

AUTOMATISCHE FESTSTELLUNG DER STRASSENTRASSIERUNG VON DER FREIHANDLINIE

Von Hideo NAKAMURA*

1. Von der Freihandlinie zur Strassen-trassierung

Im allgemeinen kann der Prozess des Trassierungsentwurfs wie folgt dargestellt werden.

Bis vor etwa 15 Jahren hat man alle diese Prozesse von Hand durchgeführt, danach wurde zunächst die Berechnung der Achse dem Computer übertragen. Heute bemüht man sich darum, sämtliche Prozesse voll zu automatisieren, um damit die optimale Trassierung zu finden. Aber leider haben wir noch kein vollkommenes Verfahren, eine optimale Strasse von einem Ort A zu einem anderen Ort B automatisch zu finden, weil dafür zu viele verschiedenartige Informationen notwendig sind und zu viele darauf beruhende komplizierte Ingenieurentscheidungen getroffen werden müssen. Aber es könnte noch eine Möglichkeit geben, den Prozess zu rationalisieren, obgleich Möglichkeit geben, den Prozess zu rationalisieren, obgleich sie keine vollautomatische Prozedur darstellt.

Bei einem solchen Prozess braucht ein Entwurfs-

ingenieur nur einige mögliche Trassierungen, die er auf Grund seiner Erfahrungen in Berücksichtigung aller zum Trassierungsentwurf nötigen Bedingungen ausgewählt hat, als Freihandlinien in der Karte einzutragen. Danach verbessert ein Computer diese Freihandlinien so, dass sie alle Bedingungen erfüllen, welche die Richtlinien vorschreiben. Das heisst, nur die Prozedur 1 in der Tabelle 1 wird von Ingenieur durchgeführt und die Prozeduren 2 und 3 werden dem Computer überlassen.

Der Tabelle 1 entsprechend kann man die Automatisierungsstufen beim Entwurf der Trassierung folgendermassen darstellen:

Tabelle 2

Prozedur	manuell	heutiger Stand	halbautomatisch	vollautomatisch
1	Mensch	Mensch	Mensch	Computer
2	Mensch	Mensch	Computer	Computer
3	Mensch	Computer	Computer	Computer

Im folgenden wird ein Verfahren dargestellt, das die Freihandlinie zum Zweck der Strassen-trassierung automatisch modifizieren kann.

Tabelle 1

	generelle Trassierung	topographische Karte	Prozedur	Berücksichtigung
Vorentwurf	möglicher Korridor	topographische Karte oder Orthophotokarte im Massstab 1 : 5 000-1 : 2 500 oder stereoskopisches Modell	<ol style="list-style-type: none"> 1. Zeichnung der ausgewählten Trassierungen als Freihandlinie 2. Verbesserung der Freihandlinien mit Linial und Ausmessung der Trassierungselemente 3. Berechnung der Achse 	Richtlinien für Trassierung Harmonie der Linienführung Zwangspunkte Geologische Bedingungen und Erdmassentransport Brücken, Tunnel, u.s.w.
Detailentwurf	die beim Vorentwurf ausgewählte Trassierung	topographische Karte im Massstab 1 : 1 000	<ol style="list-style-type: none"> 1. Umzeichnung der beim Vorentwurf ausgewählten Achse auf die topographische Karte 1 : 1 000 2. Verbesserung der Achse unter Berücksichtigung der detaillierten Bedingungen 3. Ausmessung der Trassierungselemente 4. Berechnung der Achse 	Die obengenannten Bedingungen in detaillierter Form Grunderwerb

* Dr. Eng., Associate Professor, Department of Social Engineering, Tokyo Institute of Technology.

2. Prinzip

Wir begrenzen die Strassentrassierung auf die Elemente Gerade, Übergangsbogen (Klothoide) und Kreis und nennen das eine Dreielementkurve. Diese Kurve lässt sich folgendermassen ausdrücken¹⁾:

$$\text{Gerade : } \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix} \dots (1)$$

$$\text{Klothoide : } \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix} \dots (2)$$

$$\text{Kreis : } \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix} \dots (3)$$

Dies Kurven sind definiert jeweils zwischen ihrem Anfangs- und Endpunkt. Das heisst, wenn man mit den Indises A und B den Anfangs- bzw. den Endpunkt bezeichnet, dann ist der definierte Bereich der Kurve

$$(A(x_A, y_A), B(x_B, y_B))$$

Eine Trassierung besteht aus der Menge dieser Kurven. Zur Vereinfachung der Schreibweise verwenden wir die Zeichen für die logischen Verknüpfungen, womit man eine Trassierung wie folgt repräsentieren kann.

$$(T) = (u_1 \cap v_1) \cup (u_2 \cap v_2) \cup \dots \cup (u_i \cap v_i) \cup \dots \cup (u_m \cap v_m) \dots (4)$$

Hier bedeutet u_i eine Kurve, die durch die Formeln (1), (2), oder (3) dargestellt ist und v_i den definierten Bereich der entsprechenden Kurve. Mit der Matrix für Zeichenerkennung kann man diese Trassierung auch wie folgt darstellen²⁾:

$$(T) = \begin{pmatrix} u_1 u_2 \dots u_i \dots u_m \\ v_1 v_2 \dots v_i \dots v_m \end{pmatrix} \dots (5)$$

Hier zeigt die Spalte der Matrix einen Durchschnitt und die Zeile eine Vereinigungsmenge.

Wenn die Trassierung (T) (x, y -Koordinaten) in eine andere Form (K) (Krümmung und Länge) umgewandelt wird, kann man mit den Transformationsfunktionen φ und ψ wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} (K) &= (T) \times (\varphi, \psi) \\ &= \begin{pmatrix} u_1 u_2 \dots u_m \\ v_1 v_2 \dots v_m \end{pmatrix} \times (\varphi, \psi) \\ &= \begin{pmatrix} w_1 w_2 \dots w_m \\ z_1 z_2 \dots z_m \end{pmatrix} \dots (6) \end{aligned}$$

wobei bedeutet w die Krümmung und z den definierten Bereich der entsprechenden Elementkurve in Form der Stationierungslänge l , und sind φ und ψ folgende Transformationsfunktionen.

$$\begin{aligned} \varphi &= [x, y\text{-Koordinaten} \rightarrow \text{Krümmung}] \\ \psi &= [\text{definierter Bereich in } x, y\text{-Form} \\ &\quad (A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)) \\ &\quad \rightarrow \text{in Form der Stationierungslänge} \\ &\quad (A(l_A), B(l_B))] \end{aligned}$$

Die Freihandlinie hat keine bestimmte Formel. Deshalb ist die Information, die wir von ihr bekommen, nur die Menge der Punkte auf der Linie. Wir möchten aus dieser Information die Formel der Trassierung bestimmen, die möglichst nahe bei der gegebenen Freihandlinie liegt und alle Bedingungen der Richtlinien erfüllt.

Die Trassierung kann mit (K) in Formel (6) charakterisiert werden. Bei einer Geraden wird $w=0$, bei einer Klothoide ist $w=(l-l_A)/A^2$ und bei einem Kreis ist $w=const$.

Deshalb können, wenn Krümmung und Länge in den Kurvenpunkten aus den Koordinaten der Punkte der Freihandlinie berechnet werden, die Trassierungselemente, aus welchen dieselbe besteht, gefunden werden. Die Bereiche der Kurvenstücke können aus den Schnittpunkten der Krümmungsbilder benachbarter Kurven bestimmt werden.

Folglich könnte, wenn die Freihandlinie eine Dreielementkurve wäre, die Trassierung, welche die Freihandlinie genau anpasst, durch die Inverstransformation mit (φ, ψ) und die Randbedingungen exakt bestimmt werden. Selbstverständlich ist die Freihandlinie aber nicht nur aus exakten Dreielementkurven. Wir müssen zuerst das Krümmungsbild der Trassierung

$$(K) = (T) \times (\varphi, \psi)$$

aus den berechneten Krümmungen der Freihandlinie bestimmen und können danach die Koordinatenform (T) unter Berücksichtigung der Randbedingungen berechnen.

3. Berechnung des Krümmungsbildes

(1) Berechnung von Krümmung und Länge der Freihandlinie

Die Freihandlinie ist eine beliebige Kurve. Man kann sie durch Fourierreihen mit einem Parameter t wie folgt darstellen³⁾:

$$x = f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos it \dots (7)$$

$$y = g(t) = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cos it \dots (8)$$

Die Koeffizienten a_i und b_i können aus den x, y -Koordinaten von $n+1$ Punkten der Freihandlinie durch die harmonische Analyse berechnet werden. Kleine wellen, die in den Formeln als Glieder mit sehr kleiner Amplitude und Periode erscheinen, vernachlässigt man und glättet damit die durch die Forierreihen approximierte Freihandlinie.

Krümmung und Länge berechnet man an jedem Punkt i nach

$$\begin{aligned} \rho_i &= [f''(t_i)g'(t_i) - f'(t_i)g''(t_i)] \\ &\quad \cdot [f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2]^{-3/2} \dots (9) \end{aligned}$$

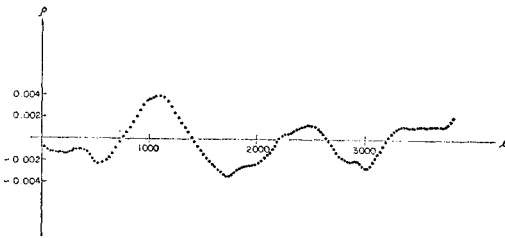


Abb. 1 Abhängigkeit der Die Krümmung von der Stationierungslänge.

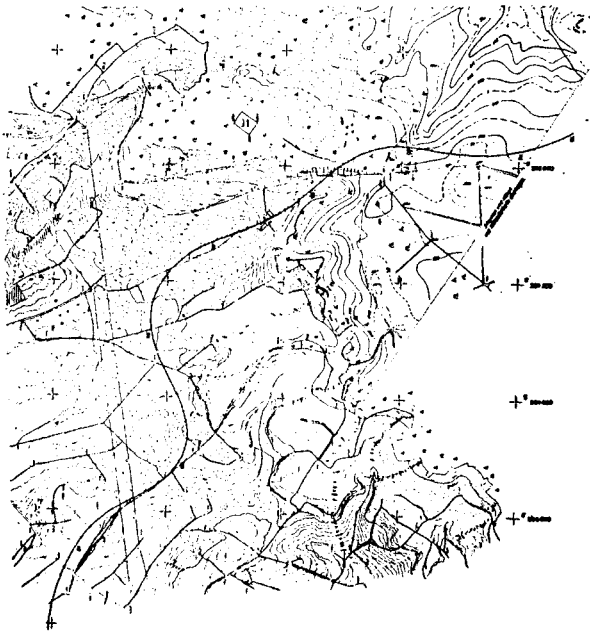


Abb. 2 die auf der topographischen Karte gezeichnete Freihandlinie.

$$l_i = \int_0^{t_i} [f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2]^{1/2} dt \dots\dots\dots (10)$$

mit $t_i = \frac{i\pi}{2n}$, $i=1, 2, \dots, 2n$

Abbildung 1 zeigt die auf diese Weise gefundene Abhängigkeit der Krümmung von der Bogenlänge bei der in Abbildung 2 gezeigten Freihandlinie.

(2) Approximation des Krümmungsbildes

Das Krümmungsbild einer Freihandlinie muss dem Krümmungsbild einer Dreielementkurve angepasst werden. Zunächst suchen wir die Strecken auf den Übergangsbögen, denn diese Strecken geben das einfachste Muster im Graph der Krümmung-Länge-Funktion ab und sind auf einfache Weise zu finden.

Man sucht Bereiche (a_j, b_j) , in denen

$$\left(\frac{d\rho}{dl}\right)_j \left(\frac{d\rho}{dl}\right)_{j-1} = \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{l_j - l_{j-1}} \cdot \frac{\rho_{j-1} - \rho_{j-2}}{l_{j-1} - l_{j-2}} \geq 0 \dots\dots\dots (11)$$

für mindestens vier aufeinanderfolgende Punkte gilt. In diesen Bereichen wird die Krümmung-

Länge-Funktion durch Geraden

$$\alpha l + \beta \rho = 1 \dots\dots\dots (12)$$

derart ersetzt, dass

$$S = \sum_{i=a}^k (\alpha l_i + \beta \rho_i - 1)^2 (\alpha^2 + \beta^2)^{-1} \dots\dots\dots (13)$$

minimal wird, wobei das Intervall (a, k) so gewählt ist, dass

$$d_i^2 = \frac{(\alpha l_i + \beta \rho_i - 1)^2}{\alpha^2 + \beta^2} \leq \delta^2 \dots\dots\dots (14)$$

mit einer vorgegebenen Schranke δ .

Wird $d_i^2 > \delta^2$, unterteilt man das Intervall in zwei oder mehr Abschnitte, damit die Bedingung erfüllt bleibt.

In Bereichen, in welchen die Bedingung (11) nicht für vier aufeinanderfolgende Punkte erfüllbar ist, nimmt man konstante Krümmung $\rho = 1/\beta$ an und rechnet entsprechend.

Führt man diesen Prozess für alle Bereiche (a_j, b_j) durch, erhält man das Krümmungsbild einer Dreielementkurve.

Jetzt sind also alle w_j bestimmt und die Bereiche z_j berechnet man aus den Schnittpunkten zwischen benachbarten w_j gemäss

$$\left(\frac{\beta_{j-1} - \beta_j}{\alpha_j \beta_{j-1} - \beta_j \alpha_{j-1}} - l\right) \cdot \left(\frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\alpha_j \beta_{j+1} - \beta_j \alpha_{j+1}} - l\right) \leq 0 \dots\dots\dots (15)$$

weil l -Koordinate des Schnittpunktes zwischen die Linie $\alpha_{j-1}l + \beta_{j-1}\rho = 1$ und die Linie $\alpha_j l + \beta_j \rho = 1$

$$l = \frac{\beta_{j-1} - \beta_j}{\alpha_j \beta_{j-1} - \beta_j \alpha_{j-1}}$$

ist.

Insgesamt wird das Krümmungsbild

$$(K) = \bigcup_{j=1}^m \left\{ \left[\left(\frac{\beta_{j-1} - \beta_j}{\alpha_j \beta_{j-1} - \beta_j \alpha_{j-1}} - l\right) \cdot \left(\frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\alpha_j \beta_{j+1} - \beta_j \alpha_{j+1}} - l\right) \leq 0 \right] \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(3) Modifizierung des Krümmungsbildes

Die dem oben berechneten Krümmungsbild entsprechende Trassierung erfüllt die Richtlinien nicht immer obwohl die Freihandlinie gut angenähert wird. Zur Behebung dieses Mangels muss dann das Krümmungsbild (K) etwas modifiziert werden.

Die Richtlinien bestimmen für den Klothoidenparameter A und den Kreisradius R benachbarter Elemente:

- (1) $R/3 \leq A \leq R$
- (2) $A_1/A_2 \leq 1.5$ bei Wendelinien
- (3) $R_1/2 \leq A \leq R_1$ bei Eiliniien, wobei R_1 der Radius des kleineren Kreises ist.

Ist beim Krümmungsbild (K) zum Beispiel die Bedingung (1) nicht erfüllt, rechnet man die betreffenden Koeffizienten α_j und β_j so um, dass

$$S = \sum_{i=a}^b \frac{(\alpha_j l_i + \beta_j \rho_i - 1)^2}{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \dots\dots\dots (17)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \beta_{j+1}^2 / \rho \leq \beta_j / \alpha_j \leq \beta_{j+1}^2 \\ \beta_{j-1}^2 / \rho \leq \beta_j / \alpha_j \leq \beta_{j-1}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

minimal wird.

Abb. 3-a zeigt die so erhaltene Modifizierung eines Krümmungsbildes, das in Abb. 3-b dargestellt ist.

Möglicherweise muss auch dieses Krümmungsbild noch verbessert werden. Ist das aus der Freihandlinie entstandene Krümmungsbild wie die durchgezogene Linie in Abb. 4, so ändert man es zu der punktierten Linie ab.

Am Ende haben wir ein für die Trassierung brauchbares Krümmungsbild (K).

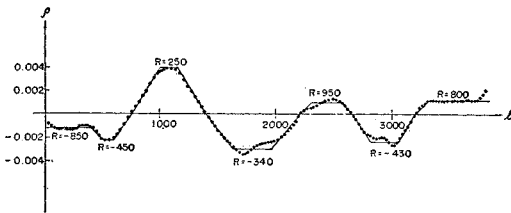


Abb. 3 Das modifizierte Krümmungsbild.

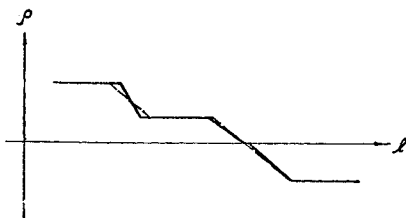


Abb. 4 Verbesserung eines Krümmungsbildes.

4. Orientierung der Trasse

Wäre die Freihandlinie eine Dreielementkurve, könnte man die Strassentrassierung (T) durch Berechnung der inversen Transformation von $(K) = (T) \times (\varphi, \psi)$ aus den Randbedingungen der Trassierung einfach bestimmen. Selbstverständlich ist aber die Freihandlinie eine beliebige Kurve und das aus ihr berechnete Krümmungsbild weicht von der ursprünglichen Kurve mehr oder weniger ab. Man denke sich die nach obigem Verfahren aus der Freihandlinie berechnete Trassierung als ein Stück Schnur von derselben Länge wie die Freihandlinie, dessen Gestalt vom Krümmungsbild (K) bestimmt ist. Dieses Schnurstück muss so gelegt werden, dass die Trassierung (T) am besten die Freihandlinie annähert, d. h. (T) muss gegen die Freihandlinie

orientiert werden.

Es gibt zwei verschiedene Verfahren zur Lösung dieses Problems.

(1) Orientierung mit Hilfe einer Helmerttransformation

Beim ersten Verfahren bestimmt man mit beliebigen Anfangsbedingungen aus dem Krümmungsbild (K) eine Trassierung (T'), die mit Hilfe Helmerttransformation in jene Trassierung (T) umgeformt wird, welche die Freihandlinie am besten annähert⁴⁾. Allerdings kann dieses Verfahren dann nicht angewendet werden, wenn die Freihandlinie an beiden Enden an eine vorhandene Trasse anschliesst beispielsweise soll nur ein Teil einer vorhandenen Trassierung verbessert werden und das aus der Freihandlinie geschaffene Krümmungsbild stark modifiziert wurde, so dass die Abweichungen der Trassierung von der Freihandlinie zu gross werden.

(2) Orientierung durch Festhalten der Kreise und Geraden

Beim zweiten Verfahren legt man alle Kreise und Geraden der Trassierung so fest, dass die entsprechenden Kurvenstücke die Freihandlinie am besten annähern. Ist zum Beispiel für das Trassierungselement $\begin{pmatrix} w_j \\ z_j \end{pmatrix}$ ein Kreisbogen berechnet worden, bestimmt man den Kreismittelpunkt so, dass

$$S = \sum_{i=a}^b [(x_i - x_{mj})^2 + (y_i - y_{mj})^2 - \beta_j^2] \dots\dots (19)$$

minimal wird.

Die Übergangsbögen werden dann so berechnet, dass insgesamt eine stetig gekrümmte Trassierung entsteht.

Es treten je nach der Kombination der Trassierungselemente der Dreielementkurve verschiedene Aufgabentypen zur Berechnung der Übergangsbögen auf. Im folgenden werden einige davon behandelt.

a) Falls zwei Kreise festgelegt sind

Das Krümmungsbild hat die in der Abbildung 5

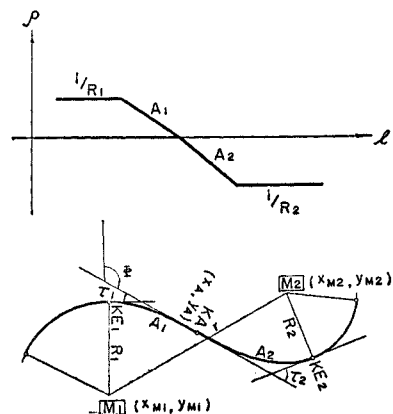


Abb. 5 Falls zwei Kreise festgelegt sind.

gezeigte Form. Anfangs- und Endkreis legt man fest und verbindet sie durch zwei Klothoiden (unsymmetrische Wendelinie).

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{M_1} \\ y_{M_1} \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \sinh \tau_1 \\ \cosh \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} x_{M_2} \\ y_{M_2} \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} \sinh \tau_2 \\ \cosh \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \quad (21)$$

Mit $\tau_1 = A_1^2 / (2 R_1^2) = \frac{\beta_{j+1} \beta_j^2}{2 \alpha_{j+1}}$ und der Annahme $\tau_2 = c \tau_1$, bekommt man aus den Gleichungen (20) und (21)

$$F(c) = (R_1 \sinh \tau_1 - R_2 \sinh c \tau_1)^2 + (R_1 \cosh \tau_1 - R_2 \cosh c \tau_1)^2 - r^2 = 0 \quad (22)$$

wobei

$$r^2 = (x_{M_1} - x_{M_2})^2 + (y_{M_1} - y_{M_2})^2 \quad (23)$$

Durch Einführung eines Näherungswertes c_0 von c

$$c = c_0 + \Delta c = \frac{\alpha_{j+1} \beta_{j+2} \beta_j^2}{\alpha_{j+2} \beta_{j+1} \beta_j^2} + \Delta c \quad (24)$$

und Linearisierung erhält man

$$\begin{aligned} E(c) &= F(c_0 + \Delta c) \\ &= (R_1 \sinh \tau_1 - R_2 \sinh c_0 \tau_1)^2 \\ &\quad + (R_1 \cosh \tau_1 - R_2 \cosh c_0 \tau_1)^2 \\ &\quad - \{ (R_1 \sinh \tau_1 - R_2 \sinh c_0 \tau_1) \sinh c_0 \tau_1 \\ &\quad + (R_1 \cosh \tau_1 - R_2 \cosh c_0 \tau_1) \cos c_0 \tau_1 \} \\ &\quad \cdot \frac{R_2}{c_0} \cdot \Delta c = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

weil $\frac{d}{d\tau} \sinh \tau = \frac{1}{2\tau} \operatorname{sncl} \tau$

$$\frac{d}{d\tau} \cosh \tau = \frac{1}{2\tau} \operatorname{coscl} \tau \quad (26)$$

Hieraus erhält man iterativ die Wurzel c von Gleichung (25), danach berechnet die Unbekannten τ_2 , x_A , y_A und ϕ , schliesslich die Trassierung (T) für die Krüvenstücke $j, j+1, j+2, j+3$.

Falls $\beta_{j+1} / \alpha_{j+1} = \beta_{j+2} / \alpha_{j+2}$ ist, hat die Wendelinie also einen gleichen Klothoideparameter und wird

$$c = \tau_2 / \tau_1 = R_1^2 / R_2^2 = \beta_{j+2}^2 / \beta_j^2 \quad (27)$$

Bei einer Eilinie ist

$$c = \tau_2 / \tau_1 = R_1^2 / R_2^2 = \beta_{j+2}^2 / \beta_j^2 \quad (28)$$

Auch jetzt kann man Gleichung (22) mit der Unbekannten τ_1 oder τ_2 auf dieselbe Art wie oben lösen.

b) Falls eine Gerade und ein Kreis festgelegt sind.

Hat das Krümmungsbild das Aussehen der Abb. 6, legt man die Gerade und den Kreis fest und bestimmt den Übergangsbogen aus folgenden Gleichungen.

$$y_1 - y_A = (x_1 - x_A) \tan \phi \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \sinh \tau \\ \cosh \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (30)$$

Daraus wird

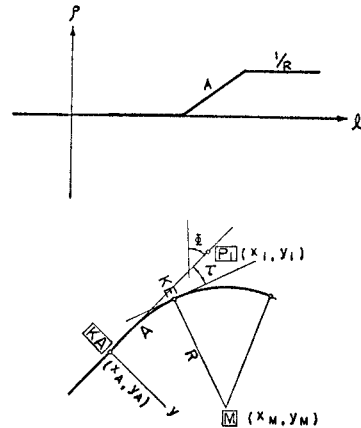


Abb. 6 Falls eine Gerade und ein Kreis festgelegt sind

$$\cosh \tau = [(x_1 - x_M) \sin \phi - (y_1 - y_M) \cos \phi] / R \quad (31)$$

Hier kann die rechte Seite aus den gegebenen Daten berechnet werden. Denn bestimmt man über die inverse Funktion von $\cosh \tau$ gemäss

$$\begin{aligned} \tau &= 2.44948 97399 t + 0.26244 56401 t^3 \\ &\quad + 0.06500 52333 t^5 + 0.02025 01109 t^7 \\ &\quad + 0.00613 39985 t^9 + 0.00437 95100 t^{11} \dots \quad (32) \end{aligned}$$

wobei

$$t = \sqrt{\cosh \tau - 1} \quad (33)$$

Mit τ gewinnt man x_A , y_A aus den Gleichungen (30).

c) Bewegliche Kreise oder Geraden

Man kann das Übergangsbogenelement durch obengenannte Methode nicht immer berechnen. Zum Beispiel ist es auch möglich, dass zwei aus der Freihandlinie bestimmte Kreise mit einem Krümmungsbild wie in Abb. 7 sich schneiden. Die obengenannte Berechnung ist dann nicht möglich und die Radien der Kreise oder ihre Lage müssen verändert werden.

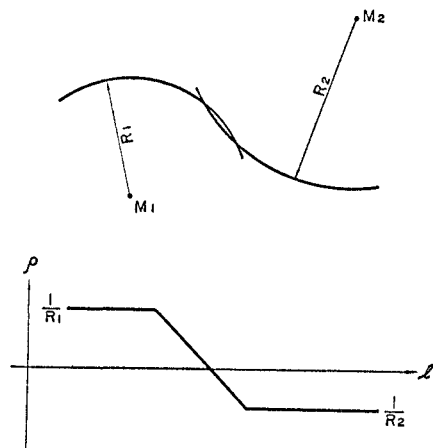


Abb. 7 Falls die Kreise sich schneiden.

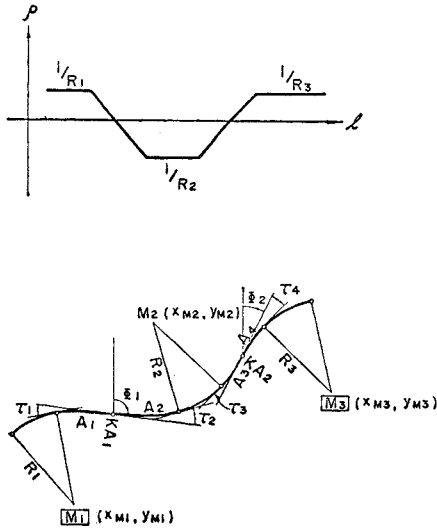


Abb. 8 Falls die Lage des mittleren Kreises verändert wird.

In Abhängigkeit vom Krümmungsbild wird die Berechnung folgendermassen durchgeführt:

(1) Wenn das berechnete Krümmungsbild wie in Abb. 8 aussieht, gibt es folgende Beziehungen zwischen den drei Kreisen:

$$\begin{pmatrix} x_{M1} - x_{A1} \\ y_{M1} - y_{A1} \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \sinh \tau_1 & \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \\ \cosh \tau_1 & \sin \phi_1 \quad \cos \phi_1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (34)$$

$$\begin{pmatrix} x_{M2} - x_{A1} \\ y_{M2} - y_{A1} \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} \sinh \tau_2 & \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \\ \cosh \tau_2 & \sin \phi_1 \quad \cos \phi_1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (35)$$

$$\begin{pmatrix} x_{M2} - x_{A2} \\ y_{M2} - y_{A2} \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} \sinh \tau_3 & \cos \phi_2 - \sin \phi_2 \\ \cosh \tau_3 & \sin \phi_2 \quad \cos \phi_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (36)$$

$$\begin{pmatrix} x_{M3} - x_{A2} \\ y_{M3} - x_{A2} \end{pmatrix} = R_3 \begin{pmatrix} \sinh \tau_4 & \cos \phi_2 - \sin \phi_2 \\ \cosh \tau_4 & \sin \phi_2 \quad \cos \phi_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (37)$$

Durch einige Umformungen erhält man aus obigen acht Gleichungen zwei neue Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(x_{M2} - x_{M1})^2 + (y_{M2} - y_{M1})^2 \\ &= (R_1 \sinh \tau_1 - R_2 \sinh \tau_2)^2 \\ &\quad + (R_1 \cosh \tau_1 - R_2 \cosh \tau_2)^2 \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x_{M2} - x_{M3})^2 + (y_{M2} - y_{M3})^2 \\ &= (R_2 \sinh \tau_3 - R_3 \sinh \tau_4)^2 \\ &\quad + (R_2 \cosh \tau_3 - R_3 \cosh \tau_4)^2 \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

Wenn man die beiden äusseren Kreise in ihrer Lage festhält und sämtliche Radien und Klothoidenparameter aus dem Krümmungsbild übernimmt, dann bleiben als Unbekannte die Mittelpunktskoordinaten des mittleren Kreises übrig und das Gleichungssystem mit den Unbekannten x_{M2} , y_{M2} kann ohne weiteres gelöst werden.

Bei der Eilinie, deren Krümmungsbild wie in Abb. 9 dargestellt aussieht, kann man die Berechnung genau so durchführen wie bei der Wendelinie, wenn

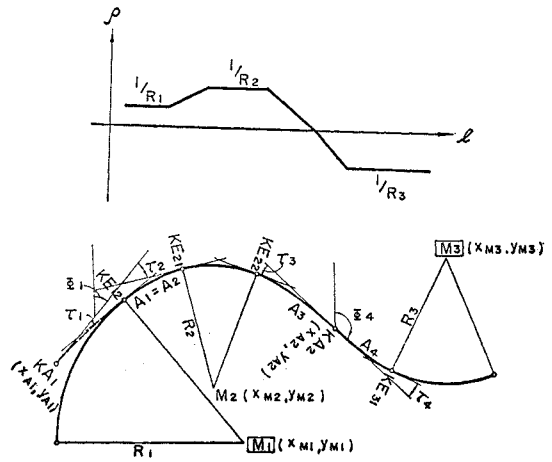


Abb. 9 eine Eilinie und eine Wendelinie.

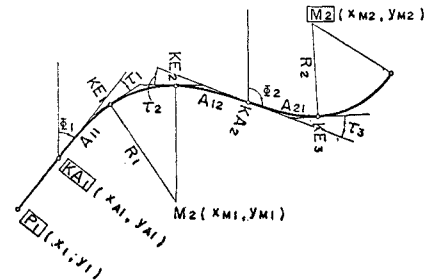
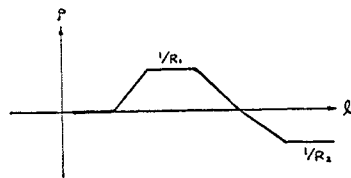


Abb. 10 Falls eine Gerade und ein Kreis festgelegt sind und der mittlere Kreis beweglich ist.

man annimmt, dass

$$A_1^2 = A_2^2$$

d. h.

$$\tau_1 = \tau_2 R_2^2 / R_1^2 \dots \dots \dots (40)$$

(2) Falls das berechnete Krümmungsbild eine wie in Abb. 10 gezeigte Form annimmt, gibt es folgende Beziehungen zwischen der Geraden und den beiden Kreisen.

$$y_{A1} - y_1 = (x_{A1} - x_1) \tan \phi_1 \dots \dots \dots (41)$$

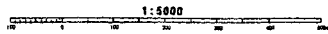
$$\begin{pmatrix} x_{M1} - x_{A1} \\ y_{M1} - y_{A1} \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \sinh \tau_1 & \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \\ \cosh \tau_1 & \sin \phi_1 \quad \cos \phi_1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (42)$$

$$\begin{pmatrix} x_{M1} - x_{A2} \\ y_{M1} - y_{A2} \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \sinh \tau_2 & \cos \phi_2 - \sin \phi_2 \\ \cosh \tau_2 & \sin \phi_2 \quad \cos \phi_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (43)$$

Orthophotokarte 1:5000



91 Rechts 83 Hoch



Institut für Photogrammetrie
Universität Stuttgart

Arbeiten:
Luftaufnahme im 1988
Projiziert durch Reg. Plan-Massstab am 5.11.88 Nr. 2291/88
Photogrammetrischer Auswertung 1988
Die Genauigkeit der in diesem Dokument enthaltenen
Ergebnisse
Die Verantwortlichen sind für die Richtigkeit der in diesem Dokument
enthaltenen Daten ganz bei den Bearbeitern für die Deutsche Geodätische
Kommission 1:5000

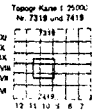


Abb. 11 Die Freihandlinie (die punktierte) und die daraus berechnete Strassenachse (die durchgezogene)

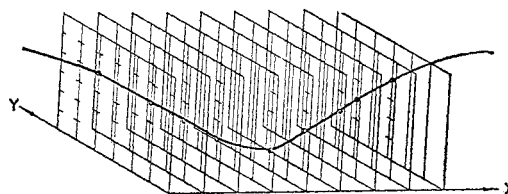


Abb. 12 Stufenweise Suchung der optimalen Linienführung.

$$\begin{pmatrix} x_{M_2} - x_{A_2} \\ y_{M_2} - y_{A_2} \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} \sinh \tau_3 & \cos \phi_2 \\ \cosh \tau_3 & \sin \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \phi_2 \\ \cos \phi_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(44)$$

Die obige Gleichungen können umgeformt werden.

$$(x_{M_1} - x_1) \sin \phi_1 - (y_{M_1} - y_1) \cos \phi_1 + R_1 \cosh \tau_1 = 0 \dots\dots\dots(45)$$

$$\begin{aligned} & (x_{M_1} - x_{M_2})^2 + (y_{M_1} - y_{M_2})^2 \\ & = (R_1 \sinh \tau_2 - R_2 \sinh \tau_3)^2 \\ & + (R_1 \cosh \tau_2 - R_2 \cosh \tau_3)^2 \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

Wenn die Gerade und der äussere Kreis festgelegt sind und der Zwischenkreis verschoben werden kann, dann ist es möglich, diese Linie durch die Lösung des Gleichungssystems (45) und (46) mit den Unbekannten x_{M_1} und y_{M_1} so zu korrigieren, dass die Trassierung mit den aus dem Krümmungsbild berechneten Elementen eine glatte und möglichst wenig von der Freihandlinie abweichende Kurve ergibt.

(3) Ausser den obengenannten Krümmungsbildfiguren gibt es noch einige andere mögliche Kombinationen von Dreielementkurven. Diese kann man durch Bildung der Gleichungen, die Beziehungen zwischen den Elementkurven ausdrücken, genauso wie die anderen behandeln.

Bei Anwendung der obenbenannten verschiedenen Berechnungsmethoden, die von den Krümmungsbildfiguren abhängig sind, kann man das Krümmungsbild so in eine Trassierung mit x - y -Koordinatenform transformieren, dass die Abweichungen von der Freihandlinien möglichst klein bleiben.

5. Ein Beispiel

Bis jetzt ist vom Prinzip und einigen wichtigen Berechnungsmethoden die Rede gewesen. Das Programm dazu ist sehr umfassend und enthält noch eine Vielzahl für die Anwendungspraxis wichtige Überlegungen, die hier nicht im einzelnen erläutert werden sollen. Es ist bestimmt, ein Beispiel zu zeigen, als sich in Kleinigkeiten zu verlieren.

Für dieses Beispiel ist eine mögliche Trassierung auf einer Orthophotokarte ausgewählt und als Freihandlinie dargestellt worden. Selbstverständlich kann man für dieses Auswählen sehr günstig mit einem Anaglyphprojektor, wie z. B. dem Zeiss Doppelprojektor, arbeiten. Die Koordinaten der Freihandlinie werden punktweise in einem durchschnittlichen Abstand von etwa 10 m mit einem automatischen Koordinatenmess und -registriergerät bestimmt. Es ist aber notwendig, dass die Freihandlinie vor der Koordinatenmessung mit Hilfe eines flexiblen Lineals geglättet worden ist. Diese Daten werden von Computer gelesen und dann die oben beschriebenen Berechnungen ausgeführt. Als

Ergebnis erhält man die x - y -Koodinaten der Achspunkte in einem gewünschten Stationsabstand sowie die Kreisradien und Klothoidenparameter in den Achshauptpunkten.

Die Achse kann auch von einem automatischen Kartierungsgerät gezeichnet werden. Die Abb. 11 zeigen für ein kleines Beispiel die gezeichnete Freihandlinie einerseits und die daraus berechnete Achse andererseits.

6. Schlusswort

Wir können jetzt noch nicht klar sagen, wie sehr diese Methode unsere Trassierungsarbeit rationalisieren kann, weil es noch an praktischer Erfahrung damit fehlt. Zumindest jedoch könnte der Entwurfsingenieur von der mühsamen Arbeit mit Kreisbogen und Klothoidenlinealen befreit werden und hätte die Möglichkeit, viele Trassierungen als Freihandlinien durchzuprobieren, um damit eine Verbesserung der Qualität des Entwurfs zu erreichen.

Diese Methode wäre auch dazu geeignet, eine praktikable Trassierung zu finden, wenn man eine optimale Linienführung stufenweise, wie in Abb. 12 gezeigt, als Menge der Punkte auf der Achse ganz automatisch, vielleicht unter Anwendung der dynamischen Optimierungstechnik, sucht.

Der Verfasser ist der Alexander von Humboldt-Stiftung sehr dankbar dafür, dass sie ihm eine Gelegenheit gegeben hat, in Deutschland mit deutschen Fachkollegen arbeiten zu können. Er möchte Prof. Dr.-Ing. K. Linkwitz einen herzlichen Dank für seine freundliche Hilfe und wertvolle Anregungen für die Arbeit des Verfassers an seinem Institut an der Universität Stuttgart aussprechen.

Auch vielen Dank möchte er Dr. rer. math. L. Profke, Dipl.-Ing. E. Benner und Dipl.-Ing. H.J. Schek für ihre Anregungen und Korrekturen sagen.

Literaturverzeichnis

- 1) R. Kamiya, G. Kuroiwa, H. Nakamura : A Study on Electronic Computation of Clothoidal Alignments, Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 120 oder Kasper, Schürba, Lorenz : Die Klothoide als Trassierungselement, Dümmler Verlag.
- 2) N. Okino : Jido Design (in Japanisch) CHAP. 2 Transformation of Pattern, Nikkan Kogyo Sihnun.
- 3) H. Nakamura : Ein digitales Geländemodell aus Analytisch dargestellten Höhenlinie, Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 186.
- 4) Murai and Shimada : A Study on the Automatic Design of Center Lines in the Route Location System (in Japanisch), Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 174.

(Received April 20, 1971)