

摩擦性塑性体に関する降伏理論

THEORIES OF THE YIELDING FOR FRICTIONAL MATERIALS

橋 口 公 一*
By Koichi Hashiguchi

1. 序 論

摩擦性塑性材料の降伏条件に関する究明の萌芽は古く、今からちょうど2世紀前のCoulomb則に見ることができる。しかし、その後、MohrによりCoulomb則がいわゆるCoulomb・Mohr則**に改められた本世紀初頭の一時期を除いて特筆すべき報告はなされず、金属塑性がその確固たる基礎を築き上げた本世紀中期以後に至って、その関係者によりMises則、Tresca則に平均応力の影響を考慮したExtended Mises則***およびExtended Tresca則⁴⁾、さらにCoulomb・Mohr則による3次元降伏曲面⁵⁾が陽に示され、これらの諸則に対する応力一ひずみ速度式などの諸論が明らかにされた。これを契機にKirkpatrick⁶⁾その他の土質力学関係者による実験的検討も本格的に開始され、ことに上記3則を巡って長期の論議が続いたが、降伏則自体に対する新しい提案は再びしばらくの空白期間を待ち、Coleman⁷⁾によりもたらされた。Colemanの提案はあまり注目を得るところとはならなかったが、降伏強度を過大評価し、また、力学的には塑性ポテンシャル論に基づく最大塑性仕事理、解の唯一性に対する成立条件に抵触するとはいえ、軸対称の伸張と圧縮状態においてCoulomb・Mohr則で定義される内部摩擦角および粘着力が一致するという実験事実を反映すべく応力不変量により降伏則を表現せんとした最初の貴重な試みであった。

他方、その間をも通じて繰り返えされてきた前述の論議はBishop⁸⁾により中間主応力の影響状態、さらには、非粘着性材料は引張強度を有さないという必然条件を満たしているか否かについての理論的検討によりRoscoe他¹⁰⁾などの異論を退け、これら3則の中ではCoulomb・Mohr則が最も妥当であるとして一応終止符が打たれ

た。と同時に、それ以前にも増して、中間主応力の影響を無考慮のCoulomb・Mohr則よりさらに厳密に事実を表現し得る降伏則を見出すべく究明の方向が進められていったが、これは金属塑性史に対照してみれば、Coulomb・Mohr則はTresca則に相当するものであり、したがって、今後、Mises則に相応する妥当な降伏基本原理を見出すべき時期に至ったといえる。

Bishopは先の報告とともに非粘着性材料に対して中間主応力の影響の度合を表わすパラメーターを採用してCoulomb・Mohr則を修正する提案を行ない、さらに赤井¹¹⁾はこれを粘着性材料へ拡張しているが、旧前のJohansen¹²⁾の提案と同様に材料定数を増加せねばならない必然性があるか否かは筆者には疑問に思われる。

他方、Colemanと同様の見地から降伏則を応力不変量で表現する試みは近年のGeniev¹³⁾、さらには最近の佐武¹⁴⁾の報告に見られるが、いずれもColeman則と同様の難点を有するものと思われる。なお、佐武は粘着性を無視した状態でExtended Mises則を深く考察し、その修正式という形で降伏則の提案を行なっているが、摩擦性塑性材料の降伏がExtended Mises則に固執すべき論拠はないのではなからうか。

本論文においては等方性材料の降伏条件および応力一ひずみ速度式などの一般論を省察し、さらに土などの粉粒状体の降伏則としての所求の条件を考察し、ここから応力不変量により力学的には従来の諸則の難点を解決し、かつ、実験事実をより適切に表現し得る降伏条件式を提案し、本降伏則に基づく応力一ひずみ速度式、平面ひずみ問題などの諸論を明らかにする。

2. 等方性材料について

材料の降伏が平均応力すなわち応力の1次不変量に関与しない場合については金属塑性関係で広く論じられているが、ここではこれを含む一般の等方性材料(平均応力が降伏に関与する材料を摩擦性塑性材料と呼ぶことがある)に対する一般論を省察する。

* 正会員 九州大学助手 農学部農業機械学研究室

** Mohrに先立ち、Geust¹⁾が金属に対して提案した降伏則と同等である。*** Schleicher²⁾の金属降伏に対する概念と本質的には変わらない。

なお、本論文においては応力およびひずみの符号は伸張を正とする。

(1) 降伏条件式の各種パラメーター表示

a) 応力あるいは偏差応力の不変量による表示¹⁵⁾

本項に述べる事柄は多くの著書に詳述されているが、次項以降の説明の都合上、再録しておく。

さて、等方性材料の降伏条件は応力 σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) の 1, 2, 3 次の不変量 I_1, I_2, I_3 を用いて

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0 \dots\dots\dots (2.1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ij} \delta_{ji} \ (\delta_{ji} : \text{Kronecker's delta}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} \\ I_3 &= \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.2)$$

と一般に記述し得る。あるいは式 (2.1) は平均応力 P および S_{ij} の 2, 3 次の不変量

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ji}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - P \delta_{ij} \\ J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji}, \quad J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.3)$$

により

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 3P \\ I_2 &= 3P^2 - J_2 \\ I_3 &= J_3 - J_2 P + P^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.4)$$

なる関係¹⁶⁾を考慮すれば、

$$f(P, J_2, J_3) = 0 \dots\dots\dots (2.5)$$

と記述し得る。なお、式 (2.5) の幾何学的意味合いはこれを主応力空間に示した降伏曲面の $P = \text{const.}$ 面による切口形状が 3 主応力軸に関して対称なることである。逆に、この条件を満たす降伏曲面は式 (2.5) の形に記述し得る。したがって、降伏曲面の決定に際しては軸対称伸張から圧縮に至る $\pi/3$ の区間について考察すればよいことになる (図-1 参照)。

b) 直交座標による表示

図-1 に示す直交座標 (P, ξ, η) (P は平均応力軸) を考えれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= P + \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \\ \sigma_2 &= P + \sqrt{\frac{2}{3}} \eta \\ \sigma_3 &= P - \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6)$$

である。この変換を式 (2.3) に施せば

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \\ J_3 &= -\frac{\eta}{3\sqrt{6}} (3\xi^2 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

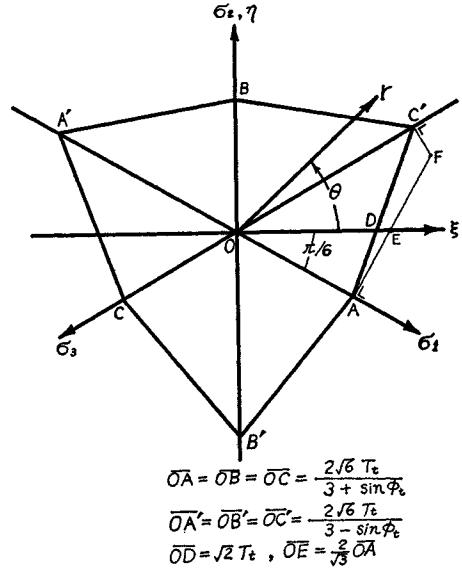


図-1 3次元主応力空間における $P = \text{const.}$ 面への $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (P, \xi, \eta), (P, r, \theta)$ 座標の投影および Coulomb-Mohr 降伏曲面の切口形状

を得る。本式により式 (2.5) は直交座標系で $f(P, \xi^2 + \eta^2, \eta(3\xi^2 - \eta^2)) = 0 \dots\dots\dots (2.8)$

と記述し得る。

c) 円筒座標による表示

図-1 に示す円筒座標 (P, r, θ) (θ は ξ 軸から反時計まわり) を考えれば

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta \dots\dots\dots (2.9)$$

なる関係が成り立つが、本式と式 (2.6) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= P + \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \\ \sigma_2 &= P + \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin \theta \\ \sigma_3 &= P + \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

を得る。式 (2.7) と式 (2.9) より、あるいは式 (2.10) を用いて直接、式 (2.3) より

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} r^2 \\ J_3 &= -\frac{r^3}{3\sqrt{6}} \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.11)$$

が得られ、これより

$$r = \sqrt{2J_2}, \quad \sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \dots\dots (2.12)$$

となる^{14), 17)}。したがって、式 (2.5) は円筒座標により $f(P, r, \sin 3\theta) = 0 \dots\dots\dots (2.13)$

と記述し得る。

以上、本節においては 3 種の座標系による降伏条件式の表示について論じたが、これより応力-ひずみ速度式などの諸式を導出する都合上、結果的には応力あるいは偏差応力不変量による表示が望まれる。他方、4. 章以

降伏に示すように降伏条件式の決定に際しては円筒座標から出発すると都合の良い場合が多い。次節以降においてはこれら2座標系について応力一ひずみ速度式などの諸論に関して論じることとする。

(2) 応力一ひずみ速度式

降伏条件式 (2.5) を塑性ポテンシャルとして

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}, \quad \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = t_{ij} = S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

なる関係を考慮すれば、応力一ひずみ速度式

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\partial f}{\partial J_2} S_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_3} t_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

を得る。ここに、 λ は正値のスカラー比例係数。

なお、円筒座標に関する降伏条件式 (2.12) を用いれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{S_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \\ \frac{\partial \sin 3\theta}{\partial \sigma_{ij}} &= u_{ij} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_2^{3/2} t_{ij} - \frac{3}{2} J_2^{1/2} J_3 S_{ij}}{J_3^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

なる関係を考慮して

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{S_{ij}}{\sqrt{2J_2}} + \frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta} u_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

となる。

(3) 平面ひずみ問題について

a) 平面ひずみ条件

さて、Z 軸方向にひずみが生じないとすれば、式 (2.15) において $\dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0$ が成立せねばならない。したがって、Z 軸方向は主ひずみ方向となるが、一方、材料の等方性の仮定により Z 軸方向は主応力方向ともなり、 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ が成り立つ。

これを $\dot{\epsilon}_z = 0$ に考慮すれば、 σ_z は σ_x, σ_y および τ_{xy} の関数となるので、平面ひずみ問題は応力に関しても2次的にこれら3成分を考えればよいことになる。

さて、3主応力間には Lode の応力変数 μ により

$$\mu = \sqrt{3} \tan \theta = \sqrt{3} \frac{\eta}{\xi} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \dots (2.18)$$

なる関係がある。ここで、主軸 Z をたとえば σ_2 軸 (σ_2 が中間主応力であるか否かはここでは問題でない) とし

$$\left. \begin{aligned} P' &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \\ J_2' &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \dots (2.19)$$

とおけば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= P' + \sqrt{J_2'} \\ \sigma_2 &= P' + \mu \sqrt{J_2'} \\ \sigma_3 &= P' - \sqrt{J_2'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.20)$$

となる。これにより

$$\left. \begin{aligned} P &= P' + \frac{\mu}{3} \sqrt{J_2'}, \quad S_z = a \sqrt{J_2'}, \quad J_2 = b J_2' \\ t_z &= S_z^2 - \frac{2}{3} J_2 = c J_2', \quad J_3 = d J_2'^{3/2} \\ r &= \sqrt{2b} \sqrt{J_2'}, \quad \sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{d}{b^{3/2}}, \quad u_z = e \sqrt{J_2'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.21)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2}{3} \mu, \quad b = 1 + \frac{\mu^2}{3}, \quad c = -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{\mu^2}{3} \right) \\ d &= -\frac{2}{3} \mu \left(1 - \frac{\mu^2}{9} \right), \quad e = \sqrt{3} (1 - \mu^2) \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right)^{-5/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.22)$$

が得られる。これらを式 (2.15) および (2.16) に用いれば、それぞれ

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\partial f}{\partial J_2} \cdot a \sqrt{J_2'} + \frac{\partial f}{\partial J_3} c J_2' \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

および

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{a}{\sqrt{2b}} + \frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta} \cdot \frac{e}{\sqrt{J_2'}} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

なる平面ひずみ条件式が得られるが、これらはいずれも

$$\dot{\epsilon}_z(P', \sqrt{J_2'}, \mu) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

の形に帰着する。

b) 降伏条件式

式 (2.21) の諸式を式 (2.5) および (2.13) に用いるといずれも

$$f(P', \sqrt{J_2'}, \mu) = 0$$

となるが、本式に平面ひずみ条件式 (2.25) を用いて μ を消去すれば、

$$f(P', \sqrt{J_2'}) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

なる平面ひずみの場合の降伏条件式を得る。

c) 応力一ひずみ速度式

式 (2.26) を塑性ポテンシャルとすれば

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial P'} \cdot \frac{\delta_{ij}}{2} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2'}} \cdot \frac{S'_{ij}}{2\sqrt{J_2'}} \right) \dots (2.27)$$

ただし、

$$i, j = x, y; \quad S'_{ij} = \sigma_{ij} - P' \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

なる応力一ひずみ速度式を得る。

3. Coulomb・Mohr 則の応力不変量による表示

Coulomb・Mohr 則は 3 主応力に関して対称であるから、前章 (1) に述べたように応力不変量により表示し得

ることは自明である*。これは本論文の主旨と直接の関連はないが、Tresca 則の場合¹⁸⁾にも増していかに複雑な形式となるかを示しておく。

Coulomb・Mohr 則：

$$\prod_{i,j} \left[\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right)^2 - \left(C \cos \phi - \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \sin \phi \right)^2 \right] = 0 \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

ただし、 $i, j=1, 2, 3$

なお、本論文においては σ_i, σ_j は有効応力に基づく最大、最小主応力とし、また、 ϕ, C はこれらの応力を式(3.1)に代入して得られるパラメーターで μ 値が指定されれば決まる材料定数（もちろん、いずれも降伏時の構造あるいは化学的因子により異なる）であると定義しておく。

さて、式(3.1)に式(2.10)の変換を用いれば、Coulomb・Mohr 則の円筒座標表示式として

$$\prod_{\alpha} \left[\{ r \cos(\theta + \alpha) \}^2 - \left\{ \sqrt{2} T + r \sin(\theta + \alpha) \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right\}^2 \right] = 0 \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

ここに、 $\alpha = -\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi$

$$T = C \cos \phi - P \sin \phi (\geq 0) \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

を得よう。式(3.2)に多少の演算を施せば

$$\begin{aligned} & (r^2 \cos^2 \phi \cos 3\theta)^2 - \left\{ 4(\sqrt{2} T)^3 - 3 r^2 \right. \\ & \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 \phi}{3} \right) \sqrt{2} T + \frac{r^3 \sin \phi}{3\sqrt{3}} \\ & \left. \cdot (9 - \sin^2 \phi) \sin 3\theta \right\}^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(3.4) \end{aligned}$$

となる。本式に、さらに式(2.12)の關係を用いれば、Coulomb・Mohr 則の応力不変量による表示式

$$\begin{aligned} & f = \cos^4 \phi (4 J_2^2 - 27 J_3^2) - \{ 8 T^3 - 2(3 + \sin^2 \phi) \\ & \cdot T J_2 - (9 - \sin^2 \phi) \sin \phi \cdot J_3 \}^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(3.5) \end{aligned}$$

が得られる。本式はいかに複雑で使用に耐えないことが理解されよう。したがって、元形式(3.1)によらざるを得ないが、これによる応力一ひずみ速度式などの諸論はすでに広範な理論的發展がなされているので、ここで改めて再述はしない。

4. 土などの粉粒状体の降伏条件式設定に際しての諸仮定その他

(1) 降伏条件式設定に際しての諸仮定

(a) 3軸伸張および圧縮試験、平面ひずみ状態試験、直接せん断試験などにおいて認められるように P' に対して $\sqrt{J_2'}$ をプロットすると linear な關係が得られる。

* 佐武は疑問視している¹⁹⁾。

すなわち、 $\tan \phi = d\sqrt{J_2'}/dP'$ は定値となる（試験方法あるいは試験条件が異なることにより ϕ 値が異なることは別問題）。これを一般の応力状態に拡張して同一の μ 値に対しては ϕ が定値であると仮定しよう（本章(2)e)の後半参照）。なお、本仮定は土などの超高、低圧状態あるいは岩石、モルタル、コンクリートなどのぜい性材料に適用されている Mohr の2次式¹⁾、Griffith 式¹⁹⁾などにはあてはまらない。

本仮定により、3次元主応力空間における降伏曲面の母線は直線であることになるが、これを既述の円筒座標 (P, r, θ) で表示すれば、 r は P の線型な関数でなければならないことになり、式(2.13)は次の形に限定される。

$$f = r + P \cdot \nu (\sin 3\theta) + k \cdot \xi (\sin 3\theta) = 0 \quad \dots\dots\dots(4.1)$$

ただし、 k ：応力の次元を有する材料定数。

また、本仮定により $P = \text{const.}$ 面による降伏曲面の切口形状は P 値によらず相似となる。

(b) 多くの実測に基づき軸対称の伸張と圧縮状態において ϕ および C は一致するものとし、これらの試験から得られる値を ϕ_f および C_f と記すことにする。

さらに、材料定数としては ϕ_f および C_f のみを含むものとする。序論においても触れたように材料定数を増す必然性はないと思われ、また、現在のところ、この2定数外に、これらと独立な意味合いの明確な定数はなからう。したがって、2.(1)の終りに述べた $\pi/3$ の区間で2点のみを指定し得ることになるが、その2点として軸対称の伸張と圧縮状態を考えれば、式(4.1)は式(3.2)より得られる次式を満足せねばならないことになる。

$$\left. \begin{aligned} & \text{軸対称伸張状態} \left(\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi N, N \text{ は整数} \right) \\ & \text{において} \\ & r = \frac{2\sqrt{6}}{3 + \sin \phi_f} T_f (= r_e \text{ とおく}) \\ & \text{軸対称圧縮状態} \left(\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi N \right) \text{において} \\ & r = \frac{2\sqrt{6}}{3 - \sin \phi_f} T_f (= r_c \text{ とおく}) \\ & \dots\dots\dots(4.2) \end{aligned} \right\}$$

ここで、 T_f は式(3.3)の T において ϕ, C をそれぞれ ϕ_f, C_f でおきかえたものである。

さらに、 $P = C_f \cos \phi_f$ において（軸対称伸張、圧縮状態に限らず） $r=0$ なる条件を仮定すれば、式(4.2)を考慮して材料定数も含めて記すと

$$f = r + T_f \cdot h (\sin 3\theta, \phi_f) = 0 \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

なる形に再限定される。

(c) 降伏曲面の $P = \text{const.}$ 面による切口形状は滑らかな閉曲線であること。すなわち、 $\partial r / \partial \theta$ が連続でなければならない。

本条件に対する力学的必然性はないが、降伏則を塑性

ポテンシャルとして応力とひずみ速度の関係を規定する場合、 $P = \text{const.}$ 面上のこれらの1対1の対応を期待するには必要条件である。なお、これは Tresca 則、Coulomb・Mohr 則、Bishop・赤井則のような2次元破壊に基づく降伏則においては一般に保証されない。なんとすれば、これらを3次元に拡張して得られる降伏曲面は一般に6個の異なった曲(直)面で構成され、これらの交線上の応力状態に対してはひずみ速度の方向は唯一ではないからである。なお、これら2次元破壊に基づく降伏則を円筒座標 (P, r, θ) に表示すると 3. において Coulomb・Mohr 則について示したように r は一般に6次方程式の根の形をとる。

(d) 降伏曲面の $P = \text{const.}$ 面による切口形状は凸閉曲線であること(部分的には直線部を含んでもよい)は塑性ポテンシャル論に従う最大塑性仕事理さらには解の唯一性の成立に対する必要条件である^{20), 21)}。

したがって、次式を満足せねばならない²²⁾。

$$\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' (=R \text{ とおく}) \geq 0 \dots\dots\dots(4.4)$$

ここで、 $\left(\frac{1}{r}\right)''$ は $\frac{1}{r}$ の θ に関する2階偏微分。

(e) 多くの実測結果によれば、 ϕ_t は 0° から 45° の範囲にあると思われるので、以上の(a)~(d)の諸条件が ϕ_t のこの範囲に対して成り立つことを仮定しておく。

以上のほかに降伏条件式はこれをもとにして導かれる応力-ひずみ速度式などの諸論の展開の都合上、 P, J_2 および J_3 に関するできるだけシンプルな形であることが望ましい。

(2) 降伏条件式、応力-ひずみ速度式などに関する一般論

本章において前節に考察した諸条件を満たす式(4.3)の具体的な形を提案するが、それは数字的に妥当な、また、簡潔な形式として求められるもので、なんら力学的解釈を与え得たわけではなく、当材料の降伏現象を最も的確に表現し得る論理であると断定するに至り得ない。したがって、本節では一般形(4.3)に基づく降伏条件式、応力-ひずみ速度式などの諸論を考察しておく。

a) 降伏条件式

式(4.3)より

$$f = P \cdot \sin \phi_t - \sqrt{2J_2}/h - C_t \cos \phi_t = 0 \dots\dots\dots(4.5)$$

なる降伏条件式を得る。

b) 応力-ひずみ速度式

式(4.5)を塑性ポテンシャルとすれば

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \left(\frac{\sin \phi_t}{3} \delta_{ij} - \frac{h}{\sqrt{2J_2}} S_{ij} - \sqrt{2J_2} \frac{\partial h}{\partial \sin 3\theta} u_{ij} \right) \dots\dots\dots(4.6)$$

なる応力-ひずみ速度式を得る。

e) 平面ひずみ問題について

式(4.6)の $\dot{\epsilon}_z = 0$ に対して式(2.21)を用いれば、

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda \left(\frac{\sin \phi_t}{3} - \frac{\frac{a}{\sqrt{2b}} \cdot h - \sqrt{2b} \frac{\partial h}{\partial \sin 3\theta} \cdot e}{h^2} \right) = 0 \dots\dots\dots(4.7)$$

なる平面ひずみ条件式を得る。式(4.7)は $\dot{\epsilon}_z(\mu, \phi_t) = 0$ となり、 μ は ϕ_t のみにより規定されるが、本式を満たす μ を μ_p と記すことにする。

ところで、式(4.5)に式(2.21)の諸式を用いると

$$f = P' \sin \phi_t + \left(\frac{\mu}{3} \sin \phi_t - \frac{\sqrt{2b}}{h} \right) \cdot \sqrt{J_2'} - C_t \cos \phi_t = 0 \dots\dots\dots(4.8)$$

を得るが、本式において μ を μ_p で置きかえると平面ひずみの場合の降伏条件式を得る。

なお、平面ひずみの場合の降伏条件式は3次元主応力空間において降伏条件式(4.5)に式(2.18) (P 軸を含む平面を示す)を代入して得られ、また、 σ_2 を含まないので、これら2式の交線として得られる降伏曲面の母線を含み、かつ、 σ_2 軸に平行な平面を示すことになる。さらに、 μ_p は平面ひずみ条件式を満たすので、平面ひずみの場合の降伏条件式は降伏曲面の接平面となる(降伏条件式を塑性ポテンシャルとして*これを σ_{ij} で偏微分してひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を導出することは、ひずみ速度の方向が降伏曲面の法線方向であることを仮定している^{20), 21)})。なお、本概念を“Associated flow rule”と呼ぶことがある)。言いかえれば、降伏曲面の接平面の中、 σ_2 軸に平行なものが平面ひずみの場合の降伏条件式である。ただし、平面ひずみの応力状態はこの接平面上の全応力状態を取り得るのではなく平面ひずみ条件をも満たす降伏曲面の母線上の応力状態のみを取り得ることは言うまでもない。

さて、式(4.8)において

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &= \frac{\sin \phi_t}{\frac{\mu}{3} \sin \phi_t - \sqrt{2b}/h} \\ C &= C_t \cot \phi_t \tan \phi \rightarrow C \cot \phi = C_t \cot \phi_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.9)$$

とおけば、

$$f = P' \sin \phi + \sqrt{J_2'} - C \cos \phi = 0 \dots\dots\dots(4.10)$$

となり、Coulomb・Mohr 則に対して Associated flow rule に基づいて広く発展された応力場 および 速度場に関する既存の諸論：応力および速度場の特性線の一致、

* 降伏条件式と異なるものを塑性ポテンシャルとして用いた一例として Radenkovic-Davis 論²³⁾があげられる。なお、本場合には一般に応力とひずみ速度の特性線は一致しない。また、変分原理や解の唯一性を公式化することは難しい¹⁵⁾。

境界値問題などがそのまま適用し得る。さらに、次章に示す具体形のように式(4.5)を条件(d)をも満たすように選べば最大塑性仕事理、変分原理、解の唯一性その他が成り立つことは自明である^{23),24)}。

なお、この Associated flow rule に基づく速度場は筆者の先の報告²⁵⁾にも述べたように、一般の粒状体に比して大きな膨張性を示すことが指摘され、これを解決すべく多くの理論報告がなされているが、いずれも論理的につまづくものばかりである。つい先頃の Mandl・Fernández Louque の報告²⁶⁾は2次元状態に限り等方性材料に対して主応力と主ひずみ速度の方向の不一致の可能性を論証して de Jong の所論を発展させているが、物体内部の同一点において2つの異なる主ひずみ方向を仮定すること自体矛盾であるとともに、非圧縮性の前提に反して導かれた諸論は結局、Associated flow rule による場合と同等の膨張性を与えると思われる。

ところで、粉粒状体の膨張性を規定する最大の要因はその粗密の程度であるが、材料の work-hardening を考慮しない所論により論じる得るのは応力-ひずみ曲線が明確な降伏点を示す Terzaghi²⁷⁾ のいう General Shear の理想状態に対してであると思われる。

一般のゆるい状態(Local Shear)の降伏挙動をも論じるには、今後 Associated flow rule に基づいて材料の硬化さらには軟化の概念を導入すべきであると感じられる。

d) ϕ , C 値について

Bishop は降伏諸則の検討に際して粘着性の無い場合に対して $\phi = \sin^{-1}\{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)\}$ として破壊応力状態により ϕ 値がどのように変化するかを調べたが、粘着性材料に対しても式(4.9)を用いて式(4.10)のごとく Coulomb・Mohr 形式に改めることにより、 μ 値に対する C および ϕ 値の変化の状況を把握し得る。

また、式(4.9)の $\sin \phi$ に関する式の右辺の分母を μ で微分すれば、平面ひずみ条件式(4.7)と同一式が得られる。すなわち、 $\sin \phi$ は $\mu = \mu_p$ において極大値をとることがわかる。さらに、条件(d)の凸閉曲線なることを考えれば、 μ_p は $\pi/3$ 区間で1つだけ存在し、 ϕ は平面ひずみ状態で最大となる。さらに、凸閉曲線は図-1の Coulomb・Mohr の閉直線の外側になければならないので、 ϕ 値は軸対称伸張、圧縮状態で最小値を取ることになる。

式(4.9)の下式より C 値に対しても同様のことが言える。

これは一般的傾向として3軸伸張および圧縮試験、直接せん断試験、平面ひずみ状態試験の順で得られる ϕ 値が小なることに対する論拠を与えるものである。

5. 土壌などの粉粒状体の降伏条件式の提案およびそれに基づく応力-ひずみ方程式その他

(1) 降伏条件原形式の仮定およびそれに基づく諸論

a) 降伏条件原形式の仮定

まず、前章の(a),(b)および(c)の3条件を満たす降伏関数、すなわち、式(4.2)を満たす式(4.3)の形を考えよう。これには6.に述べるように種々の形式が考えられるが、最もシンプルな形式

$$f = r - \frac{r_c r_e}{\left(\frac{r_c^n + r_e^n}{2} - \frac{r_c^n - r_e^n}{2} |\sin 3\theta|^{m-1} \sin 3\theta \right)^{1/n}} = 0 \dots \dots \dots (5.1)$$

を仮定する。ここに、 n は0でない実数。 m は正の実数でなければならない ($m=0$ ならば $\theta \rightarrow -0: r \rightarrow r_e$, $\theta \rightarrow +0: r \rightarrow r_c$ となり $\theta=0$ において不連続を生じる。また、 $m < 0$ ならば $\theta \rightarrow 0: r \rightarrow 0$ または虚数となり不適)。なお、条件(c)の $\partial r / \partial \theta$ の全域に対して連続なることは容易にわらう。

なお、本式は式(4.3)の形式に記述すれば、

$$h(\sin 3\theta, \phi_t) = -K_\theta^{-1/n} \dots \dots \dots (5.2)$$

となり、

$$f = r - T_t K_\theta^{-1/n} = 0 \dots \dots \dots (5.3)$$

$$K_\theta = G_n - H_n |\sin 3\theta|^{m-1} \sin 3\theta (> 0) \dots \dots (5.4)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{3 + \sin \phi_t}{2\sqrt{6}}, B = \frac{3 - \sin \phi_t}{2\sqrt{6}} \\ G_n &= \frac{1}{2} (A^n + B^n), H_n = \frac{1}{2} (A^n - B^n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.5)$$

である。

式(4.5)に式(5.2)および(2.12)を考慮すれば

$$f = P \sin \phi_t + \sqrt{2} J_2 K_J^{1/n} - C_t \cos \phi_t = 0 \dots (5.6)$$

ただし、

$$K_J = G_n + H_n \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right|^{m-1} \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \dots \dots \dots (5.7)$$

なる応力不変量表示の降伏条件式を得る。

式(5.6)から無数の降伏則が考えられる。たとえば、 $m=n=1$ とすれば、

$$f = P \sin \phi_t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{J_2} + \frac{3}{4} \sin \phi_t \frac{J_3}{J_2} - C_t \cos \phi_t = 0 \dots \dots \dots (5.8)$$

となり、佐武の提案式に粘着性を考慮したものとなる。

また、 $m=1/3, n=1$ とおけば、

$$f = P \sin \phi_t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{J_2} + \frac{\sin \phi_t}{2^{4/3}} J_3^{1/3} - C_t \cos \phi_t = 0 \dots \dots \dots (5.9)$$

となり、Coleman の提案式に粘着性を考慮したものとなる。

b) 仮定原形式に基づく応力-ひずみ速度式その他

次節において前項の原形式 (5.2) における m, n 値を検討し、前章の全条件を満たす具体的な降伏条件式を決定するが、ほかの m, n 値に基づく佐武, Coleman その他の諸則との比較に際しての使用の意味で、式 (5.6) に対する応力-ひずみ速度式その他を示しておこう。

さて、前章 (2) に与えた相当諸式に式 (5.1) を代入すると次の諸式が得られる。

応力-ひずみ速度式: $y = |f(x)|^{m-1} \cdot f(x) : dy/dx = m \cdot |f(x)|^{m-1} \cdot df(x)/dx$ なる関係を考慮して

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} = & \lambda \left[\frac{\sin \phi_t}{3} \delta_{ij} + \sqrt{2J_2} K_J^{1/n} \right. \\ & \cdot \left. \left\{ \frac{S_{ij}}{2J_2} - \frac{m}{n} \frac{H_n}{K_J} \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right|^{m-1} u_{ij} \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.10)$$

平面ひずみ条件式:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_z = & \lambda \left[\frac{\sin \phi_t}{3} + \sqrt{2b} K_\mu^{1/n} \right. \\ & \cdot \left. \left\{ \frac{a}{2b} - \frac{m}{n} \frac{H_n}{K_\mu} \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{d}{b^{3/2}} \right|^{m-1} e \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.11)$$

ただし、

$$K_\mu = G_n + H_n \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{d}{b^{3/2}} \right|^{m-1} \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{d}{b^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

平面ひずみの場合の降伏条件式:

$$\left. \begin{aligned} f = & P' \sin \phi_t + \left(\frac{\mu}{3} \sin \phi_t + \sqrt{2b} K_\mu^{1/n} \right) \\ & \cdot \sqrt{J_2} - C_t \cos \phi_t = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.13)$$

$(\mu \rightarrow \mu_p)$

ϕ, C 値について:

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi = & \frac{\sin \phi_t}{\frac{\mu}{3} \sin \phi_t + \sqrt{2b} K_\mu^{1/n}} \\ C = & C_t \cot \phi_t \tan \phi \quad (\text{再録}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.14)$$

(2) 降伏条件式の具体的提案およびそれに基づく応力-ひずみ速度式その他

前節において前章の3条件を満たす降伏則の単純形式を設定し、これに基づく諸論を述べたが、本節においては前章の全条件を満たす降伏条件式的具体形を決定し、これに従う応力-ひずみ速度式などの諸論を詳察しよう。

a) 降伏条件式の提案

前節に仮定した式 (5.3) は $0 \leq \phi_t \leq 45^\circ$ において前章の (a), (b) および (c) の3条件を満たす。したがって、まず、 ϕ_t のこの範囲に対して未考慮の条件 (d) を

も満たす m, n 値の範囲を調べてみる。

さて、閉曲線が凸なるためには図-1を参照して閉曲線は $\triangle AC'F$ 内に収まらねばならない。ところで、 $\theta = 0$ のときの r を r_0 とすると式 (5.3) より

$$r_0 = T_t G_n^{-1/n} \dots\dots\dots (5.15)$$

となる。したがって、 n 値は $\theta = 0$ における r 値を規定する一面を有するが、閉曲線が凸なるためには $\overline{OD} \leq r_0 \leq \overline{OE}$ でなければならない。ここに $\overline{OD} = \sqrt{2} T_t$, $\overline{OE} = \{2\sqrt{6}/(3 + \sin \phi_t)\} \sec(\pi/6)$ であるから、 n 値の範囲はまず

$$3.765 < n < 10.08 \dots\dots\dots (5.16)$$

に限定される。なお、以下の考察にも関連するが、いかなる m, n 値に対しても ϕ_t が大なるに従って閉曲線は凹状を呈する傾向が大であるので、 m, n 値の算定結果は上限値 $\phi_t = 45^\circ$ に対する値である。また、 θ に関しては $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ の範囲について記すことにする。

次に、式 (5.2) に対して前章の式 (4.4) を用いれば、 $R' = T_t K_\theta^{-1/n} R$ とおいて

$$\begin{aligned} R' = & 1 + \frac{9mH_n}{nK_\theta} |\sin 3\theta|^{m-3} \sin 3\theta \cos^2 3\theta \\ & \cdot \left[1 - m + \tan^2 \theta - \frac{(n-1)mH_n |\sin 3\theta|^{m+1}}{nK_\theta \sin 3\theta} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

を得る。ところで、 $\theta = 0$ の近傍で R' を調べると式 (5.16) を考慮して

$$\left\{ \begin{aligned} 0 < m < 1 \text{ の場合: } & \theta \rightarrow \pm 0 : R' \rightarrow \pm \infty \text{ (複号同順)} \\ & \text{Coleman の示した図 (文献8) の Fig. 33} \\ & \text{から推察するに彼はこの事実には気付かなか} \\ & \text{ったようである。} \\ m = 1 \text{ の場合: } & R' = 1 - \frac{9(n-1)}{n^2} \left(\frac{H_n}{G_n} \right)^2 \\ 1 < m < 2 \text{ の場合: } & \theta \rightarrow \pm 0 : R' \rightarrow \mp \infty \text{ (複号同順)} \\ m = 2 \text{ の場合: } & R' = 1 - \frac{18}{n} \frac{H_n}{G_n} < 0 \\ m > 2 \text{ の場合: } & R' = 1 \end{aligned} \right.$$

となるので、 m 値の範囲は

$$m = 1, m > 2 \dots\dots\dots (5.18)$$

に限られる。次に、これらの2つの場合について詳察しよう。

i) $m = 1$ の場合

式 (5.17) より

$$R' = 1 + \frac{9H_n}{nK_\theta} \left\{ \sin 3\theta - \frac{(n-1)H_n}{nK_\theta} \cos^2 3\theta \right\}$$

となるが、 θ の全域に対して $R' \geq 0$ を与える n 値の数値計算結果は

$$3.803 < n < 4.413 \dots\dots\dots (5.19)$$

である (n の下限値 3.803 は $\theta = -15^\circ$ で、また、上限値 4.413 は $\theta = -1^\circ 38'$ で $R' < 0$ を与える)。

ii) $m > 2$ の場合

まず $\theta = -\pi/6$ において調べてある。ここで $R' \geq 0$ なるためには式 (5.17) より

$$2 < m \leq \frac{n(G_n + H_n)}{9H_n} \dots\dots\dots(5.20)$$

でなければならないが、本式および式 (5.16) より

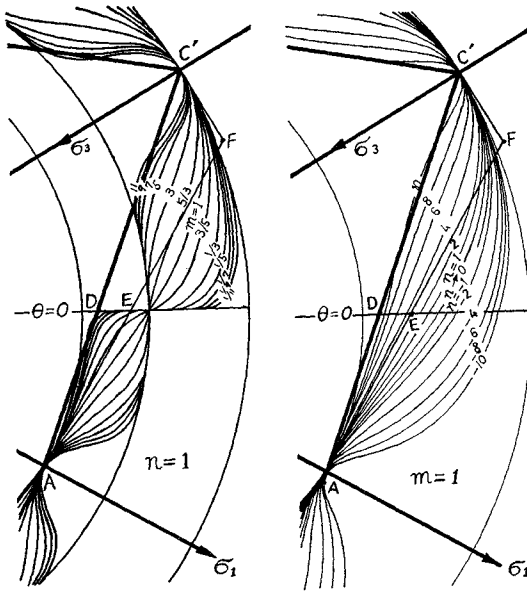
$$8.875 < n < 10.08 \dots\dots\dots(5.21)$$

を得る。なお、式 (5.20) の最右辺は $n=10.08$ において最大値 2.2415 をとるので m 値に対して

$$2 < m < 2.415 \dots\dots\dots(5.22)$$

となるが、 θ の全域について調べてみるまでもなく $\theta = \pi/12$ において $R' \geq 0$ を満たす式 (5.21) および (5.22) の範囲における m, n 値は存在しない。

なお、種々の m, n 値に対する式 (5.3) の数値計算結果の一例として $m=1$ において n を変化させた場合および $n=1$ において m を変化させた場合 ($\phi_t = 40^\circ$) について示せば 図-2 のごとくである。



(a) $m=1$ として n を変化させた場合 (b) $n=1$ として m を変化させた場合

図-2 仮定原形式から種々の m, n 値に対して得られる降伏曲面の $P=\text{const.}$ 面による切口形状の数値計算結果の一例

以上の考察により、 θ の全域に対して $R \geq 0$ を満たす m, n 値は式 (5.19) より

$$m=1, 3.803 < n < 4.413 \dots\dots\dots(5.23)$$

に限定される。

ここで、さらに式 (5.6) をシンプルな形に与える n 値として $n=4$ を仮定すれば、同式より前章の全条件を満足する降伏条件式

$$f = P \sin \phi_t + \sqrt{2} J_2 K_{J_4}^{1/4} - C_t \cos \phi_t = 0 \dots\dots(5.24)$$

を得る。ここに K_{J_4} は式 (5.7) において $m=1, n=4$ とおいたものであるが、陽に示せば

$$\left. \begin{aligned} G_4 &= \frac{(\sin^2 \phi_t + 9)^2 + 36 \sin^2 \phi_t}{576} \\ H_4 &= \frac{\sin \phi_t (\sin^2 \phi_t + 9)}{48} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.25)$$

$$K_{J_4} = G_4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} H_4 \dots\dots\dots(5.26)$$

である。

また、佐武則は $\phi_t < 22^\circ 01'$ 、Coleman 則は $\phi_t = 0$ 、さらに後章で説明する Geniev 則は $\phi_t < 17^\circ 28'$ においてのみ凸閉曲線なる条件を満足するが、これらの諸則とともに本論文の提案則をまとめて示せば、 $\phi_t = 40^\circ$ の場合 図-3 のようになる。同図より、本論文の提案式(5.24)が Kirkpatrick⁶⁾、Wu 他²⁸⁾、Shibata・Karube²⁹⁾、Green・Bishop³⁰⁾などの実測値に最も近いことがわかる。

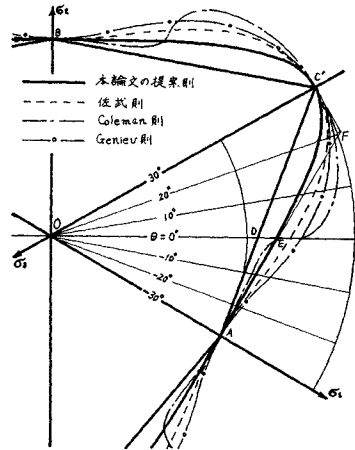


図-3 降伏諸則の $P=\text{const.}$ 面による切口形状

本提案式に基づく応力-ひずみ速度式その他は前節 b) 項の諸式に $m=1, n=4$ として以下のごとく得られよう。

b) 応力-ひずみ速度式

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \left[\frac{\sin \phi_t}{3} \delta_{ij} + \sqrt{2} J_2 K_{J_4}^{1/4} \left(\frac{S_{ij}}{2 J_2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{H_4}{K_{J_4}} \cdot \frac{J_2^{3/2} t_{ij} - \frac{3}{2} J_2^{1/2} J_3 S_{ij}}{J_2^3} \right) \right] \dots\dots(5.27)$$

c) 平面ひずみ条件式

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda \left[\frac{\sin \phi_t}{3} + \sqrt{2 \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right)} K_{\mu 4}^{1/4} \left\{ \frac{\mu}{3 + \mu^2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{H_4}{K_{\mu 4}} (1 - \mu^2) \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right)^{-5/12} \right\} \right] = 0 \dots\dots\dots(5.28)$$

ただし、

$$K_{\mu 4} = G_4 - H_4 \frac{\mu(9 - \mu^2)}{\sqrt{3}(3 + \mu^2)} \dots\dots\dots(5.29)$$

d) 平面ひずみの場合の降伏条件式

$$f = P' \sin \phi_t + \left\{ \frac{\mu}{3} \sin \phi_t + \sqrt{2 \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right) K_{\mu^4}^{1/4}} \right\} \cdot \sqrt{J_2'} - C_t \cos \phi_t = 0, \mu \rightarrow \mu_p \dots\dots (5.30)$$

e) ϕ, C 値について

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &= \frac{\sin \phi_t}{\frac{\mu}{3} \sin \phi_t + \sqrt{2 \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right) K_{\mu^4}^{1/4}}} \dots (5.31) \\ C &= C_t \cot \phi_t \cdot \tan \phi \end{aligned} \right\}$$

なお、佐武および Coleman 則の拡張式 (5.8) および (5.9) に対しても式 (5.10)~(5.14) にそれぞれの m, n 値を代入して式 (5.27)~(5.31) と類同の結果が得られるが (式の記述は省略する), 平面ひずみの場合について、これらの諸則による ϕ_p および C_p/C_t の ϕ_t に対する関係を示せば図-4のごとくである (ϕ_p, C_p は平面ひずみの場合の ϕ, C)。

6. 他の仮定式について

前章に仮定した式 (5.1) は分母にのみ $\sin 3\theta$ の項を有する形であるが、分子にも考慮した次の形も 4. の仮定 (a), (b) および (c) を満足する。

$$f = r - \frac{\left(\frac{r_c^n + r_e^n}{2} - \frac{r_c^n - r_e^n}{2} |\sin 3\theta|^{m-1} \sin 3\theta \right)^{1/n}}{\left\{ \left(\frac{r_c^s + r_e^s}{2} \right)^2 - \left(\frac{r_c^s - r_e^s}{2} \right)^2 |\sin 3\theta|^{2l} \right\}^{1/2s}} \cdot r_c r_e = 0 \dots\dots (6.1)$$

ここに、 m, n は前章の定義と同じ。 l は実数。 s は 0 でない実数である。

これより、
 $f = P \sin \phi_t$

$$\begin{aligned} & \left(G_s^2 - H_s^2 \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right|^{2l} \right)^{1/2s} \\ & + \frac{\left(G_n - H_n \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right|^{m-1} \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right)^{1/n}}{\sqrt{2} J_2 - C_t \cos \phi_t} = 0 \dots\dots (6.2) \end{aligned}$$

なる降伏条件式を得る。ただし、 G_s, H_s は前章の式 (5.4) の G_n, H_n において n を s でおきかえたもの。式 (6.2) において $l=m=n=s=1$ とおけば、前編に示した佐武則の拡張式 (5.8) に一致する。また、 $l=0, m=n=s=1$ とおけば

$$f = P \sin \phi_t + \frac{1 - \left(\frac{\sin \phi_t}{3} \right)^2}{\sqrt{3} - \sin \phi_t} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \sqrt{J_2} - C_t \cos \phi_t = 0 \dots\dots (6.3)$$

となり Geniev の提案式¹³⁾に一致する。しかし、本論の場合、凸閉曲線の判定条件 R が佐武則と同様に $\theta = -\pi/6$ において最小値を取り、 $\phi_t \geq 17^\circ 28'$ では負値となる (式 (6.3) に従う降伏曲面の $P = \text{const.}$ 面による切口形状は 図-3 参照)。

なお、式 (6.2) は一般に分母に $J_3/J_2^{3/2}$ の項を有し、前章の仮定式 (5.6) に比して導出される応力-ひずみ速度式その他が、非常に複雑となる。

そこで、式 (6.2) を比較的簡単形にし得る場合について考えるに、 $m \neq 0$ により分母には $J_3/J_2^{3/2}$ の項を有さざるを得ないので、分子においてこの項を消失させるべく $l=0$ として条件 (d) の凸閉曲線なる条件を満足しうるか否かについて調べてみよう。

式 (6.1) において $l=0, \theta=0$ とすれば

$$r_0 = \frac{2\sqrt{6} \left[\frac{1}{2} \{ (3 + \sin \phi_t)^n + (3 - \sin \phi_t)^n \} \right]^{1/n}}{9 - \sin^2 \phi_t} T_t$$

となるが、本式において $r_0 \leq \overline{OE}$ なる条件を満たす n 値は存在しない。したがって、分子においても $J_3/J_2^{3/2}$ の項を除去し得ず、仮定式 (6.2) から生ずる 4. の全条件を満たす降伏条件式が得られたとしてもかなり複雑な形式とならざるを得ないであろう。

また、前章および本章に示した 2 つの仮定式を組み合わせると種々の降伏条件式が生じるが、いっそう、複雑さを増すことを避けられない。

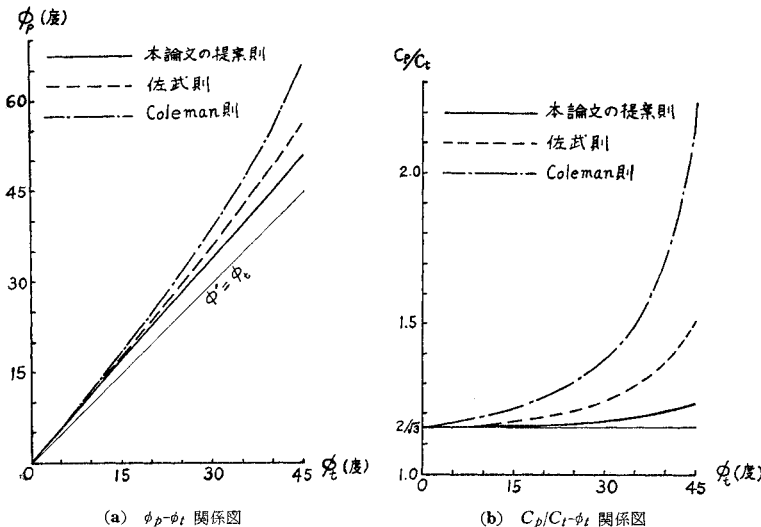


図-4 平面ひずみ状態における材料定数 $\phi_p, C_p/C_t$ の ϕ_t に対する関係

7. 結 言

以上、摩擦性塑性体の降伏挙動の一般論を根底から省察し、さらに土などの粉粒状体の降伏条件式の具体的提案を行ない、これに基づく応力一ひずみ速度式その他の諸論を明らかにした。本降伏則は力学的にあるいは実際現象を的確に表現するという面から一応の進歩を与え得たと信じる。しかし、これは単に外面的スタイルのみを与えたもので、Mises 則に八面体せん断応力なる物理的意味付けがなされたがごとき内容あるものではない。今後はここに提案した降伏則に秘められた内状を究明し、粉粒状体の破壊挙動を内面からも説明しうる妥当な力学的解釈を与えてゆきたい。

なお、粉粒状体の力学は塑性力学史の創世期に Tresca 則に相応する Coulomb 則を与えられたにもかかわらず、いまだに Mises 則に対応される妥当な降伏基本原理を有し得ない実状であるが、その間、特に Kirkpatrick 以来、一応の実測データの蓄積は得たと言えよう。また、研究者の自負心からか、ここに示した降伏則が将来、物理的解釈をも完備して広く認められるに至ると信じるが、今後は実験的のみならずあわせて理論的検討をも大いに推進すべき時期に至ったのではなからうか。

本論文は摩擦性塑性材料の理論的研究の一部であるが、これに関しては東京工大山口柏樹博士の懇篤な御指導と御討論を仰いだ。ここに、付記して厚く感謝の意を表したい。

本論文における数値計算には九州大学中央計数施設を利用した。

参 考 文 献

- 1) Nadai, A. : Theory of Flow and Fracture of Solids, McGraw-Hill Co., Vol. 1, Chapt. 15, 1950.
- 2) Drucker, D.C. and W. Prager : Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 1, No. 3, pp. 157-165, 1953.
- 3) Schleicher, F. : Die Energiegrenze der Elastizität (Plastizitätsbendigung), Zeits. für ang. Math. Mech., Vol. 5, No. 6, pp. 478-479, 1925.
- 4) Drucker, D.C. : Limit Analysis of two and three Dimensional Soil Mechanics, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 1, No. 4, pp. 217-226, 1953.
- 5) Shield, R.T. : On Coulomb's Law of Failure in Solids, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 4, No. 1, pp. 10-16, 1955.
- 6) Kirkpatrick, W.M. : The Condition of Failure for Sands, Proc. 4th Int. Conf. SMFE I, pp. 172-178, 1957.
- 7) Coleman, M.J.D. : Suction and the Yield and Failure Surface for Soil in Principal Effective Stress Space (Correspondence), Géotechnique, Vol. 10, No. 4, pp. 181-183, 1960.
- 8) Coleman, M.J.D. : Soil Properties and their Measurement (Discussion), Proc. 5th Int. Conf. SMFE III, pp. 111-112, 1961.
- 9) Bishop, A.W. : The Strength of Solids as Engineering Materials, Géotechnique, Vol. 16, No. 2, pp. 91-130, 1966.
- 10) Roscoe, K.H., A.N. Schofield and A. Thurairajah : An Evaluation of Test Data for Selecting a Yield Criterion for Soils, Laboratory Shear Testing of Soils, ASTM, STP, No. 361, pp. 111-128, 1963
- 11) 赤井浩一・森 寛昭 : 組合せ圧縮応力下における和泉砂岩の破壊機構に関する研究, 土木学会論文報告集, 147号, pp. 11-24, 1967.
- 12) Hvorslev, M.J. : Physical Components of the shear Strength of saturated clays, A.S.C.E., Research Conf. Shear Strength of Cohesive Soils, pp. 169-273, 1960.
- 13) Geniev, G.A. : Generalization of the Condition of Limit Equilibrium of a Cohesionless Mass, Soil Mechanics and Foundation Engineering (A translation of Osnovaniya, Fundamenty i Mekhanika Gruntov), No. 2, pp. 75-77, 1968.
- 14) 佐武正雄 : 土の降伏条件に関する一試案とその考察, 土木学会論文報告集, No. 189, pp. 79-88, 1971.
- 15) たとえば, Hill, R. : 塑性学 (邦訳), 培風館, 1954.
- 16) たとえば Fung, F.Y. : A First Course in Continuum Mechanics, Prentice-Hall, Inc., pp. 81, 1969.
- 17) Hoshino, K. : A General Theory of Mechanics of Soils, Proc. 4th Int. Conf. SMFE I, pp. 160-166, 1957.
- 18) Prager, W. and P.G. Hodge : Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley & Sons, Inc., pp. 23-24, 1951.
- 19) Griffith, A.A. : The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil Trans. Roy. Soc., London, A, 221, pp. 163-198, 1921.
- 20) Drucker, D.C. : A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations, Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, pp. 487-491, 1951.
- 21) Drucker, D.C. : A Definition of Stable Inelastic Material, J. Appl. Mech., Vol. 26, No. 1, pp. 101-106, 1959.
- 22) 栗田 稔 : いろいろな曲線, 共立出版, pp. 92-93, 1967.
- 23) 山口柏樹 : 土の塑性力学, 土質力学 (最上武雄編), 技報堂, 第7章, 1969.
- 24) 橋口公一 : 摩擦性塑性体に関する速度場の理論, 土木学会論文報告集, 172号, pp. 19-30, 1969.
- 25) 橋口公一 : 一般膨張性摩擦塑性体に関する速度場の理論, 土木学会論文報告集, 185号, pp. 21-30, 1971.
- 26) Mandl, G. and R. Fernandez Luque : Fully Developed Plastic Shear Flow of Granular Materials, Geotechnique, Vol. 29, No. 3, pp. 277-307, 1970.
- 27) Terzaghi, K. : Theoretical Soil Mechanics, John Wiley Sons, Inc. pp. 118-133, 1954.
- 28) Wu, T.H., A.K. Loh and L.E. Malvern : Study of Failure Envelope of Soils, Proc. ASCE, Vol. 89, No. SM 1, Part 1, pp. 145-181, 1963.
- 29) Shibata, T. and D. Karube : Influence of the Variation of the Intermediate Principal Stress on the Mechanical Properties of Normally Consolidated Clays, Proc. 6th Int. Conf. SM, I, pp. 359-363, 1965.
- 30) Green, G.E. and A.W. Bishop : A Note on the Drained Strength of Sand Under Generalized Strain Conditions, Géotechnique, Vol. 19, No. 1, pp. 144-149, 1969.