土木学会論文報告集
第 199 号・1972 年 3 月

伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析*

ANALYSIS OF THIN-WALLED CURVED BEAMS WITH OPEN CROSS SECTION AS FINITE DISPLACEMENT THEORY BY TRANSFER MATRIX METHOD

遠　田　良　喜**
By Yoshihiro Enda

要　旨　この論文は，薄肉開断面の曲線ばりに対する，有限変位理論の場合の基礎微分方程式を誘導し，伝達マトリックス法による構造解析を展開し，種々の荷重条件と支持条件とを有する曲線ばりの静力学的解析に応用するものである。

1. まえがき

曲線ばりの場合は，曲率半径の影響による鉛直軸まわりの曲げとねじりの連成，あるいは，水平軸まわりの曲げと軸方向伸縮の連成という力学的特性によって，直線ばりに比較すると，力学的挙動がかなり異なってくる。

薄肉断面の曲線ばりの解析については，これまでにも，しばしば研究が発表されている。Wansleben は，1952 年に，薄肉断面の曲線桁に対する不静定力を求める計算式を誘導しているが，出発の基礎微分方程式において，曲げとねじりの連成を考慮していない[1]。曲げとねじりの連成を考慮した基礎方程式は，Vlasov が求めており[2]，また，Dabrowski も曲線ばりに対する正確な微分方程式を誘導し，応力法による薄肉開断面と閉断面の曲線桁の解析を試みている[3),4),5]。わが国においても，薄肉断面の曲線桁の解析に関する多くの研究が発表されており，小西・小松[6]，倉西[7]，深沢[8]，小松・中井[9] らの基礎的研究，小西・小松の単純支持曲線桁，および，連続曲線桁の立体的解析に関する研究がある[10),11]。

薄肉断面の曲線桁の解析に伝達マトリックス法を応用した研究は，Becker によって発表されている[12]。Becker は薄肉断面の曲線ばりに対する 5 階の常微分方程式を誘導し，級数表示によって，伝達方程式を求めている。深沢も伝達マトリックス法を用いた解析を発表しており，ラプラス変換を介して伝達方程式を求めている[13),16]。

Vlasov の著書[2] には，円弧薄肉ばりに対する安定条件式を与えているが，これは鉛直軸まわりの曲げモーメントおよび圧縮力を一定とした特別な場合に対する方程式であり，また，水平軸まわりの曲げに対しては考慮されていないので，曲線桁の種々の荷重条件に対する解析に適用することはできない。そのほかの曲線桁の解析に関する研究は，いずれも，微小変位理論に立脚した解析である。薄肉開断面の曲線桁の耐荷力を正確に評価するには，変形状態を考慮した有限変位理論による解析が必要である。曲線材の力のつり合い条件式に変形の影響を考慮した解析として，波田の論文があるが[17]，この論文では，アーチの面内および面外の座屈の解析に重点をおいているので，変形を考慮したときの曲げねじりモーメントと垂直応力のねじり変形に伴う分力については，与えられていない。

偏心横荷重やねじり荷重が作用する薄肉開断面の曲線桁では，曲げとねじりの連成効果によって，曲げ変形やねじり変形が大きくなり，断面力もこれらの変形の影響によって，微小変位理論の場合とは異なってくるので，横断面上の正確な応力分布状態を求めるには，変形状態を考慮した有限変位理論による解析によらなければならない。

このような点に鑑み，この論文では薄肉開断面の曲線ばりに対する有限変位理論の場合の基礎微分方程式を誘導し，伝達マトリックス法による構造解析を展開するものである。

解析の出発に必要な薄肉開断面の曲線ばりに対する基礎微分方程式系は，エネルギー原理からも求めることができるが，この論文では，これを変形を考慮した力のつ

---

* 日本鋼構造協会第 5 回大会研究集会，マトリックス構造解析法研究発表会（1971.6）にて発表

** 正会員　石川島播磨重工業（株）　鉄構事業部橋梁基本計画室

り合い条件式より求めている。また，状態量ベクトルの格間伝達方程式は，D. Reuschling が薄肉断面の直線桁の応力問題と分岐問題に対して，系を支配する1階の連立微分方程式から，数値積分によって，有効に求めているが[14]，この論文でも，幾何学量に関する微分方程式系とこれに対応する境界条件式とを，1階の連立常微分方程式系に変換し，これより，普通の Runge-Kutta の数値積分法を用いて，実用上，十分満足に求められている。また，状態量ベクトルの格点伝達方程式と境界条件式とは，格点における変位と変形の幾何学的条件と断面力のつり合い条件とから，格点の種々の条件に対して求められる。

ここに述べた静力学的解析に関する解法は，種々の荷重条件と支持条件とを有する薄肉断面の曲線ばりの，有限変位理論の場合の解析に応用することが可能であり，また，曲線ばりの耐荷力の解析に対しても，基礎的知識を与えるものと考えられる。

2. 記　　号

本文で用いているおもな記号を次に列記する。

x, y, z：曲線ばりの変形前の状態に対する座標系

ξ, η, ζ：曲線ばりの変形後の状態に対する座標系

S, M：横断面の図心およびせん断中心を表わす subscripts

u, v, w：図心 S の x, y, z 軸方向の変位

ϑ：図心 S に関するねじり角

ϕ：図心 S の y 軸まわりの回転変位

微小変位理論：
- N：軸方向力
- Q_y, Q_z：せん断力
- M_x：ねじりモーメント
- M_y, M_z：曲げモーメント
- W_M：曲げねじりモーメント

有限変位理論：
- H：軸方向力
- V_y, V_z：せん断力
- B_x, B_ξ：ねじりモーメント
- B_y, B_z：曲げモーメント
- B_η, B_ζ：曲げモーメント
- B_T：曲げねじりモーメント

F：断面積

GJ：ねじりこわさ

EI_y, EI_z：曲げこわさ

EC_s, EC_M：曲げねじりこわさ

$GJ_{\rm red}$：換算したねじりこわさ

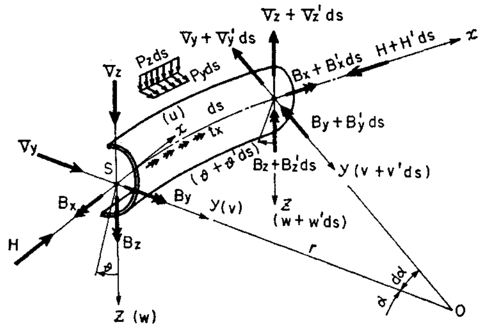
i_y, i_z：断面二次半径

φ_s, φ_M：単位そり

$(\ )'=d(\ )/ds$

3. 基礎微分方程式の誘導

一つの平面内で円曲線をなす薄肉開断面の曲線ばりの微小要素 ds をとると，変形前の座標系 x, y, z に対する変位と断面力との状態は，図—1(a)のようになる。こ

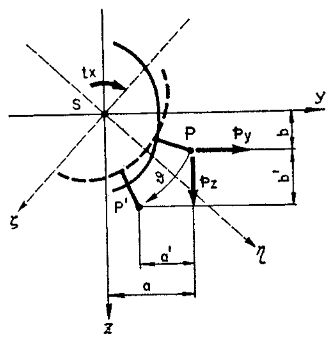


図—1 (a)

の微小要素に対して，変位の微小増分を考慮して，x, y, z 軸方向の力のつり合い条件式と，x, y, z 軸まわりのモーメントのつり合い条件式とを求めて整理すると，

$$\left.\begin{aligned}
&H'-V_y/r=0,\\
&V_y'+H/r=p_y,\\
&V_z'=p_z,\\
&B_x'+B_y/r+V_yw'-V_z(v'+u/r)\\
&\qquad=-t_x+p_y(b+a\vartheta)-p_z(a-b\vartheta),\\
&B_y'-B_x/r+Hw'-V_z=0,\\
&B_z'-H(v'+u/r)+V_y=0
\end{aligned}\right\}\cdots(1)\ \text{a-f}$$

を得る。ここに，r は曲率半径，a, b は y, z 軸方向の分布横荷重 p_y, p_z の作用点の位置（図—1(b)），t_x は図心軸まわりに作用する分布ねじり荷重を表わす。



図—1 (b)

式（1）の一部からせん断力を消去すると，次の微分方程式を得る。

$$rH''+H/r=p_y\cdots\cdots(2)$$

$$B_x'+B_y/r+V_yw'-V_z(v'+u/r)=-t_x+p_y(b+a\vartheta)-p_z(a-b\vartheta)\cdots\cdots(3)$$

$$B_y''-B_x'/r+(Hw')'=p_z \quad\cdots\cdots(4)$$
$$B_z''-[H(v'+u/r)]'-H/r=-p_y \quad\cdots\cdots(5)$$

薄肉断面の曲線ばりの変形後の状態に対して座標系 $\xi\eta\zeta$ を定める。この座標系に関するねじりモーメント B_ξ, 曲げモーメント B_η, B_ζ と，変形前の状態に対する座標系 xyz に対するねじりモーメント B_x, 曲げモーメント B_y, B_z との間には，次の関係式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}&B_x=B_\xi+B_\eta(v'+u/r)-B_\zeta w',\\&B_y=B_\eta-B_\zeta\vartheta,\ B_z=B_\zeta+B_\eta\vartheta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

式 (6) を式 (3), (4), (5) に代入し，非線形の項に対しては，微小変位理論によって求めた断面力を用いて線形化すると，次の微分方程式が求められる。

$$\left.\begin{aligned}&B_\xi'+B_\eta/r=-M_y(v'+u/r)'+M_z(w''+\\&\quad\vartheta/r)-t_x+p_y(b+a\vartheta)-p_z(a-b\vartheta),\\&B_\eta''-B_\xi'/r=(M_z\vartheta)''+[\{M_y(v'+u/r)\}'\\&\quad-(M_zw')']/r-(Nw')'+p_z,\\&B_\zeta''-H/r=-(M_y\vartheta)''+[N(v'+u/r)]'\\&\quad-p_y\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

ここに，N, M_y, M_z は微小変位理論による軸方向力と曲げモーメントである。

断面形状保持の仮定が成立するものとすると，薄肉断面の曲線ばりの横断面上の任意点 $A(y,z)$ における x, y, z 軸方向の変位は，図心 S の変位と変形量によって次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}&u_A=u-\Psi y-w'z-\Theta\varphi_s,\\&v_A=v-z\vartheta,\ w_A=w+y\vartheta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8\,\mathrm{a})$$

ここに，

$$\Psi=v'+u/r,\ \Theta=\vartheta'+w'/r \cdots\cdots(8\,\mathrm{b})$$

であり，φ_s は図心 S に関する単位そりを表わす。

横断面の寸法は，曲率半径に比較して小さいと仮定して，これを無視すると，横断面上の任意点 A の x 軸方向の垂直ひずみ ε は，

$$\varepsilon=du_A/ds-v_A/r \cdots\cdots(9)$$

となる。力のつり合い条件から有限変位理論の基礎微分方程式を求めるときは，つり合い条件式において変位の微小増分を考慮しているから，垂直ひずみは2乗の項を必要としない。ただし，エネルギー法から基礎微分方程式を求める場合は，2乗の項を必要とする。

式 (9) に式 (8a) を代入し，Hooke の法則から，垂直応力は次のように求められる。

$$\sigma=E\varepsilon=E[u'-\Psi'y-w''z-\Theta'\varphi_s-v/r+z\vartheta/r] \cdots\cdots(10)$$

垂直応力 σ の積分により，薄肉断面の曲線ばりの図心 S に関する断面力が，次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}&H=-\int_F\sigma\,dF=-EF(u'-v/r),\\&B_\eta=-\int_F z\sigma\,dF=EI_y(w''+\bar{y}\Theta'-\vartheta/r),\\&B_\zeta=\int_F y\sigma\,dF=-EI_z(\Psi'-\bar{z}\Theta'),\\&B_T=\int_F\varphi_s\sigma\,dF=-EC_s\Theta'\\&\quad-\bar{y}EI_y(w''-\vartheta/r)+\bar{z}EI_z\Psi'\end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

ここに，$\bar{y}$, $\bar{z}$ は図心とせん断中心との距離を表わし，B_T は曲げねじりモーメントを表わす。

有限変位理論の場合のねじりモーメント B_ξ は，St. Venant のねじりモーメントに曲率半径の影響を考慮した1次的ねじりモーメント

$$T_1=GJ(\vartheta'+w'/r)=GJ\Theta \cdots\cdots(12)$$

そり拘束に伴う2次的ねじりモーメント

$$T_2=dB_T/ds=-EC_s\Theta''-\bar{y}EI_y(w'''-\vartheta'/r)+\bar{z}EI_z\Psi'' \cdots\cdots(13)$$

および，横断面上の垂直応力 σ のねじり変形に伴う分力によって生ずるねじりモーメント

$$T_3=\int_F\sigma(y^2+z^2)\Theta dF \cdots\cdots(14)$$

の総和より求められる。式 (14) の垂直応力 σ に対しては，微小変位理論の値を用いて近似すると，

$$T_3=-(Ni_s{}^2+M_yr_y-M_zr_z-W_Mr_{\varphi M})\Theta \cdots\cdots(15)$$

となる。ここに，i_s は断面極二次半径を表わし，r_y, r_z, $r_{\varphi M}$ は，DIN 4114, Ri 10.2 に規定している断面値に関連する定数で，次のようである。

$$\left.\begin{aligned}&r_y=(1/I_y)\int_F z(y^2+z^2)dF,\\&r_z=(1/I_z)\int_F y(y^2+z^2)dF,\\&r_{\varphi M}=(1/C_M)\int_F\varphi_M(y^2+z^2)dF\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

ここに，φ_M はせん断中心に関する単位そりを表わす。式 (12), (13), (15) より，ねじりモーメント B_ξ は

$$B_\xi=T_1+T_2+T_3=-EC_s\Theta''-\bar{y}EI_y\times(w'''-\vartheta'/r)+\bar{z}EI_z\Psi''+GJ_{red}\Theta \cdots(17)$$

ここに，

$$GJ_{\mathrm{red}}=GJ-(Ni_s{}^2+M_yr_y-M_zr_z-W_Mr_{\varphi M}) \cdots\cdots(18)$$

である。

式 (11), (17) を式 (2), (7) に代入すると，薄肉開断面の曲線ばりに対する，有限変位理論の場合の幾何学量に関する微分方程式系が，次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}&-EF(ru'''+u'/r-v''-v/r^2)=p_y,\\&-EC_s\Theta'''+\bar{z}EI_z\Psi'''-\bar{y}EI_y[w''''\\&\quad-(\vartheta''+\Theta')/r]+EI_y(w''/r-\vartheta/r^2)\\&\quad+(GJ_{\mathrm{red}}\Theta)'=-M_y\Psi'+M_z(w''+\vartheta/r)\\&\qquad-t_x+p_y(b+a\vartheta)-p_z(a-b\vartheta),\\&EI_y(w''''-\vartheta''/r)+(\bar{y}EI_y+EC_s/r)\Theta'''\\&\quad-\bar{z}EI_z\Psi'''/r-(GJ_{\mathrm{red}}\Theta)'/r\end{aligned}\right\}\cdots(19)\ \text{a-d}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=(M_z\vartheta)''+[(M_y\Psi)'-(M_zw')']/r\\
&\quad-(Nw')'+p_z,\\
&-EI_z(\Psi'''-\bar{z}\Theta''')+EF(u'-v/r)/r\\
&=-(M_y\vartheta)''+(N\Psi)'-p_y
\end{aligned}\right\}
$$

これらの微分方程式に対応する境界条件式は，式(1)，(6)，(11) から求められる。

$$
\left.\begin{aligned}
&B_z=-EI_z(\Psi'-\bar{z}\Theta')+M_y\vartheta,\\
&V_y=EI_z(\Psi''-\bar{z}\Theta'')-(M_y\vartheta)'+N\Psi,\\
&B_y=EI_y(w''+\bar{y}\Theta'-\vartheta/r)-M_z\vartheta,\\
&V_z=EI_y(w'''+\bar{y}\Theta''-\vartheta'/r)+[EC_s\Theta''\\
&\quad-\bar{z}EI_z\Psi''-GJ_{\mathrm{red}}\Theta]/r-(M_z\vartheta)'\\
&\quad-(M_y\Psi-M_zw')/r+Nw',\\
&B_T=-EC_s\Theta'-\bar{y}EI_y(w''-\vartheta/r)\\
&\quad+\bar{z}EI_z\Psi',\\
&B_x=-EC_s\Theta''-\bar{y}EI_y(w'''-\vartheta'/r)\\
&\quad+\bar{z}EI_z\Psi''+GJ_{\mathrm{red}}\Theta+M_y\Psi-M_zw'\\
&H=-EF(u'-v/r)
\end{aligned}\right\}\cdots(20)\ \text{a-g}
$$

D. Reuschling は，エネルギー極小の原理より，薄肉断面の直線ばりに対する有限変位理論の場合の基礎微分方程式系を誘導しているが[14]，この方程式系と，力のつり合い条件から求めた式 (19)，(20) において，曲率半径を $r=\infty$ として，直線長さ x に関する微分にした微分方程式系とは完全に一致している。

4．1階の連立常微分方程式

以上に求まった微分方程式と境界条件式とを，1階の連立常微分方程式系に変換する。

曲線ばりの変位と変形量との間には，次の幾何学的関係が成立する。

$$
w'=-\phi,\ v'=\Psi-u/r,\ \vartheta'=\Theta-w'/r\cdots\cdots\cdots(21)
$$

式 (20 a) と (20 b)，式 (20 c) と (20 d) と (20 f)，および，式 (20 e) と (20 f) とより，次の式が求められる。

$$
\left.\begin{aligned}
&B_z'=-V_y+N\Psi,\ B_y'=B_x/r+V_z+N\phi,\\
&B_T'=B_x-GJ_{\mathrm{red}}\Theta-M_y\Psi-M_z\phi
\end{aligned}\right\}\cdots(22)
$$

また，式 (20 a)，(20 c)，(20 e) を変形し，次の方程式を求めることができる。

$$
\left.\begin{aligned}
&\Theta'=-(\bar{z}B_z+\bar{y}B_y+B_T)/EC_M\\
&\qquad+(\bar{z}M_y-\bar{y}M_z)\vartheta/EC_M,\\
&\Psi'=-(1/EI_z+\bar{z}^2/EC_M)B_z\\
&\qquad-(\bar{y}\bar{z}/EC_M)B_y-(\bar{z}/EC_M)B_T\\
&\qquad+[-(\bar{y}\bar{z}/EC_M)M_z\\
&\qquad+(1/EI_z+\bar{z}^2/EC_M)M_y]\vartheta,\\
&\phi'=-(\bar{y}\bar{z}/EC_M)B_z-(1/EI_y+\bar{y}^2/EC_M)\\
&\qquad\times B_y-(\bar{y}/EC_M)B_T-\vartheta/r+[-(1/EI_y\\
&\qquad+\bar{y}^2/EC_M)M_z+(\bar{y}\bar{z}/EC_M)M_y]\vartheta
\end{aligned}\right\}(23\,\mathrm{a})
$$

ここに，

$$
C_M=C_s-\bar{y}^2I_y-\bar{z}^2I_z\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23\,\mathrm{b})
$$

を表わす。式 (20 b)，(20 d)，(20 f) を1回微分した式と式 (19 d)，(19 c)，(19 b)，(20 c) より，次の微分方程式が求められる。

$$
\left.\begin{aligned}
&V_y'=-H/r+p_y,\ V_z'=p_z,\\
&B_x'=-B_y/r+M_y'\Psi+M_z'\phi-t_x\\
&\qquad+p_y(b+a\vartheta)-p_z(a-b\vartheta)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(24)
$$

式 (1 a) と (20 g) より，次の方程式が求められる。

$$
u'=v/r-H/EF,\ H'=V_y/r\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)
$$

式 (21)～(25) が所要の1階の連立常微分方程式系である。

5．格間伝達方程式

薄肉断面の曲線ばりに対する有限変位理論の場合の状態量ベクトルを

$$
\boldsymbol{V}=\{v,\Psi,B_z,V_y|w,\phi,B_y,V_z|\vartheta,\Theta,B_T,B_x|u,H\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)
$$

のように定義すると，1階の連立常微分方程式は，

$$
d\boldsymbol{V}/ds=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{p}(s)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)
$$

の形式で表わされる。ここに，係数マトリックス $\boldsymbol{G}(s)$ は (14×14) の正方マトリックスであり，$\boldsymbol{p}(s)$ は荷重項のベクトルで，

$$
\boldsymbol{p}(s)=\{0,0,0,p_y|0,0,0,p_z|0,0,0\ -t_x+p_yb-p_za|0,0\}\cdots(28\,\mathrm{a})
$$

となる。

式 (27) の一般解は，次の式によって与えられる。

$$
\boldsymbol{V}(s)=\boldsymbol{S}(s)\boldsymbol{V}(0)+\boldsymbol{S}(s)\int_0^s[\boldsymbol{S}(\rho)]^{-1}\boldsymbol{p}(\rho)d\rho,\quad(0<\rho<s)\cdots\cdots(28\,\mathrm{b})
$$

式 (28 b) は，状態量ベクトル $\boldsymbol{V}(0)$ と $\boldsymbol{V}(s)$ を結ぶ式で，格間伝達方程式と呼ばれる。有限変位理論の場合は，式 (27) の $\boldsymbol{G}(s)$ は，格間内で一定でないマトリックスであるから，伝達マトリックス $\boldsymbol{S}(s)$ は，数値積分によって求めなければならない。伝達マトリックス法では，桁落ちによる計算精度の低下をふせぐために，任意の基準定数を用いて解析式を換算して計算するのが普通である。基準定数として，$l_0[m]$，$h_0[m]$，$EI_0[tm^2]$，$EC_0[tm^4]$ を選んで，

$$
\left.\begin{aligned}
&v^*=v,\ \Psi^*=\Psi\,l_0,\ B_z^*=B_zl_0^2/EI_0,\ V_y^*\\
&=V_yl_0^3/EI_0,\ w^*=w,\ \phi^*=\phi\,l_0,\ B_y^*=\\
&B_yl_0^2/EI_0,\ V_z^*=V_zl_0^3/EI_0,\ \vartheta^*=\vartheta\,h_0,\\
&\Theta^*=\Theta\,h_0l_0,\ B_T^*=B_Th_0l_0^2/EC_0,\ B_x^*\\
&=B_xh_0l_0^3/EC_0,\ u^*=u,\ H^*=Hl_0^3/EI_0
\end{aligned}\right\}\cdots(29)
$$

の関係より，1階の連立常微分方程式を換算して，Runge-Kutta の計算方法を用いて，十分な精度で伝達マト

リックスとそれによる解析結果を得ることができる。ただし，＊印は換算した変位と断面力とを表わす。

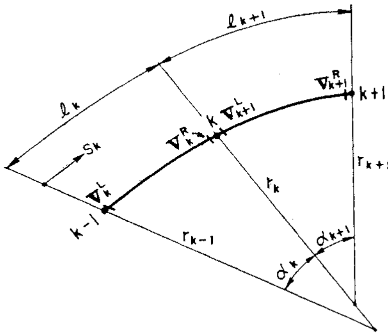
式 (27) の一般解 (28 b) より，任意格間 l_k に対する伝達方程式は，次のように求められる。

$$\boldsymbol{V}(l_k)=\boldsymbol{S}(l_k)\boldsymbol{V}(0)+\boldsymbol{S}(l_k)\int_0^{l_k}[\boldsymbol{S}(s_k)]^{-1}\boldsymbol{p}(s_k)ds_k,\quad (0<s_k<l_k)\cdots\cdots(30)$$

式 (30) を，便宜上，次のように書き換える。

$$\boldsymbol{V}_k{}^R=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{V}_k{}^L\cdots\cdots(31)$$

ここに，$\boldsymbol{V}_k{}^R$ は，格間 l_k の右端の，$\boldsymbol{V}_k{}^L$ は左端の状態量ベクトルを表わし (**図—2**)，$\boldsymbol{F}_k$ は格間伝達マトリックスを表わし，それぞれ，次のようになる。



図—2

$$\boldsymbol{V}_k{}^R=\left[\frac{\boldsymbol{V}(l_k)}{1}\right],\quad \boldsymbol{V}_k{}^L=\left[\frac{\boldsymbol{V}(0)}{1}\right],$$

$$\boldsymbol{F}_k=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{S}(l_k) & \boldsymbol{S}(l_k)\int_0^{l_k}[\boldsymbol{S}(s_k)^{-1}\boldsymbol{p}(s_k)ds_k \\ \hline 0 & 1\end{array}\right]\cdots(32)$$

6. 格点伝達方程式

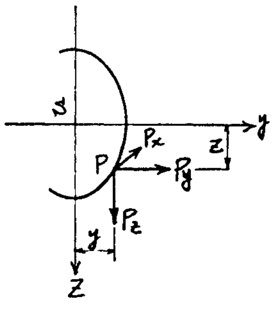
状態量ベクトルの格点伝達方程式は，格点における幾何学的条件と，断面力のつり合い条件とから求められ，任意格点 k (**図—2** を参照) に対して，次の式によって与えられる。

$$\boldsymbol{V}_{k+1}{}^L=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{V}_k{}^R\cdots\cdots(33)$$

図—3 に示すように，格点 k の横断面上の任意点 $P(y, z)$ に集中荷重 P_x, P_y, P_z が作用するときは，格点 k で変位は連続となるから，幾何学的条件式は，

$$\boldsymbol{q}^L_{k+1}=\boldsymbol{q}_k{}^R=\boldsymbol{q}_k\cdots\cdots(34)$$

となる。ここに，$\boldsymbol{q}$ は変位のベクトルを表わす。



図—3

また，格点 k では，集中荷重によって，断面力の一部は飛躍的に変化するから，断面力のつり合い条件式は，

$$\boldsymbol{Q}^L_{k+1}=\boldsymbol{Q}_k{}^R+\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{q}_k+\boldsymbol{L}_k\cdots\cdots(35)$$

によって与えられる。ここに，$\boldsymbol{Q}$ は断面力のベクトルを表わす。ベクトル $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{Q}$ とを，それぞれ，

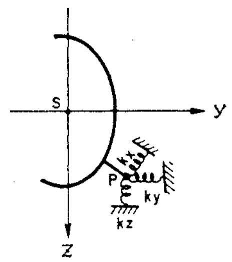
$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{q}=\{v,\ \Psi,\ w,\ \phi,\ \vartheta,\ \Theta,\ u\},\\ \boldsymbol{Q}=\{B_z,\ V_y,\ B_y,\ V_z,\ B_T,\ B_x,\ H\}\end{array}\right\}\cdots\cdots(36)$$

と定義すると，式 (35) における $\boldsymbol{C}_k$, $\boldsymbol{L}_k$ は，

$$\boldsymbol{C}_k=\begin{pmatrix}0&0&0&0&zP_x&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&yP_x&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&yP_y+zP_z&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{L}_k=\begin{pmatrix}-yP_x\\P_y\\zP_x\\P_z\\-\varphi_sP_x\\zP_y-yP_z\\P_x\end{pmatrix}\cdots\cdots(37)$$

となる。φ_s は点 P のそり関数である。

横断面上の任意点が弾性支点上にあるときは (**図—4**)，格点 k ですべての変位は連続となるが，断面力は弾性支点反力によって飛躍的に変化する。したがって，この場合の力のつり合い条件式は，次のようになる。



図—4

$$\boldsymbol{Q}^L_{k+1}=\boldsymbol{Q}_k{}^R+\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{q}_k\cdots\cdots(38)$$

弾性支点 P の x, y, z 軸方向の変位 u_p, v_p, w_p は，図心 S の変位と変形によって表わすことができるから，x, y, z 軸方向の弾性支点反力は，それぞれ，

$$\left.\begin{array}{l}X_{xk}=-k_xu_p=-k_x(u_k+\phi_kz-\Psi_ky-\Theta_k\varphi_s),\\ X_{yk}=-k_yv_p=-k_y(v_k-z\,\vartheta_k),\\ X_{zk}=-k_zw_p=-k_z(w_k+y\,\vartheta_k)\end{array}\right\}\cdots\cdots(39)$$

によって与えられる。ここに，k_x, k_y, k_z は，それぞれ，x, y, z 軸方向の弾性変位に対するばね定数を表わす。弾性支点における力のつり合い条件式より，式 (38) のマトリックス $\boldsymbol{C}_k$ が次のように求められる。

$$\boldsymbol{C}_k=\begin{pmatrix}0&-y^2k_x&0&yzk_x&zX_{xs}&-y\varphi_sk_x&yk_x\\-k_y&0&0&0&zk_y&0&0\\0&yzk_x&0&-z^2k_x&yX_{xs}&z\varphi_sk_x&-zk_x\\0&0&-k_z&0&-yk_z&0&0\\0&-y\varphi_sk_x&0&z\varphi_sk_x&0&-\varphi_s{}^2k_x&\varphi_sk_x\\-zk_y&0&yk_z&0&\begin{array}{c}z^2k_y+y^2k_z+\\yX_{ys}+zX_{zs}\end{array}&0&0\\0&yk_x&0&-zk_x&0&\varphi_sk_x&-k_x\end{pmatrix}_k\cdots\cdots(40)$$

ここに，X_{xs}, X_{ys}, X_{zs} は，微小変位理論によって求められる弾性支点反力を表わす。

式 (34)，(35)，あるいは，式 (34)，(38) より，格点伝達方程式 (33) を求めることができる。

式 (33) に式 (32) を代入すると，次の関係式を得る。

$$\boldsymbol{V}_{k+1}^{L}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{V}_k{}^{R} \quad \cdots\cdots(41)$$

曲線ばりを n 格間に分割して，格間 l_1 から l_n まで，式 (41) の代入計算を繰返すと，

$$\boldsymbol{V}_n{}^{R}=\boldsymbol{F}_n\boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{F}_{n-1}\boldsymbol{P}_{n-2}\cdots\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{V}_1{}^{L} \quad \cdots\cdots(42)$$

が求められる。式 (42) は，薄肉断面の曲線ばりの左端と右端との状態量ベクトルを結ぶ関係式である。

7．境界条件式

薄肉断面の曲線ばりに対する左端の境界条件式は，

$$\boldsymbol{V}_1{}^{L}=\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{A},1\} \quad \cdots\cdots(43)$$

によって表わされる。ここに，$\boldsymbol{R}$ は左端の境界条件を表わす (15×8) の長方形マトリックス，$\boldsymbol{A}$ は左端の 7 つの自由度からなる初期ベクトルである。

左端が自由のときは，境界条件は

$$\boldsymbol{Q}_1{}^{L}=0 \quad \cdots\cdots(44)$$

となり，$\boldsymbol{q}_1{}^{L}$ が自由度になる。左端が固定支持のときは，

$$\boldsymbol{q}_1{}^{L}=0 \quad \cdots\cdots(45)$$

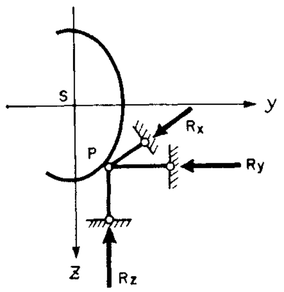
が境界条件となり，$\boldsymbol{Q}_1{}^{L}$ が自由度になる。

左端の横断面上の任意点が弾性支点上にあるときは（図—4 参照），境界条件は，

$$\boldsymbol{Q}_1{}^{L}-\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{q}_1{}^{L}=0 \quad \cdots\cdots(46)$$

となり，自由度に $\boldsymbol{q}_1{}^{L}$ がとられる。ただし，$\boldsymbol{C}_1$ は式 (40) の値をとる。

左端の横断面上の 1 点 P が剛支点上にあって，x, y, z 軸方向の変位が拘束されるときは（図—5），境界条件



図—5

式は，次のように与えられる。

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{q}_1{}^{L}=0,\\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Q}_1{}^{L}+\boldsymbol{B}_3\vartheta_1{}^{L}=0\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(47)$$

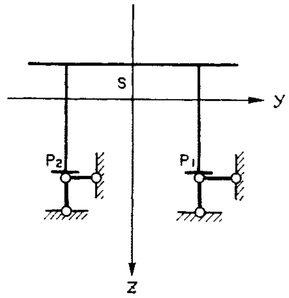
ここに，$\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3$ は次のように求められる。

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-z&0&0\\0&0&1&0&y&0&0\\0&-y&0&z&0&-\varphi_s&1\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&y\\0&0&1&0&0&0&-z\\0&0&0&0&1&0&\varphi_s\\0&-z&0&y&0&1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}-zR_{xs}\\-yR_{xs}\\0\\-yR_{ys}-zR_{zs}\end{bmatrix}\end{array}\right\}$$

$$\cdots\cdots(48)$$

ただし，R_{xs}, R_{ys}, R_{zs} は，微小変位理論による端支点反力を表わす。また，この場合の自由度は，$\Psi_1{}^{L}, \phi_1{}^{L}, \vartheta_1{}^{L}, \Theta_1{}^{L}, V_{y1}{}^{L}, V_{z1}{}^{L}, H_1{}^{L}$ となる。

図—6 に示すように，横断面上の 2 点 P_1, P_2 が剛支



図—6

点上にあって，y, z 軸方向の変位とねじり変形が拘束されるときは，左端の境界条件式は

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{q}_1{}^{L}=0,\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Q}_1{}^{L}=0 \quad \cdots\cdots(49)$$

となる。この場合の $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ は，

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(50)$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(51)$$

のようになり，自由度は，$\Psi_1{}^{L}, \phi_1{}^{L}, \Theta_1{}^{L}, u_1{}^{L}, V_{y1}{}^{L}, V_{z1}{}^{L}, B_{x1}{}^{L}$ となる。

図—7 のように，左端の横断面上の 2 点 P_1 (y_1, z_1)，P_2 (y_2, z_2) が剛支点上にあって，x 軸方向の変位も拘束されるときは，境界条件式 (49) の係数マトリックス $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ は，それぞれ，次のように求められる。

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&\dfrac{y_1-y_2}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}}&0&\dfrac{-z_1+z_2}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}}&0&1&0\\0&\dfrac{\varphi_{s2}y_1-\varphi_{s1}y_2}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}}&0&\dfrac{-(\varphi_{s2}z-\varphi_{s1}z_2)}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}}&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots(52)$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ 0 & \dfrac{-(y_1-y_2)}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} & 0 & \dfrac{-(\varphi_{s2}y_1-\varphi_{s1}y_2)}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} \\ 0\ 0\ 1\ 0 & \dfrac{z_1-z_2}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} & 0 & \dfrac{\varphi_{s2}z_1-\varphi_{s1}z_2}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} \end{pmatrix} \cdots\cdots(53)$$

この場合は，$\Psi_1{}^L$, $\phi_1{}^L$, $V_{y1}{}^L$, $V_{z1}{}^L$, $B_{T1}{}^L$, $B_{x1}{}^L$, $H_1{}^L$ が自由度になる。φ_{s1}, φ_{s2} は点 P_1, P_2 のそり関数である。

式 (44)～(53) より，左端の支持条件に対して，境界条件式 (43) が組み立てられる。

薄肉断面の曲線ばりの右端における境界条件式は，

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{V}_n{}^R=0 \cdots\cdots(54)$$

によって表わされる。ここに，$\boldsymbol{R}'$ は右端の境界条件を表わす (7×15) のマトリックスである。右端の支持条件に対して，式 (44)～(53) のときと同じようにして，境界条件式が求められ，$\boldsymbol{R}'$ が求められる。

式 (42) に式 (43) を代入し，これをさらに式 (54) に代入すると，

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{F}_n\boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{F}_{n-1}\boldsymbol{P}_{n-2}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{A},1\}=0 \cdots(55)$$

が求められる。式 (55) は，左端の自由度を未知量とする連立方程式を表わしている。これを解いて初期ベクトル $\boldsymbol{A}$ を求め，ふたたび，格間 l_1 より右へ順次に伝達方程式を用いて，各格間の状態量ベクトルが求められる。

8．中間格点が剛支点上にある場合の伝達計算

曲線ばりの初期ベクトルを，最初の剛支点のすぐ左側まで伝達すると，次の式が求められる。

$$\boldsymbol{V}_k{}^R=\boldsymbol{U}_k{}^R\overline{\boldsymbol{A}} \cdots\cdots(56)$$

ここに，

$$\boldsymbol{U}_k{}^R=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}\cdots\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots\cdots, b_{18} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots\cdots, b_{28} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{15,1}, b_{15,2}, \cdots\cdots, b_{15,8} \end{bmatrix} \cdots\cdots(57)$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\{\boldsymbol{A},1\}=\{a_1, a_2, \cdots, a_8\} \cdots\cdots(58)$$

である。

中間格点 k の横断面上の 1 点 $P(y,z)$ が剛支点上にあるときは（図―5），次の幾何学的条件式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} &u_k+\phi_k z-\Psi_k y-\Theta_k\varphi_s=0, \\ &v_k-z\vartheta_k=0,\ \ w_k+y\vartheta_k=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(59)$$

式 (56)，(59) より，次の中間条件式が求められる。

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{8}(-yb_{2i}+zb_{6i}-\varphi_s b_{10,i}+b_{13,i})a_i=0, \\ &\sum_{i=1}^{8}(b_{1i}-zb_{9i})a_i=0,\ \sum_{i=1}^{8}(b_{5i}+yb_{9i})a_i=0 \end{aligned}\right\} \cdots(60)$$

中間格点 k では，支点反力によって断面力が飛躍的に変化するから，力のつり合い条件式は，

$$\boldsymbol{Q}_{k+1}^L=\boldsymbol{Q}_k{}^R+\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{q}_k+\overline{\boldsymbol{C}}_k\boldsymbol{M}_k \cdots\cdots(61)$$

となる。ここに，

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{C}_k=\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 & zR_{xs} & 0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & yR_{xs} & 0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & yR_{ys}+zR_{zs} & 0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \end{pmatrix}_k,\ \overline{\boldsymbol{C}_k}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_s \\ z & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_k, \\ &\boldsymbol{M}_k=\{R_y, R_z, R_x\}_k \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(62)$$

であり，R_{xs}, R_{ys}, R_{zs} は微小変位理論の支点反力を表わす。この場合は，支点反力 R_x, R_y, R_z が新しく未知量となり，これに対応して，中間条件式 (60) が最後の連立方程式の条件式となる。

中間格点で横断面上の 2 点が剛支点によって支持され，y, z 軸方向の変位とねじり変形とが拘束されるときは（図―6），幾何学的条件式は，

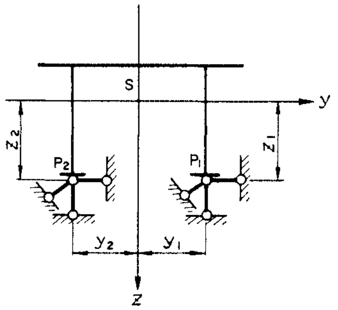
$$v_k=w_k=\vartheta_k=0 \cdots\cdots(63)$$

となり，これより，中間条件式は，

$$\sum_{i=1}^{8}b_{1i}a_i=0,\ \sum_{i=1}^{8}b_{5i}a_i=0,\ \sum_{i=1}^{8}b_{9i}a_i=0 \cdots\cdots(64)$$

となる。この場合は，支点反力 R_y, R_z とねじりモーメントの飛躍量 R_T が新しく未知量となり，中間格点での力のつり合い条件式より，式 (61) の $\boldsymbol{C}_k$, $\overline{\boldsymbol{C}}_k$, $\boldsymbol{M}_k$ が求められる。

中間格点 k で，横断面上の 2 点 P_1 (y_1, z_1)，P_2 (y_2, z_2) の x 軸方向の変位も拘束されるときは（図―7），幾何学的条件式は次のように求められる。



図―7

$$\left.\begin{aligned} &v_k=w_k=\vartheta_k=0, \\ &u_k+\phi_k z_1-\Psi_k y_1-\Theta_k\varphi_{s1}=0, \\ &u_k+\phi_k z_2-\Psi_k y_2-\Theta_k\varphi_{s2}=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(65)$$

式 (56)，(65) より，同じようにして，中間条件式が求められる。また，この場合は，支点反力 R_x, R_y, R_z とねじりモーメントと曲げねじりモーメントの飛躍量 R_T と R_W とが新しく未知量となり，式(61)の $\boldsymbol{C}_k$, $\overline{\boldsymbol{C}}_k$, $\boldsymbol{M}_k$

は，

$$\overline{C}_k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{y_1-y_2}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} & 0 & \dfrac{y_1\varphi_{s2}-y_2\varphi_{s1}}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-z_1+z_2}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} & 0 & \dfrac{-z_1\varphi_{s2}+z_2\varphi_{s1}}{\varphi_{s1}-\varphi_{s2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \cdots(66)$$

$$C_k=0,\ M_k=\{R_y,\ R_z,\ R_W,\ R_T,\ R_x\}\ \cdots\cdots(67)$$

となる。

剛支点上でも，変位と変形量は連続となるから，式 (34) と式 (61) の右辺の第 1，2 項の関係より，格点伝達マトリックス P_k が求められ，初期ベクトル A が中間格点の右側まで伝達される。

$$V_{k+1}^L=P_kU_k{}^R\overline{A}=U_{k+1}^L\overline{A}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(68)$$

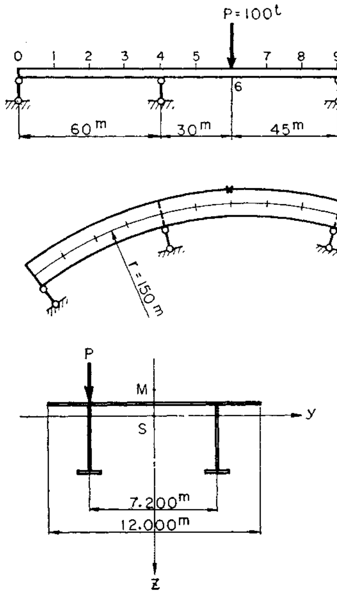
式 (68) に式 (61) の右辺の第 3 項の関係を導入すると，

$$V_{k+1}^L=\overline{U}_{k+1}^L\{A,\ M_k\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(69)$$

が求められる。ここに，$\overline{U}_{k+1}^L$ は，初期ベクトルに中間の未知量を導入して修正したマトリックスである。これから，ふたたび，状態量ベクトルの伝達計算を続けることができる。

9. 数値計算例と若干の考察

以上の解析に基づいて，UNIVAC-1108 に対して，FORTRAN Ⅳ によりプログラムを作成した。薄肉開断面の曲線桁に対しては，Becker が微小変位理論の場合の計算例を示している[12]。論文 (12) の例題（3）は，曲率半径 $r=150$ m の 3 径間連続曲線桁に，中央径間の外側主桁上に集中荷重 $P=100$ t が作用した場合（図―8）の解析例であるが，この問題を，本解析法によって計算した結果の一部を 表―1 に示す。表中，SDT は微小変位理論の，FDT は有限変位理論の値を示す。Becker が微小変位理論の場合について，5 階の常微分方程式から，級数表示で伝達方程式を求めて計算した結果と，1 階の連立常微分方程式から，数値積分によって伝達方程式を求めて計算した結果とは，非常によく一致していた。また，この問題に対しては，SDT と FDT の値には，あまり差がないという結果になっている。



F	0.4964 m^2
J	0.0002 m^4
Iy	0.8097 m^4
Iz	6.0888 m^4
CM	10.3234 m^6
$\bar{\bar{z}}$	−1.404 m

図―8

表―1

	point 2		left side of point 4		left side of point 6		left side of point 9		point 11	
	SDT	FDT	SDT	FDT	SDT	FDT	SDT	FDT	SDT	FDT
w	−0.0255	−0.0256	0.0000	0.0000	0.0514	0.0514	0.0000	0.0000	−0.0217	−0.0218
ϑ	0.0052	0.0052	0.0000	0.0000	−0.0105	−0.0105	0.0000	0.0000	0.0043	0.0043
B_y	486.69	486.03	953.97	952.68	−948.60	−949.89	831.02	829.86	423.96	423.37
B_T	2622.9	2614.2	2351.2	2330.4	−5841.3	−5876.0	1849.9	1820.5	2186.0	2172.2
B_x	55.161	54.822	−89.387	−89.427	−242.17	−242.83	135.60	135.47	−44.747	−44.260

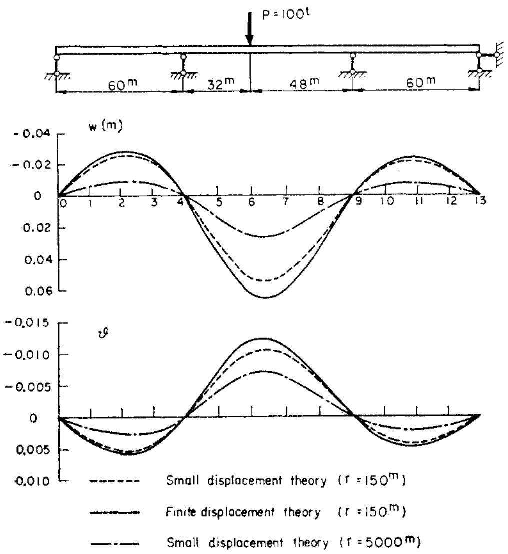
[unit : t, m]

表―2

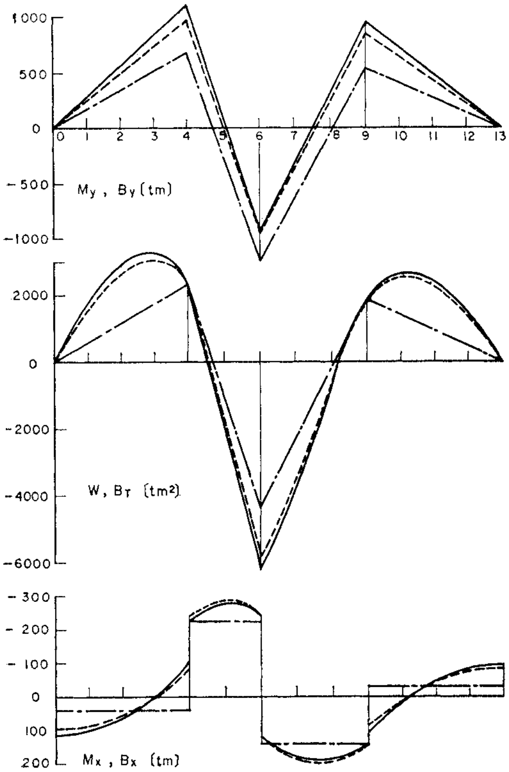
	point 2		left side of point 4		left side of point 6		left side of point 9		point 11	
	STD	FDT	SDT	FDT	SDT	FDT	SDT	FDT	SDT	FDT
w	−0.0259	−0.0288	0.0000	0.0000	0.0525	0.0632	0.0000	0.0000	−0.0220	−0.0244
ϑ	0.0052	0.0057	0.0000	0.0000	−0.0107	−0.0123	0.0000	0.0000	0.0043	0.0047
B_y	494.04	561.29	968.38	1100.2	−947.22	−932.88	843.50	957.00	430.33	488.23
B_T	2650.8	2887.9	2363.2	2428.6	−5870.8	−6155.9	1855.5	1850.4	2207.7	2380.8
B_x	55.602	58.928	−91.129	−107.66	−242.10	−242.03	133.68	114.26	−45.048	−46.889

[unit : t, m]

次に，図—8 に示す問題で，中央支間長を長くし，径間割を 60+80+60=200 m の場合（図—9 参照）について解析した結果の一部を表—2 に示し，たわみ w，ねじり角 ϑ，水平軸まわりの曲げモーメント M_y, B_y，曲げねじりモーメント W, B_T，ねじりモーメント M_x, B_x の分布図を図—9, 10 に示す。これによると，微小変位理論と有限変位理論との値は，5～10% 異なっている。薄肉開断面の曲線桁に対しては，有限変位理論の値は，微小変位理論の値に対して，危険側を与えるということは，一概に言えないが，曲線桁の場合は，直線桁に比較して，たわみとねじり角とは相当大きな値を示すので，有限変位理論による検討が必要であると考えられる。



図—9



図—10

10. あとがき

伝達マトリックス法は，連続したはり系の解析に便利に用いられる解法であるが，この論文では，薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の場合の解析に応用した。本文で誘導した有限変位理論に対する基礎微分方程式系において，変位の微小増分に伴う断面力の変化量の項を省くと，微小変位理論に対する微分方程式系になる。

この論文における，曲線ばりの有限変位理論による解析式の公式化は，基礎方程式における非線形の項を，微小変位理論によって求められる断面力を用いて線形化して行なっている。

有限変位理論の場合の幾何学量に関する微分方程式系は，微小変位理論の断面力を有し，係数が格間内で一定でないので，厳密解を求めることはむずかしい問題となる。R. Möll は，二つの対称軸を有する I-断面の直線ばりに対する有限変位理論の場合の微分方程式において，曲げモーメントの変化を 2 次式で近似し，変位とねじり角を，Maclaurin 級数によるべき級数で表示して，これより，一般解を求めている[15]。薄肉開断面の曲線ばりに対しては，この方法はかなり複雑になると考えられる。この論文では，1 階の連立常微分方程式から，直接数値積分によって一般解を求めているので，格間伝達方程式の公式化はできないが，電子計算機を使用する立場からは，解析式の誘導の手間が少なくなり，有効な方法であると考えられる。

格間伝達方程式は，普通の Runge-Kutta の計算方法を用いて，実用上十分な精度で求められ，薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析に，伝達マトリックス法が有効に応用される。

謝　辞

論文を終えるにあたり，終始変らぬご指導とご高配とをいただいている名古屋大学工学部の成岡昌夫教授に感謝の意を表する次第であります。

参　考　文　献

1) Wansleben, F.: Die Berechnung drehfester gekrümmter Stahlbrücken, Der Stahlbau, 21, pp. 53-56, 1952.
2) Vlasov, V.Z.（奥村外共訳）: 薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967.

3) Dabrowski, R.: Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil, Der Stahlbau 33, pp. 364-372, 1964.
4) Dabrowski, R.: Wölbkrafttorsion von gekrümmten Kastenträgern mit nichtverformbaren Profil, Der Stahlbau, 35, pp. 135-141, 1965.
5) Dabrowski, R.: Einflusslinien der Biege-und Wölbkraftmomente in gekrümmten dünnwandigen Trägern, Der Stahlbau, 35, pp. 214-222, 1965.
6) 小西・小松：薄肉曲線桁の基礎理論，土木学会論文集，87, pp. 35-48, 1962.
7) 倉西：一般薄肉断面の曲りばりの解析，土木学会論文集，108, pp. 7-12, 1964.
8) 深沢：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，110, pp. 30-51, 1964.
9) 小松・中井：曲線桁橋の動的応答に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，174, pp. 41-55, 1970.
10) 小西・小松：単純支持曲線桁橋の立体的解析，土木学会論文集，90, pp. 11-26, 1963.
11) 小西・小松：薄肉連続曲線桁橋の立体的解析，土木学会論文集，91, pp. 13-23, 1963.
12) Becker, G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Der Stahlbau, 35, pp. 334-346, pp. 368-377, 1965.
13) 深沢：せん断中心軸の不連続性を考慮した変断面薄肉曲線桁の解析法，第14回橋梁・構造工学研究発表会（薄板および立体構造に関する研究），土木学会，建築学会，pp. 123-138, 1967.
14) Reuschling, D.: Beitrag zur Berechnung mehrfeldriger, beliebig gelagerter dünnwandiger Stäbe mit einfach-oder unsymmetrischem offenem Querschnitt unter Normalkraft-und Querbelastung als Verzweigungsproblem oder Spannungsproblem II.Ordnung nach dem Übertragungsmatrizen-Verfahren, Diss. T.H. Darmstadt, 1969.
15) Möll, R.: Kippen von querbelasteten und gedrückten Durchlaufträgern mit I-Querschnitt als Stabilitätsproblem und als Spannungsproblem II. Ordnung behandelt, Der Stahlbau, 3, pp. 69-76, 1967, 6, pp. 184-190, 1967.
16) 深沢：並列主桁曲線橋の解析 (2)，土木技術，Vol. 20, pp. 56-67, 1965.
17) Namita, Y.: Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Probrem des Bogenträgers, Trans. of JSCE, No. 155, 7 pp. 32-41, 1968.

(1971.7.19・受付)