

条件付間接測定のマトリックス解析*

—その土木測量における調整計算への適用—

APPLICATION OF MATRIX METHOD TO ADJUSTMENT OF
CONDITIONAL INDIRECT OBSERVATION IN SURVEYING三池亮次**・星田義治***
By Ryoji Miike and Yoshiharu Hoshida

1. はじめに

大型電子計算機の使用を前提にしたマトリックス解析は、複雑なシステムの組織的かつ一般的解析演算を可能にし、計算の複雑さから解放されることによって、式のもつ意味の考察や、従来の近似計算との比較を容易にすることができるなど、多くの長所をもつものであり、近年、構造解析や統計学などにおいて、活発に式の展開が行なわれ、測量誤差調整計算においても、ようやく、マトリックス解析についての関心が高まりつつある。

最小二乗法における“間接測定”^{1),4)} および“条件付直接測定”^{2),3),5),6)} のマトリックス解法については、すでに多くの文献で紹介されている。また、マトリックス表示による“条件付間接測定”の基本式については、1968年、Gotthardt⁷⁾ によって紹介が行なわれ、筆者の一人⁸⁾ もまた、1966年に独自に式の展開を試みている。

筆者の基本式誘導の過程は、むしろ中村慶一⁹⁾ の多重回帰分析の基本式誘導の方式に従うものであり、未知量の最確値および不偏分散を求める基本式は、Gotthardtのそれと一致するが、(1) 残差平方和を求める計算式などにおいて若干相違しており、(2) 未知量の不偏分散の誘導において、Gotthardt は誤差伝播の法則のマトリックス展開に根拠をおくもので、統計学的考察について、筆者の手法はより厳密であると思われるので、あわせて、(3) 基本式の土木測量への応用の手順と、記号の意味を明らかにするために、次節に基本式の誘導を試み、(4) 直接、間接のいかにかわからず、条件付測定の問題が統一的に表示できることを指摘した。

また、三角測量およびトラバース測量の調整計算など

の土木測量にこれを適用し、若干の適用上の問題点について考察した。すなわち、条件付間接測定の例題として測点条件の下における測角の調整計算をあげて、読者の理解を助け、また、単列三角鎖の調整計算において、三角形の内角の条件、基線の一端と検基線の一端の座標が既知である場合の座標条件、基線と検基線の方向角および辺の間の条件の計 4 組の条件の下に、マトリックス演算により測角の最確値を誘導し、トラバース測量については、角度と長さのおおのの分散と重さの積は等しいと言う条件を用いて、厳密調整マトリックス演算を試みた。後二者は、“条件付間接測定”の特殊の場合としての“条件付直接測定”の例題となったが、これに、測点条件を加えた条件付間接測定の場合にも、まったく、ここに例示した手順に従い解析できるのである。

なお、近年、誤差伝播のマトリックス解析に関する論文¹⁰⁾、観測網を 2 組のグループに分割して、“条件付直接測定”¹¹⁾、“間接測定”¹²⁾ または“条件付間接測定”¹³⁾ の逐次解法を試みる研究が行なわれており、今後に残された主要研究課題として注目に値する。

2. 条件付間接測定の解

観測変量 y と、 p 個の指定変数 X との間に次の線型回帰模型が成立するものとする。すなわち

$$y = X\beta + e \dots\dots\dots(1)$$

ここに、観測の組数を n とし、

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

で、 β は未知量、 e は偏差であり、その期待値 $E[e] = 0$ であるとする。 0 は零マトリックスである。

また、重さのマトリックスを Q とするとき

* 土木学会第 25, 26 回年次学術講演会において一部発表

** 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 東海大学助教授 工学部土木工学科

$$E[ee^{(t)}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 Q^{-1}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_n \end{pmatrix}$$

であるものとする。上式で、添字 (t) は転置記号であり、 σ^2 は重さ 1 の分散、 σ_i^2 、 q_i は i 番目の観測量の分散および重さであり、 q_i は次式

$$q_i \cdot \sigma_i^2 = \sigma^2 \dots\dots\dots (2)$$

によって定義されるものである。また、未知量 β の p 個の要素の間には、次の r 組の条件式

$$\rho = \alpha_0 + A\beta = 0 \dots\dots\dots (3)$$

が成立するものとする。

ここに、

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{r0} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} \end{pmatrix}$$

かかる条件の下で、重さが各観測の組に対して異なる場合の β の最確値 $\hat{\beta}$ を最小二乗法によって求める。すなわち、未定係数

$$\lambda^{(t)} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$$

に対して、

$$\frac{\partial(e^{(t)}Qe - 2\lambda^{(t)}\rho)}{\partial\beta} = 0$$

を満足する β を $\hat{\beta}$ とする。しかるに、

$$\left[\frac{\partial(e^{(t)}Qe)}{\partial\beta} \right]_{\beta=\hat{\beta}} = -2X^{(t)}Qy + 2X^{(t)}QX\hat{\beta}$$

$$2\frac{\partial(\lambda^{(t)}\rho)}{\partial\beta} = 2\frac{\partial(\lambda^{(t)}A\beta)}{\partial\beta} = 2A^{(t)}\lambda$$

$$\therefore X^{(t)}QX\hat{\beta} - X^{(t)}Qy - A^{(t)}\lambda = 0 \dots\dots (4.1)$$

上式において

$$S_P = X^{(t)}QX \dots\dots\dots (5)$$

とし、 AS_P^{-1} を式 (4.1) の両辺に乘じ、次式

$$A\hat{\beta} - AS_P^{-1}X^{(t)}Qy - AS_P^{-1}A^{(t)}\lambda = 0 \dots (4.2)$$

を得るが、 β の最確値 $\hat{\beta}$ についても、次式

$$\alpha_0 + A\hat{\beta} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

が成立するように $\hat{\beta}$ を定めるものとし、

$$\hat{\beta}_0 = S_P^{-1}X^{(t)}Qy \dots\dots\dots (7)$$

$$S_{AP} = AS_P^{-1}A^{(t)} \dots\dots\dots (8)$$

とすれば、未定係数 λ は、式 (4.2) より

$$\begin{aligned} \lambda &= -S_{AP}^{-1}(\alpha_0 + A\hat{\beta}_0) \\ &= -S_{AP}^{-1}w \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、

$$w = \alpha_0 + A\hat{\beta}_0 \dots\dots\dots (10)$$

を得る。式 (9) を式 (4.1) に代入すれば、

$$\hat{\beta} = S_P^{-1}(X^{(t)}Qy - A^{(t)}S_{AP}^{-1}w) \dots\dots (11.1)$$

$$= \hat{\beta}_0 - S_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}w \dots\dots\dots (11.2)$$

また、式 (11.1) から

$$E[\hat{\beta}] = E[S_P^{-1}X^{(t)}Qy] - E[S_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}w]$$

であり、式 (1) を上式に代入すれば、

$$E[S_P^{-1}X^{(t)}Qy] = S_P^{-1}X^{(t)}Q(X\beta) = \beta$$

$$\begin{aligned} E[S_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}w] &= S_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}\{\alpha_0 \\ &\quad + AS_P^{-1}X^{(t)}Q(X\beta)\} \\ &= S_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}(\alpha_0 + A\beta) = 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$E[\hat{\beta}] = \beta \dots\dots\dots (12)$$

となり、式 (11.2) より求められる $\hat{\beta}$ は β の不偏推定値であることがわかる。

残差平方和を S_E とすれば、

$$\begin{aligned} S_E &= (y - X\hat{\beta})^{(t)}Q(y - X\hat{\beta}) \\ &= y^{(t)}Qy - \hat{\beta}^{(t)}X^{(t)}Qy - y^{(t)}QX\hat{\beta} \\ &\quad + \hat{\beta}^{(t)}X^{(t)}QX\hat{\beta} \end{aligned}$$

であり、式 (5)、(8) で定義される S_P 、 S_{AP} は対称であることが容易に証明されるから、上式の

$$\begin{aligned} \text{第2項: } &\hat{\beta}^{(t)}X^{(t)}Qy \\ &= (y^{(t)}QX - w^{(t)}S_{AP}^{-1}A)S_P^{-1}X^{(t)}Qy \\ &= y^{(t)}QXS_P^{-1}X^{(t)}Qy - w^{(t)}S_{AP}^{-1}AS_P^{-1}X^{(t)}Qy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第3項: } &y^{(t)}QX\hat{\beta} \\ &= y^{(t)}QXS_P^{-1}(X^{(t)}Qy - A^{(t)}S_{AP}^{-1}w) \\ &= y^{(t)}QXS_P^{-1}X^{(t)}Qy - y^{(t)}QXS_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第4項: } &\hat{\beta}^{(t)}X^{(t)}QX\hat{\beta} \\ &= (y^{(t)}QX - w^{(t)}S_{AP}^{-1}A)S_P^{-1}S_P S_P^{-1} \\ &\quad (X^{(t)}Qy - A^{(t)}S_{AP}^{-1}w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= y^{(t)}QXS_P^{-1}X^{(t)}Qy \\ &\quad + w^{(t)}S_{AP}^{-1}AS_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}w \\ &\quad - w^{(t)}S_{AP}^{-1}AS_P^{-1}X^{(t)}Qy \\ &\quad - y^{(t)}QXS_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_E &= y^{(t)}Qy - y^{(t)}QXS_P^{-1}X^{(t)}Qy + w^{(t)}S_{AP}^{-1}w \\ &= y^{(t)}Qy - \hat{\beta}_0^{(t)}X^{(t)}Qy + w^{(t)}S_{AP}^{-1}w \dots (13) \end{aligned}$$

次に、分散 σ_i^2 の不偏推定値を誘導しよう¹⁴⁾。式(10)より

$$\begin{aligned} w &= \alpha_0 + AS_P^{-1}X^{(t)}Qy \\ &= \alpha_0 + AS_P^{-1}X^{(t)}Q(X\beta + e) \\ &= \alpha_0 + AS_P^{-1}X^{(t)}QX\beta + AS_P^{-1}X^{(t)}Qe \\ &= \alpha_0 + A\beta + AS_P^{-1}X^{(t)}Qe \\ &= AS_P^{-1}X^{(t)}Qe \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore w^{(t)}S_{AP}^{-1}w &= e^{(t)}(QXS_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}AS_P^{-1}X^{(t)}Q)e \\ &= e^{(t)}Be \end{aligned}$$

ここに、

$$B = QXS_P^{-1}A^{(t)}S_{AP}^{-1}AS_P^{-1}X^{(t)}Q$$

であり、その ij 要素を b_{ij} とすれば、

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{w}] &= E[\mathbf{e}^{(t)} \mathbf{B} \mathbf{e}] \\ &= E[\sum b_{ii} e_i^2] + E[\sum_{i \neq j} \sum b_{ij} e_i e_j] \\ &= E[\sum b_{ii} e_i^2] = \sum b_{ii} E[e_i^2] \end{aligned}$$

しかるに式 (2) より、 $E[e_i^2] = \sigma_i^2 = \sigma^2/q_i$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum b_{ii} E[e_i^2] &= \left(\sum b_{ii} \frac{1}{q_i} \right) \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1}) \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1}) \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)}) \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{I}_r) \\ &= r \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

上式で \mathbf{I}_r は r 次の単位マトリックスを意味する。

$$\therefore E[\mathbf{w}^{(t)} \cdot \mathbf{S}_{AP}^{-1} \cdot \mathbf{w}] = r \cdot \sigma^2 \dots\dots\dots (14)$$

また、同様にして

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{y} - \mathbf{y}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^{(t)} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q}) \mathbf{y} \\ &\equiv \mathbf{y}^{(t)} \mathbf{C} \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^{(t)} \mathbf{C} \mathbf{e} + \mathbf{e}^{(t)} \mathbf{C} (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) \\ &\quad + (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^{(t)} \mathbf{C} (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{e}^{(t)} \mathbf{C} \mathbf{e} \end{aligned}$$

上式の第3項

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^{(t)} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q}) (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) \\ &= (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^{(t)} (\mathbf{Q} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Q} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

であり、 $E[\mathbf{e}] = \mathbf{0}$ であるから、

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}^{(t)} \mathbf{C} \mathbf{y}] &= E[\mathbf{e}^{(t)} \mathbf{C} \mathbf{e}] \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{C} \mathbf{Q}^{-1}) \\ &= \sigma^2 \text{trace}\{(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{-1}\} \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)}) \\ \text{trace}(\mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)}) &= \text{trace}(\mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1}) = p \end{aligned}$$

したがって

$$E[\mathbf{y}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{y} - \mathbf{y}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{y}] = \sigma^2 (n-p) \dots\dots\dots (15)$$

式 (13) の期待値をとり、式 (14)、(15) をこれに代入すれば

$$\begin{aligned} E[S_E] &= \sigma^2 \{n - (p-r)\} \\ \therefore E\left[\frac{S_E}{n - (p-r)}\right] &= \sigma^2 \quad \therefore \hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n - (p-r)} \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

を得る。上式は、 $S_E / \{n - (p-r)\}$ が、重さ1の母分散 σ^2 の不偏推定値 $\hat{\sigma}^2$ であることを示す。また、式 (2) を式 (16) に代入すれば、

$$E\left[\frac{S_E}{q_i \{n - (p-r)\}}\right] = \sigma_i^2 \quad \therefore \hat{\sigma}_i^2 = \frac{S_E}{q_i \{n - (p-r)\}} \dots\dots\dots (17)$$

を得る。

次に、未知量 $\boldsymbol{\beta}$ の最確値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の分散を求める。式(12)

より、 $\boldsymbol{\beta}$ は $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の不偏推定値であるから、 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の共分散は、

$$C[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = E[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^{(t)}]$$

しかるに、式 (11.1) を上式に代入すれば、

$$\begin{aligned} &(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^{(t)} \\ &= (\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{y} - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{w} - \boldsymbol{\beta}) \\ &\quad (\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{y} - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{w} - \boldsymbol{\beta})^{(t)} \\ &= (\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \\ &\quad + \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{e} \\ &\quad - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{e} \\ &\quad - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{e} - \boldsymbol{\beta})^{(t)} \\ &= (\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q}) \mathbf{e} \mathbf{e}^{(t)} \\ &\quad (\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q})^{(t)} \\ \therefore E[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^{(t)}] \\ &= \sigma^2 (\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{-1} \\ &\quad (\mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} - \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q})^{(t)} \\ &= \sigma^2 [\mathbf{S}_{P}^{-1} - (\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1})^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1})] \\ &= E\left[\frac{S_E}{n - (p-r)} \{\mathbf{S}_{P}^{-1} - (\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1})^{(t)}\} \dots\dots\dots (18) \right. \\ &\quad \left. \mathbf{S}_{AP}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1})\right] \end{aligned}$$

上式のマトリックスの対角 i 行 i 列要素が、 β_i の最確値 $\hat{\beta}_i$ の母分散 $\sigma_{\beta_i}^2$ であり、その不偏分散は、次のように求められるであろう。

すなわち、 $(\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1})$ は r 行 p 列のマトリックスであり

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_p]$$

とすれば、 $(\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1})^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1})$ の対角 i 行 i 列要素は、 $\mathbf{s}_i^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{s}_i$ で与えられ、また \mathbf{S}_{P}^{-1} の対角 i 行、 i 列要素を C_{ii} とすれば、 $\hat{\beta}_i$ の不偏分散は次式

$$\hat{\sigma}_{\beta_i}^2 = \frac{S_E}{n - (p-r)} \{C_{ii} - \mathbf{s}_i^{(t)} \mathbf{S}_{AP}^{-1} \mathbf{s}_i\} \dots\dots\dots (19)$$

より、得ることができる。

なお、条件付間接測定の問題で、特に式 (1) における $\mathbf{X} = \mathbf{I}_p$ のとき、条件付直接測定の解であり、条件付測定の問題を同一解法で表示することが可能である。

3. 計算の手順

1) 未知量 $\boldsymbol{\beta}$ の観測量 \mathbf{y} に対して、観測方程式 (線型回帰模型) を組み立てる。

条件付直接測定の場合は $n=p$ で、したがって $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ である。……………(式 (1))

2) 重さのマトリックス \mathbf{Q} を求める。……………(式 (2))

3) 条件式をマトリックスで表示し、 \mathbf{a}_0 および \mathbf{A} を求める。……………(式 (3))

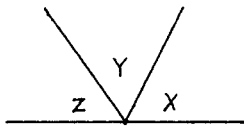
4) $\mathbf{S}_P = \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{Q} \mathbf{X}$, $\mathbf{S}_{AP} = \mathbf{A} \mathbf{S}_{P}^{-1} \mathbf{A}^{(t)}$ および $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求

- める。.....(式 (5), (8), (7))
- 5) 閉合誤差 w を計算する。.....(式 (10))
- 6) 未知量 β の最確値 $\hat{\beta}$ を求める。.....(式 (11.2))
- 7) 残差平方和 S_E を求める。.....(式 (13))
- 8) 単位の重さの観測量の不偏分散 $\hat{\sigma}^2$ を求める。
.....(式 (16))
- 9) これより観測量の不偏分散 $\hat{\sigma}_i^2$ を求める。
.....(式 (17))
- 10) 未知量の最確値 $\hat{\beta}$ の不偏分散 $\hat{\sigma}_{\beta_i}^2$ の計算。
.....(式 (19))

4. 土木測量への適用

(1) 測点条件式に対する適用

図一1 に示す角 X, Y, Z を測定して次の値を得た。



図一1 1測点における測角の調整

- X : $44^\circ 2' 2''$
- $X+Y$: $117^\circ 54' 51''$
- $X+Y+Z$: $179^\circ 59' 57''$
- Y : $73^\circ 52' 56''$
- $Y+Z$: $135^\circ 57' 54''$
- Z : $62^\circ 5' 10''$

等重の条件の下に、 X, Y, Z の最確値 $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ を次のように求めることができる (この問題は、比較のために宮本の例題¹⁵⁾を引用したものである)。

式(1)における観測量 y および係数マトリックス X は、

$$y = \begin{pmatrix} 44^\circ 2' 2'' \\ 117^\circ 54' 51'' \\ 179^\circ 59' 57'' \\ 73^\circ 52' 56'' \\ 135^\circ 57' 54'' \\ 62^\circ 5' 10'' \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

であり、条件式

$$\rho = a_0 + A \beta$$

$$= -180^\circ + [1, 1, 1] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0 \dots \dots \dots (20)$$

であるから

$$\hat{\beta}_0 = S_P^{-1} X^{(t)} y$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44^\circ 2' 2'' \\ 117^\circ 54' 51'' \\ 179^\circ 59' 57'' \\ 73^\circ 52' 56'' \\ 135^\circ 57' 54'' \\ 62^\circ 5' 10'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 44^\circ 2' \frac{1}{2}'' \\ 73^\circ 52' 51\frac{1}{4}'' \\ 62^\circ 5' 6'' \end{pmatrix}$$

$$S_{AP} = A S_P^{-1} A^{(t)}$$

$$= [1, 1, 1] \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_0 - S_P^{-1} A^{(t)} S_{AP}^{-1} w$$

$$= \begin{pmatrix} 44^\circ 2' \frac{1}{2}'' \\ 73^\circ 52' 51\frac{1}{4}'' \\ 62^\circ 5' 6'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2$$

$$= -180^\circ + [1, 1, 1] \begin{pmatrix} 44^\circ 2' \frac{1}{2}'' \\ 73^\circ 52' 51\frac{1}{4}'' \\ 62^\circ 5' 6'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 44^\circ 2' 1\frac{5}{8}'' \\ 73^\circ 52' 51\frac{1}{4}'' \\ 62^\circ 5' 7\frac{1}{8}'' \end{pmatrix} \dots \dots \dots (21)$$

式(21)の値が X, Y, Z の最確値 $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ である。残差平方和 S_E は、

$$S_E = y^{(t)} Q y - \hat{\beta}_0^{(t)} X^{(t)} Q y + w^{(t)} S_{AP}^{-1} w$$

$$= [158522'', 424491'', 647997'', 256976'', 489474'', 223510''] \cdot \begin{pmatrix} 158522'' \\ 424491'' \\ 647997'' \\ 256976'' \\ 489474'' \\ 223510'' \end{pmatrix}$$

$$- [158520.5'', 265971.3'', 223506''] \begin{pmatrix} 111000 \\ 011110 \\ 001011 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 158522'' \\ 424491'' \\ 647997'' \\ 265976'' \\ 489474'' \\ 223510'' \end{pmatrix} + (-2.25) \times 2 \times (-2.25)$$

$$= 62.625(\text{秒})^2$$

未知量の最確値の不偏分散は、 $AS_P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ であり

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{S_E}{n - (p - r)} \{C_{ii} - \mathbf{s}_i^{(t)} S_{AP}^{-1} \mathbf{s}_i\}$$

より、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_X^2 &= \frac{62.625}{6 - (3 - 1)} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right\} = 5.836 \quad \therefore \hat{\sigma}_X = \pm 2.4'' \\ \hat{\sigma}_Y^2 &= \frac{62.625}{6 - (3 - 1)} \left\{ \frac{1}{2} - 0 \right\} = 7.781 \quad \hat{\sigma}_Y = \pm 2.8'' \\ \hat{\sigma}_Z^2 &= \frac{62.625}{6 - (3 - 1)} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right\} = 5.836 \quad \hat{\sigma}_Z = \pm 2.4'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

未知量の最確値およびその平均二乗誤差は、宮本の解と一致する。

(2) 三角測量への適用¹⁶⁾

三角測量の厳密解は、三角形の内角の条件、測点における角の条件および検基線の座標条件を同時に満足するように、最小二乗法に基づいて解くことである。1個の検基線の座標条件は、検基線の一端における経緯距方向の座標条件（以下たんに座標条件と言う）と、検基線の方角角および辺条件の計4個存在する。本文では、単列三角鎖について、観測式および条件式の座標条件をテーラー展開によって線形化した。なお、測角の重さが等しく、また、測点条件はないものとして条件付直接測定の場合を対象としたが、これに、測点条件を考えた条件付間接測定の問題として解くことも、もちろん可能である。

図-2 に示すような単列三角鎖を考える。A, B, C, D は既知三角点でその X, Y 座標が既知である。したがって、辺長 S_a, S_d および方角角 T_a, T_d は既知量と

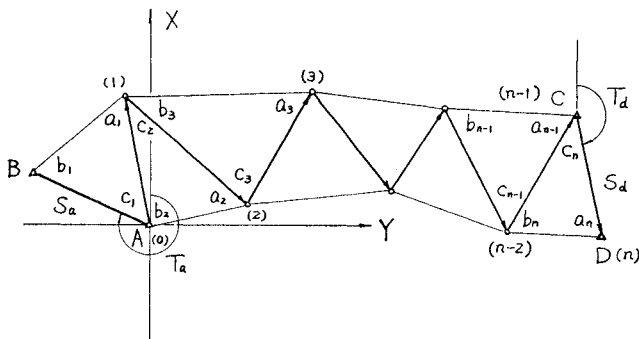


図-2 単列三角鎖の調整

なる。 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$ は実測内角とすれば、条件式は次のように与えられる。

a) 三角形の条件式

$$\rho_i \equiv w_i + \Delta a_i + \Delta b_i + \Delta c_i = 0 \dots\dots\dots (23)$$

ここに

$$w_i = a_i + b_i + c_i - \pi \quad i = 1, 2, \dots, n$$

b) 方向角の条件式

図-2 の測点 A {または (0)}, (1), (2), (3), ... (n-2), C {または (n-1)} において、任意の辺のベクトル $\overrightarrow{i-1, i}$ の方向角を $(i-1, i)$ 、長さを $(i-1, i)$ と表記すれば、

$$\begin{aligned} (i, i-1) &= (i-1, i) + \pi, \\ \therefore (i, i+1) &= (i, i-1) + (-1)^i c_{i+1} \\ &= (i-1, i) + (-1)^i c_{i+1} + \pi \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

であり、

$$(0, 1) = \widehat{AB} + c_1, (1, 2) = (0, 1) - c_2 + \pi, \dots\dots$$

であるから、

$$(i, i+1) = \widehat{AB} + \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{k+1} c_k + i \cdot \pi \dots\dots\dots (24)'$$

したがって、方向角 $\widehat{AB} (= T_a)$ と $\widehat{CD} (= T_d)$ の間に次の条件式が成立する。

$$\rho_{n+1} \equiv w_{n+1} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \Delta c_i = 0 \dots\dots\dots (25)$$

ここに

$$w_{n+1} = (T_a - T_d) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} c_i + (n-1) \cdot \pi \dots\dots\dots (25)'$$

c) 辺の条件式

任意の辺長について、次式

$$(i, i+1) = (i-1, i) \frac{\sin b_{i+1}}{\sin a_{i+1}} \dots\dots\dots (26)$$

が成立し、かつ

$$(0, 1) = S_a \frac{\sin b_1}{\sin a_1}$$

であるから、

$$(i, i+1) = S_a \prod_{k=1}^{i+1} \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \dots\dots\dots (26)'$$

したがって、基線 AB の辺長 S_a と CD の辺長 $S_d (= (n-1, n))$ の間に、

$$S_d = S_a \prod_{k=1}^n \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \dots\dots\dots (27)$$

あるいは、

$$\begin{aligned} \rho_{n+2} &= w_{n+2} + \sum_{i=1}^n \cot a_i \cdot \Delta a_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \cot b_i \cdot \Delta b_i = 0 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここに

$$w_{n+2} = (\ln S_d + \sum_{i=1}^n \ln \sin a_i)$$

$$-(\ln S_a + \sum_{i=1}^n \ln \sin b_i) \dots\dots\dots(28)'$$

であり、 $\Delta a_i, \Delta b_i$ の単位はラジアンである。

d) 座標の条件

図-2 において、既知点 A の座標 (x_a, y_a) と既知点 C の座標 (x_c, y_c) の間に次の条件式

$$(x_c - x_a) - \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i-1,i} + \Delta X_{i-1,i}) = 0 \dots\dots\dots(29)$$

$$(y_c - y_a) - \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i-1,i} + \Delta Y_{i-1,i}) = 0 \dots\dots\dots(29)'$$

が成立する。ここに、 $(X_{i-1,i} + \Delta X_{i-1,i}), (Y_{i-1,i} + \Delta Y_{i-1,i})$ はベクトル $\overrightarrow{i-1, i}$ の X, Y 軸方向成分であり、式 (26)' より

$$\begin{aligned} X_{i-1,i} + \Delta X_{i-1,i} &= S_a \prod_{k=1}^i \frac{\sin(b_k + \Delta b_k)}{\sin(a_k + \Delta a_k)} \cos\{\widehat{(i-1, i)} + \Delta\widehat{(i-1, i)}\} \\ &\dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{i-1,i} + \Delta Y_{i-1,i} &= S_a \prod_{k=1}^i \frac{\sin(b_k + \Delta b_k)}{\sin(a_k + \Delta a_k)} \sin\{\widehat{(i-1, i)} + \Delta\widehat{(i-1, i)}\} \\ &\dots\dots\dots(30)' \end{aligned}$$

ここに、 $\widehat{(i-1, i)} + \Delta\widehat{(i-1, i)}$ は式 (24)' より

$$\begin{aligned} \widehat{(i-1, i)} + \Delta\widehat{(i-1, i)} &= T_a + \sum_{k=1}^i (-1)^{k+1} (c_k + \Delta c_k) + (i-1)\pi \end{aligned}$$

式 (30), (30)' を、各調整量 $\Delta a_k, \Delta b_k, \Delta c_k$ についてテーラー展開し、調整量が微小であるとして二次以上の項を省略すれば、

$$\begin{aligned} X_{i-1,i} + \Delta X_{i-1,i} &= S_a \left[\prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \cos\{\widehat{(i-1, i)}\} \right. \\ &- \sum_{j=1}^i \Delta a_j \frac{\cos a_j}{\sin a_j} \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \cos\{\widehat{(i-1, i)}\} \\ &+ \sum_{j=1}^i \Delta b_j \frac{\cos b_j}{\sin b_j} \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \cos\{\widehat{(i-1, i)}\} \\ &\left. + \sum_{j=1}^i \Delta c_j (-1)^j \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \sin\{\widehat{(i-1, i)}\} \right] \\ &= X_{i-1,i} - X_{i-1,i} \sum_{j=1}^i \cot a_j \Delta a_j \\ &+ X_{i-1,i} \sum_{j=1}^i \cot b_j \Delta b_j + Y_{i-1,i} \sum_{j=1}^i (-1)^j \Delta c_j \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} Y_{i-1,i} + \Delta Y_{i-1,i} &= S_a \left[\prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \sin\{\widehat{(i-1, i)}\} \right. \\ &- \sum_{j=1}^i \frac{\cos a_j}{\sin a_j} \Delta a_j \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \sin\{\widehat{(i-1, i)}\} \\ &+ \sum_{j=1}^i \frac{\cos b_j}{\sin b_j} \Delta b_j \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \sin\{\widehat{(i-1, i)}\} \\ &\left. + \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \cos\{\widehat{(i-1, i)}\} \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} \Delta c_j \right] \\ &= Y_{i-1,i} - Y_{i-1,i} \sum_{j=1}^i \cot a_j \Delta a_j \end{aligned}$$

$$+ Y_{i-1,i} \sum_{j=1}^i \cot b_j \Delta b_j$$

$$+ X_{i-1,i} \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} \Delta c_j$$

したがって

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i-1,i} + \Delta X_{i-1,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i} - \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i} \sum_{j=1}^i \cot a_j \Delta a_j \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i} \sum_{j=1}^i \cot b_j \Delta b_j + \sum_{i=1}^{n-1} \{Y_{i-1,i} \sum_{j=1}^i (-1)^j \Delta c_j\} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i} - \sum_{j=1}^{n-1} \{(\sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i} \cot a_j) \Delta a_j\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \{(\sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i} \cot b_j) \Delta b_j\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \{(\sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i} (-1)^j) \Delta c_j\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i-1,i} + \Delta Y_{i-1,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} Y_{i-1,i} - \sum_{j=1}^{n-1} \{(\sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i} \cot a_j) \Delta a_j\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \{(\sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i} \cot b_j) \Delta b_j\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \{(\sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i} (-1)^{j+1}) \Delta c_j\} \end{aligned}$$

であり、上式を式 (29), (29)' に代入すれば、緯距の条件は

$$\begin{aligned} \rho_{n+3} &= w_{n+3} + \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_{a_j} \Delta a_j) - \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_{b_j} \Delta b_j) \\ &- \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_{c_j} \Delta c_j) = 0 \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

経距の条件として

$$\begin{aligned} \rho_{n+4} &= w_{n+4} + \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_{a_j} \Delta a_j) - \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_{b_j} \Delta b_j) \\ &- \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_{c_j} \Delta c_j) = 0 \dots\dots\dots(31)' \end{aligned}$$

を得る。ここに、

$$\begin{aligned} w_{n+3} &= x_c - x_a - \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i}, & w_{n+4} &= y_c - y_a - \sum_{i=1}^{n-1} Y_{i-1,i} \\ \beta_{a_j} &= \cot a_j \sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i}, & \delta_{a_j} &= \cot a_j \sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i} \\ \beta_{b_j} &= \cot b_j \sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i}, & \delta_{b_j} &= \cot b_j \sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i} \\ \beta_{c_j} &= (-1)^j \sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i}, & \delta_{c_j} &= (-1)^{j+1} \sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i} \end{aligned}$$

$$X_{i-1,i} = S_a \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \cos\{\widehat{(i-1, i)}\}$$

$$Y_{i-1,i} = S_a \prod_{k=1}^i \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \sin\{\widehat{(i-1, i)}\}$$

であり、 $\Delta a_j, \Delta b_j, \Delta c_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) の単位はラジアンである。

線型回帰模型 式 (1) において、観測量 $y = \bar{y} + \Delta y$,

$\beta = \bar{\beta} + \Delta\beta$ であり、 y が高い精度で観測されるものとして、 y の近似値として \bar{y} を、かつ

$$\bar{y} = X\bar{\beta} \dots\dots\dots(32)$$

によって \bar{y} を与えれば、

$$\Delta y = y - \bar{y} \dots\dots\dots(33)$$

であり、次の $\Delta\beta$ 、 Δy に関する線型回帰模型

$$\Delta y = X\Delta\beta + e \dots\dots\dots(34)$$

が成立する。また、同様式 (3) を

$$\begin{aligned} \rho &= a_0 + A(\bar{\beta} + \Delta\beta) \\ &= (a_0 + A\bar{\beta}) + A\Delta\beta \\ &= \bar{a}_0 + A\Delta\beta = 0 \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

ただし、

$$\bar{a}_0 = a_0 + A\bar{\beta} \dots\dots\dots(35)'$$

と、 $\Delta\beta$ についての線形式に変換すれば、未知量 $\Delta\beta$ を、条件式 (35) の下に解く問題となる。

例題として、土橋¹⁷⁾の観測データを与え、厳密法と簡易法とを比較する。

$$\begin{aligned} T_a &= 294^\circ 15' 16'' & T_d &= 182^\circ 4' 41'' \\ \log S_a &= 3.044410 & \log S_d &= 2.993291 \\ x_a &= -24027.91 \text{ m} & y_a &= +3796.38 \text{ m} \\ x_c &= -21117.75 \text{ m} & y_c &= +7377.55 \text{ m} \end{aligned}$$

なお、平面距離と球面距離の比すなわち縮尺係数は、近似的に 1 であるが、本計算では一応これを考慮している。この場合は条件付直接測定であるから $X=I$ であり、式 (32), (33), (34) における \bar{y} , Δy , $\bar{\beta}$, $\Delta\beta$ は表一のとおりである。

表一 三角測量の測定内角

	\bar{y}	Δy	$\bar{\beta}$	$\Delta\beta$
a_1	37° 13' 10"	12"	37° 13' 10"	Δa_1
b_1	79 34 40	10	79 34 40	Δb_1
c_1	63 11 10	18	63 11 10	Δc_1
a_2	78 32 50	10	78 32 50	Δa_2
b_2	32 0 20	12	32 0 20	Δb_2
c_2	69 26 0	18	69 26 0	Δc_2
a_3	31 4 30	16	31 4 30	Δa_3
b_3	45 4 0	10	45 4 0	Δb_3
c_3	103 51 0	12	103 51 0	Δc_3
a_4	72 14 0	18	72 14 0	Δa_4
b_4	57 7 40	18	57 7 40	Δb_4
c_4	50 37 30	12	50 37 30	Δc_4
a_5	32 21 40	18	32 21 40	Δa_5
b_5	79 1 10	10	79 1 10	Δb_5
c_5	68 37 0	10	68 37 0	Δc_5
a_6	106 17 30	10	106 17 30	Δa_6
b_6	25 56 10	14	25 56 10	Δb_6
c_6	47 46 0	10	47 46 0	Δc_6

また、式 (35) における \bar{a}_0 は、

$$\bar{a}_0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 - 180^\circ \\ a_2 + b_2 + c_2 - 180^\circ \\ a_3 + b_3 + c_3 - 180^\circ \\ a_4 + b_4 + c_4 - 180^\circ \\ a_5 + b_5 + c_5 - 180^\circ \\ a_6 + b_6 + c_6 - 180^\circ \\ (T_a - T_d) + \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \cdot c_i \\ + 5 \times 180^\circ \\ (\log S_d + \sum_{i=1}^6 \log \sin a_i) \\ - (\log S_a + \sum_{i=1}^6 \log \sin b_i) \\ (x_c - x_a) - \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i} \\ (y_c - y_a) - \sum_{i=1}^{n-1} Y_{i-1,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60'' \\ -50'' \\ -30'' \\ -50'' \\ -10'' \\ -20'' \\ 15'' \\ 47 \\ -0.09 \text{ m} \\ 0.09 \text{ m} \end{pmatrix}$$

ここに、 w_8 において常用対数が使用されており、また式 (28) の Δa_i , Δb_i を秒単位に変換すれば、 Δa_i , Δb_i にかかる係数 α_i , γ_i は $\log \sin a_i$, $\log \sin b_i$ に対する 1" の表差であり、

$$\alpha_i = 21.055 \times 10^{-7} \cot a_i, \quad \gamma_i = 21.055 \times 10^{-7} \cot b_i$$

である。したがって、条件式 (35) における A は

$$A = \begin{pmatrix} \text{(1)} & \text{(2)} & \text{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & -\gamma_1 & 0 & \alpha_2 & -\gamma_2 & 0 & \alpha_3 & -\gamma_3 & 0 \\ \beta_{a1} & -\beta_{b1} & -\beta_{c1} & \beta_{a2} & -\beta_{b2} & -\beta_{c2} & \beta_{a3} & -\beta_{b3} & -\beta_{c3} \\ \delta_{a1} & -\delta_{b1} & -\delta_{c1} & \delta_{a2} & -\delta_{b2} & -\delta_{c2} & \delta_{a3} & -\delta_{b3} & -\delta_{c3} \\ \text{(4)} & \text{(5)} & \text{(6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha_4 & -\gamma_4 & 0 & \alpha_5 & -\gamma_5 & 0 & \alpha_6 & -\gamma_6 & 0 \\ \beta_{a4} & -\beta_{b4} & -\beta_{c4} & \beta_{a5} & -\beta_{b5} & -\beta_{c5} & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{a4} & -\delta_{b4} & -\delta_{c4} & \delta_{a5} & -\delta_{b5} & -\delta_{c5} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2.8 & \alpha_2 &= 0.4 & \alpha_3 &= 3.5 & \alpha_4 &= 0.7 \\ \alpha_5 &= 3.3 & \alpha_6 &= -0.6 & \gamma_1 &= 0.4 & \gamma_2 &= 3.3 \end{aligned}$$

- $r_3=2.1 \quad r_4=1.4 \quad r_5=0.4 \quad r_6=4.3$
- $\beta_{a1}=0.0185752 \quad -\beta_{b1}=-0.00259520$
- $\beta_{a2}=0.0010914 \quad -\beta_{b2}=-0.00861936$
- $\beta_{a3}=0.0113611 \quad -\beta_{b3}=-0.00683077$
- $\beta_{a4}=0.0004315 \quad -\beta_{b4}=-0.00870239$
- $\beta_{a5}=0.0106585 \quad -\beta_{b5}=-0.00131046$
- $-\beta_{c1}=+0.0173016$
- $-\beta_{c2}=-0.0177514$
- $-\beta_{c3}=+0.0132613$
- $-\beta_{c4}=-0.0098436$
- $-\beta_{c5}=+0.0080061$
- $\delta_{a1}=0.0228569 \quad -\delta_{b1}=-0.00319341$
- $\delta_{a2}=0.0035963 \quad -\delta_{b2}=-0.0284020$
- $\delta_{a3}=0.0220053 \quad -\delta_{b3}=-0.0132305$
- $\delta_{a4}=0.0031541 \quad -\delta_{b4}=-0.0063613$
- $\delta_{a5}=0.0126345 \quad -\delta_{b5}=-0.0015534$
- $-\delta_{c1}=-0.0141093$
- $-\delta_{c2}=+0.0053872$
- $-\delta_{c3}=-0.0068467$
- $-\delta_{c4}=+0.0013466$
- $-\delta_{c5}=-0.00675398$

$\Delta a_i, \Delta b_i, \Delta c_i$ の単位を秒とすれば

$$\beta_{aj} = \frac{1}{206265} \cot a_j \sum_{i=1}^5 X_{i-1,i}, \beta_{bj} = \dots$$

である。これらの値を式 (11.2), (13), (19) に代入し

表-2 三角測量の内角最確値の厳密解と簡易解との比較

	測定内角	①簡易解	②厳密解	①-②	平均二乗誤差
a_1	37° 13' 22"	27"	28"	-1"	± 5"
b_1	79 34 50	60	62	-2	± 5
c_1	63 11 28	33	30	3	± 6
a_2	78 32 60	60	60	0	± 6
b_2	32 0 32	37	34	3	± 5
c_2	69 26 18	23	26	-3	± 5
a_3	31 4 46	41	42	-1	± 6
b_3	45 4 10	11	12	-1	± 6
c_3	103 51 12	8	6	2	± 6
a_4	72 14 18	14	17	-3	± 6
b_4	57 7 58	61	59	2	± 6
c_4	50 37 42	45	44	1	± 6
a_5	32 21 58	47	45	2	± 6
b_5	79 1 20	14	15	-1	± 6
c_5	68 37 10	59	60	-1	± 6
a_6	106 17 40	32	34	-2	± 5
b_6	25 56 24	21	24	-3	± 3
c_6	47 46 10	7	2	5	± 4

て調整量および平均二乗誤差を計算した結果を表-2に示す。

表-2 より、従来の簡易解法と厳密解法にはあまり差はなく平均二乗誤差以内である。さらに、座標値を比較すると表-3 のとおりである。

表-3 三角測量の測点座標の厳密解と簡易解との比較

測点	経距 (Y)		緯距 (X)	
	簡易解	厳密解	簡易解	厳密解
(1)	3 716.14 ^m	3 716.14 ^m	-22 228.98	-22 229.00 ^m
(2)	4 642.29	4 642.33	-22 530.02	-22 530.01
(3)	5 347.27	5 347.27	-21 395.56	-21 395.58
(4)	5 726.29	5 726.34	-22 510.92	-22 510.90
C	7 377.55	7 377.55	-21 117.75	-21 117.75

座標の違いも数 cm であり、実用上の支障にはならないと思われる。

(3) 閉トラバース測量における厳密調整計算

図-3 に示す測点数 n 個の閉トラバースにおいて、各

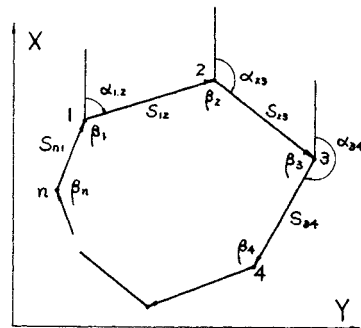


図-3 閉トラバースの調整

測点の方向角を $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{n,n+1}$, トラバース内角を $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 測線長を $S_{1,2}, S_{2,3}, \dots, S_{n,n+1}$ ($n+1 \rightarrow 1$ とする) とし、トラバース内角および測線長の最確値を、内角および閉合条件の下に求め、各測点の座標を計算する。

トラバースの内角および測線長の調整量を $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \dots, \Delta\beta_n, \Delta S_{1,2}, \Delta S_{2,3}, \dots, \Delta S_{n,n+1}$ とし、測線長の緯距および経距を、 $X_{1,2} + \Delta X_{1,2}, X_{2,3} + \Delta X_{2,3}, \dots, X_{n,n+1} + \Delta X_{n,n+1}, Y_{1,2} + \Delta Y_{1,2}, Y_{2,3} + \Delta Y_{2,3}, \dots, Y_{n,n+1} + \Delta Y_{n,n+1}$ とすれば、トラバース内角の和の条件式は、

$$\rho_1 \equiv \sum_{i=1}^n \beta_i - 180^\circ(n-2) + \sum_{i=1}^n \Delta\beta_i = 0 \dots\dots(36.1)$$

であり、任意の測点の方向角を

$$\alpha_{i,i+1} = \alpha_{i-1,i} + 180^\circ - \beta_i \dots\dots(36.1)'$$

によって求めれば、緯距の閉合条件式は¹⁸⁾,

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^n X_{i,i+1} + \sum_{j=2}^n \left\{ \sum_{i=j}^n Y_{i,i+1} \right\} \Delta\beta_j + \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{i,i+1} \cdot \Delta S_{i,i+1} = 0 \dots (36.2)$$

経距の閉合条件式は、

$$\rho_3 = \sum_{i=1}^n Y_{i,i+1} - \sum_{j=2}^n \left\{ \sum_{i=j}^n X_{i,i+1} \right\} \Delta\beta_j + \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{i,i+1} \cdot \Delta S_{i,i+1} = 0 \dots (36.3)$$

である。ここに

$$X_{i,i+1} = S_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1}, \quad Y_{i,i+1} = S_{i,i+1} \sin \alpha_{i,i+1} \dots (36.2)'$$

トラバース厳密調整計算は、条件付直接測定の問題で式(34)において $X=I$ であるが、 Δy が次元の異なる長さおよび角度の2組の量を含むことになる。

加重条件付測定解析は、言わば、観測量 y 、指定変数 X および偏差 e に、左より $(\sigma Q^{-1/2})^{-1}$ を乗じ、単位の分散をもつすなわち等重の無次元観測量に変換し (X は次元をもつことになる) 等重条件の下に残差平方和が

最小になるように未知量を定める問題とも解釈できるが、同様の手法をトラバース調整計算に適用することによって、次元の異なる観測量を無次元量に換算して解析することが可能となるであろう。

すなわち、長さおよび角度の分散と重さを、それぞれ $\sigma^2_{si,i+1}$, $q_{si,i+1}$, $\sigma_{\beta j}^2$, $q_{\beta j}$ とすると

$$q_{si,i+1} \sigma^2_{si,i+1} = q_{\beta j} \sigma_{\beta j}^2 \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$$

あるいは、 $q_{\beta 1} = 1$ とし、 $\sigma_{\beta 1}^2$ を基準にして

$$q_{si,i+1} = \frac{\sigma_{\beta 1}^2}{\sigma^2_{si,i+1}} \dots (37)$$

によって、各測定値の重さを求め、既述の手法を適用すればよい。

資料としては、熊本大学構内に測点数 $n=5$ のトラバースを設け、測角は3対回、測距は3回実測したものをを用いた。これより測定値の不偏分散 $\hat{\sigma}_{\beta i}^2$, $\hat{\sigma}^2_{si,i+1}$ を求めて母分散の推定値とし、式(37)より表-4のとおり重さ $q_{\beta i}$, $q_{si,i+1}$ を得た。

表-4 トラバースの内角および測線長の測定値の不偏分散と重さ

測点	内角			不偏分散 $\hat{\sigma}_{\beta i}^2$ (ラジアン) ²	重さ $q_{\beta i}$	測線長		
	平均測定角 β_i'					平均測線長 $S'_{i,i+1}$	不偏分散 $\hat{\sigma}^2_{si,i+1}$	重さ $q_{si,i+1}$
1	91° 26' 17"			17.1582×10^{-10}	1.0000	89.2352 m	$1.117 \times 10^{-7} \text{ m}^2$	0.01536 $1/\text{m}^2$
2	87 22 34			9.5193×10^{-10}	1.8025	75.2833	1.050×10^{-7}	0.01634
3	89 58 16			5.9936×10^{-10}	2.8627	45.9017	0.833×10^{-7}	0.02060
4	193 9 34			2.3896×10^{-10}	7.1803	42.5628	0.833×10^{-7}	0.02060
5	78 8 29			18.0592×10^{-10}	0.9501	80.8850	13.36×10^{-7}	0.001284
計	539 59 10					333.8680		

最初の方向角の測定値 $\alpha_{1,2}$ については調整しないものとするれば、五角形のトラバースの厳密調整計算であるので、角および辺について各5個、計10個の調整未知量を式(36.1), (36.2), (36.3)の $r=3$ 個の条件式の下に解くことになる。条件式(35)の

$$\bar{a}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \beta_i - 180^\circ \cdot (n-2) \\ \sum_{i=1}^n X_{i,i+1} \\ \sum_{i=1}^n Y_{i,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000872668 \\ 0.0447 \text{ m} \\ 0.0291 \text{ m} \end{pmatrix} \quad \text{ラジアン}$$

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{\Delta\beta_i} & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{\Delta S_{i,i+1}} \\ 0 \quad \sum_{i=2}^5 Y_{i,i+1} \quad \sum_{i=3}^5 Y_{i,i+1} \quad \sum_{i=4}^5 Y_{i,i+1} \quad Y_{5,1} & \cos \alpha_{1,2} \quad \cos \alpha_{2,3} \quad \cos \alpha_{3,4} \quad \cos \alpha_{4,5} \quad \cos \alpha_{5,1} \\ 0 \quad -\sum_{i=2}^5 X_{i,i+1} \quad -\sum_{i=3}^5 X_{i,i+1} \quad -\sum_{i=4}^5 X_{i,i+1} \quad -X_{5,1} & \sin \alpha_{1,2} \quad \sin \alpha_{2,3} \quad \sin \alpha_{3,4} \quad \sin \alpha_{4,5} \quad \sin \alpha_{5,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \quad \overset{\text{m}}{-88.6516} \quad \overset{\text{m}}{-76.8827} \quad \overset{\text{m}}{-31.5513} \quad \overset{\text{m}}{+10.8986} & -0.11079 & -0.98770 & +0.15691 & -0.07189 & +0.99088 \\ 0 \quad \overset{\text{m}}{-99.3047} \quad \overset{\text{m}}{-84.2848} \quad \overset{\text{m}}{-77.0827} \quad \overset{\text{m}}{-80.1423} & 0.99384 & -0.15633 & -0.98761 & -0.99741 & +0.13475 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = 96^\circ 21' 39''$$

であり、式(34)における

$$\Delta y^{(t)} = [\Delta y_{\beta 1} \quad \Delta y_{\beta 2} \quad \Delta y_{\beta 3} \quad \Delta y_{\beta 4} \quad \Delta y_{\beta 5} \quad \Delta y_{s12} \quad \Delta y_{s23} \quad \Delta y_{s34} \quad \Delta y_{s45} \quad \Delta y_{s51}]$$

$$= [8.242 \times 10^{-5} \quad \overset{\text{ラジアン}}{16.483 \times 10^{-5}} \quad \overset{\text{m}}{7.750 \times 10^{-5}} \quad \overset{\text{m}}{16.484 \times 10^{-5}} \quad \overset{\text{m}}{14.060 \times 10^{-5}} \quad \overset{\text{m}}{0.0052} \quad \overset{\text{m}}{0.0033} \quad \overset{\text{m}}{0.0017} \quad \overset{\text{m}}{0.0028} \quad \overset{\text{m}}{0.0050}]$$

を与えて、調整量 $\Delta\beta_i$, $\Delta S_{i,i+1}$ の最確値 $\hat{\Delta\beta}_i$, $\Delta \hat{S}_{i,i+1}$ を求めた。表-3 に、各測点の平均測定角 β_i' , 平均測線長 $S'_{i,i+1}$ の補正量 $\Delta\beta_i' (= \hat{\Delta\beta}_i - \Delta y_{\beta_i})$, $\Delta S'_{i,i+1} (= \Delta \hat{S}_{i,i+1} - \Delta y_{S_{i,i+1}})$ および、各最確値の平均二乗誤差の計算結果を示す。

表-5 厳密解法による測定値の補正量および平均二乗誤差

測点	トラバース内角			トラバース測線長		
	平均測定角 β_i'	補正量 $\Delta\beta_i'$	平均二乗誤差	平均測定辺長 $S'_{i,i+1}$	補正量 $\Delta S'_{i,i+1}$	平均二乗誤差
1	91° 20' 17"	+24"	±14"	m 89.2352	mm +0.2	mm ±1.3
2	87 22 34	+36	±15	75.2833	+0.1	±1.3
3	89 58 16	+ 8	±15	45.9017	+0.1	±1.1
4	193 9 34	+ 1	±12	42.5628	+0.1	±1.1
5	78 8 29	-19	±16	80.8850	+1.7	±1.3
合計	539 59 10	+50				

なお、厳密解法とコンパス法則によるトラバース座標計算値を比較すれば、表-6 のとおりである。

表-6 厳密解法とコンパス法則による座標計算値の比較

測点	緯 距 (X)		経 距 (Y)	
	コンパス法則	厳密法	コンパス法則	厳密法
1,2	m - 9.8896	m - 9.8863	m 88.6860	m 88.6860
2,3	-74.3629	-74.3617	-11.7441	-11.7441
3,4	7.1852	7.1815	-45.3335	-45.3363
4,5	- 3.0848	- 3.0864	-42.4491	-42.4506
5,6	80.1523	80.1529	10.8432	10.8450
合計	0	0	0	0

トラバース測量においても、厳密法と簡易法との差は、表-5 に示した測線長の平均二乗誤差に近く、コンパス法則¹⁹⁾に基づく解法は実用的意味をもつものであることを示す。しかし、電子計算機を用いると、厳密解法も容易に解けるし、計算も速く正確に得られるので、この方法はとくに複雑なトラバース網に利用される価値があるものと思う。

5. 結 論

(1) 条件付間接測定のマトリックス表示による解法および手順を明らかにし、これを測点条件式、単列三角網および閉トラバース測量における厳密調整計算など、土木測量に適用して、従来の簡易計算法と比較検討した。

(2) 単列三角鎖の座標条件をテラー展開して線形化し、4組の条件を同時に考慮して解くことを提案した。

(3) 三角測量における単列三角鎖の問題のマトリッ

クス演算による厳密解法と、従来の逐次近似解法の結果を比較するとき、その差異が実用上問題になるほどでなかった。これは簡易法の実用的価値を立証したと同時に、電算によれば厳密解法も容易に結果が得るので、この両者の長所を生かし合って実際測量の正確性と能率性を高めていけるものと思う。

(4) トラバース測量における春日屋の誘導した条件式を用いて、トラバース測量のマトリックス厳密調整計算を行なった。

この場合、角度と長さの、おのおのの分散と重みの積は等しいと言う条件を用い、その意義について若干の検討を試みた。

電磁波測距儀等の普及によって、測距の精度が将来高められることが予想されるので、このマトリックスを用いたトラバース厳密解法は、大いに活用されるべきであると思う。

本論文について、京都大学工学部森忠次博士より、参考文献その他について、適切な御助言を得たことを記し謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Draper, N.R., Smith, H.: "Applied Regression Analysis", John Wiley & Sons, Inc. 1966.
中村慶一: "技術者のための統計解析", 山海堂, p. 84 ~86, 1965 年.
三池亮次: "主成分分析法によるアーチダムの挙動解析", 土木学会論文集, 第 149 号, 1968 年 1 月.
- 2) Miike, R.: "Test of Structural Reliability of Arch Dams by Statistical Method", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kumamoto University, Vol. XV, No. 2, Dec., 1968.
- 3) Linnik, J.W.: "Die Method der Kleinstem Quadrate in Moderner Darstellung", Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 184~191, 1961.
- 4) Jordan, Eggert, Kneissl: "Mathematische Grundlagen, Ausgleichung und Rechenhilfsmittel", Handbuch der Vermessungskunde, Band 1, Dr. Martha Nábauer J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, S. 590~596, S. 608~618
- 5) 前掲 3) S. 596~600
- 6) 菅原 淳: "測量のためのマトリックス最小二乗法(上)", 測量, 1969 年 11 月号, 日本測量協会機関誌, p. 26~32, 1969 年 11 月.
- 7) Gotthardt, H.: "Einführung in die Ausgleichungsrechnung", H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, S. 143~151, 1968.
- 8) 前掲 6) S. 235~239.
- 9) 三池亮次: "マトリックス演算による条件付間接測定の解法について", 熊本大学工学部研究発表会, 1966 年.
- 10) 中村慶一: "河川工学における情報量解析の応用に関する研究", 土木研究所報告報告, 118 号の 1, p. 6, 1963 年 6 月.
- 11) 前掲 3) S. 600~608.
前掲 6) S. 81~89.
Linkwitz, K.: "Einige Bemerkungen zum Fehlerfortpflanzungsgesetz und über die Einführung von Ersatzbeobachtungen", Zeitschrift für Vermessungs-

- wesen Nr. 2, S. 57~71, 1969.
- Höpcke, W.: "Einige Ergänzungen zur Theorie der Richtungsmessungen", Zeitschrift für Vermessungswesen, Nr. 3, S. 85~98, 1969.
- 11) Wolf, H.: "Ausgleichsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate", Ferd Dümmlers Verlag, Bonn. S. 360~365, 1968.
前掲 3) S. 600~629.
- 12) Lintzwitz, K.: "Über die nachträgliche Berücksichtigung von Beobachtungen bei der Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen", Zeitschrift für Vermessungswesen, Nr. 11, S. 429~439 1968.
- 13) 前掲 6) S. 235~250.
- 14) 前掲 9) p. 6
- 15) 宮本正太郎: "誤差及計算法", 宇宙物理学研究会, p. 96~99, 1949 年.
- 16) 石原藤次郎・森 忠次: "測量学 応用編", 丸善, p. 56~62, 1965 年.
- 17) 土橋忠則: "基準点測量, 実用測量シリーズ", 山海堂, p. 226, p. 288, 1967 年
- 18) 春日屋伸昌: "トラバース測量の合理的調整法(上)", 測量, 1969 年 2 月号, 日本測量協会機関誌, p. 16~21, 1969 年 2 月.
- 19) 米谷栄二・山田善一: "測量学 一般編", 丸善, p. 173~176, 1962 年.

(1971.5.11・受付)
