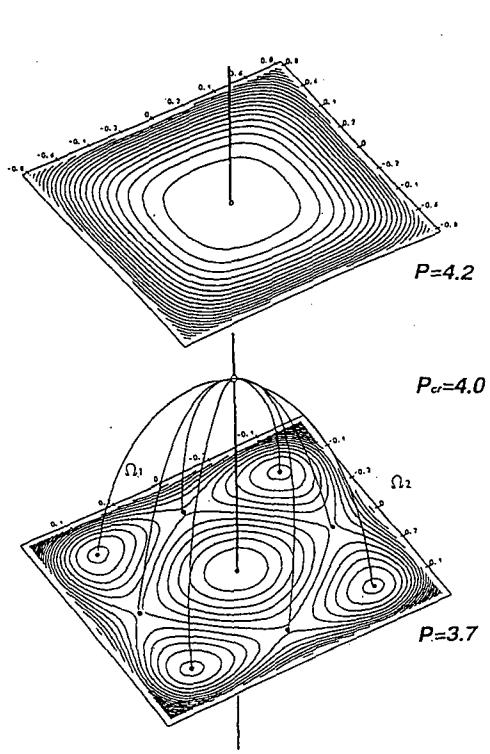


図-7 多重分岐モデルのポテンシャル等高線

のことから4本の対称不安定分岐経路があることがわかる。そこで、分岐荷重の下側( $P=3.7$ )において、分岐経路への切り換えを試みた。なおポテンシャルマップの対称性から、1/4部分のみを取り出して探査の対象とした。

ここではゼロ固有値が2個の多重分岐であるので、 $f$ を式(90)のように設定して、 $\alpha$ を $15^\circ$ 刻みとして全部で7方向について $\xi$ -追跡と直線探査を行った結果が図-8である。 $\xi$ -追跡と直線探査ともすべての方向で分岐経路に到達させることができたが、

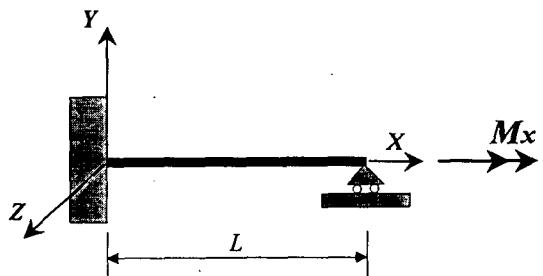


図-9 ケーブル構造系

$\alpha$ が $30^\circ$ と $60^\circ$ の場合の探査に着目すると、 $\xi$ -追跡法と直線探査法において初期探査方向( $t_A$ )が同じであるのにもかかわらず、到達する分岐経路が異なっている。これは直線探査法が変位空間をまっすぐ進むのに対して、 $\xi$ -追跡法ではポテンシャル曲面の凹凸を逐次認識しながら進むためである。

### (3) Cable Hockling<sup>42), 43)</sup>

ケーブルにねじりを与えると、突然よじれが発生する挙動<sup>10), 42), 43)</sup>は分岐現象である。

図-9のような構造系を考える。この構造系は左端で固定され、右端はX軸方向の変位とX軸回りの回転を許すものとする。そして右端にねじりモーメント力 $M_x$ を作用させる。幾何学的データと材料パラメーターはつぎのようである<sup>42), 43)</sup>。

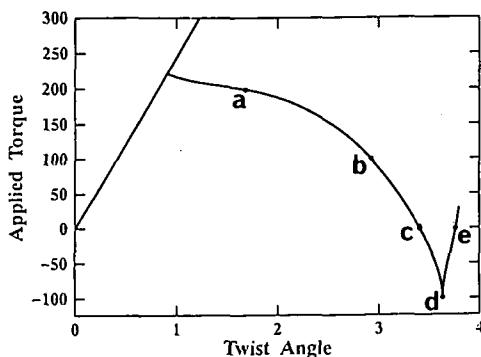


図-10 ケーブル構造系のつり合い経路

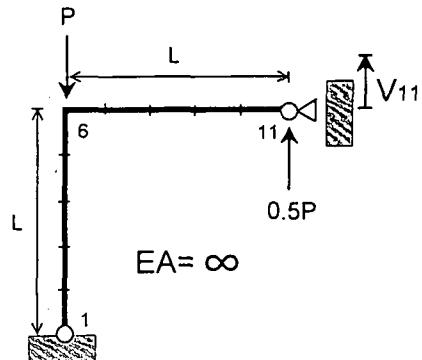


図-12 頂上分岐フレーム

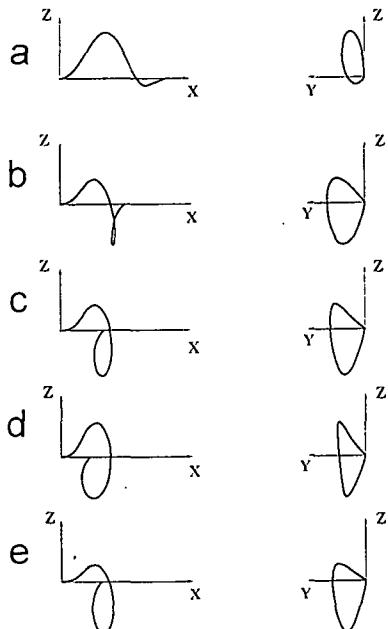


図-11 ケーブルのよじれ挙動

$$L=240 \text{ mm}, \text{断面2次極モーメント } I_x=2.16 \text{ mm}^4$$

$$\text{断面2次モーメント } I_y=I_z=0.0833 \text{ mm}^4$$

$$\text{ヤング係数 } E=71240 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{せん断係数 } G=27190 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{断面積 } A=0.01 \text{ mm}^2$$

ただし断面積Aの値については文献<sup>42), 43)</sup>で明記されておらず、上記の値は本研究で仮定した値である。3次元はり要素<sup>44)</sup>により10要素に離散化して計算を行った。右端のねじり角と外力ねじりモーメントをプロットして、これをつり合い経路として図-10に示す。主経路に沿って外力ねじりモーメントとねじり角は完全な線形関係にあり、分岐点に到達する

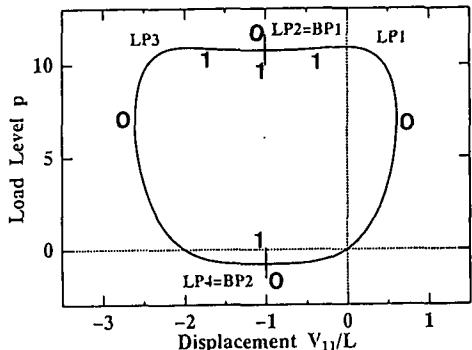


図-13 頂上分岐フレームのつり合い経路

とケーブルのよじれが発生する。ケーブルのよじれる変形状態を分岐経路上(図-10)の、点a( $M_x=200 \text{ N-mm}$ )、b( $M_x=100 \text{ N-mm}$ )、c( $M_x=0$ )、d(Limit Point)、e( $M_x=0$ )で示す(図-11)。

#### (4) 頂上分岐フレーム

最後は図-12の示すような、エラスティカフレームである。2次元はり要素<sup>45)</sup>により構造系を10要素で離散化した。変位と荷重をそれぞれ無次元化したつり合い経路(図-13)の主経路は閉曲線を形成し、4個の荷重極限点(LP1, LP2, LP3, LP4)を有する。そして頂上分岐がLP2(=BP1)とLP4(=BP2)で発生する。つり合い経路の脇の整数が剛性行列Kの負の固有値の個数である。通常の荷重極限点を越えた場合、負の固有値の個数が変化するが、頂上分岐の場合は変化しない。この例題では負の固有値の変化からLP2とLP4が頂上分岐であると分かるので、式(69)で経路切り換えを行い、すべて問題なく分岐経路を探査してきた。

## 7. 結論

本論文では、これまでに筆者らが開発してきた個々の分岐解析のための計算手法をまずレビューし、今回新たに数学的背景を加味することによりそれらを統合して、計算力学の立場から数理分岐解析法として提案した。その結論を以下にまとめる。

まずこれまでの計算手法のレビューとして

1. 分岐点の位置の特定に“妥協的”（精度と手続の面で）であった従来の *bracketing* 手法に対して、ピンポイント法は目標点に直接的に収束させることができ、信頼性の高い分岐点の精算が可能である。
2. 分岐構造があらかじめ特定されていなくても、線形項までを使用した 2 種類の分岐経路への切り替え法によって、まず先に分岐経路を探査し枝分かれの形状を特定する。そして、その後分岐構造を解明することができる。
3. 実際に起こりうる可能性が高く、構造設計において重要であるにもかかわらず、これまでシステムチックに扱われることのなかった多重分岐構造をも汎用的に明らかにできる。

そして本論文で新たに加えた知見としては

4. 固有ペアの数理により分岐現象の特異性を難なく処理することができ、さらに工学的に有益な固有値の感度公式を活用することができる。
5. 頂上分岐においては、上の 4. の固有ペアの操作により特異剛性方程式の特解を実用的に求めた後、その特解を用いて頂上分岐経路へアクセスできる。
6. 筆者らが開発してきた分岐解析法の妥当性を今回初めて立体骨組構造系について検討し、3 次元の有限変位・分岐問題においても提案する数理理論が十分機能することを示した。

提案する数理理論は既存の汎用コードに容易に組み込め、静的荷重が作用する幾何学的非線形構造系の分岐問題を実用的に解くことができる。今後は、特異性の強い多重分岐問題をより効率よく扱える手法<sup>46)</sup>の開発や、弾塑性分岐<sup>11), 47)</sup>、衝撃座屈<sup>48)</sup>などの複雑な分岐挙動を解析できるように数理理論を拡張するのが課題となる。なお本論文は、第 1 著者が名古屋大学大学院工学研究科に提出した修士論文(1996 年 2 月)を基礎としている。

## 参考文献

- 1) 吉田 裕, 増田陳紀, 森本 剛, 広沢規行: 立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土木学会論文報告集, No. 300, pp. 21-31, 1980.
- 2) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- 3) Simo, J.C., Fox, D.D. and Rifai, M.S. : On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model, Part III, Computational Aspects of the Nonlinear Theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79, pp. 21-70, 1990.
- 4) Koiter, W.T. : On the Stability of Equilibrium, *Thesis Polytechnic Institute*, Delft H.T., Paris, Amsterdam, 1945.
- 5) Britvec, S.J. : *The Stability of Elastic Systems*, Pergamon Unified Engineering Series, 1973.
- 6) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. : *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, London, 1973.
- 7) 吉田 裕: 有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題, 土木学会論文集, No. 374, pp. 25-37, 1986.
- 8) 細野 透: 弧長法による弹性座屈問題の解析(その 1)座屈点に於ける増分解の性質, 日本建築学会論文報告集, No. 242, pp. 41-49, 1976.
- 9) 細野 透: 弧長法による弹性座屈問題の解析(その 2)数値解法としての弧長法, 日本建築学会論文報告集, No. 243, pp. 21-31, 1976.
- 10) Goto, Y., Li, X.-S., Kasugai, T. and Obata, M. : Analysis of Greenhill Problem by a Co-Rotational Method, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 41A, pp. 411-420, 1995.
- 11) 後藤芳顯, 大鹿克敏, 川西直樹, 小畠 誠: 多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析法とトラス構造物への適用, 土木学会論文集, No. 446, pp. 117-126, 1992.
- 12) 後藤芳顯, 松岡宏典, 王慶雲, 烏羽保行: 圧縮板の塑性座屈モードの局所化と変形能の低下, 土木学会論文集, No. 513, pp. 39-51, 1995.
- 13) Goto, Y., Toba, Y. and Matsuoka, H. : Localization of Plastic Buckling Patterns under Cyclic Loading, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 121, No. 4, pp. 493-501, 1995.
- 14) Ikeda, K., Nishino, F., Hartono, W., and Torii, K. : Bifurcation Behavior of an Axisymmetric Elastic Space Truss, *Structural Eng. / Earthquake Eng.*, Vol. 5., No. 1, JSCE, pp. 209-212, 1988.
- 15) Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H. : Bifurcation Hierarchy of Symmetric Structures, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 27., No. 12., pp. 1551-1573, 1991.
- 16) Shi, J. : Computing Critical Points and Secondary Paths in Nonlinear Structural Stability Analysis by the Finite Element Method, *Computers & Structures*, Vol. 58, No. 1, pp. 203-220, 1996.
- 17) Riks, E. : An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 15., pp. 529-551, 1979.
- 18) Wagner, W. and Wriggers, P. : A Simple Methods for the Calculation of Postcritical Branches, *Engng. Comput.*, Vol. 5, p. 103, 1988.
- 19) Kouhia, R. and Mikkola, M. : Tracing the Equilibrium Path beyond Simple Critical Points, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 2923-2941, 1989.
- 20) Riks, E. : Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, pp. 219-259, 1984.

- 21) Eriksson, A. : Derivatives of Tangential Stiffness Matrices for Equilibrium Path Descriptions, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.32, pp.1093-1113, 1991.
- 22) 藤井文夫, 内藤 幹夫 : 特異つり合い点をピンポイントするための局所的大域的非線形解法, 構造工学論文集, Vol. 41A, pp. 455-464, 1995.
- 23) Fujii, F. and Okazawa, S. : Multi-Bifurcation Models in Nonlinear Elasticity, *Proceedings of International Conference on Computational Methods in Structural and Geotechnical Engineering*, Hong Kong, pp.583-588, 1994.
- 24) Fujii, F. and Asada, K. : Branch-Switching in Simple Spatial Bifurcation Models, *SEIKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shells and Spatial Structures*, Tokyo, pp.515-522, 1993.
- 25) 岡澤重信, 藤井文夫 : 多重分岐のベンチマークモデルと分岐経路の探査方法について, 構造工学論文集, Vol. 41A, pp. 465-474, 1995.
- 26) 藤井文夫, 岡澤重信 : 剛性行列の固有ベアの数理と特異剛性方程式を係数行列に持つ連立方程式の解法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997. (投稿中)
- 27) 藤井文夫 : 接触問題としてのスライダーメカニズムの機構運動追跡法, 日本機械学会論文集(A編), 「計算固体力学」特集号, Vol. 57, No. 541, pp. 260-266 1991.
- 28) シャトラン, F. : 行列の固有値, 伊理正夫・伊理由美訳, Springer-Verlag, 1993.
- 29) Wriggers, P., Wagner, W. and Miehe, C. : A Quadratically Convergent Procedure for Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70, pp.329-347, 1988.
- 30) Wriggers, P. and Simo, J.C. : General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.30, pp.155-176, 1990.
- 31) Okazawa, S. and Fujii, F. : Global and Local Procedures to Compute the Stability Point, *Proceedings of The Third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*, Seoul, pp.455-460, 1996.
- 32) 藤井文夫, 岡澤重信 : 構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法, 日本機械学会論文集(A編), 「ハイパフォーマンスコンピューティング」特集号, Vol. 62, No. 603, pp. 2448-2455, 1996.
- 33) 半谷裕彦, 川口健一 : 形態解析 =一般逆行列とその応用=, 培風館, 1991.
- 34) Ramm, E. : Strategies for Tracing the Non-linear Response near Limit Points, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, edited by Wunderlich, W. et al., Springer-Verlag, Berlin, pp.63-89, 1981.
- 35) Chan, S.L. : Geometric and Material Nonlinear Analysis of Beam-Column and Frames using the Minimum Residual Displacement Method, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, pp.2657-2669, 1988.
- 36) Crisfield, M.A. and Shi, J. : A Review of Solution Procedures and Path-following Techniques in Relation to the Non-linear Finite Element Analysis of Structures, *Nonlinear Computational Mechanics : State of the art*, edited by Wriggers, P. and Wagner, W., Springer-Verlag, Berlin, pp.47-68, 1992.
- 37) Meek, J.L. and Loganathan, S. : Large Displacement Analysis of Space-Frame Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72, pp.57-75, 1989.
- 38) Meek, J.L. and Loganathan, S. : Geometrically Nonlinear Behavior of Space Frame Structures, *Computers & Structures*, Vol. 31, pp.35-45, 1989.
- 39) 川井忠彦, 藤谷義信 : 座屈問題解析, 有限要素法の基礎と応用シリーズ 11, 培風館, 1991.
- 40) Meek, J.L. and Tan, H.S. : A Stiffness Matrix Extrapolation Strategy for Nonlinear Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43, pp.181-194, 1984.
- 41) Meek, J.L. and Tan, H.S. : Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, pp.261-282, 1984.
- 42) Nour-Omid, B. and Rankin, C.C. : Finite Rotation Analysis and Consistent Linearization Using Projectors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98, pp.353-384, 1991.
- 43) Felippa, C.A., Crivelli, L.A. and Haugen, B. : A Survey of the Core-Congruential Formulation for Geometrically Nonlinear TL Finite Elements, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol.1, pp.1-48, 1994.
- 44) Yang, Y.B. and Kuo, S.R. : *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall, 1994.
- 45) Fujii, F., Naito, M. and Gong, S.-X. : Finite Displacement Theory of Straight Beams under Configuration-dependent Uniform loads, *Computers & Structures*, Vol.36, No.1, pp.157-167, 1990.
- 46) 藤井文夫, 池田清宏, 岡澤重信 : 剛性行列のブロック対角化原理を用いた対称性に起因する多重分岐点のピンポイント法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997. (投稿中)
- 47) 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉 : 剛性行列の固有値制御による弾塑性分岐点の精算法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997. (投稿中)
- 48) Kleiber, M., Kotula, W. and Saran, M. : Numerical Analysis of Dynamic Quasi-Bifurcation, *Eng. Comput.*, Vol.4, pp.48-52, 1987.
- 49) Fujii, F. and Okazawa, S. : Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1997. (to appear)

(1996. 5. 9 受付)

## COMPUTATIONAL BIFURCATION ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR STRUCTURES

Shigenobu OKAZAWA, Fumio FUJII and Tsutomu USAMI

The stability analysis requires innovated computational strategies to overcome bifurcation points and limit points on the equilibrium path of geometrically nonlinear structures. The present paper describes computational strategies to study the bifurcation phenomenon of structures. The validity of all the proposed computational procedures is examined on numerical examples including simple, multiple and hill-top bifurcation.