

# 大たわみ、および、リブの補剛を考慮した 長方形鋼板の弾塑性解析

## ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF RECTANGULAR STEEL PLATES, WITH CONSIDERATIONS OF THEIR LARGE DEFLECTION AND RIB-STIFFENED CONSTRUCTION

岡村 宏 一\*・吉田 公憲\*\*

By Hirokazu Okamura and Kiminori Yoshida

### 1. ま え が き

一般に、薄鋼板は荷重によるたわみの増大に伴って、微小曲げの弾性線形状態から、膜作用を誘発する非線形弾性状態（いわゆる大たわみ現象）になり、さらに、弾塑性状態に移行する。また、実際構造において、薄鋼板は、しばしば補強板の形で用いられるが、この種の板構造の薄板に発生する応力は、前述の曲げ応力、膜応力のほかに、同様な挙動をするリブの偏心補剛によって生ずる面内応力の重なった複雑なものである。

本文は、このような力学的条件を忠実に考慮した長方形板の1つの解法とその応用例について述べたものである<sup>注1)</sup>。

従来、実験<sup>1), 2)</sup>あるいは帯板のような比較的簡単な場合の解析<sup>3), 4)</sup>によって、リブを持たない薄板の耐力が、大たわみを考慮せずに評価されるそれよりも、相当に大きいこと、また、リブ付き板の耐力が、リブの崩壊に支配されることなどが知られている。しかしながら、2方向性を持つ、この種の板構造について、耐力、あるいは変形能に重要な関連を持つ前述の応力状態を十分正確に評価して、その弾塑性挙動を解析したものは、現状ではあまり見当たらないようである。

#### (1) 既往の解法

この領域の問題に関連した既往の解法について略述する。まず、横荷重を受けるリブを持たない長方形板の弾性大たわみ問題に関しては、以前より、かなりの研究例がある。すなわち、Th von Kármánの非線形基礎式に

\* 正会員 大阪工業大学助教授 土木工学教室

\*\* 正会員 大阪設計コンサルタンツ(株)研究室

注1) 本論文は、土木学会の講演概要 1), 2), 3) を骨子とし、応用、ならびに照査に関するデータを加えて総括したものである。

基づき、これを有限差分法により扱ったもの<sup>7), 8)</sup>、あるいは若干項の解法を仮定し、連立3次方程式を処理するもの<sup>9), 10)</sup>などがあり、また、有限要素法によっても解析されている<sup>11)</sup>。なお、同様な方法は、長方形板の後座屈に関する若干の研究にも見られる。

一方、膜作用を伴う長方形板の弾塑性領域を扱ったものは、目下のところ数少ない。コンクリート板に関しては、R.H. Wood<sup>14)</sup>ならびに A. Sawczuk<sup>15)</sup>らの近似解法があり、また、薄鋼板などに適用できるものとして、前述の帯板の比較的簡単な場合の解析例が見られるが、一般的な長方形板を扱ったものはわずかである。Ch. Massonet<sup>16)</sup>は、応力とひずみの関係が、Plandtl-Reussの方程式に支配されるものとみなし、前述の von Kármánの式に、塑性変形に関連する項を加えた基礎式について、それを有限差分法で扱うことを示唆している(実際の数値計算は行っていない)。

次に、リブ付き板の弾性大たわみ問題について、これを直交異方性板に平均化し、等方性板の場合と同様の解法を用いた二、三の例が見られる<sup>17), 18)</sup>。また、Massonetは、上記の論文で、板をリブ線に沿って分割し、2つの板の境界が、偏心のない弾性リブで支持される場合の連続条件を示している。そのほか、リブ付き板の挙動が、大たわみをあまり期待できないリブ格子の崩壊に支配されるとする実験的な検証から、有効幅を仮定したリブ格子の塑性解析の問題に帰着させる方法も提案されている<sup>5)</sup>。

ところで、以下にこれらの解法の問題点について触れ、あわせて筆者の解法の要点について述べる。

#### (2) 既往の解法の問題点と本文の解法の要点

大たわみを伴う薄鋼板の弾塑性挙動を支配するつりあい、および適合の条件式は連立非線形偏微分方程式であり、降伏条件もまた非線形である。これらの基礎式から

出発する場合、問題点の1つは、その線形化の方法である。前述のように、有限差分法は1つの方法としてしばしば用いられる。しかし、弾塑性解析の場合、計算容量は相当に大きくなる。特に、後に述べるリブとの偏心合成の条件のように、局所的な適合の条件を十分正確に導入する場合とか、あるいはリブによって区分される各パネルの変形状態を、忠実に追跡する場合などでは、いきおい要求される自由度の増大が著しい。また、荷重漸増に追従する初期値接続問題の性格を持つ弾塑性解析においては、膜作用を伴う弾塑性域の局所的な応力の推移に関連して、十分な解の精度、あるいは収束性が保証されねばならないが、目下のところ、この種の問題については、検証資料が乏しい感がある。このことは、有限要素法についても同様にいえると思う。そのほか、S. Levy<sup>2)</sup>らの論じた、若干項の級数解を用いる方法は、解法が連立高次方程式に帰一するために、計算上、多くの項数を採ることが困難であり、精度上の難点がある。

次に、リブ付き板の挙動を直交異方性板に平均化する方法であるが、リブによって偏心補剛され、大たわみを伴う板の断面の降伏条件については、現在のところ、十分な理論的究明がなされていない。しかも、リブの偏心補剛によって生ずる面内力が、板の局所的な弾塑性挙動の進展に及ぼす影響を、異方性板のように平均化したモデルでは、正確に評価できないように思われる。また、有効幅を仮定したリブ格子の曲げ崩壊の問題として解析する方法も、複雑な弾塑性応力場にある板の有効幅を一義的に定めるといふ理論上の不明確さがあり、一般性に乏しい感がある。

さて、以上の諸点を考慮のうえ、筆者は本文の解析において、1つの新しい解法を用いた。この解法で、まず塑性化した板内点を囲む比較的小さい有限領域では、基礎式中の塑性変形に伴う物理量は、平均化されてよいものとみなして、これらの式を線形化する。また、大たわみに伴う膜作用の生じた領域にも、その影響値に対して同様の手法を適用する。その結果、解は収束に必要な項数を持ったFourierの無限級数による連続解で得られ、つりあい、適合条件式を解くための連立方程式を扱う必要はない。なお、解析の途上で、前述の塑性変形に伴う物理量と塑性テンソルの相互関係を表わすために、部分的な差分法が用いられる。したがって、解の非線形部分には、以上のような有限小領域での平均化、および部分的差分表示による2次的な誤差を含むが、しかし、厳密解で与えられる線形部分を含めて解全体としては精度の高い連続解の性格を持ち、さらにいくぶん離れた位置では、それらの誤差もわずかになるので、結果的に解の精度は十分向上する。しかも、この方法を弾塑性状態にあるリブに適用すれば、リブの解は取扱いの簡単な代数関

数で得られる。

次に、リブの偏心補剛の扱い方として、本解法では、リブ付き板の構造要素である板、およびリブのそれぞれについて、降伏条件、弾塑性挙動を支配する諸因子を定め、この2つの構造要素を、弾性、および弾塑性挙動のすべての時点においてつねに合成させる手法によって、一種の複合構造として、忠実な立体解析を行なうものである。また、本解法は、前述のように、板の部分では基本的に級数解法を用いている。したがって、板とリブの合成条件を与える場合、従来の有梁板などの弾性解法<sup>19),20)</sup>にみられるように、リブ線に沿って板を分割し、合成条件を板の境界条件として処理するならば、級数解法の性格上、適用範囲が限られてしまう。すなわち1方向に並列するリブと合成する場合には適応できるが、格子のようなリブと合成する場合は、構造要素として、4辺に合成条件をもつ板を扱うことになり、しかも、それらの隅点は、面内および面外に変位するため、解析がきわめて困難になる。このような欠点を除去するため、すでに、構造物の弾性立体解析に関する前論文<sup>21)</sup>で述べたように、板を分割せず、板の下面でリブと合成させる方法が採られる。なお、本文の場合、板が十分薄いことを考慮すれば、扱いはより簡単になる。

さらに、骨組としてのリブの弾塑性解析を容易にするため、前述のように、リブの解は代数解で与えられる。リブの解（閉じた形）と、板の解（開いた形）を合成条件において適合させるため、前論文<sup>21)</sup>と同様の方法が用いられる。すなわち板とリブの合成面で受けわたされる不静定力の分布を、合成面上のある有限領域で一様な分布を持つ力の連続したものとみなす。その結果、板は有限個の分布外力が作用する力学系として扱われる。一方、板とリブの合成条件は、選点法によってそれらの作用中心で与えられ、級数総和法の併用によってリブ付き板の忠実な弾塑性立体解析を比較的容易に行なうことができる。また、種々の境界条件に対応できるように、境界に作用させる不静定力の分布、および境界条件についても、場合により同様な方法が用いられる。

さて合成条件、境界条件式は、上記の不静定力を未知量とする連立1次方程式を形成する。また、塑性化した各点の塑性ひずみ量は降伏条件式から定められ、これらすべての未知量は繰り返し演算により個別に収束値を与えられる。

このように、本解法は、構造のほとんどの部分で連続解を与える精度の高い形を持ち、したがって、局所的な荷重による一部のパネルの塑性化がしばしば問題になるこの種の板構造を解析する場合は、変形の微小なパネル内には選点を設ける必要がなく、それらの数は最小限におさえられる。

(3) 計算データと照査

本文の後半に示した種々の計算例のなかで, 本解法の精度, および収束性に関する照査が多面的に行なわれている。まず, リブがない板の非線形弾性問題(大たわみの問題)について, 膜作用に伴う物理量の有限領域における平均化の精度を調べるために, 本解と, A.K. Basu<sup>17)</sup>らの比較的密なネットを採った有限差分法による計算結果とが比較された。

次に, 大たわみを無視した, 周辺単純支持, および固定の正方形板の弾塑性曲げについて, その終局荷重の値が, すでに塑性解析法によって求められている上界, あるいは下界の値<sup>22), 23)</sup>と比較され, また, 同時に塑性変形に伴う物理量の有限領域における平均化の精度が調べられた。なお, 板内に生じた局所的な塑性域が次第に拡大してゆく模様は, L.A. Lopez<sup>24)</sup>らが他の方法で求めたそれらと照合した。

さらに, 大たわみを考慮した場合の例題について, 解の収束性の照査がなされ, また, 鶴田<sup>4)</sup>らの行なった実験と同様の板について, 本解法による計算を行ない, 双方の結果の比較検討がなされた。

一方, 主として単純支持される正方形板の例題について, 膜作用がその弾塑性挙動に及ぼす影響を見るために, 板厚, 降伏応力, 膜作用に対する周辺の拘束条件などを変化させた種々の場合について計算し, 荷重と変形の相関性, 塑性域の進展の模様と, 板内点における曲げ, および軸応力の配分の変化, 除荷の過程での変形能などが詳細に検討された。

計算例の後半でリブ付き板の問題が扱われている。前例題と同様の板が, 剛度の異なるリブで偏心補剛される例題が, (2) で述べた合成法を併用して解析され, リブの弾塑性挙動に伴う補剛の効果を表す例が示されている。なお, 板とリブの合成法が実用上, 十分な精度を持つことは, すでに前論文<sup>21)</sup>において, 局所的な問題も含めて検証されている。

以上の各種の照査, ならびに計算例題を通じて, 本解法の精度が良好であること, 特に種々な場合の弾塑性挙動の追跡, ならびにそれに伴う境界調整の計算において, 十分な収束性を持つことが認められた。また, 従来理論的なデータがほとんど与えられていない, この種の板構造の弾塑性領域の挙動について, 若干の詳細な計算例が与えられた。

2. 互いに合成される板, および リブの大たわみを伴う弾塑性曲げの解

(1) 基本的仮定

解法上の基本的な仮定は, 次のとおりである。

- a) 構造材料は弾完全塑性体とする。
- b) 応力とひずみの関係は, Plandtle-Reuss の方程式に支配されるものとする。
- c) 板, およびリブの双方とも, 平面保持の仮定を容認し, それぞれの断面の塑性化は fully Plastic を意味するものとする。
- d) 曲げと膜作用の共存する板内の塑性化した点の降伏曲面として, 曲げ, および膜作用の各 response を分離する近似降伏曲面を採用する。

仮定 b) は, 特にリブ付き板のような立体構造の内点において, 局所的に生じ得る除荷の径路にも適応できるものである。仮定 c) は, 板およびリブのそれぞれにおいて, 塑性関節の概念を拡大したものであり, 特に薄板に対して, 仮定 d) とあわせて, 等価 sandwich 板を考えることになり, P.G. Hodge<sup>25)</sup>, Y.N. Rabotnov<sup>26)</sup>, V. I. Rosenblum<sup>27)</sup>らが shell 構造の解析に用いた基本的概念と同様である。また, 仮定 d) は, すでに, A.A. Ilyushin<sup>28)</sup>, V.I. Rosenblum<sup>27)</sup>, G.S. Shapiro<sup>29)</sup>らが, 種々の問題について, 実用上有効であることを論じている。

(2) 板の基礎式

図-1(a) に板の座標系, および辺長を示す。また, 図-1(b) に, 互いに座標軸に沿って直交するリブと合成される厚さ  $h$  の板の微小エレメントと, 相互の力の受け渡しの模様を示し, ここで, 板の上面に作用する鉛直外荷重の強度を  $Q_0$ , 板の下面に作用するそれを  $Q_u$  ( $x, y$  方向の各リブに沿って  $Q_{xu}, Q_{yu}$ ), 同じく下面に作用する  $x, y$  方向の水平せん断力の強度をそれぞれ,  $S_{xu}, S_{yu}$  とする注2)。

一方, 板に生ずる曲げモーメント, および軸力の分値をそれぞれ  $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$ , ひずみのそれらを  $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$  で表わし, 板の大たわみを  $w$  とすれば, 大たわみを生じた板のつりあい, ならびに適合条件式

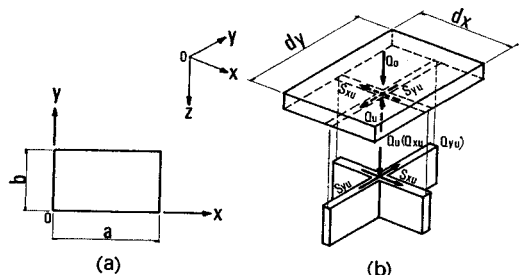


図-1 板の座標および微小要素

注 2) 本文の所論においては, リブのねじり抵抗は無視されている。

は, von Kármán の基礎式に上記の力の影響を考慮して,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -Q_0 + Q_u - \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial S_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yu}}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots\dots\dots (2)$$

式(1),(2)の時間微分を行なうと,

$$\frac{\partial^2 \dot{M}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \dot{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \dot{M}_y}{\partial y^2} = -\dot{Q}_0 + \dot{Q}_u - \left( \dot{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dot{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \dot{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} \right) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \dot{S}_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{S}_{yu}}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{r}_{xy}}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \dots\dots\dots (4)$$

次に, 内部エネルギーの逸散関数  $\psi$  を次式で表わす.

$$\psi = N_P (m_x \dot{\varepsilon}_x + m_y \dot{\varepsilon}_y + m_{xy} \dot{\varepsilon}_{xy} + n_x \dot{\varepsilon}_x + n_y \dot{\varepsilon}_y + n_{xy} \dot{r}_{xy}) \dots\dots\dots (5)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{M_x}{M_P}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_P}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_P}, \\ n_x &= \frac{N_x}{N_P}, \quad n_y = \frac{N_y}{N_P}, \quad n_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_P} \\ M_P &= \frac{1}{4} \sigma_p h^2, \quad N_P = \sigma_p h, \quad \sigma_p: \text{降伏応力} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

いま, 降伏曲面が,

$$f(m, n) = 1 \dots\dots\dots (7)$$

で定義されるならば, 塑性変形による中央面のひずみの分値,  $\varepsilon_x'', \varepsilon_y'', r_{xy}''$  ならびに曲率の分値,  $K_x'', K_y'', K_{xy}''$ , について, 塑性流れの法則から次の関係を得る.

$$\dot{\varepsilon}_x'' = \mu \frac{\partial f}{\partial n_x}, \quad \dot{\varepsilon}_y'' = \mu \frac{\partial f}{\partial n_y}, \quad \dot{r}_{xy}'' = \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x'' &= \frac{h}{4} \dot{K}_x'' = \mu \frac{\partial f}{\partial m_x}, \quad \dot{\varepsilon}_y'' = \frac{h}{4} \dot{K}_y'' = \mu \frac{\partial f}{\partial m_y} \\ \dot{\varepsilon}_{xy}'' &= \frac{h}{2} \dot{K}_{xy}'' = \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式中,  $f$  は塑性ポテンシャル,  $\mu$  は塑性変形中変化するスカラー量である.

さて, 中央面のひずみ速度,  $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{r}_{xy}$  は, 弾性ひずみ速度,  $\dot{\varepsilon}_x', \dot{\varepsilon}_y', \dot{r}_{xy}'$ , および式(8)の塑性ひずみ速度,  $\dot{\varepsilon}_x'', \dot{\varepsilon}_y'', \dot{r}_{xy}''$  から,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \dot{\varepsilon}_x' + \dot{\varepsilon}_x'' = \frac{1}{Eh} (\dot{N}_x - \nu \dot{N}_y) + \mu \frac{\partial f}{\partial n_x} \\ \dot{\varepsilon}_y &= \dot{\varepsilon}_y' + \dot{\varepsilon}_y'' = \frac{1}{Eh} (\dot{N}_y - \nu \dot{N}_x) + \mu \frac{\partial f}{\partial n_y} \\ \dot{r}_{xy} &= \dot{r}_{xy}' + \dot{r}_{xy}'' = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \dot{N}_{xy} + \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式中,  $E$ ; 弾性定数,  $\nu$ ; ポアソン比である.

さらに, 曲げひずみ速度,

$$\begin{aligned} -z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} &= -z \dot{K}_x, \quad -z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} = -z \dot{K}_y, \\ -2z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} &= -2z \dot{K}_{xy} \end{aligned}$$

について同様の表示を与え, 積分によって曲げモーメントの変化速度を求めると,

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_x &= -D \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{h} \mu \left( \frac{\partial f}{\partial m_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) \\ \dot{M}_y &= -D \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{h} \mu \left( \frac{\partial f}{\partial m_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_x} \right) \\ \dot{M}_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} - \frac{2D(1-\nu)}{h} \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし,  $D$ ; 板の曲げ剛度  $= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

ここで, リブより伝わる水平せん断力,  $S_{xu}, S_{yu}$  を含めた面内力のつりあいを考慮して応力関数  $\phi$  を導入し, 面内応力の変化速度を次のように定める.

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \int \dot{S}_{xu} dx + \dot{C}(y) \\ \dot{N}_y &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \int \dot{S}_{yu} dy + \dot{C}'(x) \\ \dot{N}_{xy} &= -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

式(12)で  $C(y), C'(x)$  は板の末端拘束力である。ただし, ここではこれらを0として扱い, 末端条件は別個に処理する。

式(10),(11),(12)を式(3),(4)に代入し, 0から  $t$  までの時間積分を遂行することにより, リブと合成させる薄板の大たわみを伴う弾塑性挙動を支配する次の基礎式が得られる。

$$D(\Delta \dot{w}) = \dot{Q}_0 - \dot{Q}_u + h \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 & + \left( \int S_{xu} dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( \int S_{yu} dy \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 & - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial S_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yu}}{\partial y} \right) \\
 & - \frac{4D}{h} \int_0^t \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \mu \left( \frac{\partial f}{\partial m_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) \right\} \right. \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \mu \left( \frac{\partial f}{\partial m_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_x} \right) \right\} \\
 & \left. + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \right) \right] dt \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \Delta w = E \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\
 + \frac{1}{h} \left\{ \nu \left( \frac{\partial S_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yu}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \int S_{xu} dx \right) \right. \\
 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int S_{yu} dy \right) \left. - E \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial n_x} \right) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial n_y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \right) \right\} dt \right. \\
 \left. \dots\dots\dots (14) \right.
 \end{aligned}$$

また, 中立面のひずみ, モーメント, および面内力は, 式 (10), (11), (12) より以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) + \int_0^t \mu \frac{\partial f}{\partial n_x} dt \\
 \epsilon_y &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) + \int_0^t \mu \frac{\partial f}{\partial n_y} dt \\
 r_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{xy} + \int_0^t \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} dt
 \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 & - \frac{4D}{h} \int_0^t \mu \left( \frac{\partial f}{\partial m_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) dt \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 & - \frac{4D}{h} \int_0^t \mu \left( \frac{\partial f}{\partial m_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_x} \right) dt \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 & - \frac{2D}{h} (1-\nu) \int_0^t \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} dt
 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \int S_{xu} dx \\
 N_y &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \int S_{yu} dy \\
 N_{xy} &= -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(3) 板の解式

前述の式 (13), (14) を, 以下の解式の誘導に便利なように, 次の形に書き表わす。

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{D} \left\{ Q_0 - Q_u - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial S_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yu}}{\partial y} \right) \right.$$

$$\left. - h \Pi(x, y) \right\} - \frac{h}{4} \int_0^t \psi(x, y) dt \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \Delta \phi &= \frac{1}{h} \left\{ \nu \left( \frac{\partial S_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yu}}{\partial y} \right) \right. \\
 & - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \int S_{xu} dx \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int S_{yu} dy \right) \left. \right\} \\
 & + E \left\{ A(x, y) - \int_0^t \Gamma(x, y) dt \right\} \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

式中,  $\Pi(x, y)$ ,  $A(x, y)$  は膜作用に関する非線形関数で,

$$\left. \begin{aligned}
 \Pi(x, y) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 & + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \left( \int S_{xu} dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & + \frac{1}{h} \left( \int S_{yu} dy \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 A(x, y) &= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 & \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned} \right.$$

また,  $\psi(x, y)$ ,  $\Gamma(x, y)$  は塑性変形に従属する非線形関数で, それぞれ, 式 (13), (14) 中の時間  $t$  に関する被積分関数である。なお, 式 (15) の

$$\frac{h}{2} \left( \frac{\partial S_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yu}}{\partial y} \right)$$

は, 合成面に作用する水平せん断力によって板に生ずる曲げに起因するものであるが, 板厚が十分薄ければ省略されてよい。

次に, (1) の仮定 **d**) を用いて, 式 (7) の近似降伏面を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 f(m, n) &= f_m + f_n = 1 \\
 f_m &= m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3 m_{xy}^2, \\
 f_n &= n_x^2 + n_y^2 - n_x n_y + 3 n_{xy}^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

したがって, 式 (18), (19) における積分項は, 時間積分を荷重段階 ( $L$ ) の和に置換して以下のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^t \psi(x, y) dt &= \sum_L \{ \psi(x, y) \}_L, \\
 \int_0^t \Gamma(x, y) dt &= \sum_L \{ \Gamma(x, y) \}_L \\
 \psi(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu \chi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu \chi') \\
 & + 6(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu m_{xy}) \\
 \Gamma(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu \omega) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu \omega') \\
 & - 6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu n_{xy}) \\
 \chi &= (2-\nu) m_x - (1-2\nu) m_y, \\
 \chi' &= (2-\nu) m_y - (1-2\nu) m_x \\
 \omega &= 2n_x - n_y, \quad \omega' = 2n_y - n_x
 \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

また, 式 (15), (16) は

$$\left. \epsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) + \sum_L (\mu \omega)_L \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) + \sum_L (\mu \omega') L \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{Eh} (1 + \nu) N_{xy} + 6 \sum_L (\mu n_{xy}) L \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{h} \sum_L (\mu \chi) L \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{h} \sum_L (\mu \chi') L \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &\quad - \frac{12D}{h} (1 - \nu) \sum_L (\mu m_{xy}) L \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

$$\dots\dots\dots (24)$$

さて、非線形方程式 (18), (19) の解  $w, \phi$  を、1. §(2) において、その概要を述べた解法上の工夫に基づいて求める。まず、両式中の諸関数、 $w, Q, S, \Pi, \psi, \phi, A, \Gamma$  を以下に示す級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ Q_0 &= \sum_m \sum_n P_{mno} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ Q_u &= \sum_m \sum_n P_{mnu} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ S_{xu} &= \sum_m \sum_n T_{mnu} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ S_{yu} &= \sum_m \sum_n T'_{mnu} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ \Pi &= \sum_m \sum_n \Pi_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \psi &= \sum_m \sum_n \psi_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \phi &= \sum_m \sum_n \phi_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ A &= \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \Gamma &= \sum_m \sum_n \Gamma_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

ただし、 $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ ,  $a, b$ : 板の  $x, y$  各方向の辺長。

ここで、図-2(a) に示すように、塑性化した  $i$  点を囲む比較的小さい有限領域 (この場合、小さい長方形領域  $i$ ) において、塑性変形の従属関数  $\psi(x, y)$ ,  $\Gamma(x, y)$  は、それぞれ、平均値  $\psi_i$ ,  $\Gamma_i$  で表わされるとする。また、図-2(b) のように、内点の膜作用の従属関数、 $\Pi(x, y)$ ,

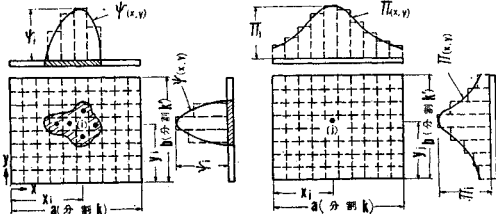


図-2(a) 塑性域と塑性変形の従属関数  $\psi(x, y)$  の近似 ( $\Gamma(x, y)$  も同様に近似される)  
 図-2(b) 膜作用の従属関数  $\Pi(x, y)$  の近似 ( $A(x, y)$  も同様に近似される)

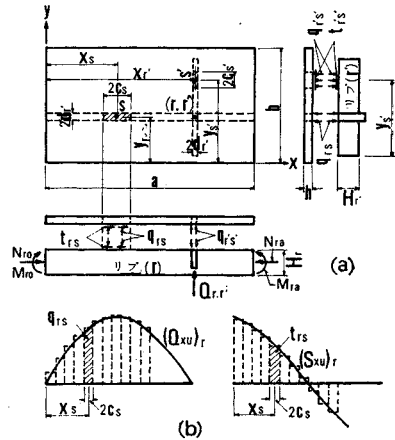


図-3 合成面に作用する力のつり合いならびにその分布の近似

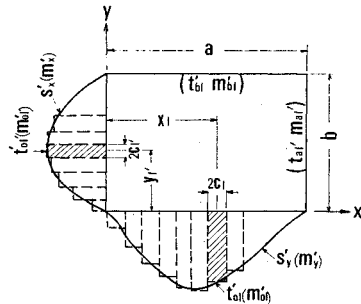


図-4 周辺拘束力とその分布の近似

$A(x, y)$  についても同様の近似分布を与える。

一方、図-3(a), (b) を参照して、前論文<sup>21)</sup>と同様に、直交したリブと板との合成面に作用する分布不静定力  $Q_{xu}, Q_{yu}, S_{xu}, S_{yu}$  についても、合成面上に採った小さい有限領域では、一定の平均値、 $q_{rs}, q_{r's'}, t_{rs}, t_{r's'}$ , などをもつ近似分布を採る。さらに、式 (24) の解に重ねて、境界条件に対する適合性を増すために加えられる周辺拘束力についても 図-4 に示す分布を与える。ここで、 $t_{0l}', t_{0l}'$  および  $t_{0l}', t_{0l}'$  は膜作用に対する周辺拘束力、 $m_{0l}', m_{0l}'$ , および  $m_{0l}', m_{0l}'$  は曲げに対する拘束モーメントである。

以上の解法上の操作に基づき、式 (25) の Fourier 係数を定めると、 $w, \phi$  の解は、次の形の連続解で得られる。

$$w = \frac{16}{\pi^2} \left[ \frac{1}{D} \left\{ qF_0 + \sum_r \sum_s \left( q_{rs} F_{rs} + \frac{h}{2} t_{rs} G_{rs} \right) + \sum_{r'} \sum_{s'} \left( q_{r's'} F_{r's'} + t_{r's'} \bar{G}_{r's'} \right) + \sum_l \left( m_{0l}' H_{0l} + m_{0l}' H_{0l} \right) + \sum_{l'} \left( m_{0l}' \bar{H}_{0l}' + m_{0l}' \bar{H}_{0l}' + \bar{H}_{0l}' \right) + h \sum_j \Pi_j F_j \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4}{h} \sum_i \sum_L (\psi_i)_L F_i \Big] \dots\dots\dots (26) \\
 \phi = & \frac{16}{h \pi^2} \left[ \sum_r \sum_s t_{rs} I_{rs} + \sum_{r'} \sum_{s'} t_{r's'} \bar{I}_{r's'} \right. \\
 & + \sum_l (t_{0l}' J_{0l} + t_{bl}' J_{bl}) + \sum_{l'} (t_{0l'}' \bar{J}_{0l'}) \\
 & \left. + t_{al}' \bar{J}_{al'} \right] + hE \sum_j A_j F_j - hE \sum_i \sum_L (\Gamma_i)_L F_i \\
 & \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned}
 F_0 = & \sum_m \sum_n \{ \rho_{mn}(x, y) \} \\
 & \cdot \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_m c_0 \sin \beta_n y_0 \sin \beta_n d_0 \\
 F_{rs} = & \sum_m \sum_n \{ \rho_{mn}(x, y) \} \\
 & \cdot \sin \alpha_m x_s \sin \alpha_m c_s \sin \beta_n y_r \sin \beta_n d_r \\
 G_{rs} = & \sum_m \sum_n \alpha_m \{ \rho_{mn}(x, y) \} \\
 & \cdot \cos \alpha_m x_s \sin \alpha_m c_s \sin \beta_n y_r \sin \beta_n d_r \\
 \bar{H}_{0l}' = & \frac{\partial}{\partial x_s} \\
 & \cdot \{ \lim_{c_s \rightarrow 0} (E_{rs}/2 c_s)_{(y_r=y_l', d_r=c_l')} \}_{x_s=0} \\
 = & \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \alpha_m^2 \{ \rho_{mn}(x, y) \} \\
 & \cdot \sin \beta_n y_l' \sin \beta_n c_l' \\
 F_j = & \sum_m \sum_n \{ \rho_{mn}(x, y) \} \sin \alpha_m x_j \\
 & \cdot \sin \frac{m \pi}{2k} \sin \beta_n y_j \sin \frac{n \pi}{2k'} \\
 G_{rs} = & \sum_m \sum_n \alpha_m \left( \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} - \nu \right) \{ \rho_{mn}(x, y) \} \\
 & \cdot \cos \alpha_m x_s \sin \alpha_m c_s \sin \beta_n y_r \sin \beta_n d_r \\
 \bar{J}_{0l}' = & \{ \lim_{c_s \rightarrow 0} (G_{rs}/2 c_s)_{(y_r=y_l', d_r=c_l')} \}_{x_s=0} \\
 = & \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \alpha_m^2 \left( \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} - \nu \right) \{ \rho_{mn}(x, y) \} \\
 & \cdot \sin \beta_n y_l' \sin \beta_n c_l' \\
 \rho_{mn}(x, y) = & \{ mn(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 \}^{-1} \\
 & \cdot \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\
 & \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

また, 外荷重; 強度  $q$ , 分布面積  $2c_0 \times 2d_0$ ,  $\bar{H}_{al}'$ ,  $\bar{J}_{al}'$  は  $\bar{H}_{0l}'$ ,  $\bar{J}_{0l}'$  において  $x_s = a$  と置いたものであり,  $F_i$  は  $F_j$  において座標を  $(x_i, y_i)$  に入れ換えて得られる。なお,  $y$  方向リブ, 周辺拘束力に関する諸係数も同様に得られるが, 記述を省略する。

式 (28) の諸係数は, 外荷重の作用位置と分布面の大きさ, ならびに前述の各種の有限領域の位置と大きさを定めれば, 板の任意点に対する影響係数として, 準備計算の段階で前もって与えられ, それぞれ独自に十分収束するまで計算される。また, これらの係数は 2 重級数であるが, 前論文<sup>21)</sup> で述べたように総和公式を用いて, 便利に計算することができる。

式 (26), (27) の  $w, \phi$  を式 (17), (24), (23) に代入して, 断面力, および中立面のひずみが求められ, また, たわみ角  $\theta_x, \theta_y$  も得られる。その際, それらの諸式に含まれる式 (28) の諸係数の微分値についても十分な収

束値が得られる。また,  $\Pi, A$  の中に含まれる微分値についても同様である。なお, これらの値も式 (27) と同じく, 準備計算の段階で前もって与えておくことができる。

さらに, 後述の板とリブとの適合条件 (合成条件) を与えるために必要な, 板の合成面 (下面) 上の任意点の水平変位  $u_{(z=h/2)}, v_{(z=h/2)}$  は,

$$\begin{aligned}
 u_{(z=h/2)} = & \left\{ \left[ \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) + \sum_L (\mu\omega)_L \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{h}{2} \theta_x + u_0 \right. \\
 v_{(z=h/2)} = & \left. \left\{ \left[ \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) + \sum_L (\mu\omega')_L \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy - \frac{h}{2} \theta_y + v_0 \right. \right. \\
 & \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

ただし,  $u_0, v_0$  は板の剛体変位を表わす。

上式中, 非線形項の積分は, 和分に置換して処理される。すなわち,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sum_L \sum_L (\mu\omega)_L - \frac{1}{2} \sum \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{a}{k} + \bar{u} \\
 & \left\{ \sum_L \sum_L (\mu\omega')_L - \frac{1}{2} \sum \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \frac{b}{k'} + \bar{v}
 \end{aligned}$$

ここで,  $\bar{u}, \bar{v}$  は, 周辺固定板などの場合において, 曲げによって塑性化した  $x, y$  各方向相対辺の中央面の集約的なび (separation) であって, 次のような近似値<sup>注3)</sup> によって与える。たとえば,  $x=0$ , ならびに  $y=0$  の各辺上の点においてそれぞれ,

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_{(x=0)} = & \frac{h}{2} (n_x \theta_x'')_{x=0} \\
 \bar{v}_{(y=0)} = & \frac{h}{2} (n_y \theta_y'')_{y=0} \\
 & \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

ここで,  $(\theta_x'')_{x=0}, (\theta_y'')_{y=0}$  は, これらの点での塑性回転量である。また,  $x=a, y=b$  の各辺についても同様である。

以上述べたように, 各有限領域の分割を定め, それらの位置と大きさのみにかかわる式 (27) の影響係数, および必要な微分値を前もって与えておけば, 荷重の強さ, ならびに, 各有限領域における平均量 (前述の不静定力, 膜作用および塑性変形に伴う物理量) を定めることにより, 板の変形, 断面力が連続解の形でただちに得られる。

ところで, 式 (26), (27) の  $w, \phi$  に含まれる  $\psi_i, \Gamma_i$  はそれぞれ, 式 (22) に示されるように, 未定係数  $\mu$ , およびその時点での断面力の 2 次微分を陰の形で含んでいる。

注 3) 塑性関節線を生じた周辺の中央面位置における集約的なびを算定する場合, ここでは, 全層塑性状態でこれらの辺に直角に作用する曲げモーメント, および軸力の影響がほとんど支配的であると見なした。

さて、 $\psi_i, \Gamma_i$  を線形化するために、部分的に差分法が用いられる。すなわち、塑性化した  $i$  点、ならびに周囲の8点について図-5 に示すネットを考え、逐次計算のある過程で、これらの各点の断面力の近似値が与えられたとすれば、 $\psi_i, \Gamma_i$  は、この時点における各点の  $\mu$  の1次関数として次のように表わされる。

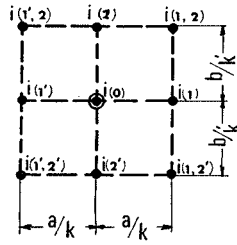


図-5  $i$  点 [ $i(0)$ ] を囲む 8 個の点の指標

$$\psi_i = \left[ k^2 \{ \mu_{i(1)} \chi_{i(1)} + \mu_{i(1')} \chi_{i(1')} \} + (\lambda k')^2 \{ \mu_{i(2)} \chi_{i(2)} + \mu_{i(2')} \chi_{i(2')} \} - 2 \mu_{i(0)} \{ k^2 \chi_{i(0)} + (\lambda k')^2 \chi_{i(0)'} \} + \frac{3\lambda}{2} (1-\nu) k k' \{ \mu_{i(1,2)} (m_{xy})_{i(1,2)} - \mu_{i(1',2')} (m_{xy})_{i(1',2')} + \mu_{i(1',2')} (m_{xy})_{i(1',2')} \} \right] a^{-2} \dots (31)$$

$$\Gamma_i = \left[ k^2 \{ \mu_{i(1)} \omega_{i(1)'} + \mu_{i(1')} \omega_{i(1)'} \} + (\lambda k')^2 \{ \mu_{i(2)} \omega_{i(2)} + \mu_{i(2')} \omega_{i(2)'} \} - 2 \mu_{i(0)} \{ k^2 \omega_{i(0)'} + (\lambda k')^2 \omega_{i(0)} \} - \frac{3\lambda}{2} k k' \{ \mu_{i(1,2)} (n_{xy})_{i(1,2)} - \mu_{i(1',2')} (n_{xy})_{i(1',2')} + \mu_{i(1',2')} (n_{xy})_{i(1',2')} \} \right] a^{-2} \dots (32)$$

すなわち、式(26)、(27)の  $w, \phi$  は  $\mu$  を1次で含んだ連続解の形になり、式(17)、(24)の断面力、式(29)の水平変位も同様な形になる。

(4) リブの基礎式と解式

板の項で述べた解法上の工夫は、リブにも同様に適合される。たとえば、リブ  $r$  について、図-3 に示したような、板との間に受け渡される不静定力、末端拘束力、格点力、ならびに図-6(a)、(b)に見るような大たわみ、塑性化の影響が考えられる。

いま、リブ  $r$  のたわみを  $w_r$ 、曲げ剛度を  $EI_r$  (本文では、簡単な場合として、リブ断面を長方形断面 ( $B_r \times H_r$ ) として扱っている)、曲げモーメント、軸力、および軸ひずみをそれぞれ  $M_{xr}, N_{xr}, \epsilon_{xr}$  とし、さらに、リブに作用する荷重として、板とリブとの間で受け渡される鉛直、水平各方向の分布不静定力  $q_{ur}, S_{xur}$ 、格点力も、自重  $q_r$  などを考慮すれば、リブ  $r$  の基礎式は次の形に書かれる。

$$\frac{d^4 w_r}{dx^4} = \frac{1}{EI_r} \left\{ q_r + q_{ur} - \frac{H_r}{2} \frac{dS_{xur}}{dx} + \Pi_r'(x) \right\}$$

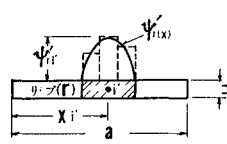


図-6(a) リブの塑性域と塑性変形の従属関数  $\psi_r(x)'$  の近似

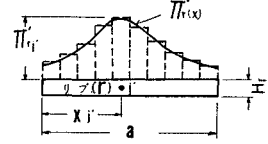


図-6(b) リブの膜作用の従属関数  $\Pi_r(x)'$  の近似

$$- \frac{4}{H_r} \int_0^t \psi_r'(x) \dots (33)$$

軸ひずみ  $\epsilon_{xr}$  は、

$$\epsilon_{xr} = \frac{N_{xr}}{EB_r H_r} + \int_0^t \Gamma_r(x)' dt \dots (34)$$

式中、 $\Pi_r(x)'$  は板の場合と同様に膜作用に関する非線形関数であって、

$$\Pi_r(x)' = N_{xr} \frac{d^2 w_r}{dx^2} \dots (35)$$

また、 $\psi_r(x)', \Gamma_r(x)'$  は、塑性変形に従属する非線形関数である。

さて、リブ  $r$  の降伏条件は、

$$f'(m_r, n_r) = (m_{xr}) + (n_{xr})^2 = 1 \dots (36)$$

ただし、

$$m_{xr} = \frac{M_{xr}}{M_{Pr}}, \quad n_{xr} = \frac{N_{xr}}{N_{Pr}}, \quad M_{Pr} = \frac{1}{4} \sigma_p H_r^2, \quad N_{Pr} = \sigma_p B_r H_r \dots (37)$$

したがって、式(33)、(34)における、時間  $t$  に関する塑性変形の従属項は、板の場合と同様な処理を行なうことにより

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t \psi_r(x)' dt &= \sum_L \{ \psi_r(x)' \}_L, \\ \int_0^t \Gamma_r(x)' dt &= \sum_L \{ \Gamma_r(x)' \}_L, \\ \psi_r(x)' &= \frac{d^2 \mu_r'}{dx^2}, \quad \Gamma_r(x)' = 2 \mu_r' n_{xr} \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

ここで、 $\mu_r'$  はリブ  $r$  の塑性化した点において、塑性変形中変化するスカラー量である。

ここで、再び式(33)を参照すれば、式中の膜作用、ならびに塑性変形に従属する物理量は、板の場合と同様に鉛直分布荷重と同じ性格を持っていることがわかる。また、図-6に見るように、これらは分割された小さい有限領域では等分布であると仮定され、さらに、リブの上縁には板に対するものと同一の不静定力の分布が与えられるから、図を見れば明らかなように、リブのたわみ、断面力、軸ひずみはこれらの未知量を含んだ代数関数の形で容易に表わされる。たとえば、たわみ  $w_r$  は、

$$w_r = \frac{1}{EI_r} \left\{ \sum \left( q_{rs} f_{rs} + \frac{H_r}{2} t_{rs} q_{rs} \right) + \sum_j' Q_{rj} \bar{f}_{rj} + M_{r0} e_{r0} + M_{ra} e_{ra} + \sum_j' \Pi_{rj}' f_{j'} \right\} - \frac{4}{H_r} \sum_i' \sum_L \{ \psi_{ri}' \}_L f_i' \dots (39)$$



ここで,  $e, f, g$  の諸係数は, いずれも 代数関数であるが, 紙数の都合で記述を省略する。また, 断面力, 軸ひずみの諸式も同様に得られるが記述を省略する。

次に, リブ  $r$  の上縁の水平変位  $u_r(x_r = -H/2)$  は,

$$u_r(x_r = -H/2) = \left\{ \frac{N_{xr}}{EB_r H_r} + 2 \frac{\Sigma(\mu_r' n_{xr}) L}{L} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{dw_r}{dx} \right)^2 \right\} dx + \frac{H}{2} \theta_{xr} + u_{r0} \quad \dots\dots\dots(40)$$

ただし,  $\theta_{xr}$  はたわみ角,  $u_{r0}$  はリブの剛体変位を表わし, なお, 板の場合と同様に, 上式中の非線形項の積分は和分に置換して処理される。すなわち,

$$\left\{ 2 \frac{\Sigma(\mu_r' n_{xr}) L}{L} - \frac{1}{2} \Sigma \left( \frac{dw_r}{dx} \right)^2 \right\} \frac{a}{k_r} + \bar{u}_r$$

ここで,  $\bar{u}_r$  は末端固定などの場合における末端の separation であって,

$$\bar{u}_r(x=0) = \frac{H}{2} (n_{xr} \theta_{xr''})_{x=0} \quad \dots\dots\dots(41)$$

ただし,  $(\theta_{xr''})_{x=0}$  は末端の塑性回転量である。

ところで, 式 (39) に見るように, 変位, 断面力の諸式に含まれる  $\psi_{ri}'$  は式 (38) で  $\mu_r'$  の 2 次微分の形となっている。ここで, 板の場合と同様に部分的に差分法が用いられる。すなわち, 図-7 に示す塑性化した点  $i'$  を含む 3 点を考えれば,  $\psi_{ri}'$  はこれらの点の  $\mu_r'$  の 1 次関数として次のように表わされる。

$$\psi_{ri}' = k_r^2 \{ \mu_r' i'(1) - 2 \mu_r' i'(0) + \mu_r' i'(1) \} a^{-2} \quad \dots\dots\dots(42)$$

結局, リブの解は  $\mu_r'$  を 1 次で含んだ連続解の形になる。

以上は,  $x$  方向のリブ  $r$  についての所論であるが,  $y$  方向のリブ  $r'$  の解も同様に求まることはいうまでもない。

(5) 境界条件

本文で扱った板の境界条件は, 次のものである。

a) 曲げに対して単純支持, 膜作用に対して 2 つの条件を与えた板

式 (26) は周辺で  $w=0$  を満足しており, 付加条件として,

$$m_{0i}' = m_{bi}' = m_{0i'}' = m_{ai'}' = 0 \quad \dots\dots\dots(43)$$

膜作用に対する条件の 1 つは, 隅点を不動とし, 周辺に垂直な方向の拘束がない場合で, 式 (27) において,

$$t_{0i}' = t_{bi}' = t_{0i'}' = t_{ai'}' = 0 \quad \dots\dots\dots(44)$$

他の 1 つは, 周辺を完全に拘束する場合で

$$\left. \begin{aligned} u_{(x=0, z=0)} &= u_{(x=a, z=0)} = 0 \\ v_{(y=0, z=0)} &= v_{(y=b, z=0)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

この場合には, 境界上の各選点において, 連立 1 次方程式 (45) を満たすように, 拘束力  $t_{0i}'$ ,  $t_{bi}'$  および  $t_{0i'}'$ ,  $t_{ai'}'$  が定められる。

b) 周辺固定板

境界条件は, 弾性, 塑性の各状態により異なる。

弾性状態においては, 曲げに対する付加条件として,

$$\left. \begin{aligned} \theta_{x(x=0)} &= \theta_{x(x=a)} = 0 \\ \theta_{y(y=0)} &= \theta_{y(y=b)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

さらに, 膜作用に関しては式 (45) が適用される。したがって, 周辺の各選点において, 式 (45), (46) を満たすように拘束力  $t'$ , 拘束モーメント  $m'$  が定められる。

塑性状態においては, 周辺の塑性化した選点において,

$$\left. \begin{aligned} f(m, n) &= 1, \\ \bar{u} &= \frac{h}{2} (n_x \theta_x''), \quad \bar{v} = \frac{h}{2} (n_y \theta_y'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

すなわち, これらの点には, 塑性回転角と separation  $\theta_x''$ ,  $\bar{u}$ , または  $\theta_y''$ ,  $\bar{v}$  が生じ, 式 (47) に適合するような  $m'$ ,  $t'$  が定められる。

(6) 合成条件

板とリブの合成面上に採った選点において, 弾性, および弾塑性挙動のすべての時点で, 次の連続条件 (合成条件) が要求される。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_r, \quad u_{(z=h/2)} = u_r(x_r = -H_r/2) \\ w &= w_{r'}, \quad v_{(z=h/2)} = v_{r'}(x_r' = -H_r'/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

式 (48) の始めの 2 式は板と,  $x$  方向に配置されたリブ  $r$  の合成条件であり, 後の 2 式は板と,  $y$  方向に配置されたリブ  $r'$  の合成条件である。したがって, 合成面上の各選点において, 式 (48) を満たすように不静定力  $q_{rs}$ ,  $q_{r's'}$  ならびに  $t_{rs}$ ,  $t_{r's'}$  が定められる。

(7) 逐次計算の方法と降伏条件の線形化

膜作用は, 弾性範囲のある荷重状態から徐々に発生する。この段階から荷重を漸増させ, 逐次計算により追跡する。まず, 板およびリブの塑性化した点  $i, i'$  の降伏条件は, 式 (21), および式 (36) を用いて,

$$f_i = 1, \quad f_{i'} = 1 \quad \dots\dots\dots(49)$$

$f_i < 1, f_{i'} < 1$  なる場合は弾性径路であり, この時点では,  $\mu_i = 0, \mu_{i'} = 0$  である。さて, 弾塑性状態の場合の逐次計算の方法を, 荷重段階  $L-1$  から  $L$  に移行する時点について説明する。逐次計算は, 板およびリブの双方に対し平行させるが, ここでは, 主として板について述べる。

いま,  $L-1$  段階におけるすべての諸量に確定したものとす。図-8 のフローチャートに示すように, まず荷

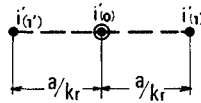


図-7  $i'$  点 [ $i'(0)$ ] を囲む 3 個の点の指標

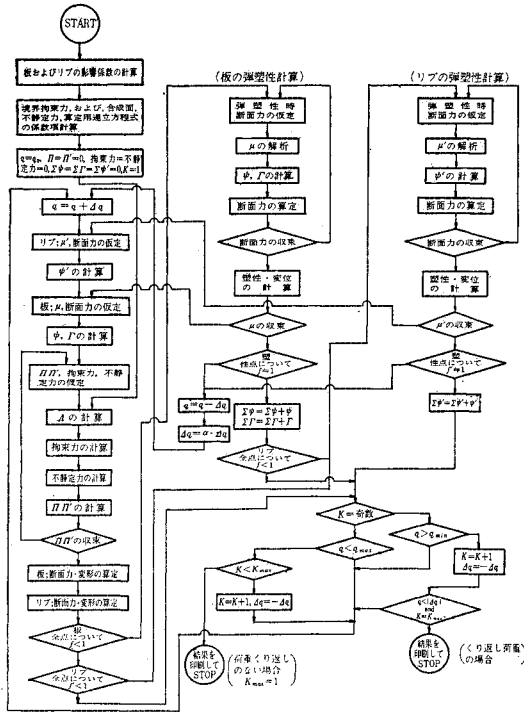


図-8 フローチャート

重を  $q_L = q_{L-1} + \Delta q_L$  に増加させ、板ならびにリブの  $\mu$ ,  $\mu'$  の  $L$  段階の最初の仮定値、および断面力のそれを  $L-1$  段階の値で仮定し、これらの仮定値になる  $L$  段階の塑性変形の従属関数  $\psi_L, \Gamma_L, \psi_L'$  を求めると同時に、 $L$  段階での膜作用の従属関数  $\Pi_L, \Pi_L'$ , 境界拘束力, 合成面の不静定力を仮定する。次に、 $\mu, \mu'$  を上記仮定値にとどめた状態で、 $\Pi_L, \Pi_L'$  を収束させれば、 $A_L$  境界拘束力, 合成面の不静定力は上記の条件のもとに収束し、式(17)により  $L$  段階の面内力の第1近似値  $(N)_{L,1} = (N_x, N_y, N_{xy})_{L,1}$  が定まる。さらに、式(24)の右辺第2項中、 $L$  段階の影響のみを除外して曲げモーメントの各分値  $(\bar{M})_{L,1} = (\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_{xy})_{L,1}$  を求め、これら断面力の諸値を式(21)の  $f_{(m,n)}$  に代入して、いくつかの点で  $f_{L,1} > 1$  になったとする。

ここで、これら塑性化した各点で  $f_{L,1} = 1$  になるような  $\mu_{L,1}$  を式(24)の第2項中の  $L$  段階の影響を考慮することによって求める。この際、式(21)中の  $f_m$  は次のように線形化される。

$$\begin{aligned}
 (f_m)_{L,1} = & (\bar{m}_x)_{L,1}^2 + (\bar{m}_y)_{L,1}^2 - (\bar{m}_x \bar{m}_y)_{L,1} \\
 & + 3(\bar{m}_{xy})_{L,1}^2 - \frac{4D}{hM_P} \mu_{L,1} \\
 & \cdot [(\bar{m}_x)_{L,1} \{2(x) - (x')\}_{L,1} \\
 & + (\bar{m}_y)_{L,1} \{2(x') - (x)\}_{L,1} \\
 & + 18(1-\nu)(\bar{m}_{xy})_{L,1} (m_{xy})_{L,1}] \dots\dots\dots (50)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 (\bar{m}_x)_{L,1} &= \frac{(M_x)_{L,1}}{M_P}, \quad (m_y)_{L,1} = \frac{(\bar{M}_y)_{L,1}}{M_P}, \\
 (\bar{m}_{xy})_{L,1} &= \frac{(\bar{M}_{xy})_{L,1}}{M_P}
 \end{aligned}$$

降伏条件式は、

$$f_{L,1} = (f_m)_{L,1} + (f_n)_{L,1} = 1 \dots\dots\dots (51)$$

式(51)により、各塑性点における  $\mu_{L,1}$  を求め、式(24)の第2項にこの影響を加え、 $L$  段階における曲げモーメントの各分値の第1近似値  $(M)_{L,1} = (M_x, M_y, M_{xy})_{L,1}$  を定める。

再び、これらの第1近似値  $\mu_{L,1}, (M)_{L,1}, (N)_{L,1}$  を用いて同様の計算を行ない、これらの諸値が収束するまで繰り返し演算を行なう。また、図-8に示すように、リブの弾塑性解析も平行させる。

なお、本計算の一部に、Massonet が示唆した逐次計算を併用してみたが、この方法では、演算の各サイクルにおいて  $\mu$  の変化と膜応力の変化が対応しないので、本計算の範囲では収束上の難点が見受けられた。

### 3. 計算例と照査

#### (1) 大たわみを考慮した単一板の弾塑性曲げ

本章では、従来、理論的なデータがほとんど与えられていないこの種の板構造の弾塑性領域の挙動について若干の詳細な計算例を示し、同時に本解法の精度に関する多面的な照査の結果について述べる。

まず、図-9, 10 は、全面等分布荷重を受け、曲げに対して単純支持される正方形板が、膜作用に対し、2. (5) で述べたような2種の拘束条件を持つ場合の荷重-最大たわみ(板中心の  $w$ ) 曲線であって、3種の板厚、2種の降伏応力に対して与えられており、同時に、大たわみを無視した場合のそれも併記されている。

図より明らかなように、大たわみを考慮した場合、考慮しない場合と比較して著しく大きい耐荷性を持つ。この傾向は、当然膜作用の強さに左右され、板厚が薄く、降伏応力が高く、周辺の拘束が大きいものほど顕著である。表-1 はこれらの傾向を示したもので、弾性限界荷重  $q_e$  について見ると、膜作用に対して隅点のみが拘束され、辺長に対する板厚比;  $h/a = 3.2 \times 10^{-2}$  の板の  $q_e$  は、大たわみを無視した場合の弾性限界荷重  $q_{e0}$  とほとんど差異がなく、膜作用の効果は 1~3% に過ぎない。しかし、 $h/a = 1.6 \times 10^{-2}$  の板の  $q_e$  は、降伏応力  $\sigma_P = 3000 \text{ kg/cm}^2, 4600 \text{ kg/cm}^2$  の2種について、それぞれの場合の  $q_{e0}$  に対し、16%, および 26% の増大が見られ、膜作用の効果により塑性化が遅れる。さらに、膜作用に

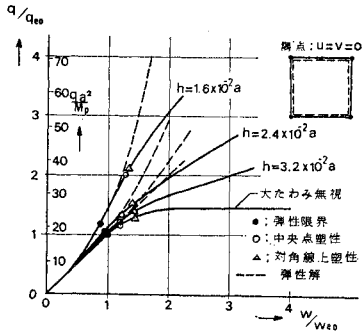


図-9(a) 単純支持正方形板の荷重-最大たわみ曲線 (隅点不動, 周辺の水平変位無拘束, 降伏応力=3 000 kg/cm<sup>2</sup>)

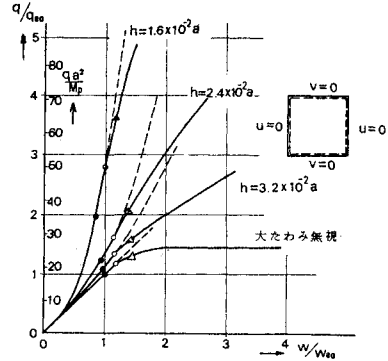


図-10(a) 単純支持正方形板の荷重-最大たわみ曲線 (周辺の水平変位=0, 降伏応力=3 000 kg/cm<sup>2</sup>)

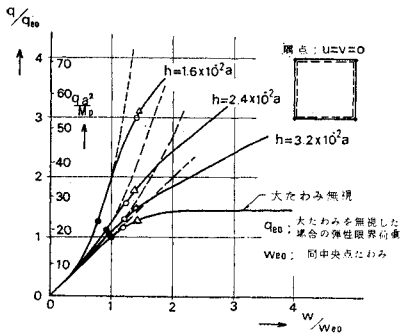


図-9(b) 単純支持正方形板の荷重-最大たわみ曲線 (隅点不動, 周辺の水平変位無拘束, 降伏応力=4 600 kg/cm<sup>2</sup>)

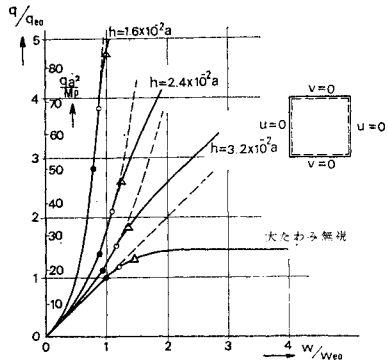


図-10(b) 単純支持正方形板の荷重-最大たわみ曲線 (周辺の水平変位=0, 降伏応力=4 600 kg/cm<sup>2</sup>)

対して周辺を完全に拘束した場合はこの傾向がさらに著しく, 前の板で, それぞれ8%, 15%の増大があり, 後の板では, 2倍および2.8倍に達する。

一方, 膜作用は塑性化によってさらに促進される。大たわみを無視した場合, 対角線上の塑性域が連続した時点の荷重  $q_{d0}$  は, 崩壊荷重にほとんど近いが, 大たわみを考慮した場合のこの時点の荷重  $q_d$  は,  $q_{d0}$  に比べて著しく大きく, たとえば,  $h/a=1.6 \times 10^{-3}$  の板では, 前述の各降伏応力のものについて, その比率はそれぞれ

2.7倍, および3.6倍, また  $q_{e0}$  との比率は, 3.7倍および4.8倍に達し, その時点以後, さらに全域塑性化, 塑性膜の経路を通じて耐荷力が増大する。

図-11は, 各荷重段階における塑性域の進展の様態を示した例である。正対称の周辺単純支持板においては, 大たわみを考慮しない場合, 崩壊状態になっても, 曲げモーメントの各分値の小さい周辺の中央付近に弾性域が残存するが, 大たわみを考慮した場合は, 膜力によっ

て, この部分が次第に塑性化する。なお, 図-11の塑性域と弾性域との限界線は, 各選点の塑性化開始の荷重の分布図を画き, 等高線法によって求めたものである。なお, 後で述べるように, 大たわみを考慮しない場合の塑性域の進展の様態に

表-1

	板厚比 ( $h/a$ ) 降伏応力	$q_e/q_{e0}$			$q_d/q_{e0}, (q_d/q_{d0})$		
		$1.6 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-2}$
隅点変位=0	$\sigma_p=3\ 000\ \text{kg/cm}^2$	1.16	1.04	1.01	2.08 (1.55)	1.52 (1.13)	1.42 (1.06)
	$\sigma_p=4\ 600\ \text{kg/cm}^2$	1.26	1.11	1.03	2.81 (2.10)	1.78 (1.33)	1.49 (1.11)
周辺変位=0	$\sigma_p=3\ 000\ \text{kg/cm}^2$	1.99	1.24	1.08	3.66 (2.74)	2.08 (1.55)	1.58 (1.18)
	$\sigma_p=4\ 600\ \text{kg/cm}^2$	2.84	1.40	1.15	4.78 (3.57)	3.02 (2.25)	1.85 (1.38)

$q_e$ : 弾性限界荷重 (大たわみ無視)     $q_d$ : 対角線上塑性荷重 \*  $q_{d0}/q_{e0}=1.34$      $q_{e0}$ : 弾性限界荷重 (大たわみ無視)     $q_{d0}$ : 対角線上塑性荷重

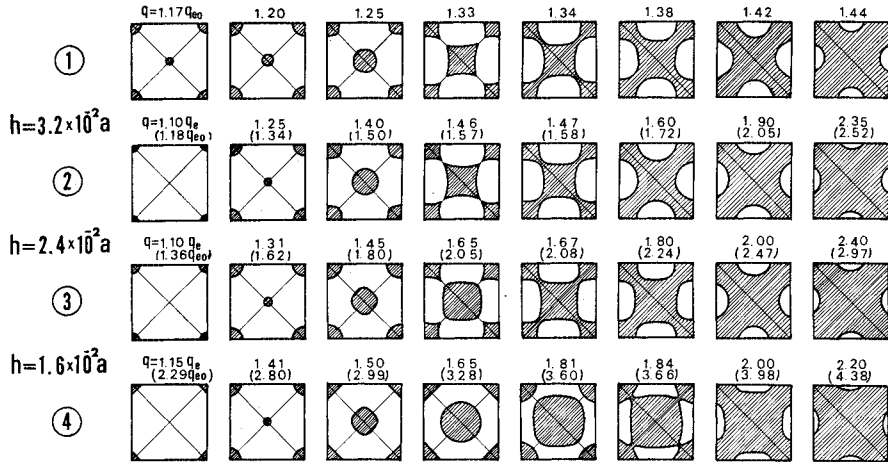


図-11 塑性域の変化(単純支持正方形板, 周辺の水平変位=0, 降伏応力=3000 kg/cm<sup>2</sup>)  
 (① 大たわみ無視, ②~④ 大たわみ考慮)

表-2

板厚比 (h/a)	1.6×10 <sup>-2</sup>			2.4×10 <sup>-2</sup>			3.2×10 <sup>-2</sup>			
	q/q <sub>e</sub>	f <sub>m</sub>	f <sub>n</sub>	q/q <sub>e</sub>	f <sub>m</sub>	f <sub>n</sub>	q/q <sub>e</sub>	f <sub>m</sub>	f <sub>n</sub>	
σ <sub>p</sub> =3000(kg/cm <sup>2</sup> )	①	1.41	0.57	0.43	1.31	0.86	0.14	1.25	0.95	0.05
	②	1.84	0.39	0.61	1.67	0.74	0.26	1.47	0.91	0.09
	③	2.20	0.20	0.80	2.40	0.43	0.57	2.35	0.53	0.47
σ <sub>p</sub> =4600(kg/cm <sup>2</sup> )	①	1.35	0.38	0.62	1.50	0.73	0.27	1.31	0.89	0.11
	②	1.68	0.24	0.72	1.83	0.61	0.39	1.61	0.82	0.18
	③	1.93	0.13	0.87	2.48	0.35	0.65	2.41	0.48	0.52

\* 周辺の水平変位=0, ①; 中央点塑性, ②; 対角線上塑性, ③; 全域塑性に近い状態

ついで、周辺固定板も含め、本解析結果と Lopez<sup>24)</sup> らが他の方法で求めた結果とが照合された。

図-12(a), (b) は、図-11 の各板について、x 方向

曲げモーメント、軸力(無次元量)の分布の変化を示したもので、特に図-12(b)に見るように、膜力は荷重の増大とともに急増し、曲げモーメントは塑性化とともに減少する。さらに、塑性域がほぼ全域にわたって拡大した時点(図-11 の最終状態)で、板

厚の薄い板は、ほとんど塑性膜の状態に到達するが、板厚が大きくなるほど、曲げの残留が大きくなり、曲げと軸力の配分の変化が継続する。表-2 は、各荷重状態に

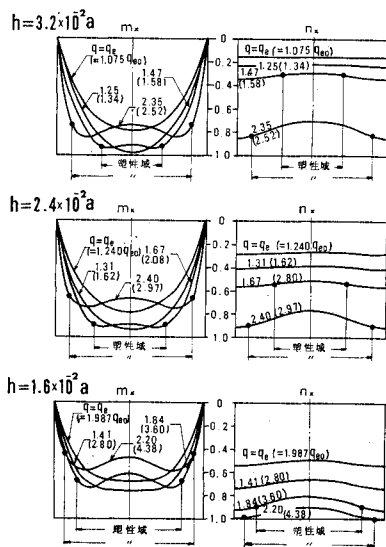


図-12(a) m<sub>x</sub>, n<sub>x</sub> の分布の変化  
 (y=0.5b 断面)

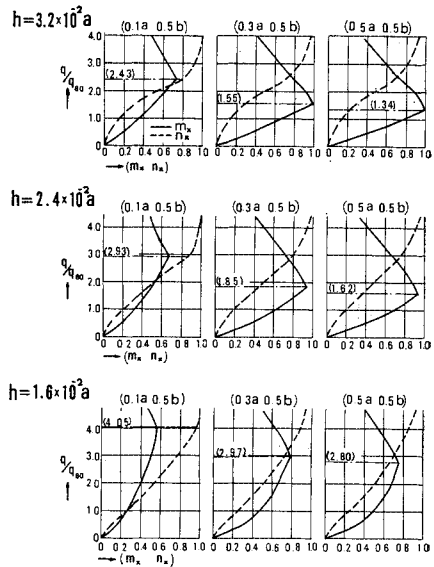
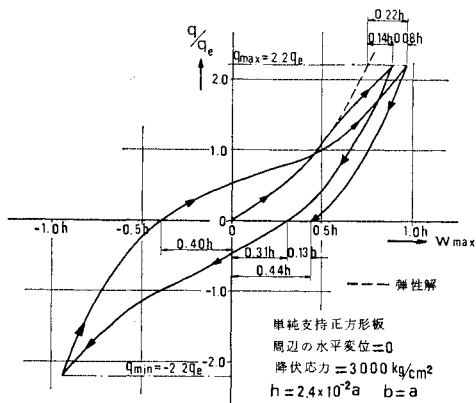
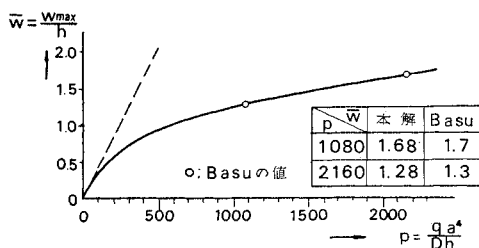


図-12(b) m<sub>x</sub>, n<sub>x</sub> の分布の変化

--- 各点の降伏値



図一13 除荷を含む荷重—最大たわみ曲線



図一14 弾性大たわみ問題についての他の解法との比較 (単純支持正方形板, 周辺の水平変位=0)

ついて, 式 (21) の降伏条件  $f_{(m,n)}=1$  を支配する曲げ, および膜作用のそれぞれの response  $f_m, f_n$  の比率を各種の板について表わしたものである。

最終時点以後, 板は次第に 塑性膜の状態に転化するが, 本解析では実用範囲外として扱っていない。

次に, 図一13 は, 特に除荷の経路の挙動を見るため, 等分布荷重を受ける正方形板について求めた荷重—最大たわみ曲線であって, 残留変形は, 除荷される時点での膜作用, および塑性変形の大きさにより, 一般に, 大たわみを伴う弾性板としての変形曲線に平行にもどした場合の値より大きくなる。

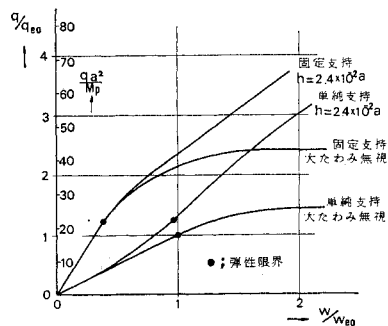
さて, 以上の解析結果に関連し, 本解法の精度について種々の照査が行なわれた。以下, それらについて述べる。

まず, 図一14 は, 大たわみの評価に関する精度を調べるための1資料(弾性問題)であって, 本解法による値は, 板内の有限領域について  $5 \times 5$  分割, 周辺の膜作用に対する拘束力の分布を5分割して得られた値である。また, 比較されている解析値は, Basu<sup>17)</sup>らが  $12 \times$

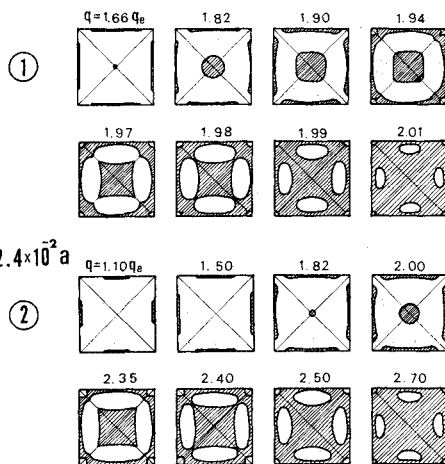
表一3 等分布荷重を受ける正方形板の終局荷重\*( $q \cdot a^2 / M_P$ )

	本解	Lopez	園田	Hodge 下界解	同上界解
周辺単純支持	25.82	24.75	25.09	24.86	26.54
周辺固定支持	43.82	45.84	43.47	42.86	49.25

\* 大たわみ無視



図一15 単純支持正方形板(周辺の水平変位=0, 降伏応力=3000 kg/cm<sup>2</sup>)と同一固定板の荷重—最大たわみ曲線



図一16 周辺固定板の塑性域の変化 (① 大たわみ無視 ②大たわみ考慮)

$12$  分割のネットを採った有限差分法によって計算したもので両者は良好な一致を示している。

次に, 断面力の精度に関連し, かつ塑性流れが最も急速に生ずる大たわみを無視した曲げの弾塑性問題の解析を行ない, 周辺単純支持, および固定の正方形板について, Hodge<sup>22)</sup>, 園田<sup>23)</sup>らの塑性解析法による結果, ならびに Lopez<sup>24)</sup> らの discrete model による弾塑性解析の結果と比較した。解析は, 有限領域の分割を前述の  $5 \times 5$  分割にした場合と,  $9 \times 9$  分割にした場合の双方について行なったが, 終局荷重の値の差異は4%であった。表一3 は後者の場合の終局荷重の判定値と他の解析値との比較であって, 良好な精度を得ているものと判断される。

図一15 は, 単純支持板と固定板の 荷重—最大たわみ曲線の比較であって, 大たわみを考慮した場合, 固定板の変形性状は, 周辺が塑性化した後, 次第に単純支持板のそれに類似して行くことがわかる。

図一16 は, 周辺固定板の塑性域の変化の模様を例を示したものである。

なお、図-11、および図-16中の大たわみを無視した場合の単純支持板、ならびに固定板における塑性域の進展の様相を、Lopez<sup>24)</sup>らが他の方法で求めた結果と照合したが、両者の傾向は非常によく一致している。

図-17は、大たわみを考慮した弾塑性解析における有限領域の分割の精度を調べたもので、この場合は、前述の大たわみを無視した場合にくらべて、塑性化後の変形の進行が緩慢であり、5×5、および9×9分割の結果を比較すると、前者で十分な精度を得ることがわかる。

本文の大たわみを考慮した場合のデータは、有限領域を5×5分割、周辺拘束力の分布を5分割として解析したものである。

さらに、図-18も、本文の解法の基本的な照査の1つを示すもので、鶴田<sup>3)</sup>らが実験を行なった固定板を本解法によって解析し、両者の結果を比較したものである。この実験における固定の方法は、誤差は少ないが完全ではないことを考慮すれば、両者はよく一致しているといえよう。

(2) 大たわみを考慮したリブ付き板の弾塑性曲げ

すでに述べたリブ付き板の解法による計算例を図-19に示す。計算の対象にしたものは、図のような十字形に配置されたリブにより補剛される正方形板が全面等分布荷重を受ける場合であって、リブの剛度を2種類に変化させてその挙動を調べた。また、計算上、板における有限領域の分割は5×5とし、板とリブとの間に作用する不静定力の分割は、前論文の照査の結果を参考にし15分割とした。

図より明らかのように、2つの計算例では、塑性化は正方形板の隅点より始まり板の各パネルにおける膜作用が増大する。しかし、各パネルの急速な崩壊は起こら

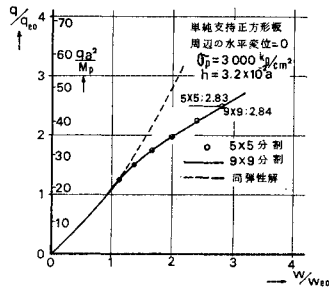


図-17 大たわみを考慮した弾塑性解析における有限領域の分割の精度

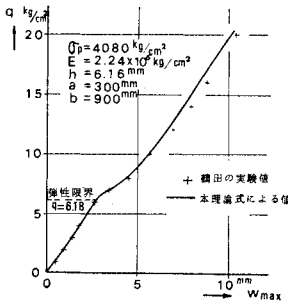


図-18 鶴田の実験値と本解法による結果の比較

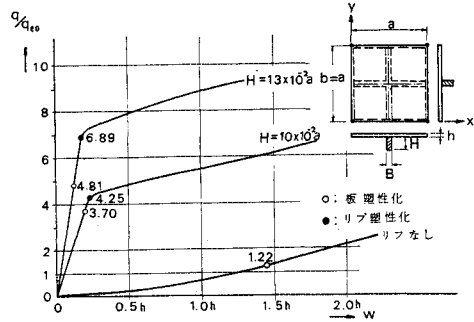


図-19 リブ付き板の荷重—たわみ(板中央点)曲線 (単純支持正方形板、隅点不動、周辺の水平変位無拘束、降伏応力=3000 kg/cm<sup>2</sup>)

ず、リブ付き板全体の変形の進行はなお弾性的であってリブ中央の塑性化とともに急増し、以後の変形性状は、リブがない場合の板のそれに類似してることがわかる。この結果は、従来、楠田<sup>3)</sup>、J. Clarkson<sup>30), 31)</sup>らの実験によって検証された、リブ付き板の挙動が大たわみをあまり期待できないリブ格子の崩壊に支配されると見なされる事実と同じ帰結を与える。

4. む す び

本文で扱った板構造は、大たわみやリブの偏心補剛による影響を受け、降伏条件の不明確な性格を持つものであるが、従来の理論的な解明が十分に行なわれていないものであるが、若干の例題ならびに多面的な精度の照査を通じ、本解法が、この種の板構造の忠実な解析に有効であることがわかった。

単一板の解析例では、膜作用を考慮した場合の耐荷力が、それを無視した場合のものに比べて相当に大きくなる結果とともに、板厚、降伏応力、膜作用に対する周辺の拘束条件、除荷を含めた変形能などの相関性を示す理論的データが詳細に与えられた。

リブ付き板を扱った例題の計算結果の範囲では、リブ付き板の挙動が、大たわみをあまり期待できないリブの曲げ崩壊のモードに支配されるという、従来の実験結果と同様の結果が示される。しかし、本解析は、本質的に立体解析であり、この問題を有効幅を仮定したリブ格子の曲げ崩壊の問題として解析するものと異なり、複雑な弾塑性応力場にある板の有効幅という理論的なあいまいさを持たない点に特長がある。

以上の事実から、本解法は、横荷重を受けるこの種の板構造の忠実な弾塑性解析を行なう場合に、1つの基本的な解法として寄与できるものと思われる。また、本解法は板の周辺に分布する外力の取扱いが便利であるので、類似の問題、たとえば腹板の後座屈現象の解明など

にも有用であることを付記する<sup>32)</sup>。

参 考 文 献

- 1) 岡村宏一: 非平面保持の曲げを生ずる多室板構造の解法, 土木学会関西支部講演概要, pp. 1-33-1~4, 1970.
- 2) 岡村宏一・吉田公憲: Membrane action を有する矩形板の弾塑性解析, 第 25 回土木学会講演概要 I, pp. 309~312, 1970.
- 3) 岡村宏一・吉田公憲・進藤泰男: リブ付き板の弾塑性立体解析, 第 25 回土木学会講演概要 I, pp. 305~308, 1970.
- 4) 鶴田彰介・本間康之, ほか: 水圧を受ける平板の強度, 造船協会論文集, No. 109, pp. 305~316, 1961.
- 5) 楠田忠雄・藤井英輔: 垂直荷重を受ける防撓板の塑性設計, 造船協会論文集, No. 110, pp. 287~294, 1961.
- 6) Young, A.G.: Ship plating loaded beyond the elastic limit, Trans. I.N.A., Vol. 101, No. 2, pp. 143~165, 1959.
- 7) Kaiser, R.: Rechnersche und experimentelle ermittlung der durchbiegungen und spannungen von guadratischen platten bei freier auflagerung an den rändern, gleichmässig verteilter last und grossen ausbiegungen, Z.A.M.M., Band 16, Heft 2, pp. 73~98, 1936.
- 8) Wang, C.T.: Tech. Notes, N.A.C.A., Wash., No. 1425, 1948.
- 9) Levy, S.: Tech. Notes N.A.C.A., Wash, No. 846, No. 847, 1942.
- 10) Way, S: A laterally loaded champed square plate with large deflection, Proc. of 5th Intern. Congr. Appl. Mech., cambridge, Mass, pp. 123~128, 1938.
- 11) 川井忠彦・吉村信敏: 有限要素法による平板の大たわみ問題の解析, 生産研究, Vol. 20, pp. 383~387, 1968.
- 12) Yamaki, N.: Post buckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Appl. Mech. 26, pp. 407~414, 1959.
- 13) Skaloud, M., J. Donea and Ch. Massonet: Post-critical behaviour of a stiffened square plate subjected to uniform shear. Publications of I.A.B.S.E., 27, pp. 186~210, 1968.
- 14) Wood, R.H.: Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates, Thames and Hadson, London, 1961.
- 15) Sawczuk, A.: Membrane action in flexure of rectangular plates with restrained edges, Flexural Mech, of Reinforced Concrete, Proc. of Intern. Symp. A.S. C.E., Miami, Florida, pp. 347~358, 1964.
- 16) Massonet, Ch.: General theory of elasto-plastic membrane Plates, Engineering Plastisity, Cambridge Univ., pp. 443~472, 1968.
- 17) Basu, A.K. and J.C. Chapman: Large deflection behaviour of transversely loaded rectangular orthotropic plates, Proc. of Institution of Civil Eng. Vol. 35, No. 9, pp. 79~110, 1966.
- 18) Soper, W.G.: Large deflection of stiffened plates, J. of Appl. Mech., Vol. 25, pp. 444~448, 1958.
- 19) Allen, D.N. de G. and R.T. Severn: Composite action of beams and slabs under transverse loading, Structural Eng., Part 1, 5, pp. 149~154, 1961, Part 2, 7, pp. 235~239, 1961, Part 3, 6, p. 194, 1962. Part 4, 12, pp. 429~432, 1964.
- 20) Donald, L.D. and C. Omidvaran: Analysis of ribbed plates, Proc. of A.S.C.E. Vol. 95, ST 3, pp. 411~440, 1969.
- 21) 岡村宏一・吉田公憲・島田 功・進藤泰男: 構造物の 1 つの弾性立体解析法とその系統的応用, 土木学会論文報告集, No. 190, pp. 61~74, 1971.
- 22) Hodge, P.G.: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, 1959.
- 23) Sonoda, K. and M. Kurata: A Numerical method for the limit analysis of grillage girders and plates, Proc. J.S.C.E., No. 182, pp. 93~114, 1970.
- 24) Alfredo, H.S.A. and L.A. Lopez: Discrete model analysis of elastic-plastic plates, Proc. of A.S.C.E. Vol. 94, EM 1, pp. 271~293, 1968.
- 25) Hodge, P.G.: Yield condition for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading, J. Appl. Mech, Vol. 27, pp. 323~331, 1960.
- 26) Rabotnov, Y.N.: An approximate technical theory of elastie plastic shells, (in Russian) Prikl. Mat. Mekh., Vol. 15, pp. 167~174, 1951.
- 27) Rosenblyum, V.I.: Approximate theory of equilibrium of plastic shells, (in Russian) Prikl. Mat. Mekh. Vol. 18, pp. 414~418, 1961.
- 28) 前出 16) pp. 456~458.
- 29) Shapiro, G.S.: On yield surfaces for ideally plastic shells, Problem of Continuum Mech., S.I.A.M., Philadelphia, pp. 414~418, 1961.
- 30) Clarkson, J.: Tests of flat plated grillages under concentrated loads, Trans. I.N.A., Vol. 104, No. 1, pp. 57~65, 1962.
- 31) Clarkson, J.: Tests of flat plated grillages under uniform pressure, Trans. I.N.A., Vol. 105, No. 4, pp. 467~484, 1963.
- 32) 岡村宏一・吉田公憲: 長方形薄鋼板の弾塑性座屈の解析, 土木学会関西支部講演概要, pp. 1-14-1~4, 1971.

(1971.7.20・受付)