土木学会論文報告集
第 196 号・1971 年 12 月

カット法による交通量配分

TRAFFIC ASSIGNMENT BY CUT METHOD

飯田恭敬*・井上博司**・魚住隆彰***
By Yasunori Iida, Hiroshi Inoue and Takaaki Uozumi

1. まえがき

カット法はもともと,「各 OD 交通ごとに,その間に存在する経路のうち,利用する経路については走行時間が同じで,利用しない経路についてはそれ以上の時間を要する」という等時間原則配分を解析的に行なおうとするために考えてきたものである[1]。その特徴は,OD 交通量が与えられたとき,道路網を切断(カット)したときの断面交通量に関するカット方程式と,ノード間(OD 交通)の等時間方程式から成る連立方程式によって,道路区間交通量を求めようとするところにある。この方法を著者らは便宜上カット法と呼んでいる。

従来,交通量配分を解析的に行なう場合の変量の取り扱い方は,各OD交通ごとに選択する経路の交通量(パスフロー)を変量とする[2]か,あるいは,同じく各 OD 交通ごとに経由する道路区間の交通量(リンクフロー)を変量とする[3]ことが多く,区間交通量は各道路区間でそれらを合計することによって求められていた。しかし,このような方法によれば対象道路網が大規模になった場合,取扱う変量の数がおびただしい数になるので,計算機容量の制限からも特別な計算方法を考えないかぎり,事実上計算が不可能となってしまう。その点,カット法では未知数の数は道路区間(リンク)の数だけでよいので,従来の方法にくらべると取扱い変量の数は著しく少なくてすむ。

こうした計算技術上の有利さもさることながら,カット法を考えるに至ったのは次のような理由も大きい。著者はさきに,等時間原則を満足する各区間交通量が定まっても,各OD交通の経路交通量(パスフロー)あるいは経由区間交通量(リンクフロー)は一意的に定まらないことを明らかにしてきた。このことはすなわち,区間交通量を構成するOD交通の内訳は任意でよいことを示している[4]。したがって,道路網計画というマクロな観点に立てば,各道路区間の交通量が求まれば十分であるし,必要であれば逆に,区間交通量さえ求まれば,何らかの仮定を導入することによって,パスフロー,リンクフローは算出することができるからである。

カット法による等時間原則配分についてはすでに理論的単純さを求める意味から,三角型道路網にかぎってその定式化と計算方法を提示してきた[5]。その計算方法を簡単に述べると,各OD交通量を一定の割合で漸増させながら,連立方程式によって求められる配分結果から,等時間経路が新たに生起あるいは消滅するかどうか検討する。そして,等時間経路に変更があるとそのつどこれらの等時間経路に対応した一次独立なカット方程式を探索し直し,同様な配分計算を所定のOD交通量に達するまで実行していく方法である。なお,このとき各道路区間の走行時間と交通量の関係を表わす容量関数は線型であると仮定している。しかし,この計算方法における今後の課題として,等時間パターンに対応した一次独立なカットを計算機内で自動的に探索するアルゴリズムを開発すること,OD 交通量漸増のきざみをもっと能率的な方法で行なうことが残されていた。本論文はこれらの理論を一般型道路網に拡張するとともに,こうした計算上の改良を行なったものである。

ところで,交通量配分における等時間原則と総走行時間最小化原則の関係については,容量関数の形を変換すればまったく同じ方法で取扱えることがすでに明らかになっている[6]。したがって,等時間原則配分を対象としてきた上述のカット法はそのまま総走行時間最小化配分にも適用できる。さらには,容量関数がたとえ非線型となっても,計算過程においてそのつど接線による線型近似を行なうか[7],あるいは容量曲線を折れ線で近似していままでのようにOD交通量を漸増させること[8]によって配分計算は実行できる。

等時間原則による交通量配分は Wardrop[9] (1952) 以来,数多くの研究者によって試みられてきたが,最近に至るまでこの原則が常に満たされる解析的な方法は確立されなかった。繰返計算による方法では Wayne 法[10]が比較的よく知られており,この方法は収束に対する理

* 正会員 工修 金沢大学講師 工学部土木工学教室
** 正会員 工修 京都大学助手 工学部交通土木工学教室
*** 正会員 工修 名古屋鉄道株式会社

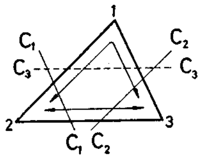
論的保証はないにせよ，これまでの経験から等時間原則を満たすであろうといわれている。また，最近では個々のOD交通についての等時間原則が成立するように繰返計算を行なうことによって解を求める方法も提案されている[11]。しかし，本論文は等時間原則配分を解析的に行なおうとするものであり，本カット法によりその解は常に求めることができる。

以下では，まず等時間原則配分を中心にカット法の定式化と一般性について説明する。ついで，計算機による演算処理を容易にするため，カット条件式と等時間条件式の行列表現を行ない，また，その探索法についても簡単にふれる。その後，等時間パターンが逐次変化するようにOD交通量を増加させて行なう配分計算の手順を述べ，あわせて簡単な計算例を示しておく。

2. カット法の定式化と一般性

ここでは，まず三角型道路網におけるカット法の定式化とその一般性について述べ，そのあと一般型道路網へと議論を進める。三角型道路網を対象とする理由は，交通量配分のようなマルティコモディティ・ネットワークフローをカット法で解析していく場合，その取扱いが比較的簡単であるし，また理解も容易であろうと思われるからである。しかし，三角型道路網においてなされる議論は，一般型道路網においてもなんら普遍性は失うものではない。

はじめに，図—1 のような単一の三角ネットで，すべてのノード間に OD 交通量がある最も単純な例を考える。そして，このとき矢印で示すような等時間パターンが成立しているものとする。このことは，OD 交通 2-3 には等時間経路が存在し，他のOD交通は最短経路のみを選択することを意味している。ここで，道路区間 ij の交通量を X_{ij}, OD 交通 m-n の交通量を Q_{mn} で表わし，区間走行時間 T_{ij} とその交通量の関係（容量関数）を次のような一次式で仮定しておく。



図—1　等時間パターンとカットの方法

$$T_{ij}=a_{ij}X_{ij}+b_{ij} \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし，a_{ij} および b_{ij} は道路区間 ij に固有の定数である。そうすると，図—1 においては次のような等時間条件式が成立している。

$$T_{23}=T_{12}+T_{13} \quad \cdots\cdots(2)$$

すなわち，式 (2) は式 (1) から次のようになる。

$$a_{23}X_{23}+b_{23}=(a_{12}X_{12}+b_{12})+(a_{13}X_{13}+b_{13}) \quad \cdots\cdots(3)$$

次に，断面交通量に関するカット方程式を作成するが，そのときのカットは断面交通量が定まるように行なわねばならない。図—1 では以下のような3個のカット条件式が形成される。

カット C_1　$X_{12}+X_{23}=Q_{12}+Q_{23} \quad \cdots\cdots(4)$

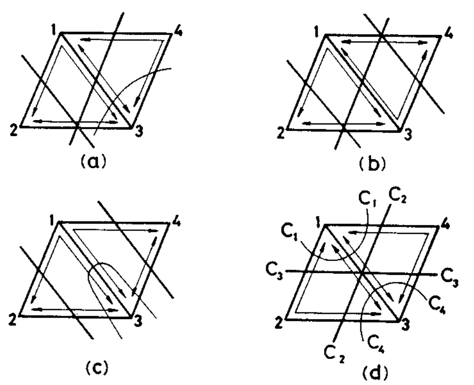
カット C_2　$X_{23}+X_{13}=Q_{23}+Q_{13} \quad \cdots\cdots(5)$

カット C_3　$X_{12}-X_{13}=Q_{12}-Q_{13} \quad \cdots\cdots(6)$

このうちカット C_3 においては，$X_{12}+X_{13}$ となるようなカット条件式はOD交通2-3の経路をただ1本だけしか切断していないので交通量が定まらず樹立できないが，このOD交通2-3の経路2-1-3の交通量を消去するように，式 (6) のようなカット条件式を作れば樹立できる。ところが，式 (4),(5),(6) のいずれの式も他の2式によって導出することができるので，これらは一次独立な条件式とはなっていない。したがって，図—1 のような等時間パターンが成立する単一の三角形内では，一次独立なカット条件式は2個となる。以下では議論を単純化するため，式 (6) のようなカットは考えないことにし，式 (4),(5) のようなカットだけを対象とする。

このようにカット法を用いることによって，区間交通量は等時間条件式1個とカット条件式2個から成る連立方程式によって求めることができる。このとき，単一の三角形内では後で述べるように，等時間経路が存在するパターンはせいぜい1個であるから，図—1 のような等時間パターンが成立する場合と，成立しない場合を考えておけば十分である。前者の場合はいま説明した方法で解は求められるし，後者の場合はすべてのOD交通が最短経路のみを選択する場合であるから自明の解である。

以上のことから，単一の三角形ではカット法の有効なことはわかったが，大規模な三角型道路網になっても常に可能かどうか検討しておく必要がある。この一般性についての証明は，道路網の形状と等時間パターンの組合せによりカットの形が異なってくるため困難なので，網を構成するすべての三角形（3個のノードから成るル



図—2　三角形が2個の場合の等時間パターンとカット

ープのこと）に等時間パターンが成立するものとして，一応帰納法的に常に有効であることの説明を行なっておく。ただし，すべてのノード間にOD交通量があるものとする。

まず，図—1 に三角形がもう一つ加わって三角形が2個になった場合について考える。等時間パターンのすべての組合せについてそのカットを示したのが 図—2（図形的に同値であるものは省略している）である。このうち，(d) 図においてはカットは4本形成されるが，下に示す式 (7)～(10) からわかるように，いずれのカット方程式も他の3つのカット方程式を用いて導出できる。したがって，一次独立なカット条件式は，このうち

カット C_1

$$X_{12}+X_{13}+X_{14}=Q_{12}+Q_{13}+Q_{14}+2Q_{24} \quad \cdots(7)$$

カット C_2

$$X_{23}+X_{13}+X_{14}=Q_{23}+Q_{13}+Q_{14}+Q_{24} \quad \cdots\cdots(8)$$

カット C_3

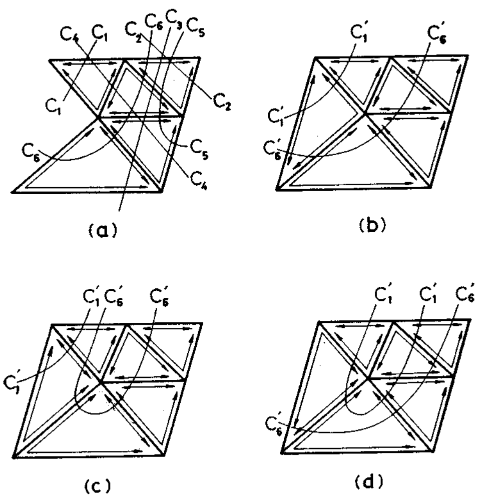
$$X_{12}+X_{13}+X_{34}=Q_{12}+Q_{13}+Q_{34}+Q_{24} \quad \cdots\cdots(9)$$

カット C_4

$$X_{23}+X_{13}+X_{34}=Q_{23}+Q_{13}+Q_{34} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

のどれか3本を取り出せばよい。ただし，このときOD交通2-4は経路2-1-4を通るとした。かくして，図—2では，どの場合も変数（区間交通量）が5個に対して，等時間条件式が2個とカット条件式が3個形成されるので解は一意的に定まる。しかし，もしOD交通2-4に経路2-1-4と経路2-3-4の間で等時間が成り立つとすれば，この間に等時間条件式が樹立され，一方，C_1 と C_4 のカットは交通量が定まらないので，式 (7) と式 (10) はカット条件式からはずされる。よって，このときは等時間条件式3個とカット条件式2個となる。

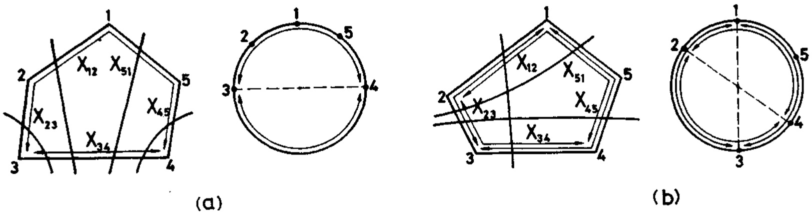
さて，三角形を順次追加し，それぞれの等時間パターンをランダムに生起させて図—3(a) のような道路網と等時間パターンが得られたとする。このときの一次独立なカット方程式を構成するカットも同図に示しておいた。この場合は変数が11個に対し，等時間条件式が5個とカット条件式が6個存在している。この図—3(a)にリンクが1本付加わって，さらに三角形が1個増加したとき，条件式がどのように形成されるかみてみよう。新たに追加される三角形内の等時間パターンのそれぞれについて一次独立なカットを求めてみると，図—3 (b)～(d) 図のようになる。ここで，ダッシュを付しているカットは (a) 図を基底にして作られるカットのことであり，それ以外のカットについてはまったく同じであるから記述は省略した。これから，未知数の数（リンク数あるいは道路区間数）が1個増加したとき，カット条件式は別に増えることもなく，等時間条件式がただ1個増加することがわかる。したがって，未知数と条件式の数は一致しており，やはり連立方程式によって解は得られる。いま説明したのはリンク1個でもって三角形が1個追加される場合であったが，リンク2個でもってなされるときも同様にして説明できる。このときは未知数が2個増えるのに対して，等時間条件式，カット条件式がそれぞれ1個ずつ増加する。これは図—2 の例を参考にすれば容易に理解できるから説明は省略する。



図—3 グラフの成長とカットの変化

以上，三角型道路網では大規模になってもカット法は常に有効であることがわかった。しかし，これらの考え方は道路網が一般型になってもそのまま通用するものである。ただ，一般型道路網の場合，ある多角形ループ（たとえば，5角形ループとは5個のノードから成るループをいう）を取り出したとき，その中では複数個の等時間パターンが同時に成立することがある。したがって，そのような等時間パターンに対応した一次独立なカット条件式を形成するとき，三角型道路網の場合に比べて少し面倒になる。

次に，上述してきた考え方を一般型道路網に適用するため，補足する意味で三角型道路網ではふれなかった点を説明しておく。一般的に，$2n$ 角形あるいは $(2n+1)$ 角形のループ内では，同時に成立し得る等時間パターンはせいぜい n 個まででであることがいえる。これは次のように説明すれば理解が容易であろう。すなわち，あるループ内の各ノード間の走行時間を，いま仮に幾何学的に円周上の弧の長さで表わすなら，中心に関して対称に位置できるノードペアの数はそのループ内のノード数のたかだか半分までだからである。たとえば，五角形ループでは2個のノードペアまで等時間パターンが成立する。この場合の，1個だけが成立しているとき，2個が成立しているときのそれぞれの一例を示したのが図—4である。そして，その区間交通量を求めるための等時間条件



図—4 五角形ループにおける等時間パターンとカットの例

が一様に何割か増えたとき，ループ 1287で (b) 図のような等時間パターンが出現するとしよう。そうすると，このパターンの出現のために，カット C_7 は交通量が定まらず，このカット方程式は成立しなくなる。つまり，新しく等時間パターンが追加されることにより，カット条件式が1個成立しなくなってしまう。結局，このときの等時間パターンとカットは (c) 図のようになる。したがって，条件式の数は不変であるから，やはり連立方程式によって区間交通量が求められる。このようにして一般型道路網でも，カット法は常に有効であることが確かめられる。

式およびカット条件式は図中の等時間パターンとカットがそれぞれ対応している。つまり，等時間パターンが1個の場合はカット条件式が4個，2個の場合なら3個といずれの場合も条件式が5個形成される。このようにして，三角形にかぎらずループが何角形になっても等時間条件式とカット条件式から成る連立方程式によって区間交通量を求めることができる。ただし，どのループ内にも等時間パターンがまったく存在しないときは，連立方程式を解くまでもなく自明の解となる。

いま与えられた道路網内のあるループを取り出したとき，そのループを構成するノード集合のいかなる部分集合も他のループを含まないとき，これを基本ループと定義しておく。三角型道路網の場合では個々の三角ループが基本ループとなっている。ところで，等時間パターンは必ずしも基本ループとはかぎらず，しばしばより大きなループで出現する。しかし，計算を行なうときは，一般的に交通量の増大に伴って等時間パターンの数も増加するので，そのつどできるかぎり基本ループで等時間パターンを表記しておくと，一次独立なカット方程式を作成するときにわかりやすい。

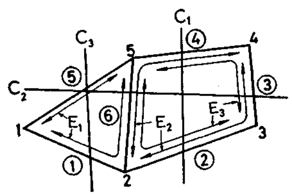
さきに，三角型道路網におけるカット法の一般性を説明するのに，道路網を成長させながら，そのすべての基本ループ内で等時間パターンが存在するものとして議論してきた。しかし，ここでは見方を変えて道路網の形は固定したままで，交通量増大のため等時間パターンが新たに出現したとき，一次独立なカットがどのように変化するか見てみることにする。ある OD 交通量のとき，図—5 の一般型道路網で (a) 図のような等時間パターンとカットが成立しているものとする。そして，OD 交通量

3. 等時間条件式および カット条件式 の 行列表現と探索法

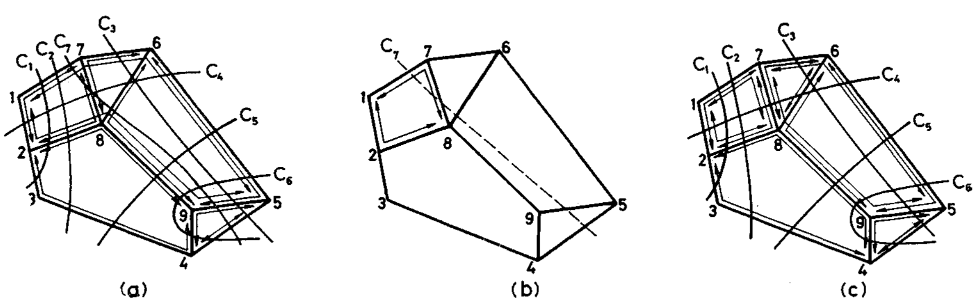
カット法の配分計算は，OD パターン（OD 交通量の相対比）を一定にしておいて交通量を漸増させ，そのつど等時間パターンの追加とこれに対応した一次独立なカットの探索を行なって進めていく。しかし，時には既存パターンが消滅することもある。計算機内でこれらのことを演算処理していくためには，等時間パターンおよびカットを以下のように行列表現しておくと都合がよい。

(1) 等時間条件式

図—6 の道路網において，あるOD交通量のとき，どのOD交通も次の経路行列に示す最短経路のみしか選択しないものとする。この経路行列の要素は，あるOD交



図—6 等時間パターンとカット



図—5 等時間パターンの出現によるカットの消滅

$$
R_1=\text{(OD交通)}
\begin{array}{c}
\text{(リンク)}\\
1\text{-}2\\ 1\text{-}3\\ 1\text{-}4\\ 1\text{-}5\\ 2\text{-}3\\ 2\text{-}4\\ 2\text{-}5\\ 3\text{-}4\\ 3\text{-}5\\ 4\text{-}5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdots\cdots(11)
$$

通の経路がそのリンクを通っておれば 1，そうでなければ 0 となっている。その後，交通量が増加したために，いくつかの OD で既存経路とは別に次のような新たな経路，つまり等時間経路が出現するものとしよう。ただ

$$
R_2=\text{(OD交通)}
\begin{array}{c}
\text{(リンク)}\\
1\text{-}2\\ 1\text{-}3\\ 1\text{-}4\\ 1\text{-}5\\ 2\text{-}3\\ 2\text{-}4\\ 2\text{-}5\\ 3\text{-}4\\ 3\text{-}5\\ 4\text{-}5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdots\cdots(12)
$$

し，実際の計算では，等時間パターンは 1 個ずつ現われるように行なうが，説明の便宜上あえてこのようにしておく。

そうすると，経路行列 R_1 から経路行列 R_2 を差引き，そのうち 1 次独立な行だけを取り出せば，この行列 E は**図—6** の等時間パターンを示すものとなる。

$$
E=\begin{array}{c} \\ E_1\\ E_2\\ E_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}\\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1\\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdots\cdots(13)
$$

ここで，各道路区間の走行時間，交通量，道路定数の b をそれぞれ $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ として列ベクトルで，道路定数の a を $\overset{*}{\boldsymbol{A}}$ なる対角行列で表わすと，**図—6** における等時間条件式は次のように示すことができる。

$$\boldsymbol{ET}=\boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots(14)$$

すなわち，$\boldsymbol{T}=\overset{*}{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$ であるから

$$E(\overset{*}{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots(15)$$

一般的な計算段階で，等時間経路がすでに数多く存在している OD 交通に，新たに等時間経路が追加されるときは，既存経路のうちの任意のどれかと新規経路の間で上記の演算を行ない，そのうちで一次独立なるものだけを既存の等時間パターン行列 E に付け加えていく。このようにして，等時間パターン行列 E が得られれば等時間条件式は簡単に作成される[12]。

（2） カット条件式

グラフの理論では，ノード集合をある部分集合とその補集合に分けたとき，それらの間を結ぶすべてのリンク集合をカットセットと呼んでいる。そして，カットセットは接続行列の適当な行の和（mod 2）をとることによって，すべて行列表示が可能であることが明らかになっている[13]。ここに，接続行列とは縦にノード，横にリンクをとり，その行列要素 ij は，ノード i がリンク j の端点であれば 1，そうでなければ 0 である行列をいう。従って，**図—6** のグラフの接属行列 D は次のようになる。

$$
D=\text{(ノード)}
\begin{array}{c}
\text{(リンク)}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdots\cdots\cdots(16)
$$

ここで，**図—6** においてノード集合を，たとえば，1, 2,5 と 3, 4 に分離するカットセットを求めてみる。このとき，ノード集合のどちらか一方を 1 に，その補集合を 0 とする行ベクトル N_1 を作っておく。そうすると，こ

$$
\begin{array}{ll}
\text{(ノード)} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\\
N_1= & [\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)
\end{array}
$$

のときのカットセット C_1 は N_1 と D の積から以下のように求められる。すなわち，ノード集合を 1, 2, 5 と

$$
\begin{aligned}
C_1&=N_1D\\
&=[1\,1\,0\,0\,1]
\begin{pmatrix}
1\,0\,0\,0\,1\,0\\
1\,1\,0\,0\,0\,1\\
0\,1\,1\,0\,0\,0\\
0\,0\,1\,1\,0\,0\\
0\,0\,0\,1\,1\,1
\end{pmatrix}
\cdots(\mathrm{mod}\ 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{(リンク)} & \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}\\
= & [\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}] \cdots\cdots\cdots\cdots(18)
\end{array}
$$

3,4 に分離するカットセットはリンク②と④から成る集合となる。ところで，カット条件式が樹立されるためには，このカットセットがいずれの等時間パターンも対で切断していなければならない。したがって，カットセット行列と等時間パターン行列の積が 0 となるものが，カット条件式として成立し得る。

$$CE'=0 \quad \cdots\cdots(19)$$

図—6 の例では図中のカットが式（19）を満足する。こ

$$
C=\begin{array}{c} \\ C_1\\ C_2\\ C_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdots\cdots\cdots(20)
$$

のほかにも，式（19）を満足するカットはいくつか存在

するが，いずれも $C_1 \sim C_3$ のカットに対しては一次従属となっている。すなわち，**図—6** の等時間パターンに対応するカットとしては式 (20) のカットで十分なのである。実際計算においてカットを探索する場合は，すでに等時間パターンは決定されているので，これに対する一次独立なカット数も自ずと決まっている。よって，カットセットを順次構成していって，そのうちで式 (19) を満足し，かつ独立なるものがその所要の個数に達するまで計算を行なえばよい。

こうして，カット条件式は次のように形成される。

$$\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{q} \quad \cdots\cdots(21)$$

ここに，$\boldsymbol{q}$ は分離されたノード間の OD 交通量の和からなる列ベクトルである。$\boldsymbol{q}$ の要素 q_i は N_i に対応している。結局，カット法では，式 (15) の等時間条件式と式 (21) のカット条件式からなる連立方程式によって区間交通量が求められる[14]。

4. カット法における交通量漸増のきざみ

カット法では，等時間条件式とカット条件式から成る連立方程式を解くことによって配分計算を行なっていく。しかし，このとき等時間パターン，つまり，どの経路とどの経路の走行時間が等しいということが既知でなければならない。これは，もしそうでなければ，カット方程式を樹立することができないからである。そこで等時間パターンを探索する方法として，いままでは OD パターンを一定にしたままで交通量を増加させ，そのつど新規経路が出現あるいは消滅するかどうかを検討していくという方法を考えてきた。しかし，ここではその方法を改め，必ずどこかで等時間パターンが逐次変化するように交通量を増やしていくという方法を考える[15]。そのために，いままでの等時間方程式から定数項を除いて，等時間経路間の走行時間増が等しいという方程式を用いる。しかし，これもやはり等時間方程式とよぶことにする。以下にその計算方法を示しておく。

計算は道路網上にまったく交通量が存在しない状態（0 フロー時）からはじめる。容量関数は式 (1) のように一次式で仮定しているが，ここで b_{ij} は道路区間 ij に交通量がないとしたときの走行時間を示すものである。それで，まず最初に単位 OD 交通量（個々の OD 交通量を OD 総交通量で除したもの）を，この定数 b によってその各最短経路に配分する。そして，そのときの区間交通量を $\Delta X_{ij}^{(1)}$ とする。また，この道路区間 ij の $\Delta X_{ij}^{(1)}$ による走行時間増を $\Delta T_{ij}^{(1)}$ とすると，$\Delta T_{ij}^{(1)}$ は式 (1) から次のように示される。

$$\Delta T_{ij}^{(1)}=a_{ij}\,\Delta X_{ij}^{(1)} \quad \cdots\cdots(22)$$

また，$\Delta X_{ij}^{(1)}$ による OD 交通 k の最短経路 $\mu_0{}^k$ の走行時間増は $\sum_{ij\in\mu_0{}^k}\Delta T_{ij}^{(1)}$ で与えられる。ここで，$\mu_0{}^k$ はいま最初の計算段階であるから最短経路としたが，一般的な計算段階では，すでに決定されている OD 交通 k の等時間経路のうちのどれかを指す。ところで，OD 交通 k に関して，走行時間増が経路 $\mu_0{}^k$ のそれより小さい経路，すなわち

$$\sum_{ij\in\mu_\lambda{}^k}\Delta T_{ij}^{(1)}<\sum_{ij\in\mu_0{}^k}\Delta T_{ij}^{(1)} \quad \cdots\cdots(23)$$

なる経路 $\mu_\lambda{}^k$ が存在すれば，さきの各 OD 交通の経路を固定したままで単位 OD 交通量を何倍かしていくと，この両経路の走行時間は逆転する。つまり，さきの最短経路よりも走行時間の短い経路が出現することになる。この場合は，次式を満たす $\theta_\lambda{}^k$ が存在することは明らかである。この式の示す意味は，既存経路を固定して単位 OD 交通量を $\theta_\lambda{}^k$ 倍すれば，経路 $\mu_\lambda{}^k$ と経路 $\mu_0{}^k$ の走行時間が等しくなるということである。そうすると，

$$\sum_{ij\in\mu_\lambda{}^k}(\theta_\lambda{}^k\,\Delta T_{ij}^{(1)}+b_{ij})=\sum_{ij\in\mu_0{}^k}(\theta_\lambda{}^k\,\Delta T_{ij}^{(1)}+b_{ij}) \quad \cdots\cdots(24)$$

各 OD 交通の既存経路より走行時間の短い経路が最初に出現するのは，当然のことながら，次式で示される最小なる $\theta_\lambda{}^k$ をもつ経路 $\mu_\lambda{}^k$ である。

$$\theta^{(1)}=\min_{k,\lambda}\theta_\lambda{}^k=\min_{k,\lambda}\frac{\sum_{ij\in\mu_0{}^k}b_{ij}-\sum_{ij\in\mu_\lambda{}^k}b_{ij}}{\sum_{ij\in\mu_\lambda{}^k}\Delta T_{ij}^{(1)}-\sum_{ij\in\mu_0{}^k}\Delta T_{ij}^{(1)}} \quad \cdots\cdots(25)$$

そのときの道路区間 ij の交通量 $X_{ij}^{(1)}$，走行時間 $T_{ij}^{(1)}$ は次のようになる。

$$X_{ij}^{(1)}=\theta^{(1)}\,\Delta X_{ij}^{(1)}+X_{ij}^{(0)} \quad \cdots\cdots(26)$$

$$T_{ij}^{(1)}=\theta^{(1)}\,\Delta T_{ij}^{(1)}+T_{ij}^{(0)} \quad \cdots\cdots(27)$$

ただし，$X_{ij}^{(0)}=0$, $X_{ij}^{(0)}=b_{ij}$ である。このようにして，まず最初の等時間パターンと，そのときの交通量および走行時間が求められる。

以後，一般的な計算段階 ν では，すでに決定された等時間パターンのもとに，定数項 b を除去した等時間条件式と，これに対応する一次独立なカット条件式を用いて単位 OD 交通量を配分し，各道路区間の交通増加量 $\Delta X_{ij}^{(\nu)}$ と走行時間増加量 $\Delta T_{ij}^{(\nu)}$ を求める。そして，さきと同じようにして，走行時間増分が既存等時間経路のそれに較べて小さい経路を探索し，それらのうちで式 (24) に対応する $\theta_\lambda{}^k$ が最小なる経路を新たな等時間経路として付加える。このときの各道路区間の交通量と走行時間は以下のように求められる。

$$X_{ij}^{(\nu)}=\theta^{(\nu)}\,\Delta X_{ij}^{(\nu)}+X_{ij}^{(\nu-1)} \quad \cdots\cdots(28)$$

$$T_{ij}^{(\nu)}=\theta^{(\nu)}\,\Delta T_{ij}^{(\nu)}+T_{ij}^{(\nu-1)} \quad \cdots\cdots(29)$$

ただし，

$$\theta^{(\nu)}=\min_{k,\lambda}\theta_\lambda{}^k=\min_{k,\lambda}\frac{\sum_{ij\in\mu_0{}^k}T_{ij}^{(\nu-1)}-\sum_{ij\in\mu_\lambda{}^k}T_{ij}^{(\nu-1)}}{\sum_{ij\in\mu_\lambda{}^k}\Delta T_{ij}^{(\nu)}-\sum_{ij\in\mu_0{}^k}\Delta T_{ij}^{(\nu)}} \quad \cdots\cdots(30)$$

これらの計算操作は，OD 交通量が所定の交通量に達するまで続けられ，最後の計算段階では比例配分によって所定の OD 交通量に一致させればよい。これが解となる。

ところが，この各段階の計算においては，道路区間の交通量および増分交通量がたとえすべて非負であっても，常に次の検討を行なっておかねばならない。というのは，カット法の計算では $X_{ij}^{(\nu)}$, $\varDelta X_{ij}^{(\nu)}$ がどのようなOD交通から構成されているかは問題にしていないため，その考慮が別に必要となってくるからである。ここで，$X_{ij}^{*(\nu)}$ を，段階 ν の道路区間 ij を通る交通のうち，当区間がなければトリップできない交通量，いいかえると，OD 交通量の全部が当区間を通るという OD についての合計交通量，同じく $\varDelta X_{ij}^{*(\nu)}$ をその増分交通量とする。そうすれば，$X_{ij}^{(\nu)}$ は必ず $X_{ij}^{*(\nu)}$ 以上でなければならない。これが満たされているとき，$X_{ij}^{(\nu)}$

$$X_{ij}^{(\nu)} \geqq X_{ij}^{*(\nu)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

は実行可能解となっている。しかし，等時間条件式とカット条件式から得られる $\varDelta X_{ij}^{(\nu)}$ が必ず $\varDelta X_{ij}^{*(\nu)}$ を上回っている保証は何もない。新たに単位 OD 交通量を配分したとき，もし $\varDelta X_{ij}^{(\nu)}$ が $\varDelta X_{ij}^{*(\nu)}$ より小であれば，等時間原則を満足するためには，道路区間 ij の既存配分交通量のうち $(\varDelta X_{ij}^{*(\nu)}-\varDelta X_{ij}^{(\nu)})$ の交通量を他の経路に流し変えねばならないことを意味している。このとき，流し変えのできる交通量はせいぜい $(X_{ij}^{(\nu-1)}-X_{ij}^{*(\nu-1)})$ までであることはいうまでもない。ここに，$(X_{ij}^{(\nu-1)}-X_{ij}^{*(\nu-1)})$ なる交通量は，段階 $\nu-1$ における道路区間 ij 上の交通のうち，当区間を経由する経路以外にも経路を有するという OD 交通についての合計交通量である。すなわち，この場合は $(X_{ij}^{(\nu-1)}-X_{ij}^{*(\nu-)})$ が0になるまで OD 単位交通量を増やしてよい。このときの単位OD交通量の増分を $\theta_{ij}^{*(\nu)}$ とすると，次式で示される。

$$\theta_{ij}^{*(\nu)}=\frac{X_{ij}^{(\nu-1)}-X_{ij}^{*(\nu-1)}}{\varDelta X_{ij}^{*(\nu-1)}-\varDelta X_{ij}^{(\nu-1)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

$\varDelta X_{ij}^{*(\nu)}$ より小さい $\varDelta X_{ij}^{(\nu)}$ がいくつか存在するときは，そのうちで最小なる $\theta_{ij}^{*(\nu)}$ まで単位 OD 交通量を増やして，この道路区間 ij を含む等時間パターンを消滅させる。そのときの各道路区間の交通量および走行

$$\theta^{*(\nu)}=\min_{ij}\theta_{ij}^{*(\nu)}=\min_{ij}\frac{X_{ij}^{(\nu-1)}-X_{ij}^{*(\nu-1)}}{\varDelta X_{ij}^{*(\nu)}-\varDelta X_{ij}^{(\nu)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

時間は式 (28),(29) において，$\theta^{(\nu)}$ の代わりに $\theta^{*(\nu)}$ とすればよい。なお，$\varDelta X_{ij}^{(\nu)}$ が負で出てきた場合も式(33)はそのまま通用する。このようにOD交通量を増やしていって，等時間パターンが逐次変化するよう配分計算を進めていく。

簡単な計算例

図—7 の道路網に 表—1 の OD 交通量を配分する問題を考える。容量関数は線型と仮定し，その a と b の値は 表—2 に示してある。また，単位 OD 表は 表—1 から 表—3 のように得られる。

表—1　OD 交通量　　(単位：台)

1	2	3	4	O / D
—	1 000	500	200	1
	—	600	500	2
		—	800	3
			—	4

総交通量＝3 600 台

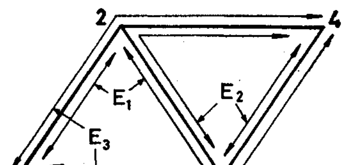
表—2　道路定数 a, b の値

道路区間	a ($\times 10^{-3}$ 分/台)	b (分)
1—2	6.584	8.0
1—3	0.810	6.0
2—3	0.540	4.0
2—4	1.080	8.0
3—4	4.600	1.00

表—3　単位 OD 表

1	2	3	4	O / D
—	0.27777	0.13888	0.05555	1
	—	0.16666	0.13888	2
		—	0.22222	3
			—	4

段階 1　まず，0フロー時における各道路区間の走行時間は b_{ij} そのものであり，この状態のもとに単位 OD 表を各最短経路に配分すると，各道路区間の増分交通量および増分走行時間は次のように得られる。



図—7　等時間パターン

$\varDelta X_{12}^{(1)}=0.33333$　$\varDelta T_{12}^{(1)}=2.1946\times 10^{-3}$

$\varDelta X_{13}^{(1)}=0.13888$　$\varDelta T_{13}^{(1)}=0.1125\times 10^{-3}$

$\varDelta X_{23}^{(1)}=0.16667$　$\varDelta T_{23}^{(1)}=0.0900\times 10^{-3}$

$\varDelta X_{24}^{(1)}=0.19444$　$\varDelta T_{24}^{(1)}=0.2100\times 10^{-3}$

$\varDelta X_{34}^{(1)}=0.22222$　$\varDelta T_{34}^{(1)}=1.0222\times 10^{-3}$

これらはカット条件式だけから成る連立方程式によっても求められるが，そうするまでもなく自明の解である。ここで，OD 交通 1-2 に関しては，既存経路 1-2 の走行時間の増分よりも経路 1-3-2 のそれの方が小さい。OD

交通1-4についても同じことがいえる。この経路間の等時間パターンを E_1 とすると，θ_1^{1-2} あるいは θ_1^{1-4} は

$$\theta_1^{1-2}(=\theta_1^{1-4})=\frac{10.0-8.0}{(2.1946-0.2025)\times10^{-3}}=1\,004$$

となる。同様にして，OD交通3-4に関する既存経路3-4と新規経路3-2-4，OD交通1-4に関する既存経路1-2-4と新規経路1-3-4の間の等時間パターンをそれぞれ E_2, E_3 とすると，$\theta_1^{3-4}, \theta_2^{1-4}$ は次のように求められる。

$$\theta_1^{3-4}=\frac{12.0-10.0}{(1.0222-0.3000)\times10^{-3}}=2\,769$$

$$\theta_2^{1-4}=\frac{16.0-16.0}{(2.4046-1.1347)\times10^{-3}}=0$$

よって

$$\theta^{(1)}=\min(\theta_1^{1-2}(=\theta_1^{1-4}),\ \theta_1^{3-4},\ \theta_2^{1-4})=\theta_2^{1-4}=0$$

であるから，最初に等時間パターン E_3 が成立することになる。こうして，段階1における各道路区間の交通量と走行時間は，式(26)と式(27)から以下のように求められる。

$$X_{12}^{(1)}=0,\ X_{13}^{(1)}=0,\ X_{23}^{(1)}=0,\ X_{24}^{(1)}=0,\ X_{34}^{(1)}=0$$

$$T_{12}^{(1)}=8.0\text{ 分},\ T_{13}^{(1)}=6.0\text{ 分},\ T_{23}^{(1)}=4.0\text{ 分},$$

$$T_{24}^{(1)}=8.0\text{ 分},\ T_{34}^{(1)}=10.0\text{ 分}$$

段階2　いま等時間パターン E_3 が得られたので，この状態のもとに単位OD交通量を配分すると，各道路区間の $\Delta X_{ij}^{(2)}$ および $\Delta T_{ij}^{(2)}$ は次の連立方程式によって求められる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6.584 & -0.810 & 0 & 1.080 & -4.600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta X_{12}^{(2)} \\ \Delta X_{13}^{(2)} \\ \Delta X_{23}^{(2)} \\ \Delta X_{24}^{(2)} \\ \Delta X_{34}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.47222 \\ 0.41667 \\ 0.72222 \\ 0.50000 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{カット条件式} \\ \}\text{等時間条件式} \end{matrix}$$

これから

$$\Delta X_{12}^{(2)}=0.23619 \qquad \Delta T_{12}^{(2)}=1.5551\times10^{-3}$$

$$\Delta X_{13}^{(2)}=0.23602 \qquad \Delta T_{13}^{(2)}=0.1911\times10^{-3}$$

$$\Delta X_{23}^{(2)}=0.16667 \qquad \Delta T_{23}^{(2)}=0.0900\times10^{-3}$$

$$\Delta X_{24}^{(2)}=0.09730 \qquad \Delta T_{24}^{(2)}=0.1050\times10^{-3}$$

$$\Delta X_{34}^{(2)}=0.31935 \qquad \Delta T_{34}^{(2)}=1.4690\times10^{-3}$$

段階1と同様にして次に生起する等時間パターンを探索するが，このとき対象となる等時間パターンは，E_1 と E_2 である。しかし，E_1 が成立すれば同時に E_2 も成立する。このことは，すなわち，等時間パターン E_1, E_2, E_3 のうち一次独立なるものは2個であることを示す。よって，

$$\theta_1^{1-2}=\frac{10.0-8.0}{(1.5551-0.2811)\times10^{-3}}=1\,570=\theta^{(2)}$$

あるいは，

$$\theta_2^{1-4}=\frac{12.0-10.0}{(1.4690-0.1950)\times10^{-3}}=1\,570=\theta^{(2)}$$

したがって，式(28)，(29)から $X_{ij}^{(2)}$ および $T_{ij}^{(2)}$ は次のように求められる。

$$X_{12}^{(2)}=371\text{ 台} \qquad T_{12}^{(2)}=10.4\text{ 分}$$

$$X_{13}^{(2)}=371\text{ 台} \qquad T_{13}^{(2)}=6.3\text{ 分}$$

$$X_{23}^{(2)}=262\text{ 台} \qquad T_{23}^{(2)}=4.1\text{ 分}$$

$$X_{24}^{(2)}=153\text{ 台} \qquad T_{24}^{(2)}=8.2\text{ 分}$$

$$X_{34}^{(2)}=501\text{ 台} \qquad T_{34}^{(2)}=12.3\text{ 分}$$

段階3　同様にして，図―9に示す等時間パターンとカットから，単位OD表に対する各道路区間の交通量増分と走行時間増分は以下のように求まる。

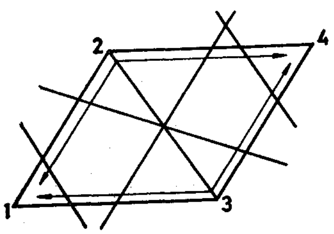
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6.584 & -0.810 & 0 & 1.080 & -4.600 \\ 6.584 & -0.810 & -0.540 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta X_{12}^{(3)} \\ \Delta X_{13}^{(3)} \\ \Delta X_{23}^{(3)} \\ \Delta X_{24}^{(3)} \\ \Delta X_{34}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.47222 \\ 0.41667 \\ 0.72222 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{カット条件式} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{等時間条件式} \end{matrix}$$

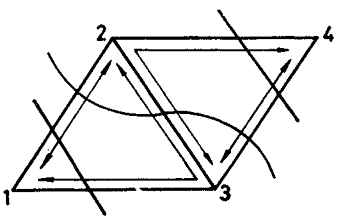
上の連立方程式から

$$\Delta X_{12}^{(3)}=0.08869 \qquad \Delta T_{12}^{(3)}=0.5840\times10^{-3}$$

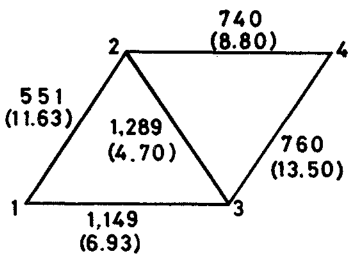
$$\Delta X_{13}^{(3)}=0.38352 \qquad \Delta T_{13}^{(3)}=0.3107\times10^{-3}$$



図―8　段階2の等時間パターンとカット



図―9　段階3の等時間パターンとカット



単位　交通量：台　走行時間：分
(　) 内は走行時間

図―10　配分結果

$\varDelta X_{23}{}^{(3)}=0.50617$ $\varDelta T_{23}{}^{(3)}=0.2733\times10^{-3}$

$\varDelta X_{24}{}^{(3)}=0.28931$ $\varDelta T_{24}{}^{(3)}=0.3125\times10^{-3}$

$\varDelta X_{34}{}^{(3)}=0.12735$ $\varDelta T_{34}{}^{(3)}=0.5858\times10^{-3}$

となる。この段階では，もはや既存経路の走行時間の増分よりも小さい他の経路は存在しないので，段階2で決定された等時間パターンが最終的なものとなる。そこで，総OD交通量が与えられた交通量と等しくなるように比例配分して増分しておく。すなわち，

$\theta=3\,600-1\,570=2\,030$

を用いて，式(26),(27)から，この配分の解は図―10のようになる。なお，本例題においては，各計算段階における解はすべて実行可能解となっている。

6. あとがき

以上，区間交通量そのものを変量とするカット法による等時間原則配分についての定式化とその一般性について説明してきた。そして，計算機による演算を容易にするため，等時間条件式およびカット条件式の行列表現を行なうとともに，それらの探索法についても簡単にふれてきた。また，その計算方法は容量関数の線型性を利用して，OD交通量の割合を一定にしたままで，等時間パターンが逐次変化するよう交通量を漸増させて行なっている。

一方，総走行時間最小化配分は，はじめにも述べたように容量関数を変形しさえすれば等価となるので，カット法は総走行時間最小化配分にもそのまま適用できる。さらに，容量関数が非線型となっても，逐次近似計算を繰り返すことによって配分計算は行なえる。

要するに，等時間原則あるいは総走行時間最小化原則いずれにしろ，容量関数が非線型であっても，カット法によって配分は実行可能である。

最後に，本研究にあたってご指導とご鞭撻をいただくとともに，多大の便宜をはかって下さった京都大学工学部 米谷栄二教授，同 佐佐木綱教授に対し深謝の意を表します。

参考文献

1) 飯田恭敬：カット法を用いた等時間原則による交通量配分法，土木学会第24回年次学術講演会講演集，第4部，pp. 89～90, 1969.
2) たとえば，飯田恭敬：パスフローによる交通量配分，交通工学，Vol 14, No. 2, pp. 11～19, 1969.
3) たとえば，米谷栄二・飯田恭敬・辻本有一：2次計画法による交通量配分，土木学会論文報告集，第167号，pp. 23～31, 1969年7月.
4) 飯田恭敬：パスフローを用いた等時間原則による交通量配分，土木学会論文報告集，第168号，pp. 45～57, 1969年8月.
5) 飯田恭敬：カット法による等時間原則交通量配分（三角型道路網への適用），交通工学，Vol. 6, No. 6, pp. 26～38, 1970.
6) 井上博司：輸送計画的配分および等時間原則配分に関する研究，土木学会第25回年次講演会講演集，第4部，pp. 113～114, 1970.
7) 佐佐木綱・井上博司：非線型走行時間関数を用いた交通量配分，昭和46年度土木学会関西支部学術講演会講演集 pp. Ⅳ-36-1～2
8) 魚住隆彰：等時間原則による交通量配分と改良道路の選定に関する研究，京都大学修士論文，1971
9) Wardrop, J.G.: Some Theoretical Aspects of Road Reserch, Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, pp. 325～378, 1952.
10) Smock, R.B.: A Comparative Description of a Capacity-Restrained Traffic Assignment, HRB Highway Research Record, No. 6, 1963, pp. 12-40.
11) 井上博司：交通量配分の数学的手法に関する研究，京都大学修士論文，1971.
12) 上掲 8)
13) 小野寺力男：グラフ理論の基礎，数学ライブラリー 6，森北出版，1968
14) 上掲 8)
15) 上掲 11)

(1971.4.20・受付)