

複数個の円孔ないし楕円孔を有する異方性 弾性板内の応力状態

STRESS DISTRIBUTION FOR ANISOTROPIC ELASTIC PLATE
CONTAINING TWO OR MORE ARBITRARY ELLIPTICAL HOLES

丹羽 義次*・平島 健 一**
By Yoshiji Niwa and Ken-ichi Hirashima

1. 緒 言

等方性弾性板内に円孔群をもつ場合の応力状態は、Jeffery 以来多数の研究者により各種の解析が試みられている。Howland¹⁾, Howland and Knight²⁾, 石田³⁾は等円孔群を有する等方性弾性板の一連の問題の解を与え、Green⁴⁾は任意の大きさの円孔群に対する場合の一般解を与えている。しかしながら、これらの一般解はかなり煩雑なため、いくつかの特殊な問題に対してのみ数値計算が行なわれているのが現状である。

無限板内の 2 個の円孔周縁の応力状態は双極座標系を用いて Jeffery³⁾, 渡辺⁵⁾, Ling⁷⁾, 鶴戸口⁸⁾らにより理論解析ならびに数例の数値計算が行なわれている。またこの種の問題は、複素変数法を使って Davies and Hodinott⁹⁾, Haddon¹⁰⁾, Salerno and Mahney¹¹⁾ は大きさの異なる 2 円孔周縁の応力分布を求めている。

以上の研究では対象とする無限板を等質等方の弾性体として解析しているが、直交異方性の弾性板内に 2 個の等楕円孔がある場合の研究としては、特殊な状態(直交異方性板の弾性主軸と 2 個の等楕円孔の中心軸ならびに作用荷重に直角な方向がともに一致している場合)下の久保の理論解¹²⁾, および光弾性皮膜法を用いた 2 個の等円孔をもつ直交異方性弾性材料による川本の実験的研究¹³⁾などがある。

この論文では、弾性主軸が面内で任意に傾斜した異方性弾性板内に設けた数個の大きさの異なる円孔または楕円孔の周辺における応力分布を、複素変数法と選点法を組み合わせて求めたものである。

2. 1 個の楕円孔を有する異方性弾性板の応力解析

(1) 基礎方程式

異方性弾性板に対する一般化した Hooke の法則は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \epsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\ \tau_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに、 a_{11} , a_{12} , \dots , a_{66} は対象とする材料の弾性性質に関係した定数である。板が直交異方性弾性体で、その主弾性軸が直交デカルト座標系 (x, y) の座標軸方向と一致しているときは、係数 a_{16} , a_{26} は 0 になり、残りの係数はヤング係数、ポアソン比およびせん断係数で次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \\ a_{12} &= -\nu_1/E_1 = -\nu_2/E_2, \quad a_{66} = 1/G. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.2)$$

等方性体の特別な場合には、 $E_1 = E_2 (\equiv E)$, $\nu_1 = \nu_2 (\equiv \nu)$, $G = E/2(1+\nu)$ となり、独立な弾性定数は E および ν の二つとなる。

異方性弾性板内の応力を求めるために、二つの複素変数:

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y \dots\dots\dots (2.3)$$

を導入する。ここに、 μ_1, μ_2 およびこれらと共役な複素変数 $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ は、式 (2.1) で表わされる異方性弾性材料に対する次の特性方程式の複素根である。

$$\begin{aligned} a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} &= 0 \\ \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

座標系 (x, y) 内の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は、二つの複素解析関数 $\phi_1(z_1)$ および $\phi_2(z_2)$ の項で、それぞれ次のように与えられる¹⁴⁾。

$$\sigma_x = 2R_e[\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)], \quad]$$

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 京都大学講師 工学部土木工学教室

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= 2 R_e[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2 R_e[\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.5)$$

上式中の R_e は [] 内の実部を示す記号である。

(2) 等角写像と複素解析関数 $\phi_k(z_k)$

いま 図-1 に示すように、座標系 (x, y) 内の O を中心とする 1 個の楕円孔をもつ無限体を考えよう。この孔の境界は

$$x_0 = a \cos \theta, \quad y_0 = b \sin \theta \dots\dots (2.6)$$

で与えられる。ここに、 θ は孔の境界上を反時計回りに 0 から 2π まで変化するような値をとるパラメータである。

式 (2.6) で与えられる楕円孔をもつ無限に広がる複素平面 $z_0 (= x + iy)$ は、 $\zeta \times$ 平面 ($\zeta = \rho e^{i\theta}$) の単位円 $|\zeta|=1$ の境界とその外部に等角写像することができる。その場合の写像関数は次式で与えられる。

$$z_0 = x + iy = \frac{1}{2} \{ (a+b)\zeta + (a-b)\zeta^{-1} \} \dots (2.7)$$

同様に、 $z_k = x + \mu_k y$, ($k=1, 2$) によって z_0 - 平面上の楕円孔の境界 および その外部領域を z_k - 平面上の境界 および その外部領域に変換し、さらに

$$z_k = \frac{1}{2} \{ (a - i \mu_k b)\zeta_k + (a + i \mu_k b)\zeta_k^{-1} \} \dots\dots (2.8)$$

によって、 z_k -平面上の領域を ζ_k -平面 ($\zeta_k = \rho_k e^{i\theta_k}$) の単位円上およびその外部に写像して問題の解を考える。このようにすると、孔の境界上では $\zeta = \zeta_k = \sigma (= e^{i\theta})$ が成立する。

さて、式 (2.6) で与えられるような楕円孔に沿う直交曲線座標系 (α, θ) 内での法線方向の直応力を σ_α 、接線方向の直応力を σ_θ 、およびせん断応力を $\tau_{\alpha\theta}$ とすれば、応力の基礎関係より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_\alpha - \sigma_\theta + 2i\tau_{\alpha\theta} &= \frac{\zeta}{\zeta} \cdot \frac{d\bar{z}_0}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz_0} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.9)$$

上式中の σ_x, σ_y および τ_{xy} は式 (2.5) によって与えられる直交デカルト座標系 (x, y) の座標軸方向の応力成分である。しかるに、これらの応力成分式に現われる二つの複素解析関数 $\phi_k(z_k)$ は、孔の境界に作用する外荷重応力の各座標軸方向の成分 X_n および Y_n が与えられれば、次式によって計算することができる¹⁾。

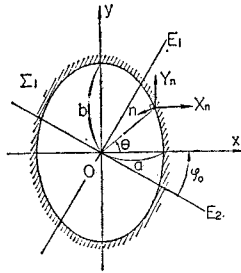


図-1 直交異方性板内の楕円孔と主弾性軸方向

$$\left. \begin{aligned} 2 R_e[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] &= \int_0^s Y_n ds + c_1, \\ 2 R_e[\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)] &= - \int_0^s X_n ds + c_2. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.10)$$

ここに、 c_1 および c_2 は孔の境界上で任意に固定できる定数であり、いまわれわれが対象としている問題では一般性を失うことなしに 0 とおくことができる。

ここで、 X_n および Y_n は無限遠より作用する様な座標軸方向の応力成分 σ_x^0, σ_y^0 および τ_{xy}^0 を用いて、次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} X_n &= -[\sigma_x^0 \cos(n, x_0) + \tau_{xy}^0 \cos(n, y_0)], \\ Y_n &= -[\tau_{xy}^0 \cos(n, x_0) + \sigma_y^0 \cos(n, y_0)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.11)$$

ここに、 n は孔の境界線に直で孔の中心側に向う単位法線ベクトルである。いま s を孔の境界線上の時計回りの単位接線ベクトルとすれば、式 (2.11) 中の方向余弦との間には次の関係が成立する。

$$\cos(n, x_0) = -\frac{dy_0}{ds}, \quad \cos(n, y_0) = \frac{dx_0}{ds} \dots\dots (2.12)$$

したがって、式 (2.5), (2.6), (2.10), (2.11) および (2.12) を考慮して、複素解析関数 $\phi_k(z_k)$ を次のような級数式：

$$\phi_k(z_k) = \frac{1}{d} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{km} \zeta_k^{-m}, \quad (k=1, 2) \dots\dots (2.13)$$

の形で求めるものとすれば、複素係数 Γ_{km} および d は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{1m} &= \mu_2 \bar{a}_m - \bar{b}_m, \quad \Gamma_{2m} = -\mu_1 \bar{a}_m + \bar{b}_m, \\ d &= \mu_2 - \mu_1. \end{aligned} \right\} \dots (2.14)$$

上式中の \bar{a}_m および \bar{b}_m は作用荷重応力および孔の形状によって決定される複素定数であって、いまの場合、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 &= -\frac{1}{2} (\sigma_y^0 a - i \tau_{xy}^0 b), \\ \bar{b}_1 &= \frac{1}{2} (\tau_{xy}^0 a - i \sigma_x^0 b), \\ \bar{a}_m &= \bar{b}_m = 0, \quad m \geq 2. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.15)$$

したがって、式 (2.13) を z_k に関し 1 回微分することにより座標系 (x, y) 内の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が式 (2.5) から求まり、さらに孔境界に沿う曲線座標系 (α, θ) 内の応力成分 $\sigma_\alpha, \sigma_\theta$ および $\tau_{\alpha\theta}$ は式 (2.9) により算定される。なお、式 (2.15) の関係は楕円孔の境界上に一様な応力成分 $-\sigma_x^0, -\sigma_y^0$ および $-\tau_{xy}^0$ が作用した場合のものであるから、実際の楕円孔をもつ無限板の無限遠に σ_x^0, σ_y^0 および τ_{xy}^0 が作用する場合の応力値は、式 (2.5) で求めた値にそれぞれ σ_x^0, σ_y^0 および τ_{xy}^0 を加え合わせたもので表わされる。

3. 数個の楕円孔を有する異方性弾性板内の応力解析

前節で求めた異方性弾性無限板内の1個の楕円孔周縁およびその近傍の応力から、選点法を活用して数個の楕円孔を有するような多連結領域の問題が解ける。ここでは、簡単のため2個の楕円孔が任意距離はなれて位置する場合についての解法の概略を示そう。この方法は2個以上の孔がある場合も原理的にまったく同じような操作を行えばよい。なお、選点法を利用した多連結領域の境界値問題の解法についての詳細は文献(17)を参照されたい。

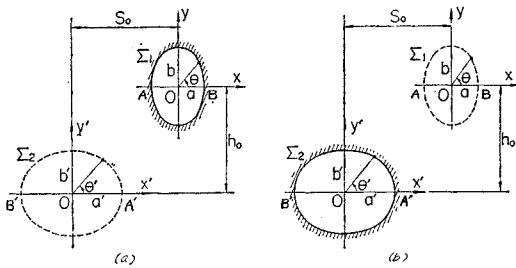


図-2 任意の大きさの2楕円孔の位置と座標系(x, y)および(x', y')との関係

いま 図-2 のように2個の大きさおよび形の異なる楕円孔 Σ_1 および Σ_2 のおのおのの中心 O, O' を原点とする二つの直角座標系 (x, y) および (x', y') を設ける。これらの中心間の水平および鉛直距離をそれぞれ s_0 および h_0 とすれば、これらの座標系間には次の関係が成立する。

$$x' = x + s_0, \quad y' = y + h_0 \dots\dots\dots (3.1)$$

楕円孔 Σ_2 の境界は次式で与えられると仮定する。

$$x'_0 = a' \cos \theta', \quad y'_0 = b' \sin \theta' \dots\dots\dots (3.2)$$

ここに、 θ' は x' 軸の正方向から反時計回りに測った角であり、楕円孔 Σ_1 の境界を示す式(2.6)の θ と同じ方向にとるものとする。

さて、座標系 (x', y') 内の楕円孔 Σ_2 をもつ単連結領域に対しても前節と同様に複素平面 $z'_0 (=x' + iy')$ を考え(図-2 (b))、この楕円孔 Σ_2 の境界およびその外部を ζ' -平面 ($\zeta' = \rho' e^{i\theta'}$) の単位円 $|\zeta'|=1$ およびその外部に写像するものとするれば、

$$z'_0 = x' + iy' = \frac{1}{2} \{ (a'+b')\zeta' + (a'-b')\zeta'^{-1} \} \dots\dots\dots (3.3)$$

が成立する。同様に複素平面 $z'_k (=x' + \mu_k y')$ を ζ'_k -平面 ($\zeta'_k = \rho_k e^{i\theta'_k}$) の単位円とその外部に写像すれば次式が成立する。

$$z'_k = \frac{1}{2} \{ (a' - i\mu_k b')\zeta'_k + (a' + i\mu_k b')\zeta'_k{}^{-1} \}, \quad (k=1, 2) \dots\dots\dots (3.4)$$

さらに、ここでも前節と同じように、座標系 (x', y') 内での複素解析関数 $\phi_k^*(z_k)$ に対する式を

$$\phi_k^*(z_k) = \frac{1}{d} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma'_{km} \zeta_k^{-m} \dots\dots\dots (3.5)$$

の形で仮定しよう。ここに、 Γ'_{km} は式(2.14)の \bar{a}_m および \bar{b}_m の代りに、それぞれ \bar{a}'_m および \bar{b}'_m を代入したものであり、これらはいまのところ未知の複素定数である。

ところで、式(3.4)の z'_k と式(2.8)の z_k との間には、式(3.1)より

$$z'_k = z_k + (s_0 + \mu_k h_0)$$

の関係が存在するゆえ、これから ζ_k と ζ'_k との関係として、

$$\begin{aligned} & \{ (a - i\mu_k b)\zeta_k + (a + i\mu_k b)\zeta_k^{-1} \} \\ & - \{ (a' - i\mu_k b')\zeta'_k + (a' + i\mu_k b')\zeta'_k{}^{-1} \} \\ & + 2(s_0 + \mu_k h_0) = 0, \quad (k=1, 2) \dots\dots\dots (3.7) \end{aligned}$$

が得られる。

したがって、(I) 図-2 (a) の点線(楕円孔 Σ_2 の仮想境界)上では上式の ζ'_k に $e^{i\theta}$ を代入して、この二次方程式を解けば ζ_k -平面上でのこれに対応する位置 $\zeta_k (= \rho_k e^{i\theta_k})$ が決定できる。この ζ_k を用いて式(2.15)、(2.13) および (2.5) から応力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} を求めれば、これらの応力は 図-2 (a) の点線(楕円孔 Σ_2 の仮想境界)上における座標系 (x, y) で表わした値を示す。(II) ここで求めた応力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} をそれぞれ式(2.11)の σ_x^0, σ_y^0 および τ_{xy}^0 の代りに代入し、式(2.12)と類似の式(ただし、式中の x_0, y_0 の代りに式(3.2)の x'_0, y'_0 を代入したもの)を考慮し、式(2.10)の右辺の積分を選点法により和分で近似し、さらに次のフーリエ級数:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \int_0^s Y_n ds &= a'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a'_m e^{im\theta} + \bar{a}'_m e^{-im\theta}), \\ - \int X_n ds &= b'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (b'_m e^{im\theta} + \bar{b}'_m e^{-im\theta}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8) \end{aligned}$$

に展開すれば、式(2.10)の左辺の複素関数 $\phi_k(z_k)$ の代りに $\phi_k^*(z'_k)$ を代入したものは式(3.5)の形で解となる。なお、式(3.5)の Γ'_{km} 中の複素定数は式(3.8)の \bar{a}'_m および \bar{b}'_m で与えられるものである。これから 図-2 (b) の状態に対して式(2.5)により任意点での応力成分が決定できる。

したがって、上述の(I)および(II)の結果を重ね合わせれば、楕円孔 Σ_2 の境界上での境界条件は満たされるが、 Σ_1 の境界における境界条件はそこなわれる。そこで、再び Σ_1 上での境界条件を満足するように上述の(II)

の操作を 図-2 (a) の状態のものに適用する。以下、同様の操作を順次おのおのの楕円孔周縁での法線方向の応力値 $\sigma_n, \tau_{n\theta}$ が作用荷重に比して十分に小さくなるまで繰り返して計算し、それぞれの各段階で得られた応力値を重ね合わせれば、求めるべき応力分布が得られる。

4. 数値計算例

数値計算に際してまず、この近似解法の精度を検討するために、2 個の等円孔を有する等方性弾性板の無限遠より一様な単位の一軸荷重応力が作用した場合の孔縁での最大および最小応力値を、従来までに求められている結果と比較した。表-1 は 2 個の等円孔の中心間距離 s_0 と円孔の直径 $2a$ の比 $s_0/2a$ をパラメーターとして Haddon による結果¹⁰⁾ と著者らによるものとを比較して示したものである。この表において、 α_0 は一軸引張荷重応力の作用方向と x 軸 (2 円孔の中心を結んだ線) の正方向とのなす角度を表わすパラメーターである。著者らの計算では境界上での選点数を $\Delta\theta=2.5^\circ$ 間隔すなわち 144 点とし、式 (2.13) あるいは (3.5) の級数式の項数 m を 25 まで採用し、前節で述べた (I), (II) の操作による繰り返し回数 i を 4~7 回行なったものである。この繰り返し回数 i はパラメーター $s_0/2a$ および作用荷重方向 α_0 によっては多数回の繰り返しを行なうことが必要となるが、著者らは孔縁での法線方向応力 $\sigma_n, \tau_{n\theta}$ が作用荷重応力の $1/10^3$ 程度以下になるまで繰り返しを重ねた。なお、Haddon の結果は孔縁での $\sigma_n, \tau_{n\theta}$ が作用荷重の $1/10^4$ 以下になるまで繰り返し計算されたものである。全体的に両者の結果は非常によく一致しているといえよう。また、Haddon は 図-3 に示すような大きさの異なる 2 円孔 ($a'=2.5a, s_0=4.5a, h_0=0$) を有する等方性板の無限遠に x 軸方向より $\alpha_0=45^\circ$

表-1 単位の引張荷重が x 軸方向より $0^\circ, 45^\circ$ および 90° 傾斜して作用する場合の、等方性板内の x 軸上に中心をもつ 2 個の等円孔周縁における最大および最小応力値

$s_0/2a$	$\sigma_x^0=1.0$ ($\alpha_0=0^\circ$)		$\sigma_x^0=\sigma_y^0=\tau_{xy}^0$ $=0.5(\alpha_0=45^\circ)$		$\sigma_y^0=1.0$ ($\alpha_0=90^\circ$)	
	Haddon ¹⁰⁾ による	著者ら による	Haddon ¹⁰⁾ による	著者ら による	Haddon ¹⁰⁾ による	著者ら による
	1.10	2.611 -0.918	2.625 -0.922	5.434 -1.351	5.032 -1.250	6.106 -0.962
1.20	2.619 -0.905	2.631 -0.910	4.494 -1.522	4.488 -1.512	4.423 -0.924	4.482 -0.931
1.50	2.650 -0.896	2.653 -0.897	3.587 -1.460	3.584 -1.466	3.264 -0.886	3.270 -0.887
2.00	2.715 -0.908	2.715 -0.908	3.263 -1.297	3.259 -1.295	3.006 -0.883	3.068 -0.883
3.00	2.827 -0.940	2.828 -0.940	3.114 -1.137	3.112 -1.133	3.020 -0.920	3.022 -0.920

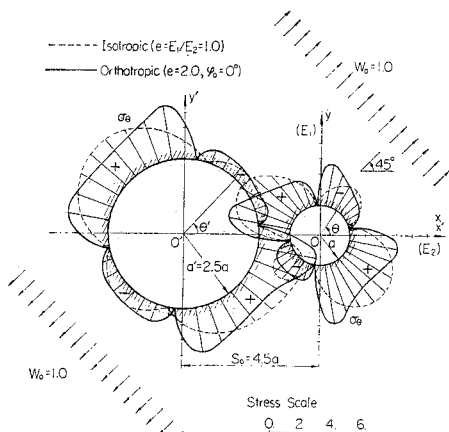


図-3 表-2 に与えられた等方性ならびに直交異方性 ($e=2.0, \phi_0=0^\circ$) の場合の、大きさの異なる 2 円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$ の分布

表-2 x 軸から 45° の方向より単位の引張荷重 $w_0=1.0$ が作用する場合の、等方性ならびに直交異方性板内の 2 個の不等円孔 ($a'=2.5a, s_0=4.5a, h_0=0$) の周縁における応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$ の値

$\theta = \theta'$	右側の円孔周縁の応力 σ_θ			左側の円孔周縁の応力 σ_θ'		
	Isotropic		$e=2.0$ $\phi_0=0^\circ$	Isotropic		$e=2.0$ $\phi_0=0^\circ$
	Haddon ¹⁰⁾ による	著者ら による		Haddon ¹⁰⁾ による	著者ら による	
0°	1.432	1.423	2.285	1.273	1.183	1.936
15°	0.159	0.155	-0.064	-0.694	-0.645	-0.780
30°	-0.902	-0.903	-0.938	-0.711	-0.717	-0.582
45°	-1.531	-1.531	-1.287	-0.710	-0.731	-0.780
60°	-1.618	-1.619	-1.733	-0.464	-0.461	-0.907
75°	-1.170	-1.172	-2.536	0.207	0.222	-0.602
90°	-0.282	-0.286	-1.485	1.159	1.184	2.402
105°	0.900	0.895	1.473	2.128	2.151	3.176
120°	2.209	2.200	1.867	2.840	2.852	2.354
135°	3.408	3.386	2.172	3.092	3.089	2.096
150°	4.101	4.057	2.910	2.811	2.792	2.252
165°	3.736	3.683	3.994	2.065	2.035	2.616
180°	2.089	2.059	2.872	1.049	1.015	1.760
195°	-0.067	-0.061	-0.353	0.029	0.002	-0.201
210°	-1.563	-1.548	-1.240	-0.728	-0.745	-0.830
225°	-1.932	-1.927	-1.328	-1.030	-1.030	-0.995
240°	-1.335	-1.345	-1.357	-0.808	-0.791	-1.109
255°	-0.137	-0.160	-1.005	-0.138	-0.111	-0.943
270°	1.283	1.253	2.515	0.776	0.808	1.702
285°	2.585	2.552	3.640	1.667	1.693	2.729
300°	3.489	3.458	2.730	2.289	2.304	2.058
315°	3.812	3.787	2.436	2.577	2.582	1.806
330°	3.501	3.481	2.633	2.862	2.867	2.038
345°	2.639	2.625	3.133	3.262	3.199	3.631

をなす単位の引張荷重 $w_0=1.0$ が作用した場合のそれぞれの孔縁での応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$ の計算結果を与えているが、著者らの同様な状態での結果を求めて孔周縁の 15° 間隔の位置での値を比較して示したものが表-2 である。この表より両者の結果は有効数字 2 けた目まではほとんど一致し、3 けた目にわずかの差が認められる程度

であることがわかる。

久保¹²⁾は、緒言で述べたような特殊な条件下での異方性弾性板内に大きさの等しい2個の楕円孔が存在する場合(図-1, 2において $a=a', b=b', h_0=0, \varphi_0=0^\circ$ の場合)に、無限遠より等分布の垂直荷重応力 $\sigma_y^0=1.0$ が作用したときの楕円孔周辺の応力を摂動法により求める近似解法を示し、数値例として $E_1=2.19 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, E_2=5.82 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, G_{12}=132 \text{ kg/cm}^2$ および $\nu_{12}=0.12$ の弾性定数を有する異方性の柏材を対象として、楕円孔縁と x (あるいは x')軸との交点AおよびBの応力値を与えているが、同一の条件を設定して著者らの方法で計算した結果とを比較すると表-3のようである。この表より両者の結果は非常によく一致しているといえよう。なお、著者らの計算結果は、ここでは楕円孔の偏平度にかかわらず $\theta=2.5^\circ, m=25, i=4$ として求めた値である。

以上の計算例の比較によって、著者らの方法は十分に精度のよい結果を示していると考えられる。

そこで、次に無限遠より座標軸方向の外荷重応力 σ_x^0 , σ_y^0 あるいは τ_{xy}^0 が作用した場合の、2個の等円孔を有する直交異方性板の孔周辺での応力分布を求めた。ここで、対象とする直交異方性板の弾性定数としては以下のような値を採用した。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 1.2 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2, \\ E_2 &= 0.6 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2, \\ G &= 0.7 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \\ \nu_1 &= 0.071. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

2個の等円孔の中心間隔 $s_0/2a$ および主弾性係数 E_2 の方向と x 軸とのなす角 φ_0 をパラメーターとして、孔周辺の応力分布を图示したものの一例が図-4~6である。

図-4(a)および図-4(b)は x 軸方向の無限遠より単位の引張荷重 $\sigma_x^0=1.0$ が作用した場合の右側の孔周縁での応力 σ_θ の分布図であり、図-4(a)の上半分は $\varphi_0=0^\circ$ 、下半分は $\varphi_0=90^\circ$ の場合のものである。これらの応力分

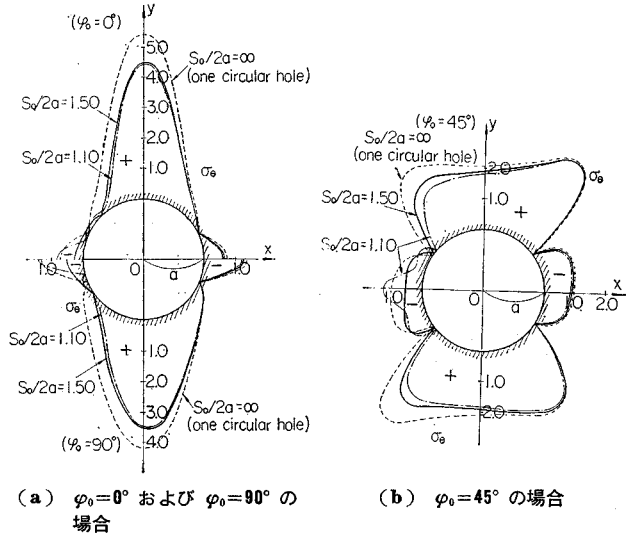
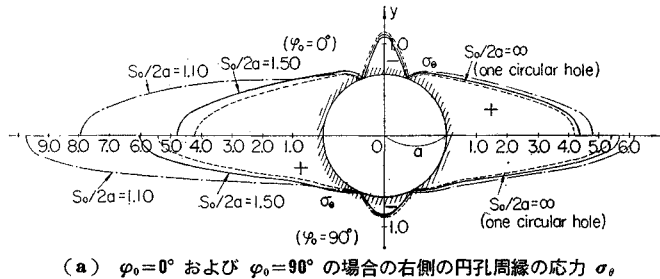
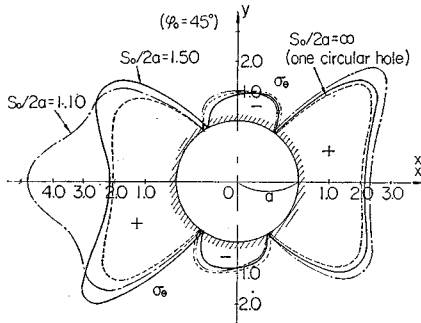


図-4 無限遠に $\sigma_x^0=1.0$ が作用した場合の直交異方性板内の2個の等円孔周縁の応力 σ_θ の分布

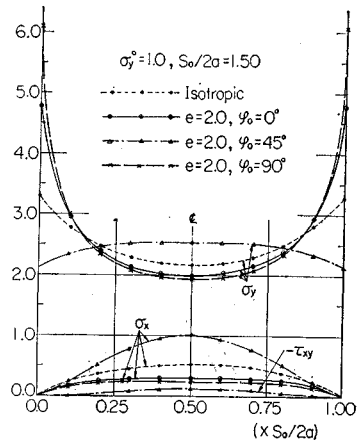
布は x 軸を対称軸とするような応力分布となる。図中の点線で示した応力分布は $s_0/2a=\infty$ すなわち1円孔のみが存在する場合のものであり、これは式(4.1)に示



(a) $\varphi_0=0^\circ$ および $\varphi_0=90^\circ$ の場合の右側の円孔周縁の応力 σ_θ



(b) $\varphi_0=45^\circ$ の場合の右側の円孔周縁の応力 σ_θ



(c) 2円孔間の x 軸上のウェブの位置における応力 σ_x, σ_y および τ_{xy} の分布

図-5 無限遠に $\sigma_y^0=1.0$ が作用した場合の直交異方性板内の2個の等円孔周縁の応力分布

したように直交異方性板の弾性定数を同一にとったことから、Lekhnitskii の結果と当然のことながら一致している。また、図中の実線は $s_0/2a=1.50$ すなわち二円孔の中心間距離 s_0 が円孔の直径 $2a$ の 1.5 倍だけへだたった位置に存在する場合の σ_θ の分布であり、一点鎖線は $s_0/2a=1.10$ の位置まで二円孔が接近してきた場合のものである。なお、 $\sigma_x^0=1.0$ が作用する場合には取れん性が悪いので $s_0/2a=1.50$ に対して $\Delta\theta=2.5^\circ$, $m=25$, $i=5$ の、 $s_0/2a=1.10$ に対して $\Delta\theta=1.25^\circ$, $m=30$, $i=7$ の繰り返しを行なって求めたものである。

図-5 は $\sigma_y^0=1.0$ すなわち y 軸方向の無限遠に単位の引張荷重が作用した場合の 2 個の等円孔周辺の応力分布図である。図-5 (a) は主弾性係数 E_2 の方向を示すパラメーター φ_0 が 0° および 90° の場合の右側の円孔周縁の応力 σ_θ の分布であり、図-5 (b) は $\varphi_0=45^\circ$ の場合である。 $s_0/2a$ が 1.10 になると負の x 軸上付近にはかなり大きな応力集中の発生が観察される。図-5 (c) は $\sigma_y^0=1.0$ が作用した場合で、 $s_0/2a=1.50$ (つまり 図-5 (a), (b) の実線で示した場合) の間隔をもつ 2 個の等円孔間の負の x 軸上のウェーブにおける応力成分

σ_x , σ_y および τ_{xy} の分布を、 φ_0 をパラメーターとしてプロットしたものである。図中の点線で示した応力分布は等方性板に対する場合のものである。主弾性方向が座標軸方向と一致しない場合、たとえば $\varphi_0=45^\circ$ の場合には、このウェーブの部分には図にみるような大きさの τ_{xy} が生じることになる。等方性の場合あるいは主弾性軸が座標軸と一致するような直交異方性の場合には作用荷重ならびに材料性質の対称性から、この位置に τ_{xy} は生じない。

次に無限遠に単位のせん断荷重 $\tau_{xy}^0=1.0$ が作用する場合の右側の孔周縁の応力 σ_θ の分布を 1/2 倍して 図-6 (a), (b) に示した。図-6 (a) の上半分は $\varphi_0=0^\circ$, 下半分は $\varphi_0=90^\circ$ の場合に対応する応力分布図であるが、これらはそれぞれ x 軸に関して逆対称の応力分布となる。なお $\tau_{xy}^0=1.0$ で $s_0/2a=1.10$ の場合も解の取れん性の点から $\Delta\theta=1.25^\circ$, $m=30$, $i=7$ として計算を行なった。

以上の結果は 2 個の大きさの等しい円孔周縁の応力分布についてであったが、直交異方性の弾性板に 2 個の大きさの異なる円孔が存在する場合の例として、Haddon が等方性弾性板に対して計算例に用いた $a'=2.5a$, $s_0=4.5a$ で、 x 軸より $\alpha_0=45^\circ$ 傾斜した方向から単位の引張荷重 $w_0=1.0$ が作用した場合をとりあげ、各円孔周縁の応力 σ_θ および σ_θ' の計算結果を表-2 および 図-3 の実線で示した。この例では主弾性係数 E_2 の方向の x 軸からの傾斜角 φ_0 を 0 , すなわち主弾性係数 (E_2 , E_1) の方向が座標系 (x, y) の方向と一致している場合のものである。図-3 の点線で示した分布図は表-2 に与えた Haddon および著者らによって求められた等方性板の場合の結果をプロットしたものである。

上述した方法によって 3 個以上の円孔ないし楕円孔が存在する場合の問題も同様にして取り扱えるが、ここでは 3 個の円孔を有する弾性板の問題をとりあげ、数例の数値計算結果を示そう。3 個の等しい円孔が存在する場合の問題は、現在までに等方性板に対して一、二の計算結果が与えられているが、ここでも、まずはじめに著者らの手法によって得られた結果に対する精度の検討を行なった。表-4 は Green¹⁾, Hulbert¹⁵⁾ ならびに著者らによって得られた結果を比較したものである。これは等方性板内 3 個の大きさの等しい円孔が x 軸上に $s_0=s_0'=6.667a$ の間隔で位置している場合に、 y 軸方向の無限遠より単位の引張荷重 $\sigma_y^0=1.0$ が作用したときの右側の円孔 Σ_1 および中央の円孔 Σ_2 の孔周縁の応力 σ_θ , σ_θ' を中心角 $\theta=\theta'=10^\circ$ 間隔の孔周縁点について示したものである。なお、右側の円孔については作用荷重および孔の幾何学的位置の対称性から、応力 σ_θ は x 軸に関して対称であり、中央の円孔周縁の応力 σ_θ' はさらに

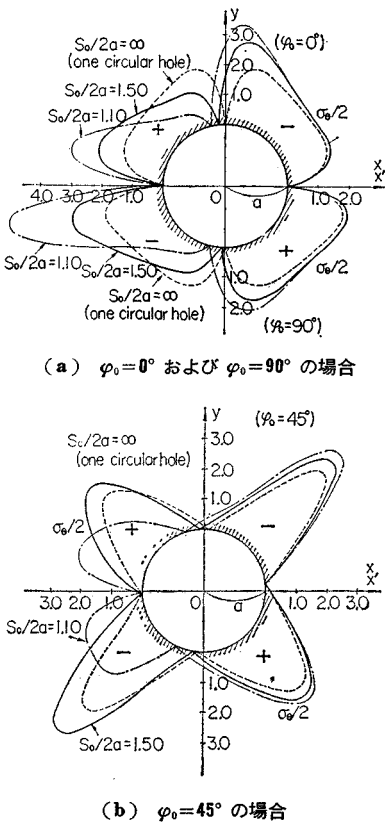


図-6 無限遠に $\tau_{xy}^0=1.0$ が作用した場合の直交異方性板内の 2 個の等円孔周縁の応力 σ_θ の分布

表-3 大きさの等しい2個の楕円孔を有する異方性楕円材に対する久保の結果との比較

$s_0/2a$	b/a	1.40		1.00		0.60		0.20	
		A	B	A	B	A	B	A	B
1.667	久保の値	—	—	—	—	5.674	5.572	15.215	14.719
	著者の値	3.020	2.997	3.780	3.769	5.670	5.586	15.219	14.736
2.00	久保の値	2.915	2.939	3.694	3.708	5.552	5.513	14.808	14.550
	著者の値	2.905	2.951	3.690	3.718	5.551	5.521	14.807	14.563
∞ (one hole)	久保の値	2.885		3.639		5.398		14.195	
	著者の値	2.885		3.639		5.399		14.197	

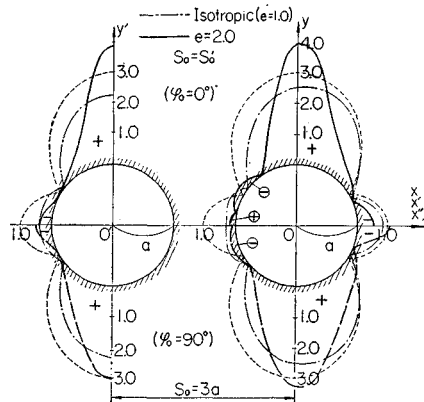
表-4 無限遠に $\sigma_x^0=1.0$ が作用した場合の等方性板内の3個の等円孔周縁に生じる応力 $\sigma_\theta, \sigma'_\theta$ の値

$\theta = \theta'$	右側の円孔 Σ_1 の周縁応力 σ_θ			中央の円孔 Σ_2 の周縁応力 σ'_θ		
	Green ⁽⁴⁾ による	Hulbert ⁽¹⁵⁾ による	著者らによる	Green ⁽⁴⁾ による	Hulbert ⁽¹⁵⁾ による	著者らによる
0°	2.997	2.996	2.995	3.009	3.009	3.009
10°	2.884	2.885	2.883	2.896	2.898	2.896
20°	2.559	2.560	2.558	2.570	2.572	2.570
30°	2.054	2.147	2.054	2.065	2.091	2.065
40°	1.428	1.451	1.428	1.439	1.462	1.439
50°	0.752	0.738	0.752	0.766	0.751	0.765
60°	0.108	0.108	0.109	0.126	0.126	0.126
70°	-0.426	-0.431	0.426	-0.399	-0.404	-0.395
80°	-0.782	-0.787	-0.781	-0.743	-0.748	-0.743
90°	-0.915	-0.914	-0.914	-0.863	-0.863	-0.863
100°	-0.807	-0.812	-0.807			
110°	-0.473	-0.479	-0.473			
120°	0.047	0.471	0.047			
130°	0.690	0.676	0.690			
140°	1.377	1.402	1.377			
150°	2.024	2.052	2.025			
160°	2.553	2.556	2.553			
170°	2.899	2.900	2.898			
180°	3.019	3.019	3.019			

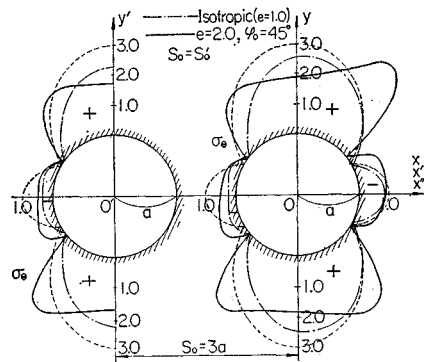
y' 軸に対称となるため θ は π まで、また θ' は $\pi/2$ までの範囲のもののみを表示してある。左側の円孔 Σ_3 の周縁の応力 σ_θ'' は右側の円孔 Σ_1 のそれと y' 軸に関して対称となる分布を示すことは明白である。これらの結果を比較すると Green の与えた結果と著者らのそれとは、 σ_θ ならびに σ'_θ の両方ともほとんどまったく一致することが指摘でき、Hulbert の結果とは多少の差異が認められる程度である。

上述の例ならびにここには示さないが、 $s_0=s'_0=3.0a$ の場合の Hulbert の与えた結果との比較⁽¹⁵⁾ から2円孔の場合と同様、3個の円孔が存在する場合に対しても著者らの方法によるものは十分に正確であると結論することができる。そこで以下でも式(4.1)で与えられるような弾性定数を有する直交異方性板内に3個の円孔が存在する場合の計算例を示すことにする。図-7~図-9は大きさの等しい3個の円孔が x 軸上に $s_0=s'_0=3.0a$ の間隔で位置した場合に、座標軸方向の無限遠より単位荷重 $\sigma_x^0=1.0, \sigma_y^0=1.0$ あるいは $\tau_{xy}^0=1.0$ が作用した

場合の右側の円孔 Σ_1 と中央の円孔 Σ_2 の周縁の σ_θ および σ'_θ の分布を示したものである。図-7は $\sigma_x^0=1.0$ が作用した場合のものであり、図-7(a)の上半分は $\varphi_0=0^\circ$ 、下半分は $\varphi_0=90^\circ$ に対する $\sigma_\theta, \sigma'_\theta$ の分布図である。図中の点線で示したものは等方性の場合で一円孔のみが存在する場合(したがって、 x 軸上で $-1.0, y$ 軸上では $+3.0$ の応力集中となっている)についてであり、一点鎖線は等方性、実線は異方性の場合で3円孔が $s_0=s'_0=3.0a$ の間隔に位置したときのものである。3円孔がこの程度の離隔距離にあるときには負の x 軸上付近の応力の絶対値はかなり小さくなるのが認められる。これらの図では、応力分布図が重なり合っておりわかりにくくなるのを避けるために、中央の孔周縁の応力 σ'_θ は y' 軸より左側半分のみを図示しているが、右側半分の応力分布は図-7(a)

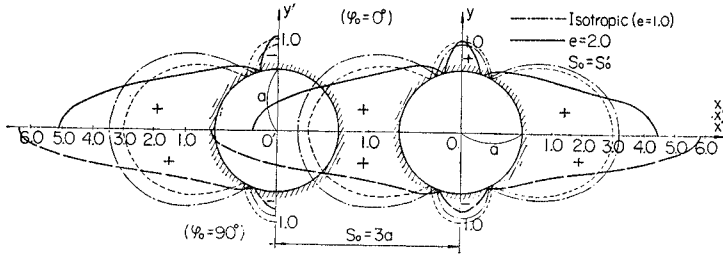


(a) $\varphi_0=0^\circ$ および $\varphi_0=90^\circ$ の場合の右側および中央の円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma'_\theta$

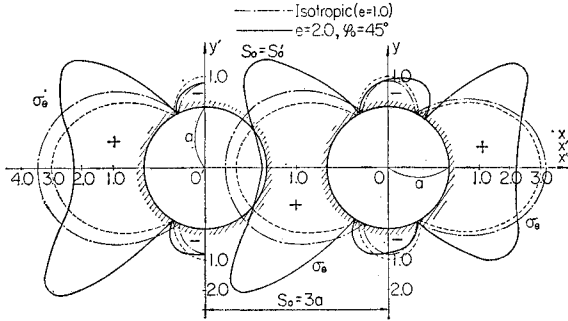


(b) $\varphi_0=45^\circ$ の場合の右側および中央の円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma'_\theta$

図-7 無限遠に $\sigma_x^0=1.0$ が作用した場合の等方性ならびに直交異方性板内の3個の等円孔周縁の応力分布



(a) $\varphi_0=0^\circ$ および $\varphi_0=90^\circ$ の場合の右側および中央の円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$

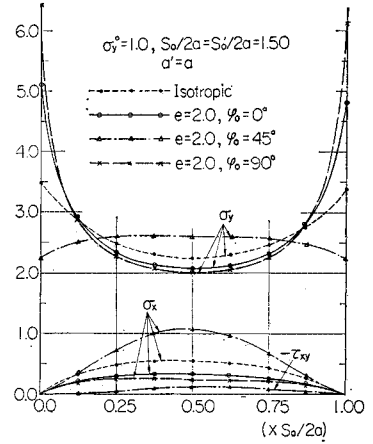


(b) $\varphi_0=45^\circ$ の場合の右側および中央の円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$

図-8 無限遠に $\sigma_y^0=1.0$ が作用した場合の等方性ならびに直交異方性板内の3個の等円孔周縁の応力分布

の場合は y' 軸に関して対称であり、図-7(b) の場合は原点 o' に関して対称であるような分布図形となる。なおまた、左側の円孔 Σ_3 の応力 σ_θ' は図中に示されていないが、図-7(a) の場合は y' 軸に関し、図-7(b) のそれは原点 o' に関して、それぞれ対称であるような分布形となる。

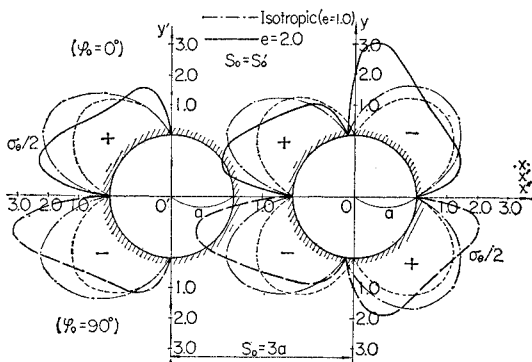
図-8 は無限遠にて $\sigma_y^0=1.0$ が作用した場合の円孔周縁の応力分布であり、図-8(a) は $\varphi_0=0^\circ$ および 90° の場合、図-8(b) は $\varphi_0=45^\circ$ の場合の $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$ の分布を図示したものである。この場合も中央の円孔周縁応力 σ_θ' は y' 軸より左側半分のみを図示してあるが、図-7の場合と同様に、図-8(a) では y' 軸対称、図-8(b)



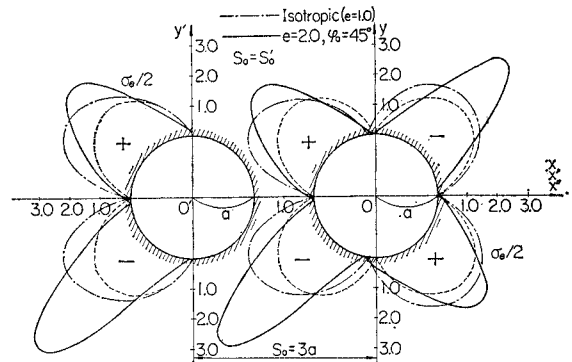
(c) 右側の円孔 Σ_1 と中央の円孔 Σ_2 の間の x 軸上のウェーブの位置における応力 σ_x, σ_y および τ_{xy} の分布

では原点 (o') 対称の分布となる。図-8(c) は y および y' 軸間の2個の円孔 Σ_1 および Σ_2 ではさまれた x 軸上のウェーブに生じる応力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} をプロットしたものである。これは2円孔が存在する場合の図-5(c)に対比されるような図であるが、いまの場合には yy' 軸間の中央点で対称とはならず、中央の孔 Σ_2 の側に向って応力成分 σ_x, σ_y が多少大きくなっていることが観察される。異方性で $\varphi_0=45^\circ$ の場合には2円孔の場合と同様に、大きくはないが有限の τ_{xy} が存在している。

次に、無限遠に $\tau_{xy}^0=1.0$ が作用する場合の結果が図-9 に示されている。この場合も図-9(a) の上半分



(a) $\varphi_0=0^\circ$ および $\varphi_0=90^\circ$ の場合の右側および中央の円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$



(b) $\varphi_0=45^\circ$ の場合の右側および中央の円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$

図-9 無限遠に $\tau_{xy}^0=1.0$ が作用した場合の等方性ならびに直交異方性板内の3個の等円孔周縁の応力分布

が $\varphi_0=0^\circ$, 下半分が $\varphi_0=90^\circ$ の場合であり, 中央の円孔 Σ_2 の右半分の応力分布は今度の場合, y' 軸に関して逆対称の分布図形となる。図-9(b) は $\varphi_0=45^\circ$ の場合で, これは 図-7, 8 の場合と同じく原点 o' に関して対称な σ_θ の分布となる。なお, これらの3円孔問題に対しては, すべて $\Delta\theta=2.5^\circ$, $m=20$, $i=4$ として計算を遂行したが, 結果は円孔周縁での自由境界の条件が作用荷重応力に比して約 $1/10^3$ 程度以内の誤差範囲で満足された。

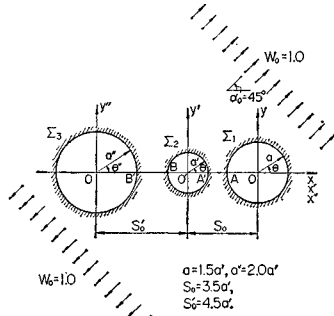


図-10 任意の大きさの三円孔が存在する場合の一例

以上, 3個の等円孔が存在する等方性ならびに異方性の弾性板内の孔周縁の応力分布の若干について例示したが, より一般的な大きさの異なる3個の円孔が存在する場合の一例として 図-10 に示すような問題をとりあげて計算した結果を表-5 に示した。表-5(a) はおのおのの円孔周縁上の 15° 間隔の位置における $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$ および σ_θ'' の値を等方性ならびに異方性 ($\varphi_0=0^\circ$) の場合について示したものであり, 表-5 (b) は x 軸上に位置するウェブ AA' および BB' の部分に生じる応力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} の値を示したものである。表中の円孔周縁上の点 A, A', B および B' で σ_x および τ_{xy} が有限な値をとっているが, 本来ならば, これらは0となるべきもの(なぜならば, これらの点は円孔上にあって自由境界の条件を満たさなければならない)であり, したがって, この程度の計算誤差が含まれていることを表わしていると考えられよう。

5. 結 語

この論文では複素変数法によって得られた異方性弾性板内の1個の円孔ないし楕円孔の周縁の応力の理論的厳密解に選点法を組み合わせ, 2個あるいはそれ以上の個数の円孔ないし楕円孔を有するような異方性の多連結領域の問題を連続的近似法によって解くことを試みたものである。この手法により得られた数値計算例のうち, 特

表-5 x 軸から 45° の方向より単位の引張荷重 $w_0=1.0$ が作用する場合の, 等方性ならびに直交異方性板内の大きさの異なる3個の円孔周辺の応力値

(a) 3円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \sigma_\theta'$ および σ_θ'' の値

$\theta = \theta'$	円孔 Σ_1 の周縁応力 σ_θ		円孔 Σ_2 の周縁応力 σ_θ'		円孔 Σ_3 の周縁応力 σ_θ''	
	Isotropic	$e=2.0$ $\varphi_0=0^\circ$	Isotropic	$e=2.0$ $\varphi_0=0^\circ$	Isotropic	$e=2.0$ $\varphi_0=0^\circ$
0°	1.145	1.943	1.951	2.756	1.224	2.133
15°	0.013	-0.199	-0.570	-1.026	-0.755	-1.146
30°	-0.867	-0.924	-1.972	-1.689	-1.281	-1.126
45°	-1.298	-1.177	-2.132	-1.580	-1.087	-0.901
60°	-1.203	-1.482	-1.561	-1.569	-0.545	-0.824
75°	-0.638	-1.949	-0.603	-1.548	0.306	-0.282
90°	0.240	-0.627	0.582	0.945	1.340	3.056
105°	1.237	1.506	1.877	2.813	2.331	3.480
120°	2.216	1.615	3.138	2.573	3.029	2.486
135°	3.169	1.877	4.132	2.701	3.248	2.184
150°	4.020	2.890	4.465	3.347	2.923	2.333
165°	3.832	4.412	3.705	4.248	2.129	2.707
180°	1.423	2.404	1.865	2.694	1.066	1.830
195°	-1.006	-1.312	-2.765	-0.736	-0.001	-0.204
210°	-1.554	-1.372	-1.763	-1.585	-0.807	-0.871
225°	-1.208	-0.996	-2.221	-1.680	-1.159	-1.074
240°	-0.541	-0.837	-1.827	-1.845	-0.988	-1.275
255°	0.395	-0.166	-0.901	-2.126	-0.362	-1.405
270°	1.489	3.485	0.289	-0.098	0.542	0.563
285°	2.516	3.760	1.569	2.276	1.504	2.073
300°	3.228	2.637	2.846	2.337	2.357	1.787
315°	3.441	2.299	4.013	2.641	3.057	1.817
330°	3.093	2.449	4.695	3.506	3.566	2.553
345°	2.262	2.846	4.115	4.632	3.240	3.960

(b) 3円孔間の x 軸上のウェブに生じる応力 σ_x, σ_y および τ_{xy} の値

x 軸上の位置	x 軸上の応力 σ_x		x 軸上の応力 σ_y		x 軸上の応力 τ_{xy}	
	Isotropic	$e=2.0$ $\varphi_0=0^\circ$	Isotropic	$e=2.0$ $\varphi_0=0^\circ$	Isotropic	$e=2.0$ $\varphi_0=0^\circ$
0.0(A)	-0.005	-0.003	1.425	2.403	-0.001	0.013
0.125	0.051	0.092	1.342	1.579	0.692	0.724
0.250	0.124	0.122	1.285	1.322	1.043	0.923
0.375	0.174	0.135	1.259	1.214	1.223	1.004
0.500	0.204	0.138	1.267	1.182	1.299	1.033
0.625	0.213	0.135	1.314	1.211	1.288	1.024
0.750	0.194	0.123	1.416	1.319	1.163	0.965
0.875	0.128	0.090	1.604	1.602	0.824	0.792
1.0(A')	-0.012	-0.022	1.951	2.756	-0.008	-0.005
0.0(B)	-0.008	-0.007	1.865	2.694	-0.006	-0.004
0.125	0.184	0.130	1.415	1.358	0.886	0.797
0.250	0.244	0.154	1.212	1.110	1.151	0.926
0.375	0.251	0.159	1.116	1.025	1.209	0.963
0.500	0.231	0.156	1.077	1.007	1.181	0.961
0.625	0.194	0.147	1.075	1.041	1.094	0.931
0.750	0.139	0.131	1.102	1.137	0.929	0.859
0.875	0.064	0.099	1.154	1.365	0.621	0.684
1.0(B')	-0.004	0.006	1.226	2.130	-0.001	0.004

殊な例としての等方性板内の2個ないし3個の円孔が存在する場合の結果は, 従来までの研究者によるものと比較して非常によく一致している。この方法は一般的な異

方性体にもそのまま適用でき、この論文では2個ないし3個の円孔を有する直交異方性板を対象としたいくつかの数値計算例を示した。

この論文では楕円孔の場合の計算例として久保の解析例と著者らの同一条件のもとでの計算結果との比較を行なったが、その他の条件下での楕円孔の場合の問題に対してもまったく同様にして計算を進めることが可能である¹⁶⁾。ただし、楕円孔が非常に扁平 (i.e. $a \gg b$) になると、ここで行なったように中心角 $4\theta = 1.25^\circ \sim 2.5^\circ$ の等角度間隔で選点を設けることは精度上、適当ではない。その場合はむしろ楕円孔縁における曲率半径に比例して密に選点を設ける必要があるが、その操作はさして困難なことではない。

いずれにしてもここで示した手法は、多数個の円孔ないし楕円孔をもつ異方性弾性体の問題の解法として十分に有効であるといえよう。

なお、数値計算には京都大学大型計算機センターのFACOM 230-60を使用した。計算時間は2円孔の場合、約80秒、3円孔の場合は約120秒程度であった。

参考文献

- 1) Howland, R.C.J. : Stresses in a Plate Containing an Infinite Row of Holes, Proc. Roy. Soc., A, Vol. 148, (1935) pp. 471-491.
- 2) Howland, R.C.J. and Knight, R.C. : Stress Functions for a Plate Containing Groups of Circular Holes, Phil. Trans., A, Vol. 238, (1939) pp. 357-392.
- 3) 石田 誠 : 円孔列を有する無限板の二次元弾性問題, 日本機械学会論文集, 第25巻, 第195号, (1959) pp. 1118-1124.
- 4) Green, A.E. : General Bi-Harmonic Analysis for a Plate Containing Circular Holes, Proc. Roy. Soc., A, Vol. 176, (1940) pp. 121-139.
- 5) Jeffery, G.B. : Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates, Phil. Trans., A, Vol. 221, (1921) pp. 265-293.
- 6) 渡辺恵弘 : 二つの円孔を有する平板の抗張力について, 九州大学工学部彙報, 第6巻, 第2号. (1931) pp. 86-104.
- 7) Ling, C.B. : On the Stresses in a Plate Containing Two Circular Holes, J. Appl. Phys., Vol. 19, (1948) pp. 77-82.
- 8) 鶴戸口英善 : 双極座標による二, 三の平面弾性問題の解, 日本機械学会論文集, 第13巻, 第44号, (1947) pp. 17-40. 第15巻, 第30号(1949) pp. 76-97; 鶴戸口英善 : 二円孔を有する板の平面応力問題, 応用数学力学, I-1, (1947) pp. 14-28, I-2, (1947) pp. 61-81.
- 9) Davies, G.A.O. and Hoddinott, J.R. : Stresses in a Plate Pierced by Two Unequal Circular Holes, J. Roy. Aeronaut. Soc., Vol. 67, (1963) pp. 451-452.
- 10) Haddon, R.A.W. : Stresses in an Infinite Plate with Two Unequal Circular Holes, Quart. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 20, (1963) pp. 277-291.
- 11) Salereo, V.L. and Mahoney, J.B. : Stress Solution for an Infinite Plate Containing Two Arbitrary Circular Holes Under Equal Biaxial Stresses, J. Eng. Industry, (Trans. of ASME), Nov., (1968) pp. 656-665.
- 12) 久保敏彦 : 二楕円孔を含む直交異方性無限板の応力, 日本機械学会論文集, 第25巻, 第159号, (1959) pp. 1101-1110.
- 13) 川本脩万 : 直交異方性弾性岩盤中のトンネルにおける応力集中について, 第1回岩盤力学シンポジウム, (1962).
- 14) Lekhnitskii, S.G. : Anisotropic Plates, (Eng. Trans.), Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1968) pp. 157-183.
- 15) Hulbert, L.E. : The Numerical Solution of Two-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, Bulletin 198, Eng. Experiment Station, Ohio State Univ. (1963).
- 16) Niwa, Y. and Hirashima, K. : Stress Distribution for Anisotropic Elastic Plate Containing Two or More Arbitrary Elliptical Holes, Mem. Fac. Engineering, Kyoto Univ., Vol. 33, Part 3, (1971), pp. 101-117.
- 17) 前出 15) およびその論文に与えられている参考文献; Conway, H.D. : The Approximate Analysis of Certain Boundary Value Problems, J. Appl. Mech. Vol. 27, (1960) pp. 275-277; 浜田 実ほか : 単軸引張りを受ける多円孔無限平板の応力集中問題の1数値解法, 日本機械学会論文集, 第36巻, 第288号, (1970) pp. 1336-1339.

(1971.6.18・受付)