

一様勾配斜面上の有限振幅長波について

ON THE FINITE AMPLITUDE LONG WAVES ON UNIFORM
SLOPE BEACHES

岩垣雄一*・酒井哲郎**

By Yuichi Iwagaki and Tetsuo Sakai

1. ま え が き

波が深海から浅海に進入すると、底面の影響をうけていろいろと変形する。特に、水深の減少に伴う波の変形に関しては、実用上の面からは、水平床での波のエネルギー・フラックスを計算し、水深が減少しても、そのエネルギー・フラックスが一定であると仮定して、波高、波速および波長の変化を求めるのが普通である^{1),2)}。一方、水深の変化を境界条件そのものとして取り入れ、斜面上での波の解を求めようとした研究もなされている^{3),4)}。以上の理論的研究に対し、実験および観測による研究もかなり行なわれている。特に、波高、波速および波長の変化に関しては、上述の波のエネルギー・フラックスを、有限振幅波理論によって求めた理論曲線が実験結果とほぼ一致し、このような近似的な方法で十分説明できることがわかった⁵⁾。

しかしながら、実験水槽で一様勾配の斜面上を進行し砕波にいたる波を観測すればわかるように、破波点に近づくにつれて、波高が増加するだけでなく、波形そのものが非対称な前かがみの波形になる⁵⁾。また、最近合田⁶⁾が指摘しているように、砕波高が斜面勾配によって変化することが実験的にわかっている。砕波にいたるまえの変形においても、同様に斜面勾配の影響のあることが予想される。これらの2つの問題、すなわち波形の非対称性および斜面勾配の影響に関しては、上述の水平床の波理論のエネルギー・フラックスを用いる近似的方法では何ら説明し得ないことは明らかである。これらについては、前述の斜面の存在をそのまま境界条件に入れて理論解を求める方法により説明しようものと考えられる。しかしながら、従来のこの種の研究では、上述の2つの点を明らかにするような解が与えられておらず、ただ1つ Biesel⁷⁾が波形の前かがみの程度を表わす代表的な量を提案しているにすぎない。

ここでは、波形の非対称性と、変形に及ぼす底勾配の

影響を明らかにするために、底勾配が一様な2次元の海浜上での波の変形を解析的に取扱う。この海浜上の波の解を求める方法として、2つの近似法、すなわち微小振幅近似と浅水近似とが考えられるが、ここでは浅水近似を用い、浅水理論 (shallow water theory) の最低次のも⁸⁾をその基本方程式とする。この方程式は非線型であり、その線型解はすでに求められているが⁹⁾、上述の2つの問題はこの非線型効果を明らかにすることによって説明できると考えられる。すでに、この最低次の浅水理論の非線型効果を解いた例^{10),11)}があるが、これらの例でも上述の2つの問題に対しては明確な解答を与えていない。特に、市栄¹¹⁾は解を波高・水深比のべき級数展開で表現し、一様勾配斜面上の第2次近似解を求めているが、解の中に積分表示が存在し、一般的取扱いが困難なため、斜面の勾配が緩やかな場合の砕波点について数学的に検討しているにすぎない。ここでは、上記の2つの問題に関して、明確な表現を得るため、市栄と同様にせつ動法を用いて非線型効果を考慮し、さらに円柱関数の三角関数による漸近展開を用いることによって、一様勾配の斜面上を進行する有限振幅長波の一般的な解を求めることにする。

2. 解の誘導

(1) 基本方程式

2次元の場合を考え、図-1のように座標系をとると、浅水理論の第1近似は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_t + u \cdot u_x + g \cdot \eta_x &= 0 \\ \eta_t + \{u \cdot (\eta + h)\}_x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $h=h(x)$ は水深、 $\eta=\eta(x,t)$ は静水面からの水位、 $u=u(x,t)$ はx方向の水粒子速度であり、鉛直座標には関係しない。このことは、よく知られているように圧力が静水圧で近似できることを意味する。なお、添字 t および x は、それぞれ t および x に関する微分を表わす。式 (1) は明らかに非線型であり、特性曲線法を用いて数値計算されることが多い。ここでは、非線

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 京都大学助教授 工学部土木工学科

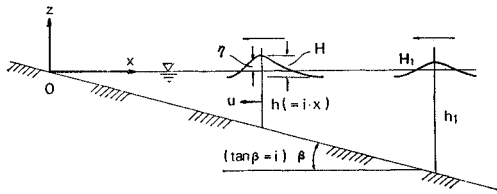


図-1 座 標 系

型の効果を解析的に表現するため、せつ動法を用いる。すなわち、 α を微小量として、 η と u を次のように展開できるものとする。 α の具体的な表現はのちに与える。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \alpha \cdot \eta^{(1)} + \alpha^2 \cdot \eta^{(2)} + \dots \\ u &= \alpha \cdot u^{(1)} + \alpha^2 \cdot u^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を式(1)に代入して、 α について整理すれば、 α の係数は、

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)}_t + g \cdot \eta^{(1)}_{x=0} &= 0 \\ \eta^{(1)}_t + \{u^{(1)} \cdot h\}_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

α^2 の係数は、

$$\left. \begin{aligned} u^{(2)}_t + u^{(1)} \cdot u^{(1)}_{x=0} + g \cdot \eta^{(2)}_{x=0} &= 0 \\ \eta^{(2)}_t + \{u^{(1)} \cdot \eta^{(1)} + u^{(2)} \cdot h\}_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となる。

(2) 第1次近似解

式(3)で $u^{(1)}$ を消去すると次式ようになる。

$$\eta^{(1)}_{tt} - g \cdot \{\eta^{(1)}_{x=0} \cdot h\}_{x=0} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

いま、一様勾配 i の斜面上の波を考えているから、水深 h と水平座標 x との関係 $h = i \cdot x$ (図-1参照)を上式に代入すると、一様勾配の斜面上の場合、式(5)は次式ようになる。

$$\eta^{(1)}_{tt} - g \cdot \{\eta^{(1)}_{xx} \cdot i \cdot x + \eta^{(1)}_{x=0} \cdot i\} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

いま、 $\eta^{(1)}$ が、

$$\eta^{(1)}(x, t) = \eta(x) \cdot \cos \sigma t \dots\dots\dots (7)$$

のように表わされると仮定し、式(7)を式(6)に代入すると、 $\eta(x)$ に関する方程式が次式のように求まる。

$$x \cdot \eta_{xx} + \eta_x + (\sigma^2/gi) \cdot \eta = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ここで、次式の関係¹²⁾

$$x = (gi/4\sigma^2) \cdot w^2 \dots\dots\dots (9)$$

によって、独立変数を x から w に変数変換すると、式(8)は次式ようになる。

$$\eta_{ww} + (1/w) \cdot \eta_w + \eta = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式(10)がその基本解として、第1種円柱関数のベッセル関数 $J_0(w)$ および第2種円柱関数のノイマン関数 $N_0(w)$ をもつことは明らかである。 $\eta^{(1)}$ を、

$$\eta^{(1)}(x, t) = \eta(x) \cdot \sin \sigma t \dots\dots\dots (11)$$

と仮定した場合もまったく同様の結果が得られる。円柱関数の性質として、 $x \rightarrow \infty$ すなわち $w \rightarrow \infty$ の場合に、

$$\left. \begin{aligned} J_\nu(w) &\sim \sqrt{2/\pi w} \cdot \cos(w - \nu \cdot \pi/2 - \pi/4) \\ N_\nu(w) &\sim \sqrt{2/\pi w} \cdot \sin(w - \nu \cdot \pi/2 - \pi/4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

と漸近展開されることを考えると、 $\eta^{(1)}$ の解として、図-1の沖から岸へ向けて、すなわち x の負の方向に進行する波に対応する解は、

$$\eta^{(1)}(x, t) = \alpha \cdot \left\{ \cos \sigma t \cdot J_0 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} \right) - \sin \sigma t \cdot N_0 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} \right) \right\} \dots\dots\dots (13)$$

で与えられる⁹⁾。ここで α はのちに波高によって決められる定数である。いま、円柱関数 $Z_0(w)$ 、 $Z_1(w)$ の性質、

$$\left. \begin{aligned} Z_0'(w) &= -Z_1(w) \\ Z_1'(w) &= Z_0(w) - w^{-1} \cdot Z_1(w) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

を用いると、式(3)と式(13)から、 $u^{(1)}$ が次式のように求まる。ただし、記号'は独立変数に関する微分を表わす。

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, t) &= \alpha \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-1/2} \cdot \left\{ \sin \sigma t \cdot J_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \sigma t \cdot N_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} \right) \right\} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

式(13)および式(15)で与えられる $\eta^{(1)}$ および $u^{(1)}$ は、式(1)の浅水近似の第1次近似である線型解に対応するものである。式(13)の J_0 および N_0 の性質から、 x が小さくなるにつれて $\eta^{(1)}$ の振幅が増大する。すなわち $\eta^{(1)}$ は、波が沖から岸に進行するにつれて波

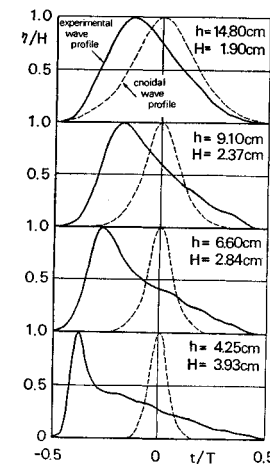


図-2 斜面上の波の非対称な波形¹³⁾

高が増大する事実を定性的に説明しうるものである。しかしながら、実験水槽の斜面上を波が進行するときは、水深の減少に伴って変形し碎波にいたる波の波形を見ればわかるように(図-2の実線、ただし図中の η は波の谷からの水位)、時間波形が非対称な前かがみの形となり、波の峰の前面がきりたってくる。式(13)で与えられる線型解 $\eta^{(1)}$ は、時間 t に関しては明らかに正弦関数の

の形をもち、波形が前かがみになる実験事実を説明することができない。ここでは、基本式(1)の非線型の項が、波形の非対称性を説明しうるのではないかと考え、すでに求められた $\eta^{(1)}$ および $u^{(1)}$ を用いて、 $\eta^{(2)}$ を求めてみることにする。

(3) 第2次近似解

式(4)において $u^{(2)}$ を消去し, $h=i \cdot x$ の関係(図-1参照)を用いると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}_{tt} - g \cdot \{ \eta^{(2)}_{xx} \cdot i \cdot x + \eta^{(2)}_{x \cdot i} \} \\ = - \{ u^{(1)} \cdot \eta^{(1)} \}_{xt} + \{ u^{(1)} \cdot u^{(1)}_{x \cdot i} \} \cdot i \cdot x \\ + \{ u^{(1)} \cdot u^{(1)}_{x \cdot i} \} \cdot i \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

式(16)の右辺に式(13)および式(15)の $\eta^{(1)}$ および $u^{(1)}$ を代入し, 式(14)の関係をを用いて整理すると, 式(16)の右辺は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{式(16)の右辺} = \cos 2\sigma t \cdot \left\{ -\frac{3}{2} a^2 \frac{\sigma^2}{i} x^{-1} \right. \\ \cdot (J_0^2 - J_1^2 - N_0^2 + N_1^2) + \frac{5}{2} a^2 \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot \sigma \cdot x^{-3/2} \\ \cdot (J_0 J_1 - N_0 N_1) - a^2 \cdot g \cdot x^{-2} \cdot (J_1^2 - N_1^2) \left. \right\} \\ + \sin 2\sigma t \cdot \left\{ 3 a^2 \frac{\sigma^2}{i} x^{-1} \cdot (J_0 N_0 - J_1 N_1) \right. \\ - \frac{5}{2} a^2 \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot \sigma \cdot x^{-3/2} \cdot (J_1 N_0 + J_0 N_1) \\ + 2 a^2 \cdot g \cdot x^{-2} \cdot J_1 N_1 \left. \right\} \\ + \frac{1}{2} a^2 \frac{\sigma^2}{i} x^{-1} \cdot (J_0^2 - J_1^2 - N_0^2 + N_1^2) \\ - \frac{3}{2} a^2 \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot \sigma \cdot x^{-3/2} \cdot (J_0 J_1 - N_0 N_1) \\ + a^2 \cdot g \cdot x^{-2} \cdot (J_1^2 - N_1^2) \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

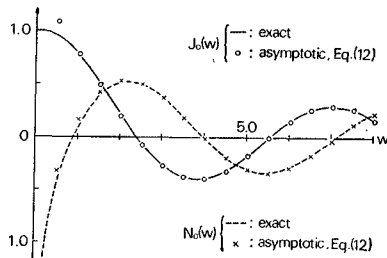


図-3 ベッセル関数とノイマン関数の漸近展開による近似値

さて, 図-3に, J_0 および N_0 の厳密な値と式(12)による近似値の比較を示しているが, w の値がある程度以上になると, 式(12)の漸近展開による値は十分正確であることがわかる。いま, 式(16)の解 $\eta^{(2)}$ を求めやすいように, その右辺である式(17)の円柱関数を, 式(12)を用いて三角関数で近似すると, 次式のようになる。

$$\begin{aligned} \text{式(16)の右辺} = \cos 2\sigma t \\ \cdot \left[-3 a^2 \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{5}{2} a^2 \frac{g}{\pi} x^{-2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + a^2 \frac{g}{\pi \sigma} \sqrt{gi} \cdot x^{-5/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ + \sin 2\sigma t \cdot \left[3 a^2 \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \right. \\ \cdot \sin \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ \left. + \frac{5}{2} a^2 \frac{g}{\pi} \cdot x^{-2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ \left. - a^2 \frac{g}{\pi \sigma} \sqrt{gi} \cdot x^{-5/2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ \left. + \left[a^2 \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} a^2 \frac{g}{\pi} \cdot x^{-2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - a^2 \frac{g}{\pi \sigma} \sqrt{gi} \cdot x^{-5/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \right. \\ \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

いま, 式(16)の右辺が式(18)で表わされる場合の解 $\eta^{(2)}$ として, 次式を仮定する。

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x, t) = \cos 2\sigma t \cdot A(x) \\ + \sin 2\sigma t \cdot B(x) + C(x) \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

この $\eta^{(2)}$ を式(16)の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} \text{式(16)の左辺} = \cos 2\sigma t \cdot \{ -4 \sigma^2 \cdot A(x) \\ - g \cdot i \cdot x \cdot A''(x) - g \cdot i \cdot A'(x) \} \\ + \sin 2\sigma t \cdot \{ -4 \sigma^2 \cdot B(x) \\ - g \cdot i \cdot x \cdot B''(x) - g \cdot i \cdot B'(x) \} \\ + \{ -g \cdot i \cdot x \cdot C''(x) - g \cdot i \cdot C'(x) \} \\ \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

となる。したがって, 式(20)の $\cos 2\sigma t$ の係数, $\sin 2\sigma t$ の係数および t に無関係な項が, それぞれ式(18)の対応する項に一致するように $A(x)$, $B(x)$ および $C(x)$ をきめれば解 $\eta^{(2)}$ が求まる。そこで, 次式のような表現を与えてみる。

$$\begin{aligned} A(x) = -a^2 \frac{1}{\pi i} x^{-1} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ - \frac{3}{10} a^2 \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \\ \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) = -a^2 \frac{1}{\pi i} x^{-1} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ + \frac{3}{10} a^2 \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \\ \cdot \sin \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) = \frac{1}{4} a^2 \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \\ \cdot \cos \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} - \frac{1}{16} a^2 \frac{g}{\pi \sigma^2} \cdot x^{-2} \\ \cdot \sin \left\{ 2 \left(2 \sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

以上の3式を式(20)に代入すると、結局式(16)の左辺は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \text{式(16)の左辺} &= \cos 2\sigma t \\ &\cdot \left[-3a^2 \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ &+ \frac{5}{2} a^2 \frac{g}{\pi} x^{-2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &+ \frac{27}{40} a^2 \frac{g}{\pi \sigma} \sqrt{gi} \cdot x^{-5/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &+ \sin 2\sigma t \cdot \left[3a^2 \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \right. \\ &\cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &+ \frac{5}{2} a^2 \frac{g}{\pi} x^{-2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &- \frac{27}{40} a^2 \frac{g}{\pi \sigma} \sqrt{gi} \cdot x^{-5/2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &+ \left[a^2 \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ &- \frac{3}{2} a^2 \frac{g}{\pi} \cdot x^{-2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &- a^2 \frac{g}{\pi \sigma} \sqrt{gi} \cdot x^{-5/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &+ \left. \frac{1}{4} a^2 \frac{g^2}{\pi \sigma^2} \cdot i \cdot x^{-3} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \\ &\dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

式(24)を式(18)と比較してわかるように、 $\cos 2\sigma t$ および $\sin 2\sigma t$ にかかる第3項の定係数が異なり、また t に無関係な項では、式(18)にはない第4項が余分にある。ここで、それらの各項の大きさを比較してみる。 $\cos 2\sigma t$ および $\sin 2\sigma t$ の各項は、それぞれ順に $x^{-3/2}$ 、 x^{-2} および $x^{-5/2}$ を含み、 t に無関係な項では式(24)にさらに x^{-3} を含む第4項が存在する。しかも x のべきの等しい項は、定係数を除いて等しい。いま、それらの第2~第4項の大きさを第1項と比較してみると、 $\sigma = 2\pi/T$ および $x = h \cdot i^{-1}$ を考慮して、

$$\begin{aligned} \text{第2項/第1項} &\sim \{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i \\ \text{第3項/第1項} &\sim [\{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i]^2 \\ \text{第4項/第1項} &\sim [\{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i]^3 \end{aligned}$$

となり、第1、第2、第3および第4項の順に底勾配 i のオーダーで小さくなるのがわかる。

式(18)と式(24)を比較して、 $\cos 2\sigma t$ および $\sin 2\sigma t$ にかかる各項の中の定係数が異なる第3項は、第1項と同じく

$$\begin{aligned} &\cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ \text{および} \\ &\sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$

を含み同位相であり、その比は $[\{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i]^2$

であって、たとえば底勾配 1/10、水深 20 cm、波の周期 3 sec の場合を考えると 1/10 以下であり、第3項の定係数の不一致は無視してよいと思われる。また t に無関係な項で、式(24)にのみ存在する第4項は、第2項と同じく $\sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$ を含み同位相であり、その比はやはり $[\{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i]^2$ であって、これも無視してよいことがわかる。

以上の理由から、式(19)と式(21)、式(22)および式(23)を、式(16)を満たす解 $\eta^{(2)}$ とする。結局 $\eta^{(2)}$ は、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x, t) &= \cos 2\sigma t \cdot \left[-a^2 \frac{1}{\pi i} x^{-1} \right. \\ &\cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &- \frac{3}{10} a^2 \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &+ \sin 2\sigma t \cdot \left[-a^2 \frac{1}{\pi i} x^{-1} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ &+ \frac{3}{10} a^2 \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &+ \left[\frac{1}{4} a^2 \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{16} a^2 \frac{g}{\pi \sigma^2} \cdot x^{-2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \dots(25) \end{aligned}$$

なお、式(13)で与えられる線型解 $\eta^{(1)}$ は、式(12)を用いて円柱関数を三角関数で表現すると、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(x, t) &= a \cdot (\sqrt{gi}/\pi\sigma)^{1/2} \cdot x^{-1/4} \\ &\cdot \cos \left(\sigma t + 2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

また、式(25)を、式(26)の $\eta^{(1)}$ と比較しやすいように変形すると、最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x, t) &= a^2/(\pi i) \cdot x^{-1} \cdot \cos \left\{ 2 \left(\sigma t + 2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &+ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{3}{10} \frac{\sqrt{gi}}{\sigma} \cdot x^{-1/2} \right) \\ &+ \left[\frac{1}{4} a^2 \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot x^{-3/2} \cdot \cos \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{16} a^2 \frac{g}{\pi \sigma^2} \cdot x^{-2} \cdot \sin \left\{ 2 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \dots(27) \end{aligned}$$

以後、式(26)で与えられる $\eta^{(1)}$ を第1次近似解、式(27)で与えられる $\eta^{(2)}$ を第2次近似解と名づける。

(4) 解の適用範囲

ここで、これらの解の適用範囲について考えてみる。まず、用いた基本方程式(1)は、いわゆる浅水理論の最低次のものであり、圧力が静水圧に等しいと仮定されており、波長にくらべて水深がある程度以上小さくないと用いられない。いま一樣水深での長波の伝播速度 \sqrt{gh}

を用いると、

$$h/L = 1/(T\sqrt{g/h}) \dots\dots\dots(28)$$

となる。適用しうる h/L の値に上限があることは、 $T\sqrt{g/h}$ の値に下限のあることであり、波の周期が与えられている場合は、水深 h の値に上限があることを意味する。一方、水深 h の値には下限も存在する。すなわち、ここでは、第1次近似解 $\eta^{(1)}$ として式 (13) そのものを用いず、式 (12) の円柱関数の漸近展開を用いて、円柱関数を三角関数でおきかえた式 (26) を用いている。式 (12) は $|w| \rightarrow \infty$ の場合の漸近展開であり、**図-3** に示したようにある程度 $|w|$ の値が大きくないと適用できない。 J_0, N_0, J_1 および N_1 について、それぞれの厳密な値とその漸近展開による値とを比較したところ、 $|w| \geq 1.0$ のときは適用可能であることがわかった。この条件を式 (9) に適用し、 $h=i \cdot x$ の関係を使うと次式のようになる。

$$T\sqrt{g/h} \leq 4\pi/i \dots\dots\dots(29)$$

これから、 $T\sqrt{g/h}$ の値に上限、つまり波の周期が与えられている場合、水深 h に底勾配によって決まる下限があることがわかる。以上の2つの適用限界を図に示したのが **図-4** である。横軸に $T\sqrt{g/h}$ 、縦軸に底勾配 i をとって、その適用範囲が斜線をほどこして示してある。ただし、 $T\sqrt{g/h}$ の下限値は、図に示したように2種類の h/L の限界値について与えてある。

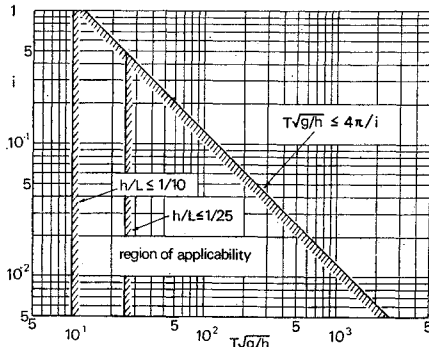


図-4 適用範囲

3. 解の検討

(1) 微小量 α の決定

式 (27) で与えられた $\eta^{(2)}$ の右辺の第2項は、 $x^{-3/2}$ と x^{-2} の項からなり、第1項での x^{-1} の項と大きさを比較するために振幅の比をとると、それぞれ $\{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i$ および $[\{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i]^2$ となり、第2項全体としては、第1項にくらべて $\{(gT/2\pi)/\sqrt{gh}\} \cdot i$ 倍のオーダー小さいことになる。しかも第2項は t に無関係

であるから、静水位に係数するのみで、波高および波形には関係しない。ここでは、1. で述べたように、水深減少に伴う波高の変化に及ぼす底勾配の影響および波形の非対称化に注目しているため、以後の議論では式 (27) の右辺のうち第2項を無視する。

さて、式 (27) で与えられる $\eta^{(1)}$ および式 (27) の右辺の第2項を無視した $\eta^{(2)}$ を式 (2) に代入すると、

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \alpha \cdot a \cdot (\sqrt{gi}/\pi\sigma)^{1/2} \cdot x^{-1/4} \\ & \cdot \cos\left(\sigma t + 2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4}\right) \\ & + \alpha^2 \cdot a^2 / (\pi i) \cdot x^{-1} \cdot \cos\left\{2\left(\sigma t + 2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}} - \frac{\pi}{4}\right)\right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{3}{10}\sqrt{\frac{gi}{\sigma}} \cdot x^{-1/2}\right)\right\} + \dots \dots\dots(30) \end{aligned}$$

となる。ここで、微小量 α としては、2. (4) で述べたこの理論の適用範囲の最深点での水深 (以後 h_1 とする) を、微小振幅波の沖波波長 $L_0 = gT^2/2\pi$ でわった値 h_1/L_0 をとる。式 (30) のパラメータ α に、

$$\alpha = h_1/L_0 \dots\dots\dots(31)$$

を代入すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \eta/h_1 = & (a/L_0) \cdot (\sqrt{gi}/\pi\sigma)^{1/2} \cdot x^{-1/4} \cdot \cos \theta \\ & + (a/L_0) \cdot (h_1/L_0) \cdot (\pi i)^{-1} \cdot (a/x) \\ & \cdot \cos(2\theta + \delta) \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \theta = & \sigma t + 2\sigma\sqrt{x/gi} - \pi/4 \\ \delta = & \pi/2 + \tan^{-1}\left(3/10 \cdot \sqrt{gi}/\sigma \cdot x^{-1/2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(33)$$

(2) 定数 a の決定

水深 h_1 における波高 H_1 と定数 a との関係を知るため、式 (32) を簡単に、

$$\eta/h_1 = A^{(1)} \cdot \cos \theta + A^{(2)} \cdot \cos(2\theta + \delta) \dots\dots(34)$$

と書く。ここで、 $A^{(1)}$ および $A^{(2)}$ は式 (32) の各項の係数であり、若干の変形を行なうと次式のようになる。

$$\begin{aligned} A^{(1)} = & 2^{-1/4} \cdot \pi^{-3/4} \cdot i^{1/2} \cdot (h_1/L_0)^{3/4} \cdot (h_1/h)^{1/4} \cdot (a/h_1) \\ A^{(2)} = & \pi^{-1} \cdot (h_1/L_0)^2 \cdot (h_1/h) \cdot (a/h_1)^2 \end{aligned} \dots\dots\dots(35)$$

また、 θ および δ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \theta = & 2\pi/T \cdot t + 2\pi \left\{ \sqrt{2/\pi} \cdot (h/L_0)^{-1/2} \cdot x/L_0 - \pi/4 \right\} \\ \delta = & \pi/2 + \tan^{-1} \left\{ 3/10 \cdot (2\pi)^{-1/2} \cdot i \cdot (h/L_0)^{-1/2} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(36)$$

$h=h_1$ での $A^{(1)}$ および $A^{(2)}$ を、それぞれ $A^{(1)_1}$ 、 $A^{(2)_1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} A^{(1)_1} = & 2^{-1/4} \cdot \pi^{-3/4} \cdot i^{1/2} \cdot (h_1/L_0)^{3/4} \cdot (a/h_1) \\ A^{(2)_1} = & \pi^{-1} \cdot (h_1/L_0)^2 \cdot (a/h_1)^2 \end{aligned} \dots\dots\dots(37)$$

となる。なお、式 (36) で与えられる δ のうち $\tan^{-1}\{\}$ の部分は、 $\pi/2$ にくらべて小さく、ここでは簡単のため

に $\delta \neq \pi/2$ とする。したがって η_1/h_1 は、

$$\begin{aligned} \eta_1/h_1 &= A_1^{(1)} \cdot \cos \theta + A^{(2)}_1 \cdot \cos (2\theta + \pi/2) \\ &= A^{(1)}_1 \cdot \{\cos \theta - (A^{(2)}_1/A^{(1)}_1) \cdot \sin 2\theta\} \\ &= A^{(1)}_1 \cdot f(\theta) \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(\theta)$ は次式で与えられる。

$$f(\theta) = \cos \theta - b \cdot \sin 2\theta, \quad b = A^{(2)}_1/A^{(1)}_1 \dots\dots\dots (39)$$

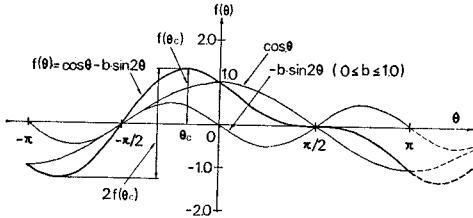


図-5 $f(\theta)$ の波形

図-5 は、 $f(\theta)$ を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲で示したものである。式 (34) で与えられる波形の波高 H_1/h_1 は、図-5 の $\theta = \theta_c$ における縦軸の値 $f(\theta_c)$ から、 $A^{(1)}_1 \times 2f(\theta_c)$ で与えられることは明らかである。 θ_c は、 $df/d\theta = 0$ から求まる。すなわち、

$$\begin{aligned} df/d\theta &= -\sin \theta - 2b \cdot \cos 2\theta \\ &= -\sin \theta_c - 2b \cdot (1 - 2\sin^2 \theta_c) = 0 \dots\dots (40) \end{aligned}$$

であるから、 $\sin \theta_c$ は、

$$\sin \theta_c = (1/4 b \pm \sqrt{1/16 b^2 + 2})/2$$

で与えられる。ただし、図-5 からわかるように、 $-\pi/2 \leq \theta_c \leq 0$ であるから、 $\sin \theta_c \leq 0$ である。結局、 $\sin \theta_c$ は、次式で与えられる。

$$\sin \theta_c = (1/4 b - \sqrt{1/16 b^2 + 2})/2 \dots\dots\dots (41)$$

一方、 $f(\theta_c)$ は、式 (39) から、

$$\begin{aligned} f(\theta_c) &= \cos \theta_c - b \cdot \sin 2\theta_c \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} \cdot (1 - 2b \cdot \sin \theta_c) \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

であるから、 b を与えて式 (41) から $\sin \theta_c$ 、式 (42) から $f(\theta_c)$ が求まる。すでに述べたように、式 (38) から $h=h_1$ における波高 H_1 は、次式で与えられる。

$$H_1/h_1 = 2 \times A^{(1)}_1 \cdot f(\theta_c) \dots\dots\dots (43)$$

上式において、 $A^{(1)}_1$ は式 (37) でわかるように a/h_1 の関数であり、 $f(\theta_c)$ もまた $b(=A^{(2)}_1/A^{(1)}_1)$ すなわち a/h_1 の関数である。したがって式 (43) から a/h_1 を求める場合、実際にはくり返し計算を行なう必要がある。

ここで、式 (34) で与えられる解の意味を検討するために、 h_1 においてはその右辺の第2項は第1項にくらべて小さく無視しうるものと仮定する。したがって、第1項すなわち第1次近似解の振幅の2倍が H_1 となり、この関係を用いて式 (34) を変形すると、結局、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \eta_1/h_1 &= 1/2 \cdot (H_1/h_1) \cdot (h_1/h)^{1/4} \cdot \cos \theta \\ &\quad + \sqrt{2\pi} \cdot (h_1/L_0)^{1/2} \cdot i^{-1} \cdot (H_1/2 h_1)^2 \end{aligned}$$

$$\cdot (h_1/h) \cdot \cos (2\theta + \delta) \dots\dots\dots (44)$$

式 (44) からわかるように、線型解である右辺第1項の振幅は、水深 h の $1/4$ 乗に逆比例し、底勾配 i には無関係である。これは従来、反射および波のエネルギーの損失がない場合のきわめて緩やかな斜面上での長波の変形に関する Green の法則¹⁴⁾として知られているものに一致する。一方、非線形の効果を表わす第2項は、第1項とくらべて、その振幅は水深 h の1乗に逆比例し、水深の減少に伴う増加の割合が第1項よりはるかに大きい。さらに、 h_1/L_0 および底勾配 i にも関係し、特に、従来明確な表現がなされていなかった底勾配 i の影響については、 i に逆比例して振幅が増大することがわかる。著者らはさきに、Laitone¹⁵⁾ のクノイド波の第2次近似解の近似表現であるハイパボリック波理論のエネルギー・フラックス法に基づく有限振幅長波の shoaling についての研究^{2),5)} (図-7 (1) 参照) を発表しているが、この研究の第1段階として、それ以前に著者の1人¹⁶⁾はその第1次近似の波高変化の理論式を求めている。その理論式によると、波高・水深比が小さい場合、波高が水深に逆比例して変化し、式 (44) の第2項の振幅と水深の関係と一致する結果が得られることは興味深い。さらに、第2項は第1項の $1/2$ の周期を有し、しかも δ だけ位相が進んでいる。式 (36) からわかるように、 δ は $\pi/2$ と $\tan^{-1}\{(3/10) \cdot (2\pi)^{-1/2} \cdot i \cdot (h/L_0)^{-1/2}\}$ とからなり、後者は水深の減少に伴って増加する。したがって、後述するように、この位相差によって、波形が前かがみになることが説明できるのである。

4. 数値計算結果

(1) 数値計算における制限

すでに図-4 で示したように、この理論には、圧力として静水圧分布を仮定していること、および円柱関数を三角関数で近似したことによって、与えられた波の周期 T および底勾配 i によってきまる h の適用範囲がある。特に、静水圧分布の仮定によって決まる適用範囲の最深点の水深 h_1 (図-1 参照) は、適用限界における h/L の値のとり方によってかわる。式 (1) で与えられる浅水近似の最低次のものの適用範囲としては、たとえば、

$$h/L \leq 1/25$$

という関係が提案されているが¹⁷⁾、ここではその範囲を若干拡大し、

$$h/L \leq 1/20 \dots\dots\dots (45)$$

をとる。式 (28) から式 (45) の関係は、

$$T \sqrt{g/h} \geq 20 \dots\dots\dots (46)$$

となり、微小振幅波の沖波波長 $L_0 = gT^2/2\pi$ を用いると、結局適用範囲の最深点 h_1 は次式で与えられる。

$$h_1/L_0 = 0.0157 \dots\dots\dots (47)$$

さて、式 (34) および式 (35) で与えられる η/h の関係を用いて、一様な勾配 i の斜面上での水深減少に伴う波高および波形の変化を求めるには、水深 h_1 での波高 H_1 をあらかじめ与える必要がある。ここでは、すでに著者らがハイパボリック波の理論を用いて求めた、有限振幅長波の水深変化による波高変化の理論曲線⁵⁾を用いて、 h_1 での波高 H_1 を与えることにする。すなわち、沖波波形勾配 H_0/L_0 (H_0 : 沖波波高) を与え、 $h_1/L_0 = 0.0157$ ($h_1/L_0 = 1/20$) における H_1/H_0 の値を上述の理論曲線から求め、これらの値から $H_1/h_1 = (H_1/H_0) \times (H_0/L_0)/(h_1/L_0)$ を求める。なお、ハイパボリック波の理論曲線から、 $h_1/L_0 = 0.0157$ では、 $H_0/L_0 \geq 0.006$ の波はすでに砕波を起しており、この理論が適用される波の沖波波形勾配はかなり小さい値に限られることになる。

さらに底勾配 i を与えれば、3.(2) で述べたように、 a/h_1 を求めることができる。ただし、実際に計算するとわかるが、同じ沖波波形勾配に対し、底勾配が小さくなるほど、また同じ底勾配 i に対し、沖波波形勾配が大きくなるほど $A^{(2)}/A^{(1)}$ の値が大きくなり 1 に近い値になる。この理論の適用範囲としては、2.(4) で述べたように底勾配 i によって $T\sqrt{g/h}$ の最大値が与えられていたが、ここではさらに式 (35) で与えられる第 2 次近似解の係数 $A^{(2)}$ が第 1 次近似解の係数 $A^{(1)}$ より小さい範囲を限界として計算を行なうことにする。したがって H_0/L_0 の値が大きくなるほど、計算しうる底勾配の値は大きい値に限られてくる。

(2) 数値計算結果

具体的な数値計算は、沖波波形勾配 H_0/L_0 が 0.004, 0.002, 0.001, 0.0004, 0.0002 および 0.0001 の場合について行なった。(1) で述べたように、計算をはじめの最大水深を $h_1/L_0 = 0.0157$ として、エネルギー・フラックスの方法による理論曲線⁵⁾からそれぞれの H_0/L_0 に対応する H_1/H_0 を求め、さらに底勾配 i を与えれば、3.(2) で述べたように a/h_1 が求まる。底勾配 i としては、1/10, 1/20, 1/30, 1/50, 1/100 および 1/200 の 6 種類の値を与えたが、(1) で述べた底勾配に対する制限から、 $H_0/L_0 = 0.001$ に対しては 1/100 より、 $H_0/L_0 = 0.002$ に対しては 1/50 より、 $H_0/L_0 = 0.004$ に対しては 1/20 より大きい勾配についてだけ計算を行なった。

すでに 2.(4) の適用範囲のところでも述べたように、計算可能な水深 h には最小値が存在する。その関係は式 (29) で与えられるが、微小振幅波の沖波波長 L_0 を用いると、

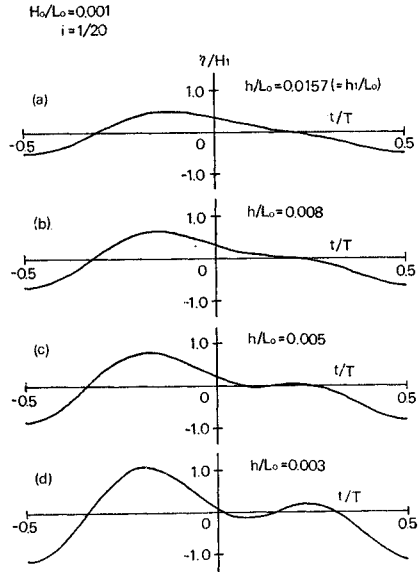


図-6 水深減少による波形変化

$$h/L_0 \geq i^2/8\pi \dots\dots\dots (48)$$

となる。したがって、この最小値は底勾配 i によってきまり、上述の計算を行なう i については、1/10 に対する約 0.0004 が最大である。実際には、計算を行なった最小の水深 h/L_0 は 0.0003 とした。ただし、水深が減少するにつれて、 $A^{(2)}/A^{(1)}$ の値は増加するので、 $A^{(2)}/A^{(1)} = 1.0$ になったところで計算をうち切った。

このような手順で、各 H_0/L_0 に対する各 i について、 h/L_0 を h_1/L_0 から順次小さくして、式 (34) および式 (35) から、それぞれの h/L_0 における η/h_1 を求めた。なお、数値計算はすべて京都大学大型計算機センターによった。その結果の一例が図-6 である。ただし、図中では、 η/h_1 のかわりに H_1/h_1 でわった η/H_1 を示している。横軸は t/T をとって、波の 1 周期における時間的な波形を示している。この例は、 $H_0/L_0 = 0.001$ で $i = 1/20$ の場合であり、上から順に、 h/L_0 が減少する。(a) は適用範囲の最深点にあたる $h/L_0 = h_1/L_0$ であり、この場合の $A^{(2)}/A^{(1)}$ は約 0.25、最後の (d) は $h/L_0 = 0.003$ の場合で、 $A^{(2)}/A^{(1)} = 0.85$ である。4 つの波形 η はすべて最深点での波高 H_1 でわっており、(a) における $(\eta/H_1)_{\max} - (\eta/H_1)_{\min} = 1.0$ から、(b), (c), (d) と水深が浅くなるにつれてその値は増加し、(d) では 2 以上になっている。しかも、波形は、波の峯の前面がしだいにきりたち、後面ではしだいにゆるやかになって、非対称な前かがみの形になっていくことがわかる。このように、いままで理論的に明らかにされていなかった水深減少による波形の非対称化がこの解によって説明できる。

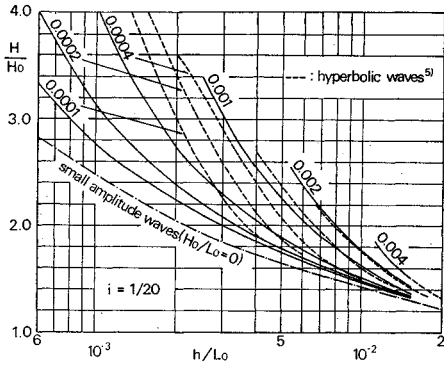


図-7 (1) 波高変化に及ぼす沖波波形勾配の影響

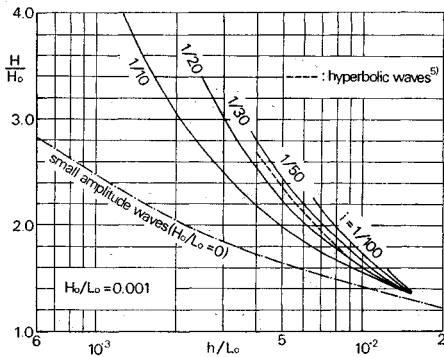


図-7 (2) 波高変化に及ぼす底勾配の影響

いま波高の変化に注目し、従来の shoaling の理論曲線と同様に、横軸に h/L_0 、縦軸に H/H_0 をとって示した例が、図-7 (1), (2) である。(1) は底勾配 $i=1/20$ で沖波波形勾配 H_0/L_0 をかえた場合、(2) は $H_0/L_0=0.001$ で i をかえた場合である。なお (2) の場合は、上述のように $i=1/200$ については計算していない。図中同時に示している破線は、ハイパボリック波のエネルギー・フラックス一定の仮定から求めた理論曲線⁵⁾であり、一方、一点鎖線は同様に微小振幅波理論によるものである。図では $H/H_0 \leq 4.0$ の範囲で示しているが、理論曲線が $H/H_0 < 4.0$ でおわっているものは、そこで $A^{(2)}/A^{(1)}=1.0$ になったことを意味している。ここで示さなかった計算結果をも含めて、次のようなことがいえる。

まず、いずれの場合も微小振幅波理論のエネルギー・フラックス一定の仮定から得られた値よりも大きく、水深の減少に伴う波高増加の割合は大きい。また、ハイパボリック波の理論曲線と同様、沖波波形勾配が大きいほど、同じ底勾配の値に対して波高増加の割合は大きい。ただし、値そのものは、図-7(1) でも見られるように、同じ底勾配に対して、沖波波形勾配が小さくなるほどハイパボリック波の理論値よりその増加の割合は小さくなる。同じ沖波波形勾配に対して、底勾配 i が小さいほど

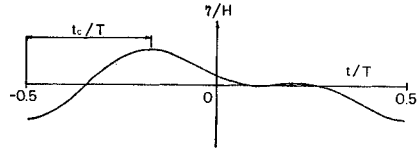


図-8 波形の非対称性のパラメータ t_c/T

ど波高増加の割合は大きい。この傾向は、式 (44) の右辺第 2 項の係数に i^{-1} が含まれていることから予想でき、この事実は水深の変化に伴う波高の変化に関し、従来理論的に明らかにされていなかった底勾配の影響を明らかにしたものである。

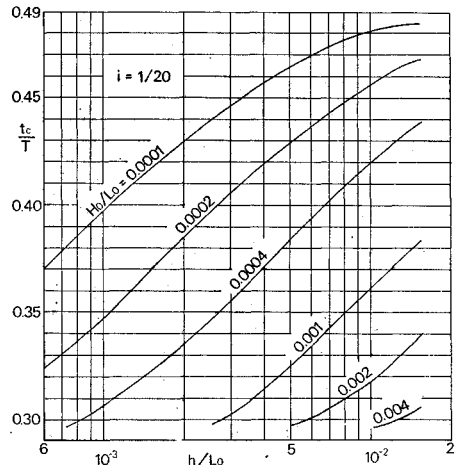


図-9 (1) 水深減少による波形の非対称化に及ぼす沖波波形勾配の影響

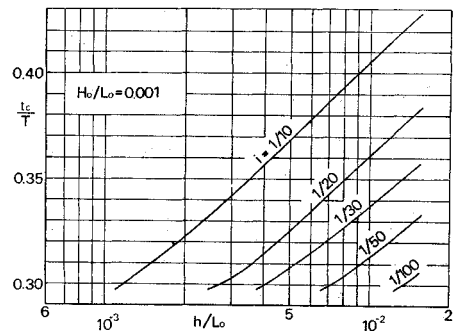


図-9 (2) 水深減少による波形の非対称化に及ぼす底勾配の影響

次に、図-6 に示した時間波形において、前面の谷から峰までの時間を t_c (図-8 参照) として、 t_c/T の水深減少による変化の例を示したのが 図-9 (1), (2) である。図-7 (1), (2) と同様、(1) は底勾配 $i=1/20$ の場合、(2) は沖波波形勾配 $H_0/L_0=0.001$ の場合である。図から、水深の減少に伴い t_c/T の値が減少し、波形が前かがみな非対称な形になっていくことが明らかである。図に示した例をも含めて、同じ底勾配に対しては沖

波波形勾配が大きいほど、また同じ沖波波形勾配に対しては底勾配が緩やかなほど同一の h/L_0 に対し波形がより非対称な前かがみの形になることがわかる。なお、1. で述べたように、Biesel⁷⁾ は波形の非対称性を表現する量として、波の峯の前面の勾配と後面の勾配の平均値をとり、その値を理論的に導いているが、ここでとりあげた t_c/T は、Adeyemo¹⁸⁾ が実験的に検討したいわゆる“wave horizontal asymmetry”に対応するものである。波形の非対称性が水粒子速度の時間変化の非対称性に対応し、したがって、構造物に加わる波力あるいは底質の運動に影響することを考えれば、ここでとりあげた t_c/T は、Biesel のパラメータ以上に重要な工学的意味を有するものと考えられる。

5. 従来の実験結果との比較

以上の理論結果の妥当性を検討するため、従来の実験結果と比較してみる。水深変化による波高変化に及ぼす底勾配の影響あるいは波形の非対称性に関する従来の研究はきわめて少なく、また理論の適用水深がかなり小さいため、直接比較しうる実験結果はきわめて少ない。

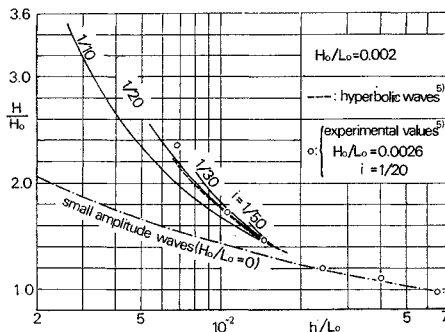


図-10 波高変化の理論曲線と従来の実験結果⁵⁾との比較

図-10 は、 $H_0/L_0=0.002$ の場合の波高変化の理論曲線を、著者らがかつて行なった shoaling の実験結果⁵⁾ から $i=1/20$, $H_0/L_0=0.0026$ の場合の波高変化の実験値を引用し比較したものである。 $H_0/L_0=0.0026$ という値は、この実験のケースの値の中でもっとも小さいものであり、そのつぎに小さい値が 0.0060 で、すでにこの理論の適用範囲外であるため、比較しうる唯一のケースである。理論と実験の H_0/L_0 の値は正確には一致していないが、 $i=1/20$ の理論曲線と実験値はほぼ一致しているといえる。ただし、図-10 の実験値はたまたま理論値と一致したとも考えられる。いずれにせよ、 H_0/L_0 の値のさらに小さい場合の実験結果がなく、しかも 1/20 以外の底勾配についての実験結果がないため、これ以上

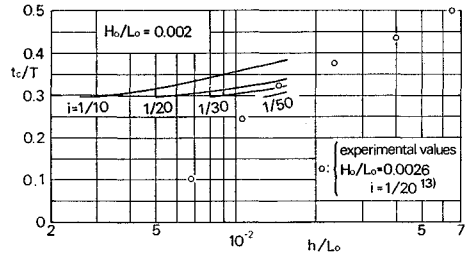


図-11 波形の非対称性の変化の理論曲線と従来の実験結果¹⁸⁾との比較

の検討はできない。

最後に、図-9 に例として示した波の非対称性を表すパラメータ t_c/T の変化の理論曲線を、実験結果¹⁸⁾と比較したものが、図-11 である。理論曲線は、実験結果と同じく水深の減少とともに t_c/T が減少する傾向を示しており、波形の前かがみの程度が増すことを示しているが、 $i=1/20$ の理論曲線の存在する範囲がせまく、しかもその範囲では実験値は理論値よりもはるかに小さくなっている。図-10 の波高変化の場合と同様、他の実験結果がないため、これ以上の論議はできない。

以上のように、比較しうる従来の実験結果がきわめて少なく、しかも波形の非対称性については、その数少ない実験結果とも定量的には一致せず、定性的にその傾向を説明し得たにすぎない。波形に関しても、一般に実験波形は一樣水深の場合と同様、水深・波長比の小さい波の特性として、波の峯がすどく谷が平坦で、波の谷と静水位との間の距離が半波高より小さいのに対して、図-6 に例示した理論波形は、谷と静水位との間の距離がほぼ半波高に等しい。このような理論と実験結果との相違の原因として、砕波点に近づくにつれて非線型性が增大し、第2次近似解では次数が十分でないことが考えられる。

6. あとがき

本研究は、従来理論的に明らかにされていなかった、斜面上を進行し変形して砕波にいたる波の、水深減少による波高変化に及ぼす底勾配の影響と波形の非対称化を理論的に明らかにするため、第1次の浅水理論を用い、せつ動法によって、一様勾配斜面上を進行し変形する有限振幅長波の解を求め、その結果を検討し図示するとともに、数少ない従来の実験結果と比較検討したものである。

水深減少による波高増加に及ぼす底勾配の影響については、同じ沖波波形勾配に対し、底勾配が緩やかなほど波高増加の割合の大きいことが理論的に明らかにされた。

水深減少による波形の非対称化に関しては、水深減少とともに波形がより前かがみな非対称な形になることを理論的に明らかにし、定性的には従来の実験結果の傾向と一致することを示すとともに、沖波波形勾配が大きいかほどまた底勾配が緩やかなほど、同じ水深・沖波波長比に対してその傾向が著しいことを理論的に明らかにした。

この研究は著者らが数年来続けている有限振幅波とその shoaling に関する研究の一部をなすものであり、これまでに得られた多くの新しい知見とともに、この研究成果がこの方面の学問の進歩と実際問題への応用に貢献できれば幸いである。

参 考 文 献

- 1) Le Méhauté, B. and L.M. Webb : Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order of approximation, Proc. 9th Conference on Coastal Engineering, pp. 23-40, 1964.
- 2) 岩垣雄一・酒井哲郎 : 有限振幅波の shoaling について, 第 14 回海岸工学講演会講演集, pp. 1-7, 1967-10.
- 3) Friedrichs, K.O. : Water waves on a shallow sloping beach, Comm. on Pure and Applied Math., Vol. 1. pp. 109-134, 1948.
- 4) Tlapa, G.A., C.C. Mei and P.S. Eagleson : An asymptotic theory for water waves on beaches of mild slope, M.I.T. Hydrodynamics Laboratory Report No. 90, 1966.
- 5) 岩垣雄一・酒井哲郎 : 有限振幅波の shoaling について (2), 第 15 回海岸工学講演会講演集, pp. 10-15, 1968-12.
- 6) 合田良実 : 砕波指標の整理 について, 土木学会論文報告集 No. 180, pp. 39-49, 1970-8.
- 7) Biesel, F. : Study of wave propagation in water of gradually varying depth, Gravity Waves, Circular No. 521, Nat. Bureau of Standard Washington D.C., 1951.
- 8) Stoker, J.J. : Water Waves, Interscience Pub., Inc., New York, pp. 22-32, 1957.
- 9) 本間 仁 : 長波の変形について, 土木学会誌, 第 19 卷, 1933.
- 10) Carrier, G.H. and H.P. Greenspan : Water waves of finite amplitude on a sloping beach, Jour. of Fluid Mech., Vol. 4, pp. 97-109, 1958.
- 11) Ichiye, T. : Some remarks on the non-linear theory of shallow water waves on a sloping beach, The Oceanographical Magazine, Vol. 4, No. 4, Japan Meteorological Agency, pp. 159-166, 1953.
- 12) Bourodimos, E.L. and A.T. Ippen : Wave transformation in an open channel transition, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. HY. 5, pp. 1317-1329, 1968.
- 13) 岩垣雄一・酒井哲郎 : クノイド波に関する研究 (第 7 報) — shoaling に関する実験 —, 京大防災研究所年報, 第 12 号 B, pp. 569-583, 1969-3.
- 14) Green, G. : On the motion of waves in a variable canal of small depth and width, Camb. Trans. Vol. VI, 1837.
- 15) Laitone, E.V. : The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. of Fluid Mech., Vol. 9, pp. 430-444, 1961.
- 16) 岩垣雄一 : 波の変形論, 1967 年度水工学に関する夏期研修会講義集, B. 海岸・港湾 コース, 土木学会水理委員会, 1967-8.
- 17) 石原藤次郎・本間 仁 : 応用水理学, 上, 丸善, p. 126. 1957.
- 18) Adeyemo, M.D. : Effect of beach slope and shoaling on wave asymmetry, Proc. 11th Conference on Coastal Engineering, pp. 145-172, 1968.

(1971.6.16・受付)