

3次元弾性問題の一数值解法とその応用

A METHOD OF NUMERICAL ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL
ELASTIC PROBLEMS WITH ITS APPLICATIONS

岡村 宏一*・島田 功**

By Hirokazu Okamura and Isao Shimada

1. ま え が き

3次元弾性,特に非軸対称の問題に関して,高精度,かつ取扱いの便利な一般的解法を見出すことは,従来,2次元問題として略近的に処理されていた諸問題や,局所的な問題に関して,忠実な評価を与える資料を提示できることを意味する。しかしながら,この領域の問題は,久しく弾性力学の分野における難関の1つとされ,目下のところ研究例も数少ない。本文は,この問題に関する1つの解法と,若干の応用例について述べるものである注1)。

3次元弾性問題に関する既往の研究例として,まず,軸対称問題については,Z. Sternberg,およびI.N. Sneddon一派の人々によってかなり研究されたが³⁾,それすら解析は繁雑である。一方,非軸対称問題に関しては,級数解法に基づくK.T. Iyengar^{4),5)}らの解析,部分的に差分法を用いる色部⁶⁾らの解法も見られるが,より一般性のある解法として,3次元要素を用いる有限要素法によるアプローチ^{7)~10)}が研究されている。しかしながら,有限要素法による場合も,3次元非軸対称の問題となると,マトリックスにおけるバンドの幅が広くなり,この方法の特色の1つがかなり失われる感がある。また,この方法を用いる場合,しばしば,要素分割,その他について適当な検証の資料が必要であるが,非軸状態,特に,局所的な精度について検討を行なうことのできる厳密な解析資料は数少なく,設計者にとって,計算容量と望ましい精度の間にある最適な条件を見出すための情報が,目下のところ乏しいように思われる。また,この種の問題に対する実験(光弾性実験など)の結果はかなりばらつくことが多い。このような観点からすれば,

有限要素法のみならず,この種の問題に関し,取扱いの便利な,かつ精度の高い一般的な解法が多面的に研究される必要がある。

さて,前述の解法と系統を異にするものに,いわゆるIntegral method¹¹⁾がある。この種の方法の実際問題への適用,すなわち,弾性体の内部に調整力を与え,singularityの問題を回避しつつ,任意の境界を作り出す方法が,たとえば,すでにE.R.A. Oliveira¹²⁾によって,2次元問題の解析に試みられ,穴あきシャイベの問題に関して,精度の確認とともにすぐれた成果を提供しており,また,動的な問題への発展¹³⁾も見受けられる。なお,筆者は,曲げ,および面内力の両作用を受ける斜板を含む構造物の解析に,このような考えを拡張して用いた^{14),15)}。

ところで,この種の解法は,原理的に3次元問題に拡張することが可能である。しかし,3次元,特に非軸対称の実際的な問題に適用するには,Integral method特有の利点もあると同時に,個々の問題についての精度,あるいは適用範囲の拡大に関して,検討すべき多くの問題があるように思える。

元来,この方法によれば,弾性体の内点ではfield equationを満足する厳密な連続解が与えられており,ただ,境界面のみに必要な最小限の点を設けて解析することになり,差分法,あるいは有限要素法のように3次元体の内部に解析上の点を配置する必要はない。境界の精度が良好であれば十分な精度の解が期待できる。しかし,境界調整を行なうための解法上の操作と精度との関連について,今後,各種の問題に対し検証資料が積み上げられる必要がある。

ところで,この方法では,上記のように,未知量は境界上の点のみに対応するが,一方,原則としてマトリックスに0要素がない(もっとも,前述のように,有限要素法でも3次元問題となるとバンド幅が広くなり,この利点はかなり失われる)。ただ,3次元体の内部に与えられる調整力の影響は,離れた個所ではしばしば急激に減

* 正会員 大阪工業大学助教授土木工学教室

** 正会員 大阪設計コンサルタンツ(株)研究室

注 1) 本文は,土木学会の講演概要1),2)を骨子とし,応用ならびに照査に関するデータを加えて構成したものである。

少するので、問題によっては Saint-Venant の原理を有効に生かして解析を簡易化し、計算容量を縮小できる方法が考えられるが、この方面の研究も必要である。

以下、解法、ならびに応用例として、若干の 3 次元非軸対称の問題について、異なった性格を持つ境界調整の精度、変形、応力の分布などについて述べる。

2. 解 法

(1) 基本解

本解法の基本的な性格は、半無限弾性体から、任意の荷重状態、形状、境界条件を持つ、3次元弾性体を分離することにある。当然、任意の3次元体を分離することができるのと同様に、任意の穴を切り取ることもできる。

解法上、このような操作を行なうために、半無限体内に、ナイフのような鋭い作用を持つ分布力が与えられてかくらんを起こす。ところで、このような力の作用位置では、ある種の応力成分は singularity を持つ、したがって、そこでは望ましい条件を作り出すことはできない。そこで、半無限体内に設定された任意のいくつかの面（以下、これらを調整面と呼ぶ）に、これらの力の分布を与え、真の境界面の条件は、それよりいくぶん離れた位置において満足させる方法を用いる。すなわち、これらの分布力は調整力としての役割を果たすことになる。

次に、真の境界条件は、選点法によって満足させられる。また、境界面に対応する調整面を、比較的小さな長方形面の結合したものとして構成することにより、3次元体の形状や、境界条件として、原理的に任意なものを採ることができる。

このような境界調整の方法は、前述のように Oliveira¹²⁾ が 2次元問題の解析に用いているが、本解法はこれを 3次元問題に拡張したものである。

さて、3次元弾性問題の一般的な見地からは、弾性体内にかくらんを起こす力を与える基本的な解は無限体内に集中荷重を作用させる Lord Kelvin の解である。しかし、3次元弾性問題として扱われる実際問題は多岐にわたり、そのなかで、荷重を受ける平らな表面を持つ弾性体の問題は実例の多いものである。本解法では、この種の問題に対する実用上の適応性を考慮し、弾性体内にかくらんを起こす力を与える解として、Kelvin 解より鏡像の原理を用いて導かれた、図-1 に示すような、半無限弾性体内の任意点に垂直、ならびに水平方向の集中力がそれぞれ作用する Mindlin 第1、第2問題の解¹³⁾を用いる。この際、 $D=0$ とすれば表面力に対する Boussinesq, Cerruti らの解が得られ、これらの積分は、

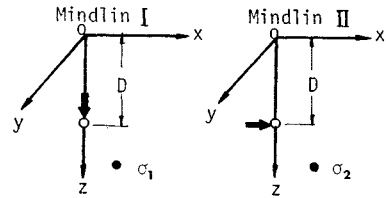


図-1

表面荷重に対する特解として利用される。また、 D の値を大きく採れば、Mindlin 解は、Kelvin 解と類似の性格を持つ。

次に、半無限体内にナイフのような作用をおよぼす分布力の要素（調整面を構成する比較的小さい長方形面上に分布する力）を、図-2 に見るように、前述の解をそ

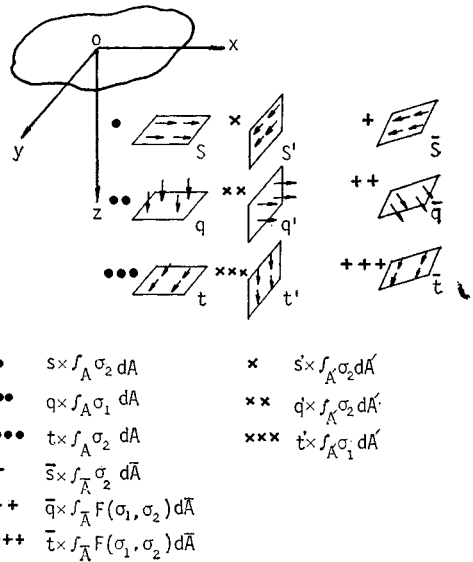


図-2

れぞれ、垂直、水平、斜め方向の長方形面に積分した形で与える（以下、これらを基本解と呼ぶ）。それぞれの面の法線、および接線方向に作用する各方向の分布力の強さを、図のように、 s, q, t, \dots で表わし、これらによる弾性体内の任意点の応力成分 (σ) を図-2 の下にあるように記述する。各積分値は次のような意味を持つ。たとえば、

- $\int_A \sigma_1 dA$ 単位荷重に対する Mindlin 第1問題の応力成分の長方形水平面 (A) での積分
- $\int_{A'} \sigma_1 dA'$ 単位荷重に対する Mindlin 第1問題の応力成分の長方形垂直面 (A') での積分
- $\int_A \sigma_2 dA, \int_{A'} \sigma_2 dA'$ 同様に、単位荷重に対する Mindlin 第2問題の応力成分の長方形水平、ならびに垂直面 (A, A') での積分

$\int_{\bar{A}} F(\sigma_1, \sigma_2) d\bar{A}$ 互いに直角なコンポーネントに対する Mindlin 第1問題, 第2問題の応力成分の長方形斜面 (\bar{A}) での積分の重ね合わせ

さらに, 特解として用いる, 半無限体の表面に作用する垂直, および水平方向の分布力 (強さ: q_0, s_0) による応力成分, $q_0 \times \int_A (\sigma_1)_{D=0} dA, s_0 \times \int_A (\sigma_2)_{D=0} dA$ が与えられる。ここで, それぞれの積分値は, 前述の Boussinesq, および Cerruti の解に対応するものである。

以上は, 応力成分に関するものであるが, 同様に, 変位成分 (δ) についても, 基本解, すなわち, $\int_A \delta_i dA, \int_{A'} \delta_i dA', \dots$ などが与えられる。

ところで, 従来, これら Mindlin 解の2重積分はむずかしいとされていたが, 本解法に用いるものは積分可能である。しかも, これら基本解はすべて代数関数で与えられ, 解析上の取扱いは容易である。ここで, 各種の応力成分, および変位成分を与えるこれらの基本解を列挙することは, 紙数の都合もあり, また, 本文の主旨でもないので割愛する。ただ, 本文の末尾の付録に, 精度に関するデータに関連して, その一部を提示してある。

さて, 調整面に作用させる調整力の分布を, 前述のように, 比較的小さい有限領域で積分されたものの接合として与えるかわりに, 1つの方法として, 調整力の分布を, 適当な間隔を持たせた集中力の分布で与える方法を用いても, singularity の問題を避け得る限り, 境界の調整は可能である。しかしながら, Integral method 本来の性格から言えば, 調整力の密度分布を, 適当な積分によって与える方が解の精度は良好である。

たとえば, 付録の図-24 (a), (b), (c) は, 半無限弾性体内に設定された正方形水平面に等分布して作用する垂直, および水平力による Z 軸上注2) の応力, ならびに変位成分の分布に関して, Mindlin 解の積分によって求めた結果と, 水平面を $n \times n$ ($n=2, 4, 10$) 分割した集中力の和として数値積分により求めた結果の比較を示したものである。図より明らかなように, 後者による場合は, 分割の程度によって, 作用面の近くにおける解に乱れを生じている。一方, 後の例題で述べるように, 境界調整の精度を左右するものの1つに, 境界面と調整面の距離がある。若干の解析を行なった経験では, これを大きくしすぎると満足すべき調整が得られないことがあり, かなり接近させた方が, よい結果を得る場合もある。調整

力の分布を集中力の和として与える場合は, この近傍で, 解の乱れを持つことになり, したがって, 精度上, 十分な検討が必要である。

(2) 境界調整の方法

さて, 図-3 によって, 半無限体から, 所要の3次元

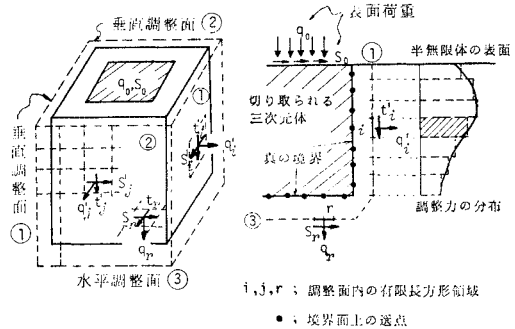


図-3

体を分離する操作を説明する。ここでは, まず, 表面荷重を受ける直方体の問題の扱いが示される。

図のように, 半無限体の表面に荷重を与え, 求める直方体の外側を囲んで, 垂直, および水平調整面①, ②, ③を設定し, これらの調整面のそれぞれを, 有限長方形領域 (i, j, r など) によって分割する。さらに, 図-2 に示した方法で, これらの長方形領域のそれぞれにおいて等分布する調整力 (q_i', s_i', t_i' など) を与え, それらの作用によって, 真の境界面の境界条件を調整する。すなわち, 調整力は未知量である。また, 有限領域の分割, ならびに調整面と境界面の間の距離は境界条件の精度に対応して定める。

いま, 応力成分に対する境界条件の例として, 境界面 (側面) 上の選点 m は自由, または一定の外力を受ける条件を持つものとするれば, この点における垂直応力, および2方向のせん断応力に対し, 境界条件は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \sigma_m = & \sum_i (s_i' \times \int_{A_i'} \sigma_2 dA' + q_i' \times \int_{A_i'} \sigma_2 dA' + t_i' \\ & \times \int_{A_i'} \sigma_1 dA')_m + \sum_j (s_j' \times \int_{A_j'} \sigma_2 dA' + q_j' \\ & \times \int_{A_j'} \sigma_2 dA' + t_j' \times \int_{A_j'} \sigma_1 dA')_m + \sum_r (s_r \\ & \times \int_{A_r} \sigma_2 dA + q_r \times \int_{A_r} \sigma_1 dA + t_r \times \int_{A_r} \sigma_2 dA)_m \\ & + \left\{ s_0 \times \int_{A_0} (\sigma_2)_{D=0} dA + q_0 \times \int_{A_0} (\sigma_1)_{D=0} dA \right\}_m \\ = & 0, \text{ または } c_m \end{aligned}$$

次に, 変位成分に対する境界条件の例として, 底面上の選点 n が変位拘束の条件を持つものとするれば, $x, y,$

注 2) 付録の記述にもあるように, 長方形水平面に作用する分布力による応力および変位成分は, 長方形面の1つの隅点を通る線上の点に対して与えられるが, 重ね合わせによって, 任意の長方形, および任意点に対するそれらが求まる。

z 各方向の変位成分 $\delta_n : (u, v, w)_n$ に対して、

$$\begin{aligned} \delta_n = & \sum_i (s_i' \times \int_{A_i'} \delta_2 dA + q_i' \times \int_{A_i'} \delta_2 dA + t_i' \\ & \times \int_{A_i'} \delta_1 dA)_n + \sum_j (s_j' \times \int_{A_j'} \delta_2 dA + q_j' \\ & \times \int_{A_j'} \delta_2 dA + t_j' \times \int_{A_j'} \delta_1 dA)_n + \sum_r (s_r \\ & \times \int_{A_r} \delta_2 dA + q_r \times \int_{A_r} \delta_1 dA + t_r \times \int_{A_r} \delta_2 dA)_n \\ & + \left\{ s_0 \times \int_{A_0} (\delta_2)_{D=0} dA + q_0 \times \int_{A_0} (\delta_1)_{D=0} dA \right\}_n = 0 \end{aligned}$$

さらに、図-4には、境界調整の若干の例が示されている。図-4(a)は、後の例題にも含まれるが、孔を切

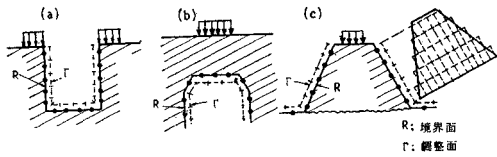


図-4

り取る問題であって、方形ピットの境界面を作るための調整面の配置を断面図によって表わしたものである。同様に、図-4(b)は、半無限体内に空洞を作ることによって、厚板などの3次元解析が可能であることを示している。また、図-4(c)は、斜め長方形有限領域の接合によって構成される調整面の例を示したものである。

3. 解析例と照査

ここでは、4つの基礎的な等方性弾性体の問題について、異なった性格を持つ境界調整の精度、変形、応力の分布などについて述べる。そのほか、本解法の連立方程式に0要素を導入して、計算容量を圧縮する方法を探究するための、1つの基本的な資料も示される。

まず、図-5、および表-1に示すものは、2.(1)でも触れたが、境界調整の精度と、境界面、および調整面間の距離の関係を示す一例である。ここでは、図-5(a)に示すような、表面荷重を受ける半無限体内に、水平、

ならびに垂直な自由面を作る場合について、未調整の状態が存在した応力(未調整応力)が、調整によって境界値(0)に近づく様子を示したものである。ところで、境界面と調整面を一致させれば、応力は、分割されたそれぞれの有限長方形領域の隅点において発散する。しかし、両者の距離を、 $0.05a$, $0.1a$, $0.15a$ と変化させた場合、距離が大きくなるほど、精度が悪化する。もちろん、これは一例であって、たとえば、Oliveira¹²⁾は、円孔を持つシャイベの例題において、両者をかなり離れた方がよい結果が得られることを示している。すなわち、この種の精度の検討は、問題の性格に応じて行なわれるべきものである。

以下の4つの例題における、調整面の配置、およびその分割は、それぞれ若干の検討の後に定められたものである。

(1) 上面に部分荷重を受ける立方体の問題、ただし側面は自由、底面の変位が完全に拘束された場合

図-6(a)に、問題(1)の立方体(ポアソン比 $\nu = 0.2$)と荷重、および決定された調整面の配置と分割

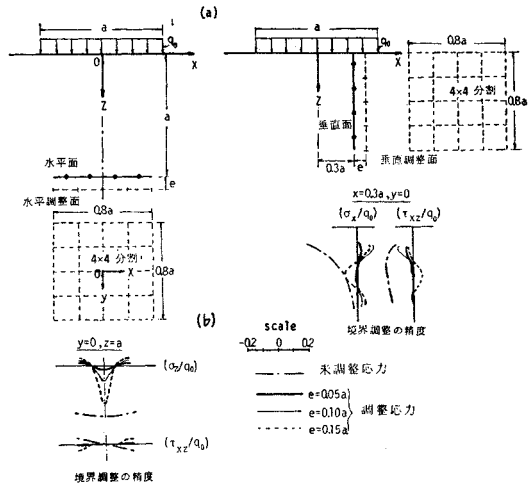


図-5

表-1 調整面の距離(e)と境界調整精度の関係

水 平 面			垂 直 面					
応力成分		$x=0$	$x=0.2a$	応力成分		$z=0.2a$	$z=0.4a$	$z=0.6a$
σ_z	未調整応力	-0.335	-0.320	σ_x	未調整応力	-0.247	-0.0840	-0.0265
	$e=0.15a$	-0.262	0.0561		$e=0.15a$	0.104	-0.0820	0.0692
	$e=0.1a$	-0.113	0.0337		$e=0.1a$	0.125	-0.0192	0.0349
	$e=0.05a$	-0.0371	0.0210		$e=0.05a$	0.0590	-0.0050	0.0007
τ_{xz}	未調整応力	—	-0.0450	τ_{xz}	未調整応力	-0.138	-0.162	-0.131
	$e=0.15a$	—	0.0404		$e=0.15a$	-0.0330	0.0619	-0.0149
	$e=0.1a$	—	0.0274		$e=0.1a$	-0.0837	0.0004	-0.0269
	$e=0.05a$	—	0.0047		$e=0.05a$	-0.0584	0.0085	-0.0074

$\nu=0$, 単位 (q_0)

を、また 図-6 (b) に境界面上の選点の配置を示す。

図-7 は、側面における応力、底面における変位の境界条件の精度を示すもので、未調整時の応力、および変位（半無限体に荷重のみが作用する場合の値：特解の値）が、調整により、十分な精度で消去されていることがわかる。誤差は、次の 図-8 との対比によってもわかるように、実用上無視できる。なお、図-8 は、応力、ならびに変位の分布を各断面について与えたものである。なお、この場合、調整後のせん断応力の値は、特異点（荷重の周辺の近傍）を除くと、一般に小さい値になるので、データを省略した。また、図-12 には、底面の垂直応力の分布について、次の問題 (2) のそれとの比較がなされている。

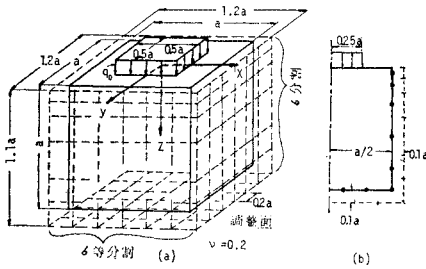


図-6 問題 (1) の立方体と荷重、調整面の配置と分割および選点の配置

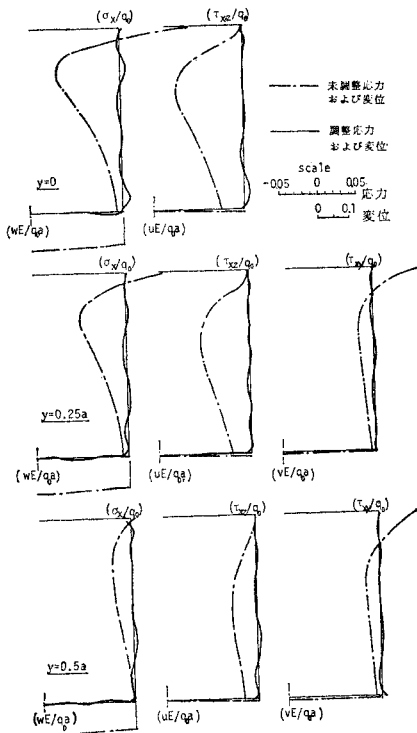


図-7 問題 (1) の境界調整の精度

(2) 上面に部分荷重を受ける立方体、ただし、側面は自由、底面は半無限体と連続する場合

図-9 (a) は、問題 (2) の立方体と荷重、および決定された調整面の配置と分割、また、図-9 (b) は対応する選点の位置を与えたものである。図-10 は、前題と同様に、境界条件（すべて応力の条件である）の精度を示したもので、この場合も、誤差は実用上無視できる。底面の周辺付近では、応力集中の傾向を持った小さな乱れが見られるが、周辺上の応力集中の問題は、この付近の形状をより詳細に与えることによって、局所的な問題としてクローズアップし、別個に処理されるべきものである。本解析においては、この部分の詳細な検討は行な

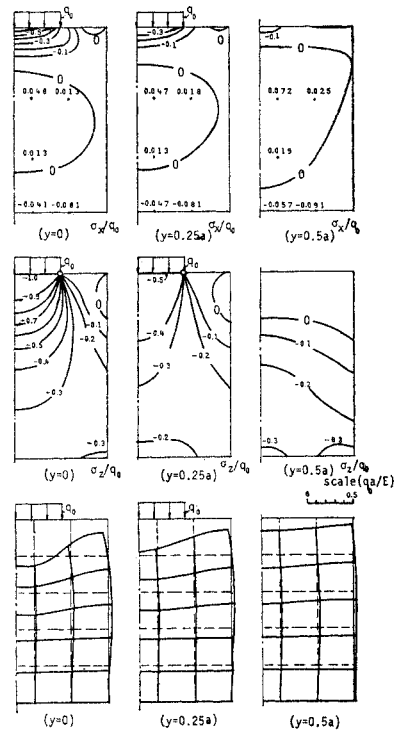


図-8 問題 (1) の立方体の応力、ならびに変位の分布

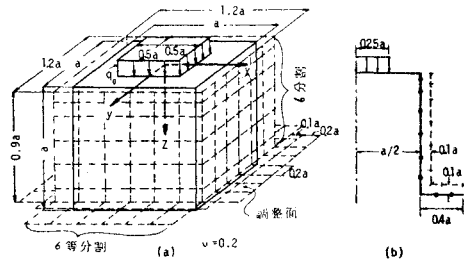


図-9 問題 (2) の立方体と荷重、調整面の配置と分割および選点の配置

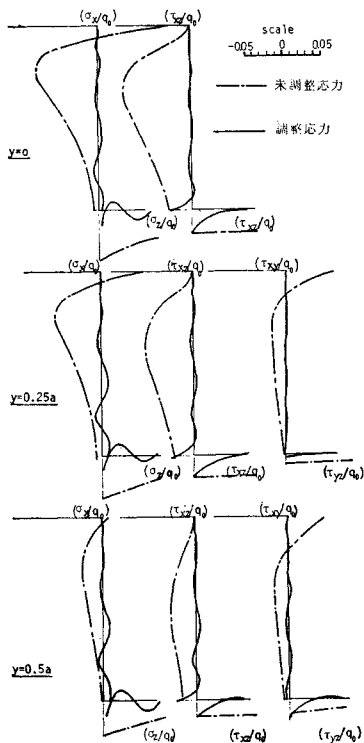


図-10 問題(2)の境界調整の精度

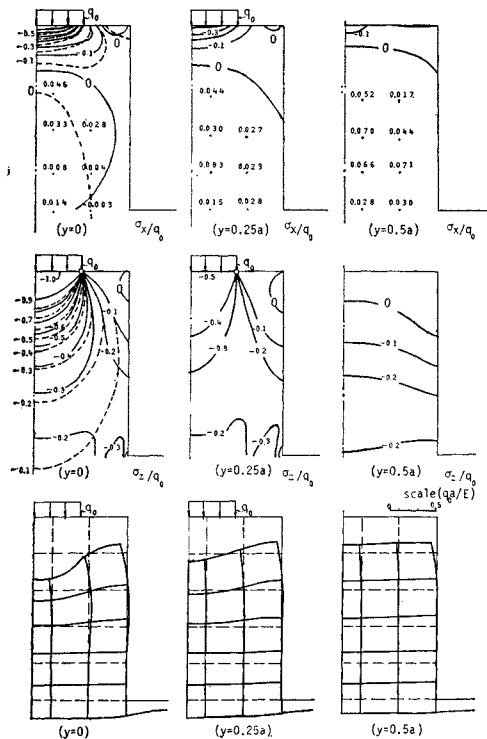


図-11 問題(2)の立方体の応力ならびに変位の分布

っていない。ただ、たとえば 図-12 の底面内応力の分布に見るように、応力集中の性状は、周辺よりいくぶん離れた点において巨視的に捕えられている。

図-11 は、各断面における、応力、ならびに変位の分布を示したものであり、特に $y=0$ 断面の応力分布図では、未調整時の応力分布(破線)が、調整にともなう側

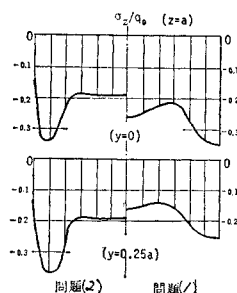


図-12 問題(1), および(2)における底面の直応力分布

面の応力開放によって変化する模様がよくわかる。

なお、図-12 は、問題(1), および(2)における底面の直応力の分布図である。双方の分布にはかなりの差異が見受けられるが、周辺の近傍では、いずれも応力集中の傾向を現わしている。

(3) 方形孔を持ち、その周囲に表面荷重を受ける半無限弾性体

この問題は、前題(1), (2)とは逆に、孔を切り取る問題である。

図-13 に、方形孔と荷重分布の形、調整面の配置と分

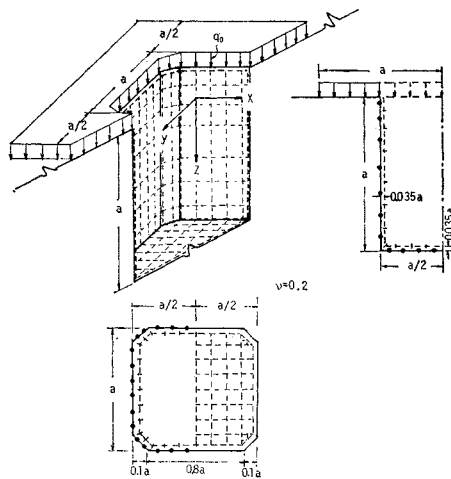
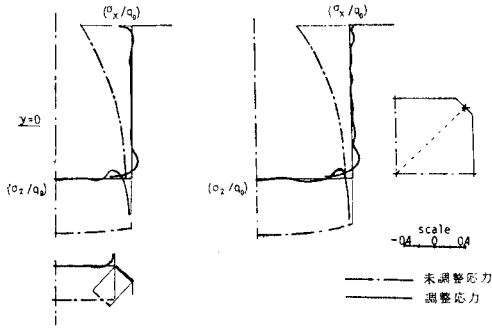


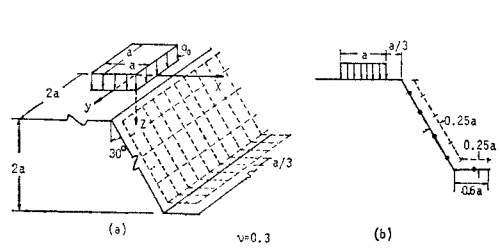
図-13 問題(3)の方形孔と荷重、調整面の配置と分割、および選点の配置

割、ならびに選点の配置を示す。すなわち、この場合、孔の部分も含めて表面荷重を載せた半無限体から、孔の部分に相当する隅切りを持つ立方体が、その表面荷重とともに切り取られる。なお、 $\nu=0.2$ である。

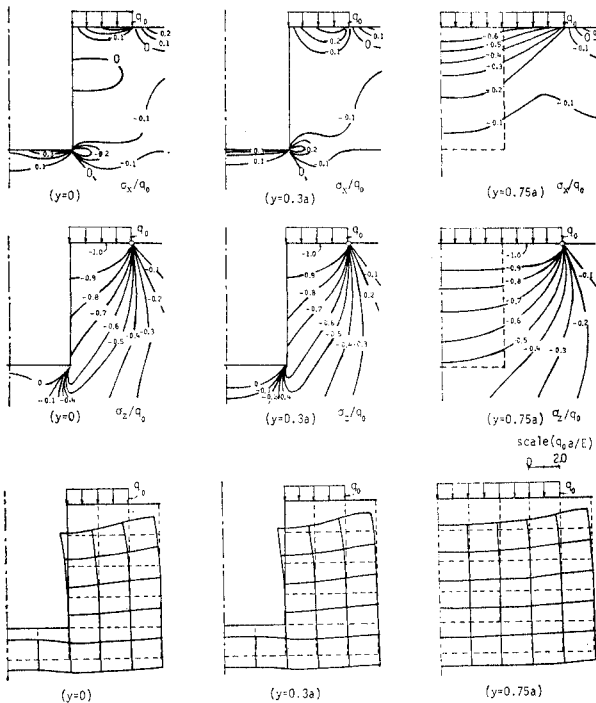
図-14 は、境界面の調整の様様を示したもので、側面の上下端の付近に若干の誤差を残しているが、それらの解におよぼす影響は小さいと判断された。また、本例で



図—14 問題(3)の境界調整の精度



図—16 斜面と荷重, 調整面の配置と分割および選点の配置



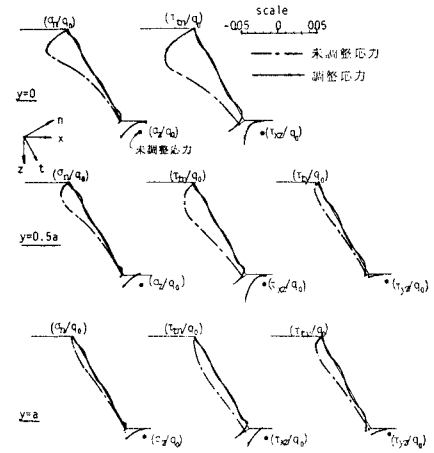
図—15 問題(3)の方形孔付近の応力ならびに変位の分布

は、せん断力の調整量は小さく、誤差も問題にならないので、データを省略した。なお、本解析においても、前題同様、応力集中に関する局所的な議論はなされていない。図—15は、孔縁付近の応力、ならびに変位の分布を与えたものである。

(4) 上面に部分荷重を受ける、斜面を持つ半無限体の問題

ここでは、荷重が、斜面の上端からいくぶん離れて作用する場合と、それに接して作用する場合の2つの例が示される。

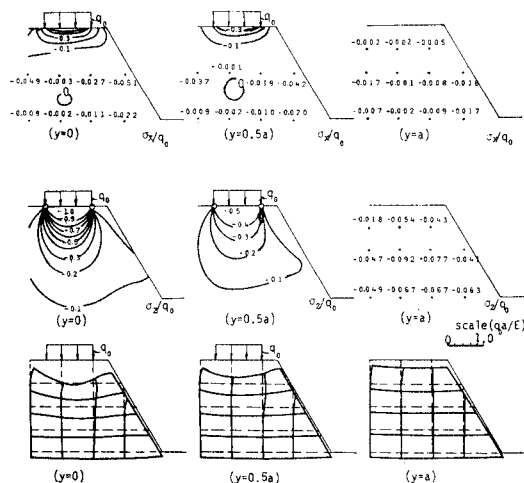
図—16(a)は、前の場合の半無限体と荷重、および調整面の配置と分割を、また、図—16(b)に選点の配置を示す。なお、境界面の調整は、後の応力分布図からわかるように、荷重の影響が十分消滅する位置まで行なわれ



図—17 境界調整の精度

ている。図—17は、その精度を示すもので良好な結果を得ている。なお、斜面の下端には応力集中の傾向が見られる。さらに、図—18は、各断面における、応力、および変位の分布を与えたものである。

図—19(a),(b)に、後の場合の半無限体と荷



図—18 応力ならびに変位の分布

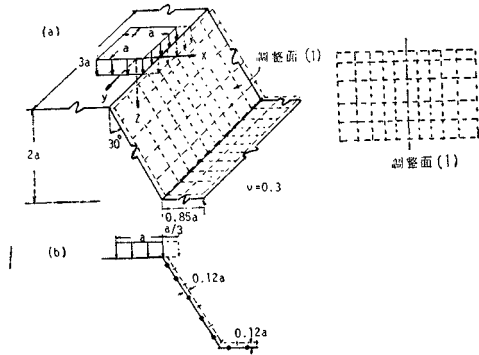


図-19 斜面と荷重，調整面の配置と分割および選点の配置

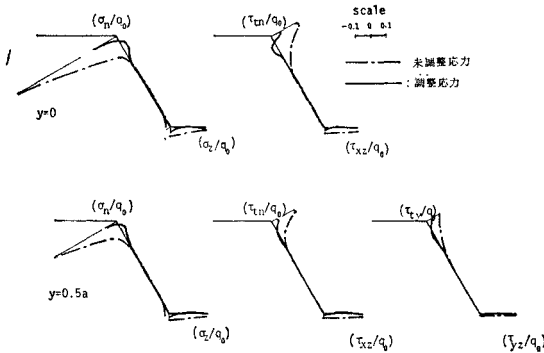


図-20 境界調整の精度

重，調整面の配置と分割，および選点の配置を示す。また，図-20 は，境界調整の様態を示したものである。荷重端，および斜面の下端に特異性に基づく応力集中の傾向が見られるが，斜面の上端付近では，調整面の分割を特に細かくしなくても，実用上は十分な結果を得ている。図-21 は，各断面における応力，および変位の分布を与えたものである。

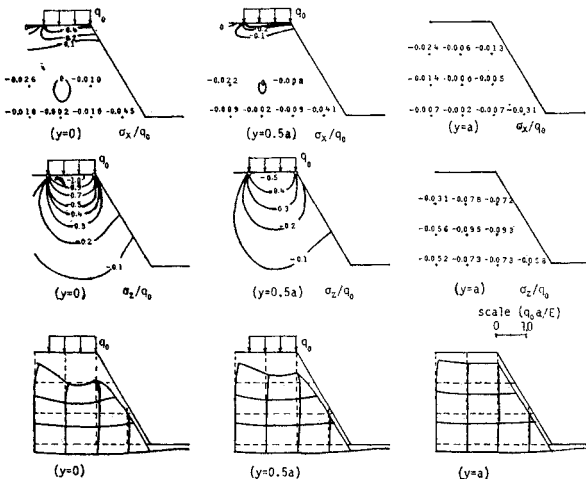


図-21 応力ならびに変位の分布

ところで，すでに，1. で述べたように，本解法は，いわゆる Integral method に属するもので，弾性体の内部には，解析上の点を配置する必要はなく，選点の数は最小限に押えられるが，一方，原則としてマトリックスに 0 要素がない。しかしながら，3 次元体の内部に与

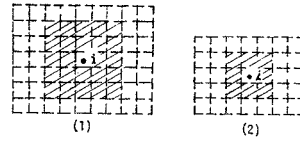


図-22 影響範囲の限定

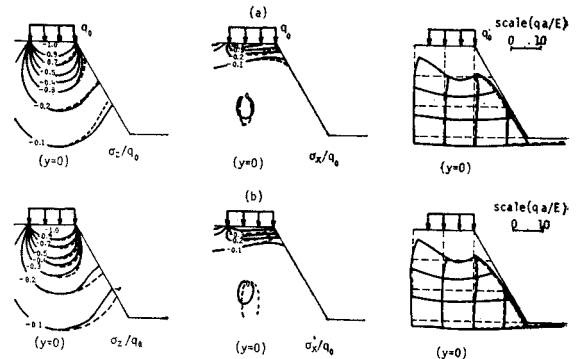


図-23 調整力の影響範囲を限定しない場合
--- 調整力の影響範囲を限定する場合
(a)：限定範囲 (1)，(b)：限定範囲 (2)

えられる 1 つの調整力の影響は，その位置から離れるに従い，しばしば急激に減少する。この性質を利用して，1 つの調整力の影響範囲を限定し，それ以外の選点に対する影響係数を 0 と見なすことにより，マトリックスに 0 要素を導入し，計算容量を縮小する方法が考えられる。この方法が有効であれば，選点の数を最小限に押えられる解法上の利点と相まって，本解法の有用性をさらに増すことになる。以下，この点に関しての 1 つの検討例について述べる。

さて，図-19 に示した例題が，検討の対象として選ばれた。この問題では，斜面の上縁における，載荷部分の付近で，特に大きな調整力が与えられており，この調整力の影響は，斜面の下方，ならびに側方におよぶべきものである。いま，ある点 i に作用する調整力の影響範囲を 図-22 に示すように限定し，得られた主要断面の応力，および変位の分布を，影響範囲を限定しない場合の結果 (図-21) と比較したのが 図-23 であるが，影響範囲を限定しても，実用上は十分な解が得られるようである。この事実は，この方法により，問題によっては Saint-Venant の原理を有効に生かして解析を簡易化できることを示唆するものである。

4. あとがき

いわゆる Integral method を、3次元弾性問題に適用するための1つの実用的な手法と、その応用上の問題点について述べ、4つの基礎的な例題について、異なる性格を持つ境界調整の方法、ならびに精度に関するデータを示した。

本文で扱った例題の範囲では、実用上、十分な精度を持つ結果が得られた。このような基本的なデータから従来、2次元問題に対して、すぐれた成果を提供しているこの種の方法を、3次元問題、特に、非軸対称問題の1つの有効な解法として拡張できることがうかがわれ、今後、より広範な問題に対して検討データを積みあげる必要性が感じられる。

さらに、本文に示した1つの方法により、調整力の影響範囲を制限しても、問題によっては、Saint-Venantの原理が実用的な効果を現わすことが認められた。この事実は、解法上、連立方程式に0要素を導入し、計算容量を圧縮し得ることを示唆するものであり、選点の数を最小限に押えられる解法上の利点と相まって、本解法の有用性をさらに増す結果とならう。

参考文献

- 1) 岡村宏一：3次元弾性非軸問題の1解法，昭和46年度土木学会関西支部講演概要，pp. 1-56-1~4, 1971.
- 2) 岡村宏一：3次元弾性非軸対称問題の解法，第26回土木学会年次講演会講演概要，1, 1971.
- 3) 宮本 博：3次元弾性論，裳華房，1967.
- 4) Iyengar, K.T., Sundara Raja and M.K. Prabhakara : A three dimensional elasticity solution for rectangular prism under end loads, Z.A.M.M., Band 49, Heft 6, pp. 321~332, 1969.
- 5) Iyengar, K.T., Sundara Raja and M.K. Prabhakara : Anchor zone stresses in prestressed concrete beams, Proc. A.S.C.E., Vol. 97, ST 3, pp. 807~824, 1971.
- 6) 色部 誠・後藤浩一：3次元弾性問題の数値解法，土木学会論文集，No. 138, pp. 11~20, 1967.
- 7) Fjeld, S.A. : Three dimensional theory of elasticity, Finite Element Method in Stress Analysis, Tapir, pp. 333~363, 1969.
- 8) Argyris, J.H. : Continua and discontinua, Proc. on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.
- 9) Melosh, R.J. : Structural analysis of solids, Proc. A.S.C.E., Vol. 89, ST 4, pp. 205~224, 1963.
- 10) Yettram, A.L. and K. Robbins : Anchorage zone stresses in axially posttensioned members of uniform rectangular section, Magazine of Concrete Research, Vol. 21, No. 67, pp. 103~112, 1969.
- 11) たとえば，Rizzo, F.J. : An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math. Vol. 25, No. 1, pp 83~95, 1967.
- 12) Oliveira, E.R.A., Plane stress analysis by a general integral method, Proc. A.S.C.E., Vol. 94, EM 1, pp. 79~101, 1968.

- 13) 丹羽義次・小林昭一・横田和男：空洞周辺応力の積分方程式による解析，昭和46年度土木学会関西支部講演概要，pp. 1-54-1~2, 1971.
- 14) 岡村宏一：構造物の立体解析法，構造物設計法の最近の進歩と問題点，土木学会関西支部講習会テキスト，pp. 85~86, 1971.
- 15) 岡村宏一・島田 功：連続斜めPC板の解析，昭和46年度土木学会関西支部講演概要，pp. 1-35-1~4, 1971.
- 16) Mindlin, R.D. : Force at a point in the interior of a semiinfinite solid, Physics, Vol. 7, No. 5, pp. 195~202, 1936.

付 録

2.(1)の所論の参考データを付録として示す。

いま、図-24(a)に示すような、半無限弾性体内に設けられた正方形水平面に等分布して作用する鉛直、およ

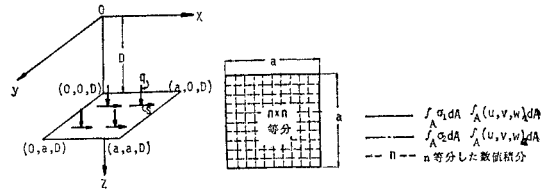


図-24 (a)

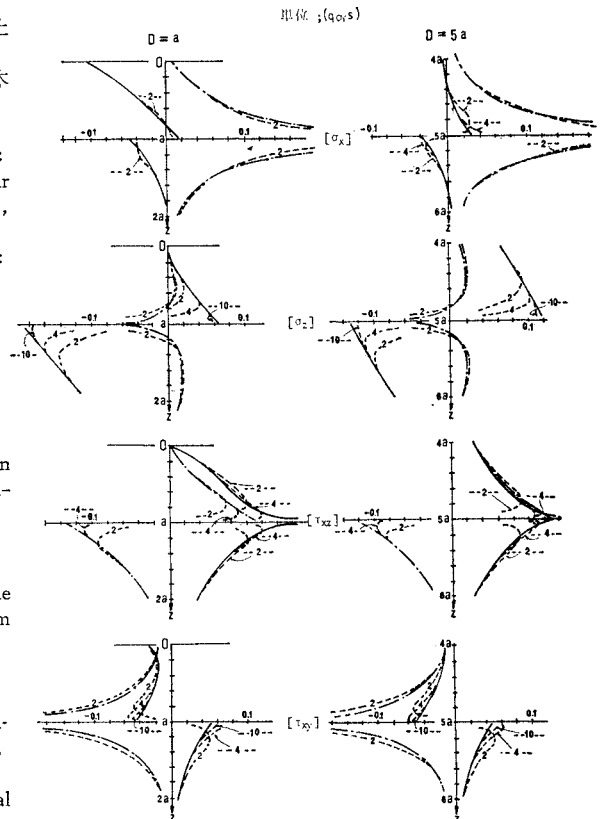


図-24 (b)

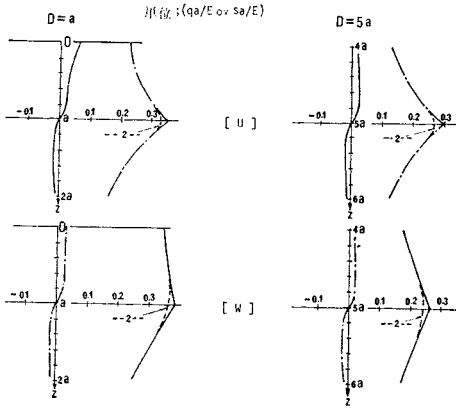


図-24 (c)

び水平力による Z 軸上の応力，ならびに変位成分の分布について，それぞれ，図-24(b), (c) に，Mindlin 解の積分によって求めた結果と，水平面を $n \times n (n=2, 4, 10)$ 等分割した集中力の和として，数値積分により求めた結果との比較を示した。

次に，本解法の基本解として用いる Mindlin 解の重積分は，すべて積分可能であるが，紙面の都合上，例として，図-24 の数値を与える，応力，および変位の関数を提示しておく。

ここで，

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \alpha \bar{\sigma}_x, \quad \sigma_y = \alpha \bar{\sigma}_y, \quad \sigma_z = \alpha \bar{\sigma}_z, \quad \tau_{xy} = \alpha \bar{\tau}_{xy}, \\ \tau_{xz} &= \alpha \bar{\tau}_{xz}, \quad \tau_{yz} = \alpha \bar{\tau}_{yz}, \quad u = \beta \bar{u}, \quad v = \beta \bar{v}, \\ w &= \beta \bar{w}, \end{aligned}$$

ただし，

$$\alpha = \frac{1}{8(1-\nu)\pi}, \quad \beta = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G}$$

ν : ポアソン比, G : せん断弾性係数とすると

(1) 図-25 にみるような Mindlin 第 1 問題の水平長方形面への積分

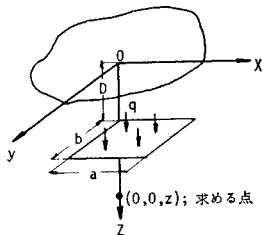


図-25

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -2\nu I_{F1} - 2(1-2\nu^2) I_{F2} + 2(1-\nu)(1-2\nu) I_{F5} \\ &+ a \cdot b \left[\frac{z-D}{C_1 A_1^2} + \frac{1}{C_2 A_2^2} \left\{ 3(z+D) - 4\nu z - \frac{6D^2}{z+D} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{2(a^2+b^2)zD}{C_2^2(z+D)} - \frac{4a^2zD}{(z+D)^3} \left(1 - \frac{a^2}{A_2^2} \right) - \frac{4\nu A_2^2 D}{B_2^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= -2(1-\nu) \{ I_{F1} + I_{F2} \} - \frac{ab(z-D)}{C_1} \times \textcircled{4} \\ &- \frac{abDz}{C_2(z+D)} \left[\left\{ \frac{a^2+b^2}{3C_2^2} + (3-4\nu) \frac{z}{D} + 2(5-2\nu) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{D}{z} \right\} \times \textcircled{5} - 4 \times \textcircled{6} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} &= 4(1-\nu)(1-2\nu) I_{G3} - \left\{ \frac{4(1-\nu)}{+2(1-2\nu)} \right\} - (z-D) \times \textcircled{1} \\ &- (3-4\nu)(z-D) \times \textcircled{2} - 2Dz(z+D) \times \textcircled{3} \\ &+ \frac{D}{z+D} \left(5-8\nu - \frac{z-D}{z+D} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xz} &= -(1-2\nu) \{ I_{G1} - I_{G2} \} + b \{ (3-4\nu)z + D \} (z+D) \\ &\times \textcircled{7} + b \left\{ \frac{1}{B_1} - \frac{(z-D)^2}{A_1^2 C_1} \right\} + 2bDz \left[\frac{1}{B_2^3} \right. \\ &\left. + \frac{1}{A_2^2 C_2} \left\{ \frac{2a^2}{A_2^2} - \frac{(z+D)^2}{C_2^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

($\bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{yz}$ は，それぞれ $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xz}$ の x, y 方向の値を入れかえる)。

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (z-D) I_{Gf} + \{ (3-4\nu)(z-D) \\ &+ 4(1-\nu)(1-2\nu)(z+D) \} I_{Gg} + 4(1-\nu)(1-2\nu) \{ b I_{Gh} \\ &+ a I_{Fg} \} + 2bDz(z+D) \left\{ \frac{1}{C_2 A_2^2} - \frac{1}{B_2(z+D)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= (3-4\nu) \{ b I_{Ga} + a I_{Gc} \} + (5-12\nu+8\nu^2) \{ b I_{Gb} \\ &+ a I_{Gd} \} + \frac{|z-D|}{2} \{ (5-8\nu) I_{Fa} + I_{Fc} + 2(3-4\nu) I_{Fe} \} \\ &+ \frac{z+D}{2} \left\{ (7-20\nu+16\nu^2) I_{Fb} + (3-4\nu) I_{Fd} \right. \\ &\left. + 2(5-12\nu+8\nu^2) I_{Fb} \right\} + \frac{2abDZ(A_2^2+B_2^2)}{A_2^2 B_2^2 C_2} \end{aligned}$$

(\bar{v} は \bar{u} の x, y 方向の値を入れかえる)。

(2) 図-26 にみるような Mindlin 第 2 問題の水平長方形面への積分

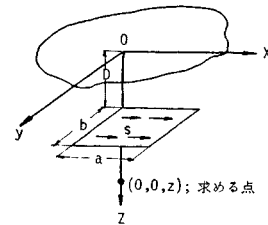


図-26

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -(3-2\nu) I_{G1} - (5-6\nu) I_{G2} + 2bD \{ z-2\nu(z+D) \} \\ &\times \textcircled{7} + 4(1-\nu)(1-2\nu)b \times \textcircled{8} - a^2 b \left\{ \frac{1}{C_1 A_1^2} \right. \\ &\left. + (3-4\nu) \frac{1}{C_2 A_2^2} - \frac{2Dz}{C_2 A_2^2} \left(\frac{2}{A_2^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y &= -2\nu \{ I_{G1} + (3-4\nu) I_{G2} \} - 4\nu bD(z+D) \times \textcircled{7} \\ &- 4(1-\nu)(1-2\nu)b \times \textcircled{8} + b \left\{ \left(\textcircled{1} + \frac{1}{A_1} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (3-4\nu) \left(\textcircled{2} + \frac{1}{A_2} \right) - 2Dz \left(\textcircled{3} + \frac{1}{A_2^3} \right) \Big\} \\
 \bar{\sigma}_z = & (1-2\nu) \{ I_{G_1} - I_{G_2} \} + b \{ (3z^2 - D^2) - 4\nu z(z+D) \} \\
 & \times \textcircled{7} - b \left[\frac{(z-D)^2}{C_1 A_1^2} - \frac{1}{B_1} + 2Dz \left\{ \frac{2a^2}{C_2 A_2^4} - \frac{(z+D)^2}{C_2^3 A_2^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{B_2^3} \right\} \right] \\
 \bar{\tau}_{xy} = & (1-\nu) I_{G_4} - a \left\{ 4(1-\nu)(1-2\nu) \times \textcircled{9} - \left(\textcircled{1} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{B_1} \right) - (3-4\nu) \left(\textcircled{2} + \frac{1}{B_2} \right) + 2Dz \left(\textcircled{3} + \frac{1}{B_2^3} \right) \right\} \\
 \bar{\tau}_{xz} = & -(1-\nu) \{ I_{F_3} + I_{F_4} \} + ab \left[\frac{z-D}{A_1^2 C_1} \right. \\
 & \left. + \frac{Dz(z+D)}{C_2 A_2^2} \left\{ \frac{3-4\nu}{Dz} - \frac{2(1-2\nu)}{z(z+D)} - \frac{6}{A_2^2} + \frac{2b^2}{C_2^2 A_2^2} \right\} \right] \\
 \bar{\tau}_{yz} = & -(z-D) \left\{ \textcircled{1} + \frac{1}{|z-D|} \right\} + \{ 2(1-2\nu)z + z \\
 & + D \} \left\{ \textcircled{2} + \frac{1}{z+D} \right\} + 2Dz(z-D) \left\{ \textcircled{3} + \frac{1}{(z+D)^3} \right\} \\
 \bar{u} = & 4(1-\nu)b \{ I_{G_a} + I_{G_b} \} + (3-4\nu)a I_{G_c} \\
 & + (5-12\nu+8\nu^2)a I_{G_d} + 4(1-\nu)|z-D| \{ I_{F_a} + I_{F_e} \} \\
 & + 4(1-\nu)(z+D) \{ I_{F_b} + I_{F_f} \} \\
 & - 4(1-\nu)(1-2\nu)(z+D) I_{F_g} + \frac{2abDz}{C_2 A_2^2} \\
 \bar{v} = & -4(1-\nu)(1-2\nu)(z+D) I_{G_e} - C_1 + A_1 + B_1 \\
 & - |z-D| + (1-8\nu+8\nu^2)(C_2 - A_2 - B_2 + z+D) \\
 & - 2Dz \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{A_2} - \frac{1}{B_2} + \frac{1}{z+D} \right) \\
 \bar{w} = & (z-D) I_{G_f} + \{ (3-4\nu)(z-D) - 4(1-\nu)(1 \\
 & - 2\nu)(z+D) \} I_{G_g} - 4(1-\nu)(1-2\nu) \{ b I_{G_h} + a I_{F_g} \} \\
 & - 2bDz(z+D) \left\{ \frac{1}{C_2 A_2^2} - \frac{1}{B_2(z+D)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sqrt{a^2 + (z-D)^2} & A_2 &= \sqrt{a^2 + (z+D)^2} \\
 B_1 &= \sqrt{b^2 + (z-D)^2} & B_2 &= \sqrt{b^2 + (z+D)^2} \\
 C_1 &= \sqrt{a^2 + b^2 + (z-D)^2} & C_2 &= \sqrt{a^2 + b^2 + (z+D)^2} \\
 I_{F_1} &= \pm \sin^{-1} \frac{ab}{A_1 B_1} & I_{F_2} &= \sin^{-1} \frac{ab}{A_2 B_2} \\
 I_{F_3} &= \pm \left\{ \sin^{-1} \frac{A_1^2 + aC_1}{A_1(C_1 + a)} - \sin^{-1} \frac{A_1^2 - aC_1}{A_1(C_1 - a)} \right\} \\
 I_{F_4} &= \sin^{-1} \frac{A_2^2 + aC_2}{A_2(C_2 + a)} - \sin^{-1} \frac{A_2^2 - aC_2}{A_2(C_2 - a)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{F_5} &= \sin^{-1} \frac{ab(a^2 + b^2)}{A_2 B_2 \{ C_2^2 + (2C_2 + z+D)(z+D) \}} \\
 I_{G_1} &= \log \frac{|z-D|(C_1 + b)}{A_1(B_1 + b)} & I_{G_2} &= \log \frac{(z+D)(C_2 + b)}{A_2(B_2 + b)} \\
 I_{G_3} &= \log \frac{(A_2 + z+D)(B_2 + z+D)}{2(z+D)(C_2 + z+D)} \\
 I_{G_4} &= \log \frac{(A_1 + a)(A_2 + a)(C_1 - a)(C_2 - a)}{(A_1 - a)(A_2 - a)(C_1 + a)(C_2 + a)} \\
 \textcircled{1} &= \frac{1}{C_1} - \frac{1}{B_1} - \frac{1}{A_1} & \textcircled{2} &= \frac{1}{C_2} - \frac{1}{B_2} - \frac{1}{A_2} \\
 \textcircled{3} &= \frac{1}{C_2^3} - \frac{1}{B_2^3} - \frac{1}{A_2^3} & \textcircled{4} &= \frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{B_1^2} \\
 \textcircled{5} &= \frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{B_2^2} & \textcircled{6} &= \frac{a^2}{A_2^4} + \frac{b^2}{B_2^4} \\
 \textcircled{7} &= \frac{1}{B_2(z+D)^2} - \frac{1}{A_2^2 C_2} & \textcircled{8} &= \frac{1}{C_2 + z+D} - \frac{1}{B_2 + z+D} \\
 \textcircled{9} &= \frac{1}{C_2 + z+D} - \frac{1}{A_2 + z+D} \\
 I_{F_a} &= \sin^{-1} \frac{b^2 - C_1(C_1 + a)}{(C_1 + a)A_1} & I_{F_b} &= \sin^{-1} \frac{b^2 - C_2(C_2 + a)}{(C_2 + a)A_2} \\
 I_{F_c} &= \sin^{-1} \frac{b^2 - C_1(C_1 - a)}{(C_1 - a)A_1} & I_{F_d} &= \sin^{-1} \frac{b^2 - C_2(C_2 - a)}{(C_2 - a)A_2} \\
 I_{F_e} &= \sin^{-1} \frac{|z-D|}{B_1} & I_{F_f} &= \sin^{-1} \frac{z+D}{B_2} \\
 I_{F_g} &= \sin^{-1} \frac{b^2 - C_2(C_2 + z+D)}{(C_2 + z+D)A_2} + \frac{\pi}{2} \\
 I_{F_h} &= \sin^{-1} \frac{a^2 b^2 - C_2^2(z+D)}{A_2^2 B_2^2} + \frac{\pi}{2} \\
 I_{G_a} &= \log \frac{C_1 + a}{B_1} & I_{G_b} &= \log \frac{C_2 + a}{B_2} & I_{G_c} &= \log \frac{C_1 + b}{A_1} \\
 I_{G_d} &= \log \frac{C_2 + b}{A_2} & I_{G_e} &= \log \frac{2(C_2 + z+D)(z+D)}{(A_2 + z+D)(B_2 + z+D)} \\
 I_{G_f} &= \log \frac{(C_1 + b)|z-D|}{A_1(B_1 + b)} & I_{G_g} &= \log \frac{(C_2 + b)(z+D)}{A_2(B_2 + b)} \\
 I_{G_h} &= \log \frac{C_2 + z+D}{B_2 + z+D}
 \end{aligned}$$

* は $D > z$ の場合

なお、これらの応力、および変位成分は、長方形面の1つの隅点を通る線上の点に対して与えられるが、重ね合わせによって、任意の長方形、および任意点に対する応力が求まる。

(1971.8.18・受付)