

# 等価介在物法を用いた弾塑性有限要素解析手法

山口栄輝<sup>1</sup>・堀 宗朗<sup>2</sup>・久保喜延<sup>3</sup>・安部剛史<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 Ph.D. 九州工業大学助教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畠区仙水町1-1)

<sup>2</sup>正会員 Ph.D. 東京大学助教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

<sup>3</sup>正会員 工博 九州工業大学教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畠区仙水町1-1)

<sup>4</sup>正会員 工修 鹿島建設(株) 土木設計本部設計技術部 (〒107 東京都港区赤坂6-5-30)

現実の弾塑性解析では、塑性域が大きく拡大するまでの計算を必要としない場合も多い。この点に鑑み、本研究では、塑性域を主たる計算対象領域とすることにより計算効率を向上させた解析手法を開発した。本解析手法の特色は、塑性域の材料剛性を弹性時のものに置き換える点にある。但し、問題の等価性を保証し、材料剛性の置き換えを正当化するために、塑性域には塑性ひずみ増分を分布させる。この塑性ひずみ増分分布の決定が、本解析手法における計算の中心となる。2つの弾塑性問題を計算例として解き、本解析手法の妥当性を確認するとともに、大幅な計算時間の減少が可能であることを実証した。

**Key Words:** elastic-plastic analysis, equivalent-inclusion method, finite element method

## 1. はじめに

塑性理論の基本的な枠組みは1950年代までに完成し<sup>1)-3)</sup>、現在では、金属のみならず土やコンクリートのような土木材料の挙動を記述するにも塑性理論が用いられている<sup>4), 5)</sup>。こうした塑性理論は、1960年代の終わりに有限要素法に組み込まれ<sup>6), 7)</sup>、それ以降、コンピュータの発展とともに相まって、比較的容易に弾塑性解析が行われるようになってきた。弾塑性有限要素解析について丁寧に説明した書物も多数出版されている<sup>8)-12)</sup>。しかしながら、日常の設計業務で気軽に弾塑性解析を取り入れる段階にはまだ至っていない。その大きな原因の一つに計算時間の問題がある。現在広く出回っているPCやEWSのレベルでは、実構造物の弾塑性解析を行うには無理がある。特に三次元問題では、記憶容量はかなり工夫できても計算が追いつかない。このような状況を背景に、計算速度を上げる種々の試みが行われている<sup>13)</sup>。

ところで、現実の構造解析では、塑性域が大きく拡大するまでの計算を必要としない場合も多い。このことは、塑性ヒンジの概念に基づいた塑性設計(Plastic Design)や極限解析(Limit Analysis)が多

くの構造物に適用されていることからも示唆される<sup>14), 15)</sup>。しかしながら、有限要素法による通常の弾塑性解析では、たとえ小さな領域であっても剛性が変化すれば、それに応じて構造全体の剛性マトリクスを新たに構築し、有限要素方程式を解く必要がある。有限要素解析では計算時間の多くが有限要素方程式の解法、すなわち連立一次方程式の解法に費やされる<sup>16), 17)</sup>。このことを考えれば、通常の弾塑性有限要素解析のアルゴリズムでは、塑性域が限定されることが明らかな場合でも、それを利用して計算速度を大幅に向上させるのは困難であると思われる。

不均質材料の取り扱いに関して、マイクロメカニクスの分野で発展してきた手法に等価介在物法(equivalent inclusion method)がある<sup>18)</sup>。著者らは先に、この等価介在物法を適用することにより、平面骨組構造物の弾塑性解析を高速に行うための手法を開発した<sup>19)</sup>。この解析手法では塑性域のみを対象とした計算が主となるため、塑性域が限定される場合には、計算時間の大半が短縮が可能となっている。本論文では、この解析手法を拡張し、弾塑性材料からなる一般の固体を対象とした、高速な弾塑性解析手法を提案する。なお、ここでは

弾塑性解析の基本である微小変位問題のみを取り扱うが、適切な等価条件を設定することにより、有限変形問題などにも応用可能である。

## 2. 定式化および解析手順

弾塑性問題は、基本的に、次の方程式系で表される増分境界値問題である<sup>20)</sup>。

$$\text{つり合い式: } \dot{\sigma}_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (1)$$

$$\text{ひずみ-変位関係式: } \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2)$$

$$\text{構成式: } \dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (3)$$

$$\text{境界条件: } \bar{i}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j, \quad \bar{u}_i = \dot{u}_i \quad (4)$$

ここに、 $\dot{\sigma}_{ij}$ 、 $\bar{f}_i$ 、 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 、 $\dot{u}_i$ 、 $\bar{i}_i$ はそれぞれ応力増分、物体力増分、ひずみ増分、変位増分、表面力増分である。また $n_j$ は境界面に立てた外向き単位法線ベクトル、 $D_{ijkl}^{ep}$ は応力増分とひずみ増分の関係を表すテンソルである。なお、上式を始めとする本論文の数式の記述では、総和規約を用いることとする。

以下では、まず上記増分境界値問題の通常の解析方法を簡単に記し、次いで本研究で提案する解析手法について述べる。但し、いずれの手法においても、有限要素法の使用を前提とする。

### (1) 通常の解析手法

式(1)、(2)、(4)を用いれば、次の仮想仕事式が導かれる。

$$G = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V \bar{f}_i \delta \dot{u}_i dV - \int_{A_i} \bar{i}_i \delta \dot{u}_i dA = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\delta \dot{u}_i$ 、 $\delta \dot{\varepsilon}_{ij}$ は仮想変位増分および仮想ひずみ増分である。 $V$ 、 $A_i$ はそれぞれ解析対象固体の全領域、応力境界条件が与えられた境界面を表している。

有限要素法では、解析対象領域を有限個の小領域（要素）に分割し、各要素内で式(5)の積分を評価する。すなわち、

$$G = \sum_e G^e = 0 \quad (6)$$

ここに

$$G^e = \int_{V^e} \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{V^e} \bar{f}_i \delta \dot{u}_i dV - \int_{A_i^e} \bar{i}_i \delta \dot{u}_i dA \quad (7)$$

である。式(7)の上付き添字 $e$ は、要素に関する量であることを示している。式(7)に式(3)を代入した上で、アイソパラメトリック要素を用いて離散化すれば、次式が得られる。

$$G^e = \delta \dot{U}_j^b \left[ \left( \int_{V^e} N_j^b D_{ijkl}^{ep} N_j^a dV \right) \dot{U}_k^a - \int_{V^e} \bar{f}_j N^b dV - \int_{A_i^e} \bar{i}_j N^b dA \right] \quad (8)$$

ここに、上付き添字 $a$ 、 $b$ は節点番号を表し、これらについても総和規約を適用している。また $N^a$ は節点 $a$ に対応する形状関数であり、()内が剛性マトリクス、[]内の第2、3項が等価節点外力増分ベクトルとなっている。式(8)を式(6)に代入すれば、次式で表される弾塑性解析の有限要素方程式が導かれる。

$$\mathbf{K}_T \dot{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (9)$$

$\mathbf{K}_T$ 、 $\dot{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}$ はそれぞれ全体系の剛性マトリクス、節点変位増分ベクトル、等価節点外力増分ベクトルを表す。

この解析手法では、連立一次方程式である式(9)を解くことにより $\dot{\mathbf{U}}$ を求め、それをもとに応力などの状態変数を更新することになる。なお、係数マトリクスに当たる剛性マトリクス $\mathbf{K}_T$ は、塑性変形の進展に応じて逐次変化する。

$\mathbf{K}_T$ は、多数の成分が0である疎（スパース）なマトリクスであり、さらに非零成分が対角の近くに集中して帯形になっている。こうした性質を利用して計算効率を高めた有限要素方程式の解法が開発されている<sup>17), 21)</sup>。本研究では、提案する解析手法との比較検討を行うために式(9)による解析も行うが、その際には、有限要素方程式の解法として最も一般的なスカイライン法を適用する。

### (2) 等価介在物法を用いた解析手法

#### a) 基礎方程式

提案する解析手法では、式(3)に代えて、次式を用いて解析を行う。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p \right) \quad (10)$$

ここに、 $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ は塑性ひずみ増分である。また $D_{ijkl}^e$ は弾性テンソルであり、変形状態にかかわらず一定の値を有する。式(10)の( )内は弾性ひずみ増分を表しており、この式は塑性理論で用いられる基礎式の一つに他ならない。式(10)の採用は、また、塑性域の材料剛性を弾性時の材料剛性に置き換えて解析する方法であると見なすことができる。そして、問題の等価性を保ち、材料剛性の置換を正当化するために、塑性域に $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ を導入していると考えられる。 $(\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 分布の具体的な決定法については、次のb)で述べる。)このような置き換えに基づいた解析方法が等価介在物法であり、問題の等価性を保証するために導入されるひずみを、一般にはアイゲンひずみ(eigenstrain)と呼称している<sup>18)</sup>。

式(7)は式(3)と無関係に誘導されているため本節でも有効である。この式(7)に式(10)を代入して有限要素法で離散化すれば、次式が得られる。

$$G^e = \delta \dot{U}_j^b \left[ \left( \int_{V^e} N_j^b D_{ijkl}^e N_k^a dV \right) \dot{U}_k^a - \int_{V^e} \bar{f}_i N_i^b dV \right. \\ \left. - \int_{A_i^e} \bar{t}_j N_i^b dA - \int_{V^e} N_j^b D_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl}^p dV \right] \quad (11)$$

上式( )内が提案する解析手法における剛性マトリクスになるが、材料剛性が $D_{ijkl}^e$ であるため、式(8)の場合と異なり、変形状態によって変化することはない。また〔〕内の最終項は、塑性ひずみ増分により生じる見かけの等価節点外力増分ベクトルである。式(11)を式(6)に代入すれば、次の有限要素方程式が得られる。

$$K_0 \dot{U} = \bar{F} + \dot{P} \quad (12)$$

ここに、 $K_0$ は全体系の剛性マトリクス、 $\dot{P}$ は式(11)の〔〕内第四項に対応するもので、ここでは等価節点アイゲン力増分ベクトルと呼ぶ。

式(12)は連立一次方程式であり、提案する解析手法の基礎方程式である。ここで肝要なのは、この方程式の係数マトリクスに当たる $K_0$ が、塑性変形の進展具合にかかわらず、変化しない点である。弾塑性体のつり合い経路を追跡する際には、式(12)の連立一次方程式を繰り返し解くことになるが、 $K_0$ が変化しないため、連立一次方程式の

解法として、逆マトリクスを求めるのであればその計算は一回で十分であるし、LU分解で解を求める場合でも、時間のかかる三角分解の計算は一度行えば事足りる。このように、本解析手法を用いれば、有限要素解析で多くの計算時間を消費する連立一次方程式の解法において、計算速度の向上を図るために工夫が容易に行える。

なお、初期応力法(initial stress method)<sup>10)-12)</sup>、初期ひずみ法(initial strain method)<sup>22)</sup>、弾粘塑性モデルで弾塑性問題の解を得る方法<sup>12), 23)</sup>などでも有限要素方程式の係数マトリクスは $K_0$ となる。しかし、これらの手法では収束解が $K_T$ を用いた場合と同じになるに過ぎない。これに対し、本解析手法は、すべての計算過程において式(12)の解が式(9)の解と同じになるものであり、これら既存の手法とは大きく異なっている。

### b) $\dot{P}$ の算出

式(12)を解く際には、等価節点アイゲン力増分ベクトル $\dot{P}$ を求めておく必要がある。この $\dot{P}$ は、塑性ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ をもとに算出されるため、 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ の分布を求めることがまず必要となる。

本解析手法では、構成式を式(3)から式(10)に変更して解析を行うが、この変更が有効であるためには、塑性域における次式(等価条件)の成立が要求される。

$$D_{ijkl}^{ep} \dot{\varepsilon}_{kl} = D_{ijkl}^e (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \quad (13)$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ の分布は、この式をもとに決定することになる。

有限要素法では、要素剛性マトリクスなどを構築する際の積分計算においてガウス積分公式を用いることが多い、応力やひずみなどの評価もガウス積分点で行われる。本研究の解析でもガウス積分公式を採用するが、この場合、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ の分布としては塑性域内のガウス積分点での値が得られれば十分であり、 $\dot{P}$ はそれを用いて次のように算定することができる。

$$\dot{P} = S \dot{\varepsilon}^p \quad (14)$$

ここに、 $\dot{\varepsilon}^p$ は塑性域内のガウス積分点における塑性ひずみ増分ベクトル、 $S$ は $\dot{\varepsilon}^p$ に依存しない定マトリクスである。以下では、式(13)の等価条件をガウス積分点で課し、各ガウス積分点での $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 、すなわち $\dot{\varepsilon}^p$ を求めるを考える。

$K_0^{-1} \bar{F}$ を計算すれば、等価節点外力増分による

節点変位増分が求められる。その結果に、形状関数の微分からなるひずみ－節点変位マトリクス（ひずみと節点変位を関連づけるマトリクス） $\mathbf{B}$ を作用させると、ガウス積分点における、等価節点外力増分によるひずみ増分が計算できる。また、 $\mathbf{K}_0^{-1}\dot{\mathbf{P}}$ をもとに同様の計算を行えば、塑性ひずみ増分に起因するひずみ増分が計算できる。これらのことと式(14)を用いれば、次式が導かれる。

$$\dot{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{e}}^p \quad (15)$$

ここに、

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{K}_0^{-1} \quad (16)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{S} \quad (17)$$

式(15)の $\dot{\mathbf{e}}$ は塑性域内のガウス積分点におけるひずみ増分ベクトルである。式(15)を用いれば、式(13)で表される条件式が、次のように書き改められる。

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{e}}^p = \mathbf{R} \quad (18)$$

ここに

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^e - (\mathbf{C}^e - \mathbf{C}^{ep})\mathbf{H} \quad (19)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{C}^e - \mathbf{C}^{ep})\bar{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{F}} \quad (20)$$

$$\mathbf{C}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^e & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^e & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}^e \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{ep} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{ep} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}^{ep} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$\mathbf{D}^e$ ,  $\mathbf{D}^{ep}$ は各ガウス積分点において応力増分とひずみ増分の関係を表すマトリクスであり、前者が弾性挙動、後者が弾塑性挙動に対応している。

式(18)は $\dot{\mathbf{e}}^p$ を未知数とする連立一次方程式であり、これを解けば、塑性域内のガウス積分点における塑性ひずみ増分が得られる。その結果を式(14)に代入すれば、 $\dot{\mathbf{P}}$ が算出される。

ところで、塑性理論における流れ則（法線則）

によれば、次式が成立する<sup>11), 20)</sup>。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (23)$$

ここに、 $g$ は塑性ポテンシャル、 $\lambda$ は正値のスカラー量である。 $g$ は変形状態のみに依存するため $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ は既知であり、 $\lambda$ を得ることができれば、 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が直ちに計算できる。これは、各ガウス積分点における未知数として、 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ に代えてスカラー量である $\lambda$ を用いれば十分で有ることを示唆している。このことを利用すれば、式(18)の未知数を減らし、計算時間を大幅に短縮することが可能となる。そこで、式(23)を用いて式(18)を次式に変換して解くこととした。

$$\bar{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{R}} \quad (24)$$

ここに、 $\dot{\mathbf{L}}$ は塑性域内のガウス積分点における $\dot{\epsilon}$ を成分とするベクトルである。式(24)を解き、式(23)を用いれば、 $\dot{\mathbf{e}}^p$ が直ちに得られる。

#### c) 計算手順

提案する解析手法の基本的な計算の流れをまとめれば、次のようになる。

- (i) 式(24)を解いて $\dot{\mathbf{L}}$ を算出する。
- (ii) 式(23)を用いて $\dot{\mathbf{e}}^p$ を求める。
- (iii) 式(14)より $\dot{\mathbf{P}}$ を算出する。
- (iv) 式(12)を解いて $\dot{\mathbf{U}}$ を求める。
- (v) 応力などの状態変数を更新する。

式(15)の $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ の算出や式(12)の連立一次方程式の解法に際しては、 $\mathbf{K}_0$ を係数マトリクスとした連立一次方程式を解く必要がある。 $\mathbf{K}_0$ の疎・帯形といった特長を利用すべく、ここでは、スカイライン法をその解法に採用する。さらに、 $\mathbf{K}_0$ が変化せず常に一定であることに鑑み、最初に行なった三角分解の結果を記憶しておき、それを繰り返し使用することとした。スカイライン法で費やされる計算時間の大半は三角分解に関連したものであるため、この処置により、計算時間はかなり節約される。

提案する解析手法では、式(12)と式(24)の2組の連立一次方程式の解法が解析の要となる。しかしながら、上記の処置を施すため、計算時間の点から見れば、式(24)の解法が本弾塑性解析手法で

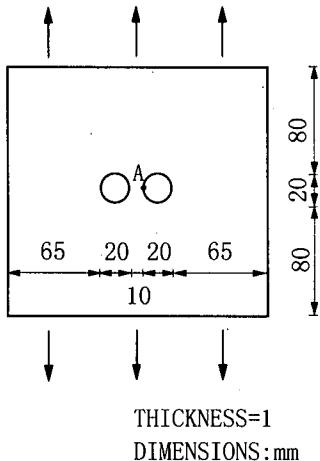


図-1 2円孔を有する薄板

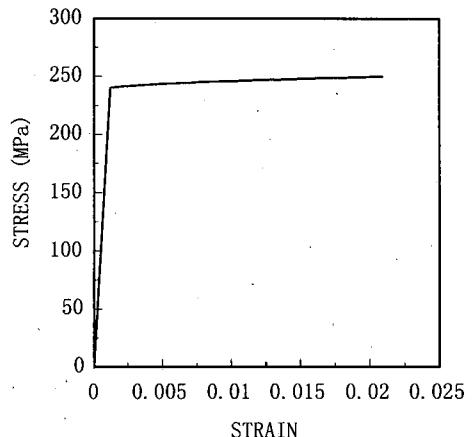


図-2 応力-ひずみ曲線（一軸引張）

は大きなウエートを占める。この式の未知数は塑性域内にあるガウス積分点での $\epsilon$ であり、塑性域内のガウス積分点数 $n$ がそのまま式(24)の未知数の個数 $n$ となる。こうした観点からすれば、本解析手法は、塑性域のみを主たる計算対象として解析を進めていく方法と見なすことができる。これに対し、通常の解析手法では、式(9)の解法が解析の要であり、かつ最も多くの計算時間を必要とする過程となっている。この連立一次方程式の未知数の個数は、解析対象領域の全自由度数 $m$ に等しい。すなわち、通常の解析手法は全領域を対象とした解析となっている。

塑性域が小さければ、 $n$ が $m$ に対して十分小さくなる。従って、そのような状況下で提案する解析手法を用いれば、通常の手法で解析する場合に比べて、計算時間の減少が期待できる。これが、本解析手法の有用性を示唆する根拠である。

### 3. 数値計算例

提案する解析手法の妥当性、有用性を検証するために、以下の2つの例題を解析した。なお、すべての計算において、Sun SPARCstation 2を使用した。

#### (1) 2孔を有する薄板

等分布引張荷重が作用する有孔薄板をまず解析した(図-1)。この板は等方性を有する均質の材料からなるとし、平面応力状態を仮定して2次元解析を行った。弾性定数には以下の値を用いた。

$$\begin{aligned} \text{ヤング率 } E &= 2.0 \times 10^5 \text{ MPa} \\ \text{ポアソン比 } \nu &= 0.3 \end{aligned}$$

またこの材料の一軸引張における初期降伏応力は240MPa、変形挙動は図-2に示す通りである。

多軸応力下の材料挙動は、降伏関数(負荷関数) $f$ が次式で定義され、関連流れ則、等方硬化則に従うミーゼス型モデルで記述されるものとした。

$$f = J_2 - \frac{1}{3} \sigma_e^2 \quad (25)$$

ここに、 $J_2$ は偏差応力テンソルの第2不变量、 $\sigma_e$ は相当応力である。このとき、応力増分とひずみ増分の関係が次式で与えられる<sup>11)</sup>。

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\sigma}_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{ep} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} \\ \dot{\epsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} \quad (26)$$

ここに、

$$\mathbf{D}^{ep} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{T_1^2}{A} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{T_1 T_2}{A} & -\frac{T_1 T_3}{A} \\ \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{T_2^2}{A} & \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{T_2 T_3}{A} & -\frac{T_2 T_3}{A} \\ sym. & & \frac{E}{2(1+\nu)} - \frac{T_3^2}{A} \end{bmatrix} \quad (27)$$

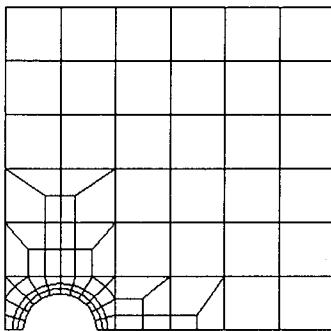


図-3 要素分割（薄板問題）

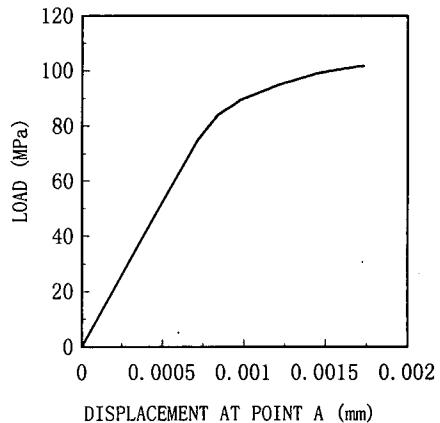


図-4 荷重-変位曲線（点A）

$$A = \frac{2E}{1+\nu} J_2 + \frac{4}{9} \sigma_c^2 H_p - \frac{E(1-2\nu)}{1-\nu^2} S_{33}^2 \quad (28)$$

$$T_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (S_{11} + \nu S_{22}) \quad (29)$$

$$T_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (S_{22} + \nu S_{11}) \quad (30)$$

$$T_3 = \frac{E}{1+\nu} S_{12} \quad (31)$$

上式で、 $H_p$  は塑性係数、 $S_{ij}$  は偏差応力である。

この例題の場合、式(22)の  $\mathbf{D}^{op}$  は式(27)となる。

本解析では対称性を考慮して1/4領域のみを解析対象とし、この領域を8節点四角形要素88個、6節点三角形要素4個、総節点数317でモデル化した（図-3）。計算に際しては、四角形要素については4 ( $= 2 \times 2$ ) 点、三角形要素には3点のガウス積分公式を適用した。

解析結果として、点A（図-1）における荷重-変位（水平方向）関係を図-4に示す。荷重が74.44MPaの時に降伏する点が現れ、これ以後、荷重-変位関係は非線形となる。塑性域が生じるまでは問題の線形性を利用して1回の計算ですませ、塑性域発生後は荷重増分を0.12MPaとして計算した。荷重が101.8MPaに達した時点で2円孔間が塑性域でつながり、計算を打ち切った。最終段階での塑性域の広がりを図-5に表している。

2(1)に記した通常の解析手法でも同様の計算を行った。各荷重ステップで得られたすべての節点変位を提案する解析手法の結果と比較したが、両者は完全に一致しており、本解析手法の妥当性を検証することができた。一方、計算労力については大きな違いが見られた。通常の解析手法では、初期段階より591元連立一次方程式を解く必要があ

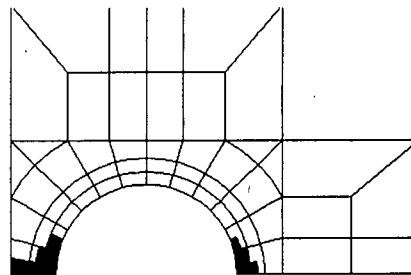


図-5 薄板に生じた塑性域

表-1 CPU時間（薄板問題）

	CPU時間
通常の解析手法	1426.2 秒
提案する解析手法	49.2 秒

るのに対し、本解析手法では、解析の最終段階でも17元連立一次方程式を解くに過ぎない。計算労力の差は、計算時間の差となって現れる。表-1は、2つの解析で要した計算時間（CPU時間）を測定し、結果をまとめたものである。通常の解析手法では約24分の計算時間を要したが、提案する解析手法ではわずか49秒で計算を終了しており、大幅な計算時間の短縮が認められた。

## (2) 地下空洞

地下発電所用空洞を有する岩盤の弾塑性解析を次に行った。図-6に示す解析対象領域は、外側境

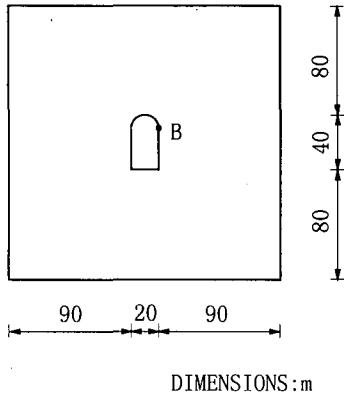


図-6 地下空洞を有する岩盤

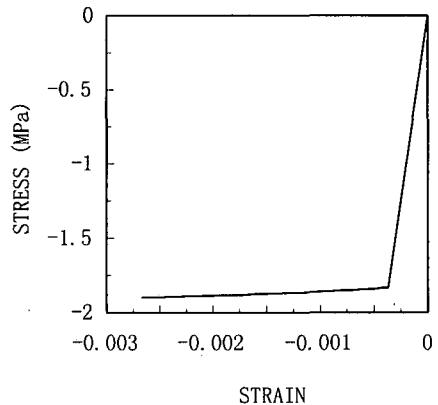


図-7 応力-ひずみ曲線（一軸圧縮）

界の影響が小さくなるよう、空洞に比べてかなり大きく設定している。平面ひずみ状態を仮定して2次元解析を行ったが、岩盤内には水平方向-3MPa、鉛直方向-4MPaの初期地圧が作用しているとした。

岩盤の材料特性は等方性かつ均質とし、弾性定数には次の値を用いた。

$$\text{体積弾性係数 } K = 3333 \text{ MPa}$$

$$\text{せん断弾性係数 } G = 2000 \text{ MPa}$$

一軸圧縮荷重下での初期降伏応力は-1.83MPa、この荷重下での変形挙動は図-7に示すものを仮定した。

多軸応力下の材料挙動は、降伏関数（負荷関数） $f$ 、塑性ポテンシャル $g$ が次式で与えられ、等方硬化則に従うドラッカ・プラガ型モデルで記述されたとした。

$$f = 0.25 I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (32)$$

$$g = 0.1 I_1 + \sqrt{J_2} \quad (33)$$

ここに、 $I_1$ は応力テンソルの第1不変量である。 $k$ は降伏曲面の大きさを定める関数であり、図-7の変形挙動から定められる。式(32)、(33)の右辺第一項の係数が異なっているため、この岩盤は非関連流れ則に従う材料となる。一般に、関連流れ則はダイラタシーソーを過大評価する傾向があるため、地盤や岩盤の構成モデルでは、非関連流れ則を適用することが多い<sup>24)</sup>。

以上のことより、この岩盤の応力増分とひずみ増分の関係は次のようになる<sup>11)</sup>。

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\sigma}_{xy} \\ \dot{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{ep} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} \quad (34)$$

ここに、

$$\mathbf{D}^{ep} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G - \frac{M_1 N_1}{Q} & K - \frac{2}{3}G - \frac{M_1 N_2}{Q} & -\frac{M_1 N_3}{Q} \\ K - \frac{2}{3}G - \frac{M_2 N_1}{Q} & K + \frac{4}{3}G - \frac{M_2 N_2}{Q} & -\frac{M_2 N_3}{Q} \\ -\frac{N_3 N_1}{Q} & -\frac{N_3 N_2}{Q} & G - \frac{N_3 N_3}{Q} \\ K - \frac{2}{3}G - \frac{M_3 N_1}{Q} & K - \frac{2}{3}G - \frac{M_3 N_2}{Q} & -\frac{M_3 N_3}{Q} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$Q = 0.225K + G + 0.1563H_p \quad (36)$$

$$M_1 = 0.3K + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{11} \quad (37)$$

$$M_2 = 0.3K + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{22} \quad (38)$$

$$M_3 = 0.3K + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{33} \quad (39)$$

$$N_1 = 0.75K + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{11} \quad (40)$$

$$N_2 = 0.75K + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{22} \quad (41)$$

$$N_3 = \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{12} \quad (42)$$

この例題では、式(35)が式(22)の $\mathbf{D}^{ep}$ となる。

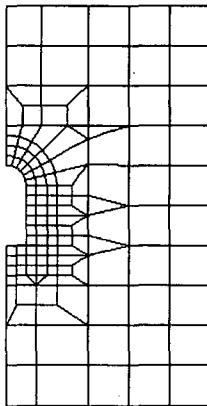


図-8 要素分割（地下空洞問題）

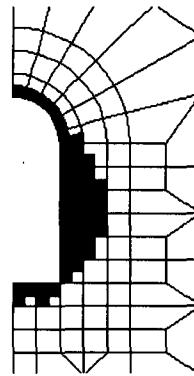


図-10 岩盤に生じた塑性域

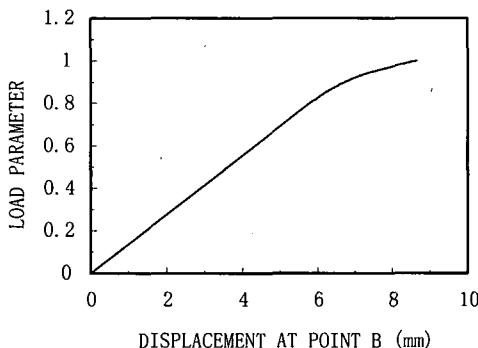


図-9 荷重-変位曲線（点B）

ところで、平面ひずみ状態では  $\dot{\epsilon}_{zz} = 0$  である故、式(7)の第一項に  $\dot{\sigma}_{zz}$  は寄与しない。そのため、式(8)の  $D_{ijkl}^{ep}$  の成分のうち、 $\dot{\sigma}_{zz}$  に関するものは考慮する必要がない。従って、式(9)の構築に用いる構成関係は、式(35)の  $\mathbf{D}^{ep}$  ではなく、その4行目を除いた  $3 \times 3$  のマトリクスである。なお、このマトリクスは非対称であり、その結果、この例題における式(9)の剛性マトリクス  $\mathbf{K}_T$  は、塑性変形が始まつた時点で非対称となる。

計算に際しては、対称性を利用して全領域の1/2のみを解析した。要素分割は図-8に示しているが、8節点四角形要素125個、6節点三角形要素6個、総節点数436でモデル化している。積分スキームは先の例題と同じものを採用した。荷重条件は、空洞掘削を模るために、初期地圧に対応する荷重をあらかじめ空洞面に作用させて初期状態を設定し、その荷重を逐次解放していくこととした。

表-2 CPU時間（地下空洞問題）

	CPU時間
通常の解析手法	3369.6 秒
提案する解析手法	307.8 秒

解析結果として、点B（図-6）の鉛直変位と荷重パラメータの関係を図-9に示している。荷重パラメータは取り除かれた荷重の割合を表し、この値が1に達したとき、空洞面に作用させた荷重がすべて取り去られた状態となる。図-9の結果は、塑性変形が生じ始める荷重パラメータ0.801までを1ステップ、それ以降、すべての荷重を取り除くまでの過程を160ステップで解析したものである。図-10は最終状態における塑性域の広がりを示している。

先の例題と同様に、2(1)に記した通常の解析手法でも地下空洞問題の解析を行い、各荷重ステップのすべての節点変位を提案する解析手法の結果と比較し、完全に一致していることを確認した。計算労力について見ると、通常の解析手法では、初期段階より842元連立一次方程式を解く必要があるのに対し、本解析手法では解析の最終段階でも56元連立一次方程式を扱うに過ぎない。表-2にまとめているように、計算労力の差は計算時間に反映され、通常の解析手法では約56分の計算時間を必要としたのに対し、提案する解析手法では約5分で計算を終了している。

#### 4. まとめ

本論文では、等価介在物法に基づいた新しい弾塑性有限要素解析手法を提案した。その定式化や計算手順から理解されるように、本解析手法による弾塑性解析では、塑性域が主たる計算対象領域となる。そのため、塑性域の広がりが限定されるような弾塑性問題において、計算時間を減少することが可能となる。

数値計算例として2つの問題を取り上げて解析を行った。いずれの例題においても、本解析手法により、非常に短い計算時間で通常の有限要素解析と同じ解が得られ、本解析手法の妥当性、有用性を実証することができた。

#### 参考文献

- 1) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, 1950.
- 2) Prager, W.: *An Introduction to Plasticity*, Addison-Wesley, 1959.
- 3) Johnson, W. and Mellor, P.W.: *Plasticity for Mechanical Engineers*, Van Nostrand, 1962.
- 4) Chen, W.F.: *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, 1982.
- 5) Desai, C.S. and Siriwardane, H.J.: *Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials*, Prentice-Hall, 1984.
- 6) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, pp.343-354, 1968.
- 7) Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. and King, I.P.: Elasto-plastic solutions of engineering problems. Initial-stress, finite element approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.1, pp.75-100, 1969.
- 8) Owen, D.R.J. and Hinton, E.: *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, 1980.
- 9) 山田嘉昭, 横内康人: 有限要素法による弾塑性解析のプログラミング, 培風館, 1981年.
- 10) Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
- 11) Chen, W.F. and Han, D.J.: *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, 1988.
- 12) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, Vol.2, 4th ed., McGraw-Hill, 1991.
- 13) 菊池昇: 有限要素法とその応用—最近の話題と発展ー, 土木学会論文集, 第392号/I-9, pp.1~11, 1988年4月.
- 14) ASCE-WRC: *Plastic Design in Steel*, ASCE, 1971.
- 15) Chen, W.F.: *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, Amsterdam, 1975.
- 16) 三好俊郎: 大規模構造問題の基礎, 構造工学における有限要素法の理論と応用(II), 日本鋼構造協会, pp.37-55, 1988年.
- 17) 矢川元基, 吉村忍: 有限要素法, 培風館, 1991年.
- 18) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, Netherlands, 1993.
- 19) 山口栄輝, 堀宗朗, 久保喜延: 等価介在物法を用いた平面骨組構造物の弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.9~14, 1995年3月.
- 20) 北川浩: 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1979年.
- 21) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦: 有限要素法ハンドブック, I 基礎編, 培風館, 1981年.
- 22) 山田嘉昭: 非線形問題解決法の現状と展望, 生産研究, 22巻, 1号, pp.6-14, 1970年.
- 23) Zienkiewicz, O.C. and Cormeau, I.C.: Visco-plasticity—plasticity and creep in elastic solids—a unified numerical solution approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.8, pp.821-845, 1974.
- 24) Yamaguchi, E. and Chen, W.F.: Basic concepts in plasticity, *Constitutive Equations for Engineering Materials*, Vol.2: *Plasticity and Modeling*, pp.581~724, Elsevier, 1994.

(1996. 2. 29 受付)

# ELASTIC-PLASTIC FINITE ELEMENT ANALYSIS TECHNIQUE COUPLED WITH EQUIVALENT INCLUSION METHOD

Eiki YAMAGUCHI, Muneo HORI, Yoshinobu KUBO and Tsuyoshi ABE

In practical elastic-plastic problems, plastic flow is often contained. From this viewpoint, an elastic-plastic analysis method, in which most computational effort is associated with plastic region, is developed in the present study. The characteristic of this method is to replace the material stiffness of plastic region with that of elastic region. To justify the replacement, plastic strain increment is introduced in the plastic region. The main computational task is to determine the distribution of this plastic strain increment. The method is computationally very efficient in problems with contained plastic flow, which is demonstrated by solving numerical examples.