

変動風をうける平板状構造物の耐風応答特性 に関する2,3の基礎的研究

A FEW FUNDAMENTAL INVESTIGATIONS ON AERODYNAMIC RESPONSE
CHARACTERISTICS OF PLATE-LIKE STRUCTURES IN FLUCTUATING GUSTS

白 石 成 人*
By Naruhito Siraishi

1. まえがき

長大つり橋など巨大土木構造物では耐震性、耐風性が設計上重要な因子となることはひろく知れているところであるが、この場合従来の設計上の諸問題と根本的に異なる点は、相対的に外力の作用のしかた、その大きさが十分に把握されていない点にあると考えられる。なかでも長大構造物の耐風性については、これまでの研究が不安定性の問題を重点的にとりあげてきたため、流れによる強制振動的特性はこれかららの研究課題であり、その全容をいまだ把握するには至っていないように思われる。変動風 (Fluctuating Gust) に対する構造物の応答の研究は2つの面で意義をもつものと考えられる。すなわち台風のような乱れた強風状態に対する安全性のより合理的な評価法の確立と自然風に対する構造物の応答を観測、解析することにより、実物と模型との相關性を明らかにする手がかりを与えることである。もとより現在上記の目的をただちに満足する解析法を確立しえないが、ここではその基礎的資料をうるために平板に対する変動風の効果について2, 3の考察を行なった。この問題は従来から航空工学、流体工学のテーマであり、近年A.G. Davenport が一連の研究結果を報告している^{1)~8)}。A.G. Davenport の研究は風速の不規則性を確率論的に処理し、さらに流体力と風速の関係を示す空力増幅関数 (Aerodynamic Magnification Factors) および振動応答関数 (Mechanical Magnification Factors) を用いて応答の統計的特性を考察したが、加えて振動型による空間的効果を空間修正関数 (Joint Modes Acceptance) で示した。この手法はその後の J. Vellozzi, E. Cohen の研究⁹⁾において踏襲されている。一方小松¹⁰⁾は A.G. Davenport の極値分布論の応用について、より合理的な評価法を考察した。これらの理論はいずれも非定常揚

力あるいは非定常抗力を対象としたもので、これらにピッキング・モーメントに関する考察を加えたものとしては笠口・坂田・田中の研究¹¹⁾がある。一方いわゆる箱型断面を対象とした研究としては B.J. Vickery^{12), 13)}, M. Novak, A.G. Davenport¹⁴⁾ の研究があり、さらに送電線鉄塔を対象とした A.N.L. Chiu¹⁵⁾ の研究が報告されている。箱型断面は長大つり橋に用いられているトラス補剛桁断面あるいは平板状といった断面の場合とは著しく異なる耐風応答特性を示し、今後ともさらに研究が必要であると考えられる。

以上のような研究成果を用いても、なお長大土木構造物が変動風に対してどのような応答を示すかを明らかにするには多くの問題が山積しているように考えられる。ここでは空力弹性応答が最もよく解析されている平板を対象に、従来の Karman-Sears の理論¹⁶⁾を基礎として、2, 3の考察を行なったので、これについてその結果を報告したい。まず 2. では京都大学工学部に設置されているエッフェル型風洞を用いて、上流側に格子を置いて乱流状態とした場合の平板および平板状模型に関する風洞実験結果をのべ、3. では Karman-Sears 理論、Horlock の結果、ならびに Horlock 理論の拡張した結果をのべる。4. では2自由度振動系の振動数応答関数を誘導し、5., 6. では応答のスペクトル特性について考察する。7. では変動風による安定化効果および不安定化効果について考察し、8. では乱れた流れの中の平板の応答に関するスペクトル特性についてのべ、9. では2, 3の数値計算結果についてのべる。

2. 風洞実験およびその結果

平板あるいは平板状構造物が乱れた流れの中でどのような応答を示すかを知ることは、長大橋などの耐風設計上きわめて重要な課題であると考えられる。このため変動風に対する平板の応答に関する基礎的特性を知る目的

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科教室

で風洞実験を行なった。実験装置および実験方法は次のとおりである。

実験装置

- (i) 風洞：京都大学工学部エッフェル型風洞
- (ii) 模型：図-1 のとおり（図中 D は閉床，E は開床，T は補剛材付，P はプレートガーダー形式，70 は桁高 70 mm, F 30 はフランジ付，H, π は床板位置を示す記号を意味する）
- (iii) 模型支持装置：鋼製コイルスプリング 8 本（上下流方向はピアノ線で拘束）
- (iv) 平均風速の計測：ベツ型マノメータおよび

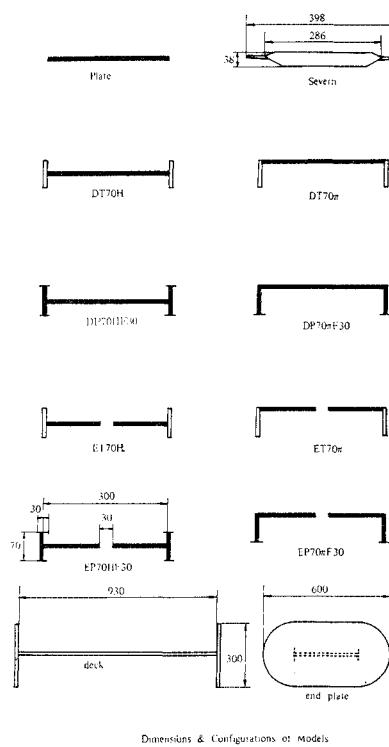


図-1

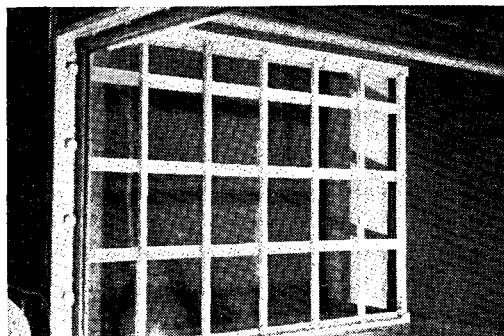


写真-1

NPL 型ピトー管

- (v) 変動風速および平均風速の計測：熱線風速計（日本科学工業製，IAM-60 2 台，線形化増幅器（FLA-60）2 台，演算器（28-6211 型）および X 型プローブ
- (vi) 変動風発生装置：U 形断面木製格子（写真-1）
- (vii) 変位計測装置：動ひずみ増幅器（新興通信製 DS 6/MTY 型）および LFT 型ローパス・フィルター
- (viii) 記録装置：ペン書オッショグラフ（渡辺測器製 WTR-211 型）およびデータレコーダ（TEAC 製 351 F 型）

実験方法

風洞内に設置した模型の上流側 2.5 m の位置に鉛直に格子を置き、次のような計測を行なった。

- (i) 模型設置位置に熱線風速計プローブを置いて、平均流方向および模型平板法線方向の 2 成分の変動風成分の計測を行なう。
- (ii) 模型を設置し、自由振動特性を計測する。
- (iii) 乱流状態での模型のたわみおよびねじれ変位を記録し、この Power Spectral Density を求める。

実験結果

今回の実験ではまず格子 A, B, C の 3 種類（表-1）、模型は平板および平板状模型（DT 70 H：トラス型）について行なったが、その結果の概要は次のようである。

表-1

格子の式	Grid Size (etc)	Open Area	Opening Ratio (%)	Intensity of Turbulence	
				σ_u / \bar{U} (%)	σ_v / \bar{U} (%)
A	100×200	70×140	49.0	3 ~ 4.8	3.7 ~ 6.2
B	200×200	170×140	59.5	3.5 ~ 5.4	3.9 ~ 6
C	400×400	370×330	76.3	3.7 ~ 6.9	4.8 ~ 8.5
格子なし	—	—	—	0.35 ~ 0.59	0.45 ~ 0.78

風洞特性として、格子のない場合の乱れ強さ（標準偏差/平均風速）は図-2 に示すように平均風速の増加とともに減するよう、平均流方向で約 0.4% (σ_u / \bar{U})、平均流直角方向では約 0.5% (σ_v / \bar{U}) のようである。乱れ強さは熱線風速計 $4 U$ -計 (rms) の指示値と線形化増幅器指示計の平均風速値の比より求めた。3 種類の格子を設置した場合の乱れ強さは表-1、図-2 に示すように、格子のない場合の約 10 倍となり、この範囲では格子寸法 (Mesh size) を大きくするほど乱れ強さは大きくなるように考えられる。また各格子に対する周波数応答は熱線風速計のローパス・フィルター、およびハイパス・フィルターによる分析結果で示せば、図-3 に示すようあり、ほぼ 50 Hz 近傍で最大値を示すようである。

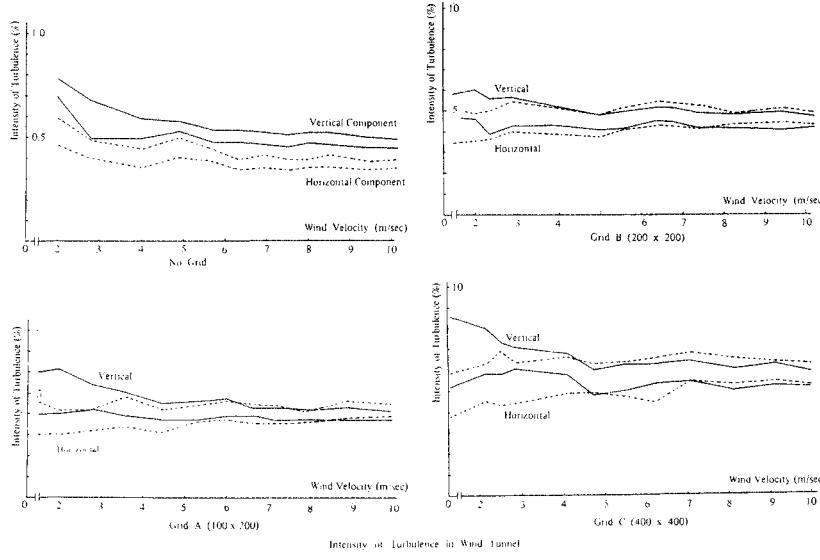


図-2

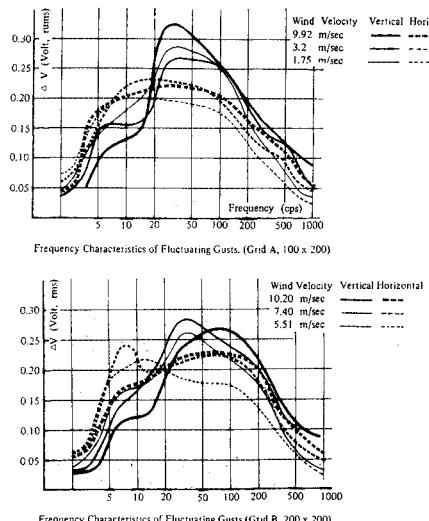


図-3

模型は鉛直に懸吊し、水平に 8 本のコイルばねで支持し、流れ方向にはピアノ線で拘束したが、この状態での振動モードは、たわみ、スイング振動、前縁固定ねじれ、後縁固定ねじれ、ねじれ、ツィスティングおよび

ローリングの 7 種類となる。しかし風の中ではたわみおよびねじれ振動が卓越し、他のモードは強制的に加えた場合以外ほとんど生じない。

変動風に対する模型の応答はコ字型ピックアップ（試作）を介して動ひずみ計で増幅し、データレコーダに記録し、これを Tukey の方法¹⁷⁾で周波数分析を行なったが、この結果は図-4 に示すようである。この結果よりみれば低風速では固有振動数近傍にエネルギーの集中がみられるが、風速が上昇するにつれて、

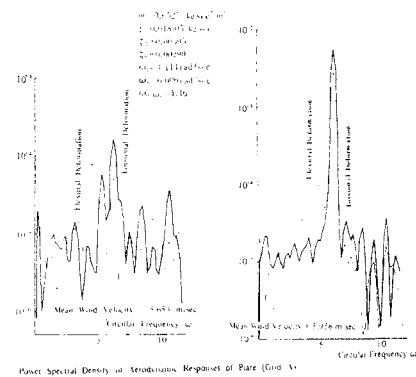


図-4

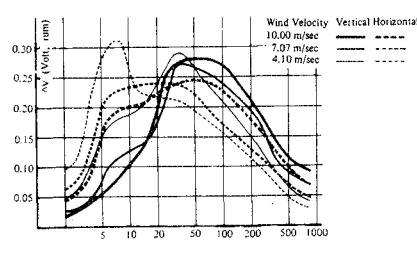


図-5

ねじれ振動とたわみ振動ではかなり顕著な相違がみられる。すなわちねじれ振動についてはほぼねじれ固有振動数の近傍にのみピーク値があるが、たわみ振動ではたわみとねじれの固有振動数の双方でピーク値を示している。またこのことは振動記録（波形）をみても乱れた流

れの中ではたわみ振動波形はかなりくずれたものであるのに対し、ねじれ振動の振幅はほぼ定常的であることからも十分に推察しうるものと考えられる（写真-2）。

一様風と変動風の状態での構造模型（表-2）の応答の相違を見るために格子 D(430×250) を用いたが、この場合の振幅換算風速図を示せば、図-5 のようであり、いわゆるフランジャー発振風速を発散終止風速（Quench Point）にとるならば、平板状構造物では乱れによって限界風速は向上するように考えられる。しかしながら、かなりの低風速の領域から顕著な不規則振動が変動風の場合みられ、明らかに不安定化効果が表われていると考えられる。

以上今回の実験結果の概要をのべたが、以下にこれら諸特性に関する基礎的考察を行ないたい。

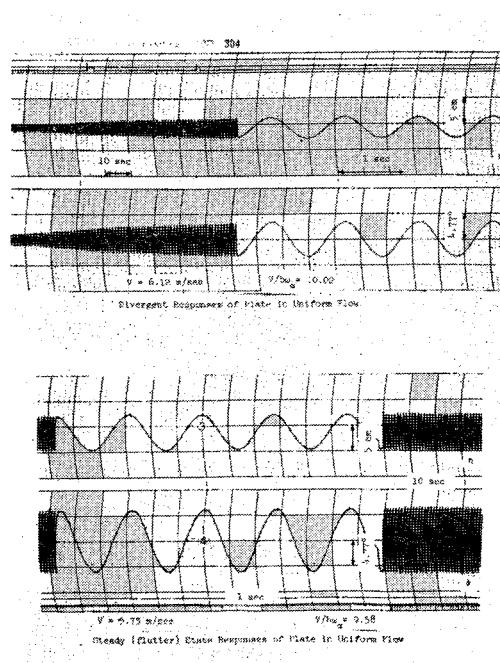


写真-2

表-2

Model Characteristics

	m (kg sec ² /m ²)	ζ_η	ω_η (rad/sec)	I (kg sec ²)	ζ_α	ω_α (rad/sec)	Grid Size (cm)	$\omega_\alpha/\omega_\eta$
DP 70 H(F 30)	0.5426	0.00355	8.708	0.01829	0.00260	14.137	30×25	1.623
DP 70 π (F 30)	0.5954	0.00334	8.796	0.02003	0.00240	14.399	〃	1.637
EP 70 H (F 30)	0.6339	0.00410	8.752	0.01742	0.00522	14.137	〃	1.615
EP 70 π (F 30)	0.5966	0.00482	8.836	0.02007	0.00297	14.451	〃	1.635
Plate	0.4473	0.00550	10.210	0.01631	0.00221	15.904	〃	1.558
DT 70 H	0.5426	0.00377	9.163	0.02104	0.00384	15.512	〃	1.693
DT 70 π	0.5440	0.00375	9.163	0.02026	0.00319	15.512	〃	1.693
Severn Type	0.4553	0.00637	10.210	0.01463	0.00294	15.661	〃	1.534
(1.62 cps)				(2.492 cps)				

3. 平板に作用する変動風による流体力

2次元流れで、平均流方向の抗力の影響を無視しうる場合、平板に作用する流体力は揚力 L およびピッキングモーメント M であるが、Karman-Sears の理論^{16), 18)}によれば、それぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L &= 2\pi\rho b U v_0 e^{i\nu t} S(k') \\ M &= \pi\rho b^2 U v_0 e^{i\nu t} S(k') \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (3.1)$$

ただし、平板は鉛直方向（流れに直角方向）に周期的な風速変動 $v(x, t)$ 、

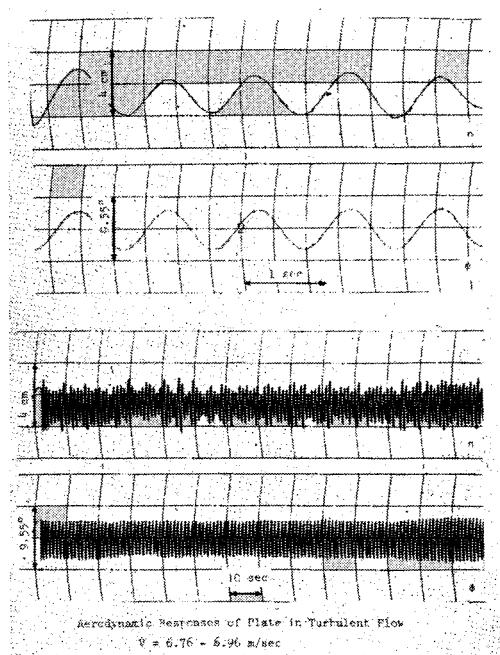
$$v(x, t) = v_0 e^{i\nu(t - \frac{x}{U})} \quad \dots \dots \dots \quad (3.2)$$

をうけるものとする。

ここに U : 平均風速 ν : 変動風の円振動数

t : 時間 ρ : 空気密度

x : 流れ方向の座標パラメーター



Aerodynamic Responses of Severn Type Model

Mean Wind Velocity m/sec	Reduced Velocity	Remarks
0.516~9.764	2.239~3.355*	randomly vibrating
9.764~11.636	3.355~3.998*	almost steady
12.305	4.229*	divergent
12.695	4.409**	divergent in uniform flow

* flutter frequency = 14.923 rad/sec, chord length = 40 cm

** flutter frequency = 14.765 rad/sec

b : 平板の弦長の $1/2$

$k' = \nu b/U$: 換算振動数

であり、かつ $S(k')$ は

$$S(k') = \frac{J_0(k')K_1(ik') + iJ_1(k')K_0(ik')}{K_1(ik') + K_0(ik')} \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

$$= \frac{1}{ik'\{K_0(ik') + K_1(ik')\}} \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

で与えられる Sears 関数であり、 J_n , K_n は Bessel 関数ならびに変形 Bessel 関数である。

式 (3.3) の妥当性は A.M. Kuethe¹⁹⁾, W.R. Sears が研究しているが、一方 N.H. Kemp²⁰⁾ は拡張した Sears 関数を定義し、Sears 関数と Theodorsen 関数を包括する形になることを示している。

以上は従来の Sears 関数ならびに鉛直方向の周期的な変動風に対する流体力に関する理論であるが、J.H. Horlock²¹⁾ は R. Isaacs²²⁾ の考え方を基礎にして、平板が迎え角 α をもつ場合、水平方向（流れ方向）の周期的変動風成分 u による流体力について考察した。いま、

$$u = u_0 \sin(\nu t - k'x), \quad k' = \frac{\nu b}{U} \quad \dots \dots \dots (3.4)$$

のようであれば、揚力は

$$L_u = 2\pi\rho b U u_0 \alpha e^{i\nu t} T_0(k') \quad \dots \dots \dots (3.5)$$

ここに

$$T_0(k') = J_0(k') \{1 + R_e C(k')\} + J_1(k') I_m C(k') + i[J_1(k') \{2 - R_e C(k')\} + J_0(k') I_m C(k')] \quad \dots \dots \dots (3.6)$$

であり、 $R_e C(k')$, $I_m C(k')$ はそれぞれ Theodorsen 関数の実数部および虚数部である（図-6, 7）。

J.H. Horlock は流速が鉛直、水平方向の双方に周期的に変動し、かつその位相差が β であれば、変動風速 v , u は

$$\left. \begin{aligned} u &= w_0 e^{i(\nu t - \frac{x}{U})} \cos \beta \\ v &= w_0 e^{i(\nu t - \frac{x}{U})} \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (3.7)$$

と与えられるから、変動揚力 L_w が

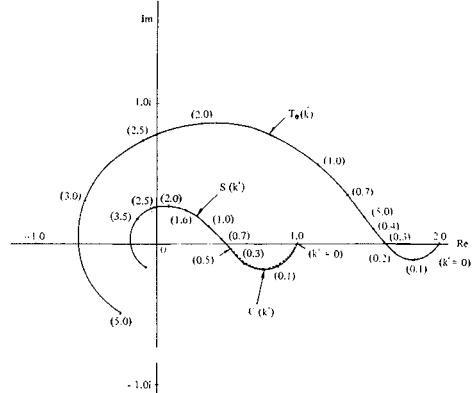
$$L_w = 2\pi\rho b U w_0 e^{i\nu t} \{T_0(k') \alpha \cos \beta + S(k') \sin \beta\} \quad \dots \dots \dots (3.8)$$

のように示されることを求めた²¹⁾。

さて Horlock の理論では迎え角 α は一定となっているが、平板がねじれおよびたわみ振動を行なう場合、相対迎え角は時間の関数となるため、式 (3.5) はそのままの形では成立しないことになる。いまねじれ変位を φ 、たわみ変位を η 、平均風速を U とすれば、相対迎え角 α は

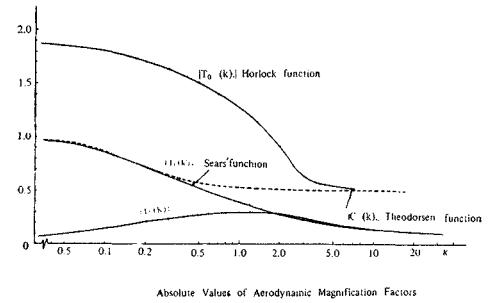
$$\alpha = \varphi + \frac{1}{U} (\dot{\eta} + \dot{\varphi} x) \quad \dots \dots \dots (3.9)$$

となるため、Karman-Sears 理論を用いて、Horlock と



Vector Diagrams of $C(k')$, $S(k')$ and $T_0(k')$
 $C(k')$: Theodorsen Function
 $S(k')$: Sears Function
 $T_0(k')$: Horlock Function

図-6



Absolute Values of Aerodynamic Magnification Factors

図-7

同様の手法を式 (3.9) に応用すれば、変動揚力は、水平方向の変動風速を式 (3.4) のようにとるととき、次のように求められる。

$$L_u = 2\pi\rho b U u_0 e^{i\nu t} \left\{ T_0(k') \varphi + T_1(k') \frac{\dot{\eta}}{U} + T_2(k') \frac{b \dot{\varphi}}{U} + T_3(k') \frac{b^2 \ddot{\varphi}}{U^2} + T_4(k') \frac{b \ddot{\eta}}{U^2} \right\} \quad \dots \dots \dots (3.10)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} T_0(k') &= J_0(k') \{1 + C(k')\} \\ &\quad + iJ_1(k') \{2 - C(k')\} \\ T_1(k') &= J_0(k') C(k') + iJ_1(k') \{1 - C(k')\} \\ &= S(k') \\ T_2(k') &= \frac{1}{2} \{J_0(k') - J_2(k')\} \{1 - C(k')\} \\ &\quad + iJ_1(k') C(k') \\ T_3(k') &= -i \frac{J_2(k')}{k'} = -i \frac{1}{4} \{J_1(k') + J_3(k')\} \\ T_4(k') &= \frac{J_1(k')}{k'} = \frac{1}{2} \{J_0(k') + J_2(k')\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (3.11)$$

表-3
Aerodynamic Magnification Factors

k'	$T_1(k') = S(k')$	$T_2(k')$	$T_3(k')$	$T_4(k')$
0	1.0000	0	0	0.5000
0.1	0.8213 - 0.1635 <i>i</i>	0.0837 + 0.1232 <i>i</i>	-0.0125 <i>i</i>	0.4994
0.2	0.7016 - 0.1596 <i>i</i>	0.1342 + 0.1564 <i>i</i>	-0.0249 <i>i</i>	0.4975
0.3	0.6235 - 0.1256 <i>i</i>	0.1619 + 0.1730 <i>i</i>	-0.0372 <i>i</i>	0.4944
0.4	0.5679 - 0.0850 <i>i</i>	0.1764 + 0.1856 <i>i</i>	-0.0493 <i>i</i>	0.4901
0.5	0.5246 - 0.0440 <i>i</i>	0.1825 + 0.1973 <i>i</i>	-0.0612 <i>i</i>	0.4845
0.6	0.4884 - 0.0040 <i>i</i>	0.1829 + 0.2090 <i>i</i>	-0.0728 <i>i</i>	0.4778
0.8	0.4260 + 0.0659 <i>i</i>	0.1718 + 0.2322 <i>i</i>	-0.0948 <i>i</i>	0.4610
1.0	0.3686 + 0.1259 <i>i</i>	0.1498 + 0.2534 <i>i</i>	-0.1149 <i>i</i>	0.4400
1.2	0.3120 + 0.1753 <i>i</i>	0.1203 + 0.2717 <i>i</i>	-0.1328 <i>i</i>	0.4152
1.5	0.2256 + 0.2296 <i>i</i>	0.0670 + 0.2900 <i>i</i>	-0.1547 <i>i</i>	0.3720
2.0	0.0816 + 0.2680 <i>i</i>	-0.0314 + 0.2856 <i>i</i>	-0.1764 <i>i</i>	0.2884
3.0	-0.1452 + 0.1778 <i>i</i>	-0.1842 + 0.1597 <i>i</i>	-0.1620 <i>i</i>	0.1130
4.0	-0.1980 - 0.0207 <i>i</i>	-0.1889 - 0.0383 <i>i</i>	-0.0910 <i>i</i>	-0.0165
6.0	0.0813 - 0.1410 <i>i</i>	+0.0980 - 0.1344 <i>i</i>	+0.0405 <i>i</i>	-0.0461
10.0	-0.1240 + 0.0025 <i>i</i>	-0.1250 + 0.0200 <i>i</i>	-0.0255 <i>i</i>	0.0043
∞	0	0	0	0

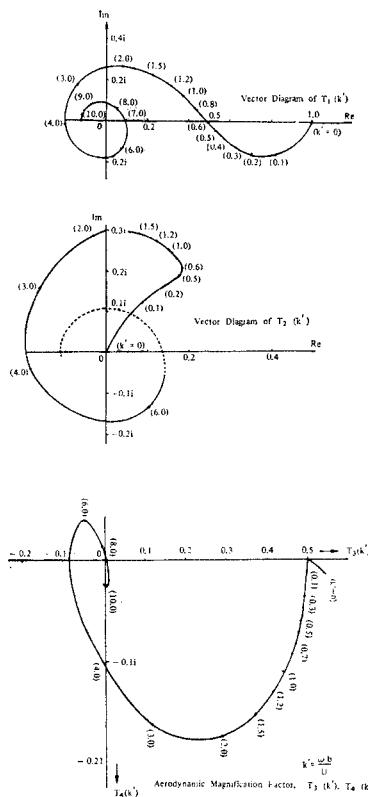


図-8

のようである（表-3, 図-8）。

式(3.10), (3.11)の誘導は付録に示すようであるが, 式(3.11)の $T_0(k')$ は式(3.6)と一致し, $T_1(k')$ は式(3.3)に示す Sears 関数に一致する。 $T_2(k')$ は実数部, 虚数部よりなるが, 0 より次第に増加し再び 0 に取れんする関数である。 $T_3(k')$ は虚数値のみで, $T_4(k')$

は実数部のみの関数である。迎え角が時間的に変動しなければ, 式(3.10)は式(3.5)に一致し, 式(3.10)はいわば Horlock 関数を拡張した形を示すものと考えられる。

4. 2 自由度振動系の振動数応答関数

2 次元流れの中に置かれた幅員 $2b$ の平板がねじれ変位 φ , たわみ変位 η を行なう 2 自由度振動系であれば, その基礎方程式は, R.H. Scanlan, Ali Sabzevari²³⁾によれば, 次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + 2\zeta_\eta \omega_\eta \dot{\eta} + \omega_\eta^2 \eta &= H_1 \dot{\eta} + H_2 \dot{\varphi} + H_3 \varphi - \frac{L}{m} \\ \ddot{\varphi} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\varphi} + \omega_\alpha^2 \varphi &= A_1 \dot{\eta} + A_2 \dot{\varphi} + A_3 \varphi + \frac{M}{I} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \cdots (4.1)$$

ここに

$\omega_\eta, \omega_\alpha$: たわみ, ねじれ振動の固有円振動数

ζ_η, ζ_α : たわみ, ねじれ振動の減衰定数

$H_i, A_i (i=1, 2, 3)$: 非定常空気力係数

m : 単位長あたりの質量

I : 単位長あたりの質量慣性モーメント

L : 周期的揚力

M : 周期的ピッチング モーメント

である。

式(4.1)の振動数応答関数は Dirac の Delta 関数を δ とするとき,

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + 2\zeta_\eta \omega_\eta \dot{\eta} + \omega_\eta^2 \eta &= H_1 \dot{\eta} + H_2 \dot{\varphi} + H_3 \varphi + \left(\begin{matrix} \delta \\ 0 \end{matrix} \right) \\ \ddot{\varphi} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\varphi} + \omega_\alpha^2 \varphi &= A_1 \dot{\eta} + A_2 \dot{\varphi} + A_3 \varphi + \left(\begin{matrix} 0 \\ \delta \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad \cdots \cdots \cdots (4.2)$$

の解の Fourier 変換として求められるから²⁴⁾, 一般に

$$H(\omega) = \begin{vmatrix} H_\eta(\omega) & H_\alpha(\omega) \\ \Theta_\eta(\omega) & \Theta_\alpha(\omega) \end{vmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (4.3)$$

のように表わされる。式(4.2)を用いれば, 式(4.3)は

$$H_\eta(\omega) = \{ \omega_\alpha^2 - \omega^2 - A_3 + i(2\zeta_\alpha \omega_\alpha - A_2)\omega \} / (D_R + iD_I)$$

$$H_\alpha(\omega) = (H_3 + i\omega H_2) / (D_R + iD_I)$$

$$\Theta_\eta(\omega) = i\omega A_1 / (D_R + iD_I)$$

$$\Theta_\alpha(\omega) = \{ \omega_\eta^2 - \omega^2 + i(2\zeta_\eta \omega_\eta - H_1)\omega \} / (D_R + iD_I)$$

$$D_R = (\omega_\eta^2 - \omega^2)(\omega_\alpha^2 - \omega^2 - A_3) - \omega^2(2\zeta_\eta \omega_\eta - H_1) \\ \cdot (2\zeta_\alpha \omega_\alpha - A_2) + \omega^2 A_1 H_2$$

$$D_I = (\omega_\eta^2 - \omega^2)(2\zeta_\alpha \omega_\alpha - A_2)\omega + (\omega_\alpha^2 - \omega^2 - A_3)$$

$$\cdot (2\zeta_\eta \omega_\eta - H_1)\omega + \omega A_1 H_3$$

のようである。したがって, 式(4.3)は

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{vmatrix} |H_\eta(\omega)|e^{i\theta_{\eta\eta}} & |H_\alpha(\omega)|e^{i\theta_{\eta\alpha}} \\ |\Theta_\eta(\omega)|e^{i\theta_{\eta\eta}} & |\Theta_\alpha(\omega)|e^{i\theta_{\eta\alpha}} \end{vmatrix} \dots\dots\dots(4.4)$$

のようによく表わされ、式 (4.4) に関する Gain Factor, Phase Factor はそれぞれ次式のように定義される。

$$\text{Gain Factor} = \frac{|H_\eta(\omega)|}{|\Theta_\eta(\omega)|} \frac{|H_\alpha(\omega)|}{|\Theta_\alpha(\omega)|} \dots\dots\dots(4.5)$$

$$\text{Phase Factor} = \begin{vmatrix} \theta_{\eta\eta} & \theta_{\eta\alpha} \\ \theta_{\alpha\eta} & \theta_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \dots\dots\dots(4.6)$$

ここに

$$|H_\eta(\omega)| = \left[\frac{\{(\omega_a^2 - \omega^2 - A_3)D_R + (2\zeta_a\omega_a - A_2)\omega D_I\}^2}{(D_R^2 + D_I^2)^2} * \right. \\ \left. + \{\omega(2\zeta_a\omega_a - A_2)D_R - (\omega_a^2 - \omega^2 - A_3)D_I\}^2 \right]^{1/2}$$

$$|H_\alpha(\omega)| = \left[\frac{(H_3D_R + \omega H_2D_I)^2 + (H_3D_I * \right. \\ \left. * \frac{-\omega H_2D_R}{(D_R^2 + D_I^2)^2})^2}{(D_R^2 + D_I^2)^2} \right]^{1/2}$$

$$|\Theta_\eta(\omega)| = \frac{\omega A_1}{(D_R^2 + D_I^2)^{1/2}}$$

$$|\Theta_\alpha(\omega)| = \left[\frac{\{(\omega_\eta^2 - \omega^2)D_R + (2\zeta_\eta\omega_\eta - H_1)\omega D_I\}^2}{(D_R^2 + D_I^2)^2} * \right. \\ \left. + \{\omega(2\zeta_\eta\omega_\eta - H_1)D_R - (\omega_\eta^2 - \omega^2)D_I\}^2 \right]^{1/2}$$

$$\tan \theta_{\eta\eta} = \frac{(2\zeta_a\omega_a - A_2)\omega D_R - (\omega_a^2 - \omega^2 - A_3)D_I}{(\omega_a^2 - \omega^2 - A_3)D_R + (2\zeta_a\omega_a - A_2)\omega D_I}$$

$$\tan \theta_{\eta\alpha} = \frac{H_3D_I - \omega H_2D_R}{H_3D_R + \omega H_2D_I}, \tan \theta_{\alpha\eta} = -\frac{D_R}{D_I}$$

$$\tan \theta_{\alpha\alpha} = \frac{\omega(2\zeta_\eta\omega_\eta - H_1)D_R - (\omega_\eta^2 - \omega^2)D_I}{(\omega_\eta^2 - \omega^2)D_R + (2\zeta_\eta\omega_\eta - H_1)\omega D_I}$$

のようであり、式 (4.1) で表わされる 2 自由度振動系の振動数応答関数は、式 (4.3) のように定義されることになる。

5. 鉛直方向変動風成分に対する平板の応答特性

変動風に対する 2 次元 2 自由度振動系としての平板の応答特性を考察するにあたり、まず式 (4.1) の荷重項として式 (3.1) を代入すれば、

$$\ddot{\eta} + 2\zeta_\eta\omega_\eta\dot{\eta} + \omega_\eta^2\eta = H_1\dot{\eta} + H_2\dot{\varphi} + H_3\varphi \\ - \frac{2\pi\rho b}{m}Uv_0e^{i\nu t}S(k') \\ \ddot{\varphi} + 2\zeta_a\omega_a\dot{\varphi} + \omega_a^2\varphi = A_1\dot{\eta} + A_2\dot{\varphi} + A_3\varphi \\ + \frac{\pi\rho b^2}{I}Uv_0e^{i\nu t}S(k') \dots\dots\dots(5.1)$$

となる。いま $\eta = Y e^{i\nu t}$, $\varphi = \Phi e^{i\nu t}$ として、これを式 (5.1) に用いれば、次式が求められる。

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_\eta^2 - \nu^2 + i\nu(2\zeta_\eta\omega_\eta - H_1) \\ -A_1\nu \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & -(H_3 + i\nu H_2) \\ & \omega_a^2 - \nu^2 - A_3 + i\nu(2\zeta_a\omega_a - A_2) \\ & - \frac{2\pi\rho b}{m}Uv_0S(k') \\ & \frac{\pi\rho b^2}{I}Uv_0S(k') \end{aligned}$$

式 (4.3) で定義した振動数応答関数を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} Y &= -\frac{2\pi\rho b}{m}Uv_0S(k')H_\eta(\nu) \\ &+ \frac{\pi\rho b^2}{I}Uv_0S(k')H_\alpha(\nu) \\ \Phi &= -\frac{2\pi\rho b}{m}Uv_0S(k')\Theta_\eta(\nu) \\ &+ \frac{\pi\rho b^2}{I}Uv_0S(k')\Theta_\alpha(\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.2)$$

のようによく表わされる。したがって、

$$\begin{aligned} Y^2 &= \left\{ \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right)^2 |H_\eta(\nu)|^2 - 2 \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right) \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right) |H_\eta(\nu)| \cdot |H_\alpha(\nu)| \cos(\theta_{\eta\eta} - \theta_{\eta\alpha}) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right)^2 |H_\alpha(\nu)|^2 \right\} U^2 v_0^2 S^2(k') \\ \Phi^2 &= \left\{ \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right)^2 |\Theta_\eta(\nu)|^2 - 2 \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right) \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right) |\Theta_\eta(\nu)| \cdot |\Theta_\alpha(\nu)| \cos(\theta_{\alpha\eta} - \theta_{\alpha\alpha}) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right)^2 |\Theta_\alpha(\nu)|^2 \right\} U^2 v_0^2 S^2(k') \end{aligned}$$

をうる。ここに $S^2(k')$ は Sears 関数の絶対値の自乗である。上式の Y^2 , Φ^2 は応答の振動数応答特性を示すものであるが、右辺の { } 内は与えられた平板の振動特性と空気力係数で決定されるため、これをいま空力振動数応答関数と定義すれば、上式は次のように表わすことができる。すなわち空力振動数応答関数はたわみねじれ応答に対して、

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^2(\nu) &= \left\{ \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right)^2 |H_\eta(\nu)|^2 - 2 \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right) \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right) |H_\eta(\nu)| \cdot |H_\alpha(\nu)| \cos(\theta_{\eta\eta} - \theta_{\eta\alpha}) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right)^2 |H_\alpha(\nu)|^2 \right\} \\ \tilde{\Phi}^2(\nu) &= \left\{ \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right)^2 |\Theta_\eta(\nu)|^2 - 2 \left(\frac{2\pi\rho b}{m} \right) \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right) |\Theta_\eta(\nu)| \cdot |\Theta_\alpha(\nu)| \cos(\theta_{\alpha\eta} - \theta_{\alpha\alpha}) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\pi\rho b^2}{I} \right)^2 |\Theta_\alpha(\nu)|^2 \right\} \dots\dots\dots(5.3) \end{aligned}$$

のようになるため、式 (5.2) より

$$\begin{aligned} Y^2 &= \tilde{Y}^2(\nu) U^2 v_0^2 S^2(k') \\ \Phi^2 &= \tilde{\Phi}^2(\nu) U^2 v_0^2 S^2(k') \end{aligned} \dots\dots\dots(5.4)$$

をうる。

いま鉛直方向風速変動成分 v が不規則な変動を行なう場合、その Power Spectral Density を $S_{vv}(\omega)$ とすれば、 $S_{vv}(\omega)$ は

$$\overline{v^2(t)} = 2 \int_0^\infty S_{vv}(\omega) d\omega \quad \dots(5.5)$$

のように表わされ、同様に、たわみ・ねじれ応答の Power Spectral Density も

$$\left. \begin{aligned} \overline{\eta^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{\eta\eta}(\omega) d\omega \\ \overline{\varphi^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{\varphi\varphi}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.6)$$

のように定義されるから、式 (5.4) より

$$\left. \begin{aligned} S_{\eta\eta}(\omega) &= \tilde{Y}^2(\omega) U^2 S^2 \left(\frac{b\omega}{U} \right) S_{vv}(\omega) \\ S_{\varphi\varphi}(\omega) &= \tilde{\Phi}^2(\omega) U^2 S^2 \left(\frac{b\omega}{U} \right) S_{vv}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.7)$$

のように求められる。式 (5.7) は応答の Power Spectral Density が鉛直方向変動風速の Power Spectral Density、空力増幅関数 $S^2(b\omega/U)$ (この場合 Sears 関数) および式 (5.3) で定義される空力振動数応答関数の積の形で与えられることを示している。

6. 水平方向変動風成分に対する平板の応答特性

5.において鉛直方向変動風成分による平板の耐風応答特性を空力振動数応答関数、空力増幅関数 (Sears 関数の自乗) ならびに変動風の Power Spectral Density で示したが、いま水平方向変動風成分による流体力を 3. でのべた Horlock の理論ならびに拡張した Horlock 関数で表わすとすれば、その解析法は 5. と同様に考えることができる。前節と同様にまず周期的変動風に対する応答を求めれば、応答の自乗平均は応答の Fourier 係数の自乗和で与えられるから、応答の Power Spectral Density を簡単に求めることができる。水平方向変動風成分の影響を考える場合、迎え角が一定の場合には Horlock の理論を直接用いることができるが、迎え角が時間的に変動する場合には拡張した Horlock 関数を用いる必要がある。次に 2, 3 の基礎的の場合について考えてみたい。

Case 1 迎え角 α が一定の場合

この場合水平方向の周期的変動風による流体力は式 (3.1) のような揚力が与えられるが、Karman-Sears 理論^{(15), (16)}によれば仮想質量効果を無視する場合には揚力は前縁より弦長 1/4 点に作用するから、揚力およびピッキング モーメントはそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} L &= 2\pi\rho b U u_0 \alpha e^{i\nu t} T_0(k') \\ M &= \pi\rho b^2 U u_0 \alpha e^{i\nu t} T_0(k') \end{aligned} \right\} \quad \dots(6.1)$$

のように表わされる。これを式 (4.1) に代入し、式 (5.3) の空力振動応答関数を用いれば、たわみ・ねじれ応答 Y, Φ は

$$\left. \begin{aligned} Y^2 &= \tilde{Y}^2 T_0^2(k') U^2 u_0^2 \alpha^2 \\ \Phi^2 &= \tilde{\Phi}^2 T_0^2(k') U^2 u_0^2 \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots(6.2)$$

のようになり、 $T_0(k')$ は式 (3.6) で定義される Horlock 関数である注)。

Case 2 平板が ω_0 なる振動数でたわみ振動あるいはねじれ振動を行なう場合

いま平板が水平方向の変動風をうけ、かつ外的要因によりたわみ振動あるいはねじれ振動を行なう場合、迎え角が 0 であっても変動風による流体力をうける。これは式 (3.10) のような形で表わされるが、この流体力による応答がまた変動風による流体力を与えるため、厳密には非線型問題として考察されなければならないであろう。しかし、与えられた振動振幅に比して応答値が小さければ、近似的に線型強制振動の問題と考えられるため、応答解析は容易となる。さて、式 (3.10) の右辺は実関数であるため、右辺に含まれる変位成分 η, φ もまた実関数を代入することになる。したがって、いま与えられたたわみ振動が、

$$\eta_{\text{given}} = \eta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \dots(6.3)$$

で表わされるならば、式 (3.10) に代入する形としては

$$\eta_{\text{given}} = \frac{\eta_0}{2} (e^{i(\omega_0 t + \phi)} + e^{-i(\omega_0 t + \phi)}) \quad \dots(6.4)$$

を用いるのが簡便である。なお、ここに ϕ は位相差を示すパラメーターである。式 (6.4) を式 (3.10) に代入すれば、迎え角 0 に対する揚力は

$$\left. \begin{aligned} L &= \pi\rho U u_0 \eta_0 [T_\eta(k', k_0) e^{i\psi} e^{i(\nu + \omega_0)t} \\ &\quad + T_\eta(k', -k_0) e^{-i\psi} e^{i(\nu - \omega_0)t}] \end{aligned} \right\} \quad \dots(6.5)$$

のようになる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} T_\eta(k', k_0) &= i T_1(k') k_0 - T_4(k') k_0^2 \\ k' &= \frac{b\nu}{U}, \quad k_0 = \frac{b\omega_0}{U} \end{aligned} \right\} \quad \dots(6.6)$$

である。

ピッキング モーメントは、揚力が弦長 1/4 点に作用するとして求められるので、これらを用いて応答を求めることができる。この場合この表式は若干複雑となるため割愛するが、式 (6.5) より明らかなように、応答は周波数 $(\nu + \omega_0)$ の項と $(\nu - \omega_0)$ の項の平均値として求め

注) 一般に平板の非定常空気力係数は迎え角により変化するため、式 (6.2) で考える空力振動数応答関数には、迎え角 α に対する非定常空気力係数が用いられるべきである。またねじれ応答が式 (6.2) のように表わされるためには、 Φ^2 が α^2 に比して十分小でなければならない。

られることになる。

ねじれ振動を与えた場合も全く同様にして流体力、およびその応答を計算することが可能である。

Case 3 平板が曲げねじれ フラッター 状態にある場合

この場合にはたわみ・ねじれ振動が連成した形であるため Case 2 の 2 つの応答の和を考慮しなければならない。曲げねじれフラッターは線型応答として理論的に解析する場合には確定した定常振幅は存在せず、微小振幅の範囲ではたわみ・ねじれ振動の振幅比と位相差が一定であればどの振幅でも定常状態になりうるものと考えられる。しかしながら実際には非線型空気力をうけると考えるのが妥当のようである。ここでは平板の振動状態での変動風による流体力を考えるために、フラッター状態を

$$\eta = \eta_0 \cos \omega_0 t, \varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t - \psi_0) \quad \dots \dots \dots (6.7)$$

のように表わせば²³⁾、前と同様にして、式(3.10)より、変動揚力 L は

$$\begin{aligned} L = \pi \rho U u_0 [& e^{i(\nu + \omega_0)t} \{ T_\eta(k', k_0) \eta_0 \\ & + T_\varphi(k', k_0) e^{-i\psi_0} \varphi_0 \} \\ & + e^{i(\nu - \omega_0)t} \{ T_\eta(k', -k_0) \eta_0 \\ & + T_\varphi(k', -k_0) e^{-i\psi_0} \varphi_0 \}] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6.8)$$

のようになる。ここに

$$\begin{aligned} T_\varphi(k', k_0) = & T_0(k') + i k_0 T_2(k') - k_0^2 T_3(k') \\ k' = & \frac{b \nu}{U}, \quad k_0 = \frac{b \omega_0}{U} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6.9)$$

である。

このように水平方向変動風による効果は、基本的特性では鉛直方向変動風による効果と類似したものであるが、応答特性はかなり異なったものとなる。すなわち、J. Horlock のように水平方向の変動風による流体力が相対迎え角によるものと考えれば、迎え角一定の場合には、空力振動数関数と空力増幅関数 (Horlock 関数) によってそのスペクトル特性が規定されるが、迎え角が時間的に変動する場合には、空力振動数応答関数は振動数 $(\nu + \omega_0)$ の項と $(\nu - \omega_0)$ の項よりも、空力増幅関数もまた、換算振動数 k' , k_0 および φ_0 , η_0/b の関数となり、前の場合は異なる応答を示すことになる。

7. 変動風による平板の耐風安定性の安定化効果および不安定化効果

2. に述べたように平板状構造の耐風応答は一様風に対する場合と乱れた風に対する場合とでは著しく異なるものとなっている。たとえば図-5 に示すようにフラッター振幅・換算風速図を、一様流れと乱れた流れに対するものについて比較すれば、フラッター発振風速よりも

なり低い風速で変動風による乱れた応答が求められ、変動風は明らかに不安定効果を与えるものと考えられる。しかし発振風速そのものについてみれば、今回の実験結果では乱れた流れの場合が一様流れの場合よりかなり高いものとなっており、変動風が安定化効果を与えた一例であると考えられる。ここではこうした変動風による安定化効果 (Stabilizing Effect) ならびに不安定化効果 (Destabilizing Effect) について 2, 3 の定性的な考察を行ないたい。

平板の耐風応答の基礎方程式は、式(4.1)に示したように

$$\begin{cases} \ddot{\eta} + 2 \zeta_\eta \omega_\eta \dot{\eta} + \omega_\eta^2 \eta = H_1 \dot{\eta} + H_2 \dot{\varphi} + H_3 \varphi - \frac{L}{m} \\ \ddot{\varphi} + 2 \zeta_\varphi \omega_\varphi \dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = A_1 \dot{\eta} + A_2 \dot{\varphi} + A_3 \varphi + \frac{M}{I} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (7.1)$$

のようであるが、いま外力項 L, M が ν なる振動数で作用する場合、これに応ずる空気力係数 H_i, A_i ($i=1, 2, 3$) は外力項の振動数により定義される換算振動数 k' $= b/U$ の関数と考えられる。平板の場合の空気力係数は R.H. Scanlan, Ali Sabzevari²³⁾ によれば

$$\begin{cases} H_1 = -\frac{\pi \rho b}{m} |C(k')| U \\ H_2 = -\frac{\pi \rho b^2}{m} \{1 + |C(k')|\} U \\ H_3 = -\frac{2 \pi \rho b}{m} |C(k')| U^2 \\ A_1 = \frac{\pi \rho b^2}{I} |C(k')| U \\ A_2 = -\frac{\pi \rho b^3}{2 I} \{1 - |C(k')|\} U \\ A_3 = \frac{\pi \rho b^2}{I} |C(k')| U^2 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (7.2) \text{注)$$

のようによく表わされるため、式(7.2)を式(7.1)に代入した振動系が安定であるか否かは、その係数に関する Routh-Hurwitz の条件より判定される。空気力係数に含まれる $C(k')$ は k' に関する Theodorsen 関数 (揚力の減関数) であり、 $k'=0$ のとき $|C(k')|=1$, $k'=\infty$ のとき $|C(k')|=1/2$ となり、 $|C(k')|$ はこの間に存在することになる。したがって、変動風による外力成分の振動数が、式(7.1)の振動系より求められるフラッター振動数より小さければ、空気力の減度が小さいため、振動系は大きな空気力をうけ、低い風速で不安定領域に達する、すなわち不安定化されると考えられる。これに反して変動風による強制外力の振動数がフラッター振動数よりも高ければ、空気力はそれだけでい減され、振動系は安定化されるものと考えられる。

注) 平板の空気力係数を Theodorsen 理論より求める場合、実関数として式(7.2)のように表わされるかどうかについては問題点があり、現在これについて検討中である。

5., 6.において考察した結果を用いれば、鉛直方向変動風成分は振動数の全領域に対して応答するのに対し、水平方向変動風成分は迎え角 ($\alpha=$ 一定) の場合を除いて、振動数応答関数は式(6.8)より、 $(\nu+\omega_0)$ と $(\nu-\omega_0)$ の形をとり、たとえば ω_0 がフラッター振動数であれば、変動風による応答のうち $(\nu+\omega_0)$ の項は常に ω_0 より高い振動数をもつことになり、空気力はそれだけで減され、振動系は安定化するものと考えられる。これに対して $(\nu-\omega_0)$ の項は必ずしも安定化させるものとはならず、不安定化にも作用する場合も考えられる。もとより鉛直方向変動風の効果も安定化する成分を含むが、不安定化成分のみに注目すれば、それより求められるフラッター風速は限界風速の下限値を与える、安定化効果のみに注目すれば、限界風速の上限値が求められることになる。

限界風速の下限値は空気力が最も大きくなる場合に対応するため、 $|C(k')|=1$ として、式(7.2)を式(7.1)に代入し、Routh-Hurwitz の条件式を求めれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} B_3 &= 2\zeta_a\omega_a + 2\zeta_\eta\omega_\eta + \frac{2\pi\rho b}{m}U \geq 0 \\ B_2 &= \omega_a^2 + \omega_\eta^2 + 4\zeta_a\omega_a\zeta_\eta\omega_\eta + \frac{2\pi\rho b}{m}(2\zeta_a\omega_a)U \\ &\quad + \frac{\pi\rho b^2}{I}\left(\frac{2\pi\rho b^2}{m}-1\right)U^2 \geq 0 \\ B_1 &= \omega_a^2(2\zeta_\eta\omega_\eta) + \omega_\eta^2(2\zeta_a\omega_a) + \frac{2\pi\rho b}{m}\omega_a^2U \\ &\quad - \frac{\pi\rho b^2}{I}(2\zeta_\eta\omega_\eta)U^2 \geq 0 \\ B_0 &= \omega_\eta^2\left(\omega_a^2 - \frac{\pi\rho b^2}{I}U^2\right) \geq 0 \\ R &= B_3B_2B_1 - B_3^2B_0 - B_1^2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

また限界風速の上限値は $|C(k')|=1/2$ として上と同様に求められ、この場合の条件式は

$$B_3 = 2\zeta_a\omega_a + 2\zeta_\eta\omega_\eta + \left(\frac{\pi\rho b}{m} + \frac{\pi\rho b^3}{4I}\right)U \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= \omega_\eta^2 + \omega_a^2 + 4\zeta_a\omega_a\zeta_\eta\omega_\eta + \left\{ 2\zeta_\eta\omega_\eta\left(\frac{\pi\rho b^3}{4I}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2\zeta_a\omega_a\left(\frac{\pi\rho b}{m}\right) \right\}U + \frac{\pi\rho b^2}{I}\left(\frac{\pi\rho b^2}{m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\right)U^2 \geq 0 \\ B_1 &= (2\zeta_\eta\omega_\eta)\omega_a^2 + (2\zeta_a\omega_a)\omega_\eta^2 + \frac{\pi\rho b}{m}\omega_a^2U \\ &\quad - \frac{\pi\rho b^2}{2I}(2\zeta_\eta\omega_\eta)U^2 \geq 0 \\ B_0 &= \omega_\eta^2\left(\omega_a^2 - \frac{\pi\rho b^2}{2I}U^2\right) \geq 0 \\ R &= B_3B_2B_1 - B_3^2B_0 - B_1^2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

のようになる。

式(7.2)を式(7.1)に代入してフラッター限界風速を求める場合式(7.3), (7.4)と同様5個の条件式が求められるが、このうち一般に最も重要なものは $R \geq 0$ であり、これより近似的にフラッター風速を求めれば、

$$\frac{U_{cr}}{b\omega_a} = \sqrt[3]{\left\{ \frac{1}{|C(k')|} \left(\frac{2\zeta_a + |A_2|}{\omega_a} \right) \right\} \left(\frac{m}{\rho b^2} \right) \left(\frac{I}{\rho b^4} \right) \left(1 - \frac{\omega_\eta^2}{\omega_a^2} \right)} \quad (7.5)$$

のようになる²⁵⁾。

式(7.5)で空気力係数が関係する項は $|C(k')|$ と $|A_2|/\omega_a$ であるが、 $|A_2|/\omega_a$ は $2\zeta_a$ との相対関係にあるので、いま $|C(k')|$ のみに注目すれば、一様流れのもとでのフラッターベルト数を ω 、換算ベルト数を k' 、フラッター限界風速を U_{cr} 、上限値を $U_{cr}^{(u)}$ 、下限値を $U_{cr}^{(l)}$ とするとき、近似的に、

$$U_{cr}^{(l)} \doteq U_{cr} \sqrt[3]{\frac{|C(k')|}{|C(0)|}}, \quad U_{cr}^{(u)} \doteq U_{cr} \sqrt[3]{\frac{|C(k')|}{|C(\infty)|}} \quad (7.6)$$

のようになる。いま $k'=0.2$ とおけば、 $|C(0)|=1$, $|C(\infty)|=1/2$ より、

$$U_{cr}^{(l)} \doteq 0.91 U_{cr}, \quad U_{cr}^{(u)} \doteq 1.14 U_{cr}$$

のように求められる。すなわち変動風による不安定化効

表-4

Bounds for Flexure-Torsion Flutter Critical Wind Velocity

Model	m (kgsec ² /m ²)	ζ_η	ω_η	I (kg sec ²)	ζ_a	ω_a	b (m)	ρ (kg sec ² /m ⁴)	$V_{cr}^{(l)}$ (m/sec)	$V_{cr}^{(u)}$ (m/sec)	V_{cr}^{exp} (m/sec)
Plate	0.5326	0.00487	4.86	0.01406	0.00005	6.89	0.10	0.1199	3.442	6.322	5.78
"	0.5326	0.00418	4.76	0.01406	0.00316	7.504	0.10	0.1202	3.413	6.666	6.55
"	0.5326	0.00439	4.76	0.01406	0.00364	5.467	0.10	0.1202	1.980	3.770	3.16
"	0.4473	0.00589	11.69	0.01631	0.00345	17.80	0.15	0.125	5.421	12.582	10.11
DT 70 H	0.5426	0.00584	10.60	0.01794	0.00341	17.06	0.15	0.125	5.776	13.220	8.87
"	0.5426	0.00605	10.60	0.02104	0.00280	18.85	0.15	0.125	6.549	15.271	11.15
"	0.5426	0.00598	10.55	0.02564	0.00442	20.74	0.15	0.125	9.156	19.126	14.43
"	0.5426	0.00670	10.52	0.03180	0.00307	22.44	0.15	0.125	9.646	20.887	17.55

$V_{cr}^{(l)}$: Lower bound of critical velocity of aerodynamic instability

$V_{cr}^{(u)}$: Upper bound of critical velocity of aerodynamic instability

V_{cr}^{exp} : experimentally obtained critical velocity

果のうち最も危険な場合は約 9% の限界風速の低下が、この場合、考えられ、一方安定化効果が最大となるときには限界風速は約 14% 上昇すると考えられる。これらはいずれも近似的なものであるが、このような限界風速の上下限値は乱れた流れの中での耐風特性を評価する上で有効なものと考えられる。従来行なった実験結果をもとに、式(7.3)および式(7.4)を用いて上下限値を求めた結果を示せば表-4 のようであり、一様風の場合はこの中間にあることを示している。

8. 亂れた流れの中の平板の耐風応答のスペクトル特性

これまで主として正弦的周期変動を行なう変動風による流体力ならびに応答特性について考察してきたが、風速の変動が全くランダムな定常確率過程であれば、応答ならびに外力についてのスペクトル解析によりその特性が明らかになるとと考えられる。

いま線形 2 自由度振動系としてみれば、式(7.1)が基礎方程式であるから、外力 L, M が全くランダムな事象で定常確率過程であれば、応答もまた定常確率過程である。したがって応答ならびに外力の Power Spectral Density を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\eta^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{\eta\eta}(\omega) d\omega \\ \overline{\varphi^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{\varphi\varphi}(\omega) d\omega \\ \overline{\eta(t)\varphi(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{\eta\varphi}(\omega) d\omega \\ \overline{L^2(t)} &= 2 m^2 \int_0^\infty S_{LL}(\omega) d\omega \\ \overline{M^2(t)} &= 2 I^2 \int_0^\infty S_{MM}(\omega) d\omega \\ \overline{L(t)M(t)} &= 2 mI \int_0^\infty S_{LM}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

したがって、応答の Power Spectral Density Function S_y と外力の Power Spectral Density Function S_x は

$$S_y = H(\omega) \cdot S_x(\omega) \cdot H^*(\omega) \quad (8.2)$$

のようになる。ここに $H(\omega)$ は式(4.3)で与えられる振動数応答関数であり、 $H^*(\omega)$ はその転置行列であり、 S_y, S_x は式(8.1)より次のように定義される。

$$S_y = \begin{bmatrix} S_{\eta\eta} & S_{\eta\varphi} \\ S_{\varphi\eta} & S_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad S_x = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{LM} \\ S_{ML} & S_{MM} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

式(8.3)を式(8.2)に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} S_{\eta\eta} &= |H_\eta|^2 S_{LL} + 2|H_\eta| \cdot |H_\alpha| \\ &\quad \cdot \cos(\theta_{\eta\eta} - \theta_{\eta\alpha}) S_{LM} + |H_\alpha|^2 S_{MM} \\ S_{\varphi\varphi} &= |\theta_\eta|^2 S_{LL} + 2|\theta_\eta| \cdot |\theta_\alpha| \\ &\quad \cdot \cos(\theta_{\alpha\eta} - \theta_{\alpha\alpha}) S_{ML} + |\theta_\alpha|^2 S_{MM} \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

をうる。

最も簡単な外力の場合として、迎え角 $\alpha = \text{一定}$ とすれ

ば、鉛直・水平方向の周期的変動風成分による揚力は式

(3.1) および式(3.5)より

$$L = 2\pi\rho b U \{ v_0 e^{i\nu t} S(k') + u_0 \alpha e^{i\nu t} T_0(k') \} \quad (8.5)$$

となる。変動風の鉛直・水平方向成分を $v(t), u(t)$ とし、その Power Spectral Density Functions を、

$$\left. \begin{aligned} \overline{u^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{uu}(\omega) d\omega \\ \overline{u(t)v(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{uv}(\omega) d\omega \\ \overline{v^2(t)} &= 2 \int_0^\infty S_{vv}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

とおけば、式(8.1), (8.5), (8.6)より

$$\left. \begin{aligned} S_{LL} &= \left(\frac{2\pi\rho b U}{m} \right)^2 \left\{ S^2 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{vv} + 2\alpha S \left(\frac{\omega b}{U} \right) \right. \\ &\quad \cdot T_0 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{uv} + \alpha^2 T_0^2 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{uu} \left. \right\} \\ S_{MM} &= \left(\frac{\pi\rho b^2 U}{I} \right)^2 \left\{ S^2 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{vv} + 2\alpha S \left(\frac{\omega b}{U} \right) \right. \\ &\quad \cdot T_0 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{uv} + \alpha^2 T_0^2 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{uu} \left. \right\} \\ S_{LM} &= S_{ML} = - \left(\frac{2\pi\rho b U}{m} \right) \left(\frac{\pi\rho b^2 U}{I} \right) \left\{ S^2 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{vv} \right. \\ &\quad + 2\alpha S \left(\frac{\omega b}{U} \right) T_0 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{uv} + \alpha^2 T_0 \left(\frac{\omega b}{U} \right) S_{uu} \left. \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

のようになる。

いま迎え角 $\alpha = 0$ であれば、式(8.7)より鉛直方向変動風成分のみとなるため、式(8.7)を式(8.4)に代入すれば応答の Power Spectral Density が求められるが、これは式(5.7)の結果と同一である。

したがって、変動風成分の Power Spectral Density, Cross Power Spectral Density と空力増幅関数などを知ることにより、平板の耐風応答——応答の Power Spectral Density——を求めることが可能となる。

9. 数値計算例

長大土木構造物の変動風に対する応答特性を知るためにには強風に対する Power Spectral Density を求めなければならないが、A.G. Davenport は水平方向風速成分のそれが

$$\frac{S_{uu}(n)}{U^2} = 2 K_r \frac{\left(1200 \frac{n}{U} \right)^2}{1 + \left(1200 \frac{n}{U} \right)^2} \quad (9.1)$$

であり、Panofsky, McCormick は鉛直方向風速成分のそれが

$$\frac{n S_{vv}(n)}{U^2} = 3 K_r \frac{\left(\frac{n z}{U} \right)^2}{1 + \frac{4 n z}{U}} \quad (9.2)$$

で表わされることを示している¹⁾。ただし K_r は地表 10 m における抵抗係数であり、 n は振動数 (cps), U は平均風速 (m/sec), z は地表からの高さである。

現実の構造物の自然風に対する応答解析では式(9.1), (9.2), あるいは観測結果による Power Spectral Density を考慮しなければならないが、いま一つ、長大つり橋のような場合、振動型に対する空間的補正も必要である。A.G. Davenport はこれを空間修正関数 (Joint Modes Acceptance) としているが、ここではとりあえず、空間的補正を考慮しない場合の 2, 3 の数値計算を示したい。

最も簡単な場合として、乱流状態の風速の自己相関関数 $R(\tau)$ が

$$R(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad \dots \dots \dots (9.3)$$

で与えられれば、この場合の乱れのスケール L_x は Taylor の仮説²⁾より

$$L_x = U \int_0^\infty R(\tau) d\tau = U \tau_0 \quad \dots \dots \dots (9.4)$$

のようになり、式(9.3)に対する Power Spectral Density は、式(9.4)を用いて、

$$S(n) = \frac{2 \tilde{v}^2}{L_x U} \frac{1}{\left(\frac{1}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{U}\right)^2} \quad \dots \dots \dots (9.5)$$

のようになる。ここに \tilde{v}^2 は分散である。式(9.5)より $S(n)$ の最大値は、

$$\frac{n}{U} = \frac{1}{2\pi L_x} \text{ または } \frac{nL_x}{U} = \frac{1}{2\pi} \quad \dots \dots \dots (9.6)$$

で生ずることになる²⁾。

いま一例として鉛直方向変動成分による 2 次元的平板の応答を考えると、その Power Spectral Density は式(8.4), (8.7) あるいは式(5.7) のようである。

$$\begin{aligned} S_{\eta\eta}(\omega) &= \tilde{Y}^2(\omega) U^2 \left| S\left(\frac{b\omega}{U}\right) \right|^2 S_{vv}(\omega) \\ S_{\varphi\varphi}(\omega) &= \tilde{\vartheta}^2(\omega) U^2 \left| S\left(\frac{b\omega}{U}\right) \right|^2 S_{vv}(\omega) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (9.7)$$

いま S_{vv} に式(9.5)を用い、Logarithmic Power Spectral Density の形で示せば、

$$\begin{aligned} \frac{\omega S_{vv}(\omega)}{\tilde{v}^2} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega L_x}{U} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L_x}{U} \right)^2} \\ &= \frac{sk}{\pi(s^2 + k^2)} \quad \dots \dots \dots (9.8) \end{aligned}$$

となる。ここに、

$$k = \omega b/U, \quad s = b/L_x \quad \dots \dots \dots (9.9)$$

である。

さて空力増幅関数は、この場合、Sears 関数であるが、これは次の近似式で示すことができる(図-9)²⁸⁾。

$$|S(k)|^2 = \frac{0.1811 + k}{0.1811 + (0.1811\pi + 1)k + 2\pi k^2} \quad \dots \dots \dots (9.10)$$

したがって応答の Logarithmic Power Spectral Density は

$$\begin{cases} \tilde{\eta}^2 = 2 U^2 \int_0^\infty \tilde{Y}^2(\omega) \left| S\left(\frac{b\omega}{U}\right) \right|^2 S_{vv}(\omega) d\omega \\ \tilde{\vartheta}^2 = 2 U^2 \int_0^\infty \tilde{\vartheta}^2(\omega) \left| S\left(\frac{b\omega}{U}\right) \right|^2 S_{vv}(\omega) d\omega \end{cases} \quad \dots \dots \dots (9.11)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\omega S_{\eta\eta}}{\tilde{\eta}^2} &= \frac{\omega \tilde{Y}^2(\omega) \left| S\left(\frac{b\omega}{U}\right) \right|^2 U^2 S_{vv}}{2 \int_0^\infty \tilde{Y}^2(\omega) \left| S\left(\frac{b\omega}{U}\right) \right|^2 U^2 S_{vv} d\omega} \\ &= \frac{\left[\frac{\tilde{Y}^2(\omega)(0.1811+k)sk}{\{0.1811+(0.1811\pi+1)k+2\pi k^2\} \cdot \pi(s^2+k^2)} \right]}{2 \int_0^\infty \frac{\tilde{Y}^2(\omega)(0.1811+k)skd\omega}{\{0.1811+(0.1811\pi+1)k+2\pi k^2\} \cdot \pi(s^2+k^2)\omega}} \\ \frac{\omega S_{\varphi\varphi}}{\tilde{\vartheta}^2} &= \frac{\left[\frac{\tilde{\vartheta}^2(\omega)(0.1811+k)sk}{\{0.1811+(0.1811\pi+1)k+2\pi k^2\} \cdot \pi(s^2+k^2)} \right]}{2 \int_0^\infty \frac{\tilde{\vartheta}^2(\omega)(0.1811+k)skd\omega}{\{0.1811+(0.1811\pi+1)k+2\pi k^2\} \cdot \pi(s^2+k^2)\omega}} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (9.12)$$

のように求められる。

さて、空力振動数応答関数は式(5.3)のようであり、これに式(4.3)を用いればよいが、空気力係数は Scanlan, Sabzevari によれば式(7.2)のようになる。この式で $C(k)$ は Theodorsen 関数であるが計算上 Jones の近似式を用いるのが簡便である²⁸⁾。すなわち

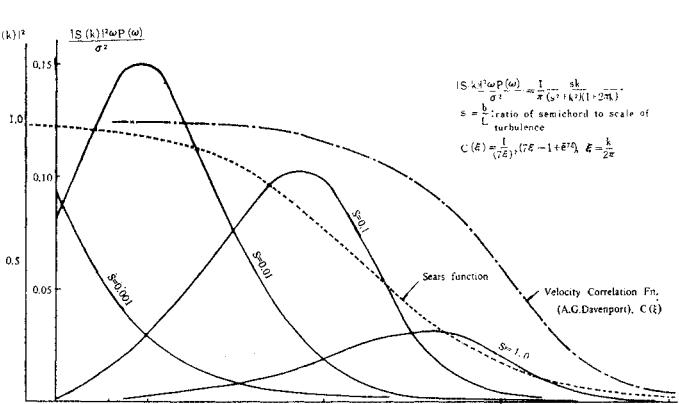


図-9

$$C(k) = 1 - \frac{0.165 k^2}{k^2 + (0.041)^2} - \frac{0.335 k^2}{k^2 + (0.32)^2} \\ - i \left\{ \frac{0.165 \times 0.041 k}{k^2 + (0.041)^2} + \frac{0.335 \times 0.32 k}{k^2 + (0.32)^2} \right\} \\ \dots \dots \dots \quad (9.13)$$

以上の関係式を用いて平板に対する応答計算を行なった結果は図-10に示すようである。図-9は流体力の Logarithmic Power Spectral Density を示し、図-10は空力振動数応答関数を各平均風速ごとに示すものである。応答の Power Spectral Density は、一般に、空力振動数応答関数の影響をうけ、その Power Spectral Density と、ピーク値近傍では、ほとんど同じ形状となる。なお、Severn 橋の諸元²⁹⁾を用い、平板としての空気力を A.G. Davenport の方法で代入し、振動数応答関数を求めれば、図-11の上図のようである。式(5.3)による空力振動数応答関数を示せば、図-11の下図に示すようで連成効果の相違が求められた。

これより次のことが言えるように考えられる。図-9に示すように、平板の場合、空力増幅関数は Sears 関数、あるいは Horlock 関数などで与えられ、Davenport の空力増幅関数とはかなり異なっている。Sears 関数を考慮した流体力の Logarithmic Power Spectral Density は、乱れのスケールが小さくなるほど平滑化されるが、振動数応答関数の最大値が換算振動数で 0.1~1.0

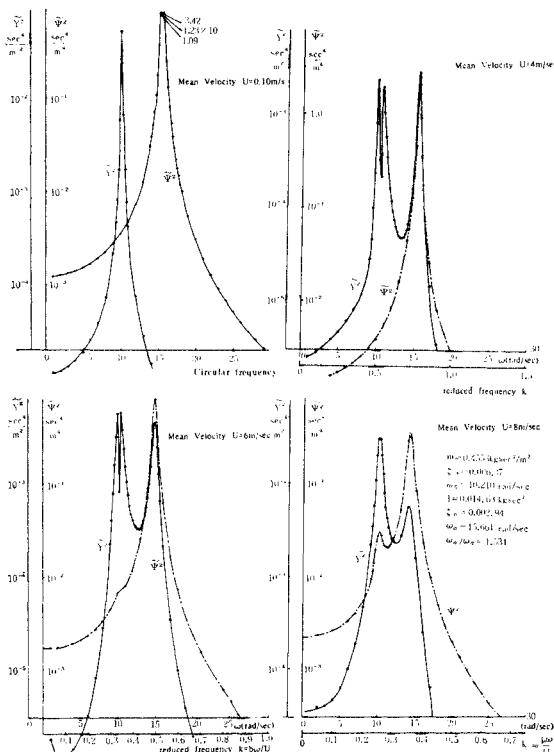


図-10

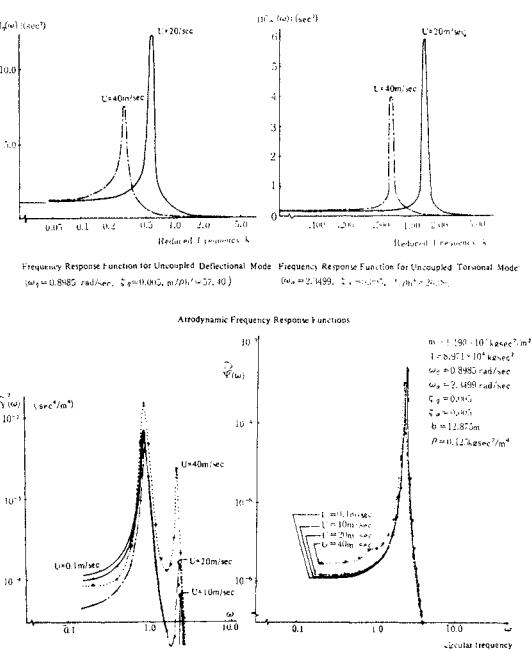


図-11

の範囲にあるため、乱れのスケールが減少しても応答値が増大する場合があり、定性的には乱れのスケールが構造物の寸法と等価な部分で最大の効果を与える場合が考えられる。空力増幅関数に関する Davenport の考察は、構造物の占有範囲のみを対象としているが、Karman-Sears の理論は流れの全領域にわたっての積分値を対象とするものであるから、両者の相違は必然的に表われるものと思われる。実際の構造物の空力増幅関数をどのように決定するかは今後の重要な問題であると思われる。

空力振動数応答関数は明らかにねじれとたわみが連成した形を示し、かつ平均風速が変化するにつれて連成の形も変化する。特に低風速ではねじれ振動のパワーはねじれの固有振動数近傍に集中するのに対し、たわみ振動はねじれとたわみ固有振動数の近傍できわめて近接した極大値をもっている。このことは乱れた流れの中での平板の応答で、ねじれ振動の振幅が比較的安定しているのに対し、たわみ振動のそれがかなり複雑な形となることを示すものと考えられる。

10. む す び

この研究は乱れた流れの中での平板の耐風応答特性について 2, 3 の基礎的考察を行なったものである。このテーマについては A.G. Davenport を始め多くの研究者による成果があるが、ここでは Karman-Sears 理論より考察を行なった。その結果、平板に関する空力増幅

関数が Sears 関数, Horlock 関数および一般化した Horlock 関数であることを示し, また空力振動数応答関数を定義し, これが解析上平板のねじれ・たわみ振動の連成効果を示す重要な物理量であることを示した。また変動風による平板のフラッター限界風速に関する安定化効果, 不安定化効果について定性的な評価を行ない, 限界風速の上下限値について考察した。これらの考察を基礎に風洞実験に用いた模型諸元による数値計算を行なつたが, これらより次のことが言えるように思われる。

(1) 変動風の乱れのスケールは構造物の寸法に匹敵する程度で最大の効果を与える場合があり, 大きなスケールあるいは小さなスケールとともにその影響をてい減するものと考えられる。

(2) 平板の場合, 亂れた流れの中ではねじれ振動は比較的安定な振幅を示すが, たわみ振動はかなり不規則なものとなる。これは空力弾性的な連成効果によるものと考えられる。

(3) 平板が相対迎え角をもち, これが時間的に変動する場合には変動風による効果として考えるのが妥当のようである。この場合水平方向成分に対する空力増幅関数は Horlock 関数の一般化した形が考えられ, 鉛直方向成分に対しては Sears 関数が考えられる。微小振動の範囲では後者の影響が卓越するが, 大振幅になれば前者の影響もこれを無視することはできないものとなると思われる。

(4) 空力増幅関数は, 平板の場合, 理論的に求めることが可能であるが, 一般の構造物を対象とする場合にはなお研究が必要である。

(5) 変動風に対する平板の耐風応答を知るために空力振動数応答関数が重要な特性を与えるものと考えられる。平均風速の増加とともに空力振動数応答関数は変化し, たわみ・ねじれモードの連成が顕著となる。なお, 迎え角がない場合の平板の曲げねじれフラッター限界風速は, 今回の実験では, 変動風により向上し, 変動風は安定化効果があるように考えられる。

(6) 今後の問題点としては次のようなことが考えられる。変動風に対して構造物がどのような応答を示すかを, 理論値と実験値で定量的に比較するためには変動風の空間特性を適確に把握する必要がある。また実際の構造物については空間修正関数 (Joint Modes Acceptance) を合理的に決定しなければならない。さらに構造物のこうした変動風に対する応答特性をどのように確率論的に評価するかが, 設計上の大きな課題であり, こうした研究が今後とも必要であると考えられる。

なお本研究は昭和 41・42 年度科学研究費および日本鉄道建設公団よりの委託研究費によって継続的に行なわ

れたもので, ここに関係方面的各位に感謝するものである。また本研究でご指導をうけた京都大学小西一郎教授, 実験計算で種々の援助をうけた京都大学大学院生松本勝, 浅沼秀弥の両氏に感謝の意を表するものである。

参考文献

- 1) Davenport, A.G. : A statistical approach to the treatment of wind loading on tall masts and suspension bridges, PhD Dissertation, Univ. of Bristol, March, 1961
- 2) Davenport, A.G. : The application of statistical concepts to the wind loading of structures, Inst. Civ. Eng., Proc., Vol. 19, 1961, pp. 449~472
- 3) Davenport, A.G. : The buffeting of a suspension bridge by storm winds, Jnl of Str. Div., ASCE, Vol. 88, ST 3, 1962, pp. 233~267
- 4) Davenport, A.G. : The causes of wind induced vibration, RILEM Sym. of the vibrations of structures, Theme 3 Supplementary Reports, 1963, pp. 445~474
- 5) Davenport, A.G. : Buffeting of structures by gusts, Proc. of the 1963 Int'l Sym. on the effects of winds on structures, London, 1965
- 6) Davenport, A.G. : The action of wind on suspension bridge, Proc. Int'l Conf. Suspension Bridges, Lisbon, 1966, pp. 79~100
- 7) Davenport A.G. : Gust loading factors, Jnl of Str. Div., ASCE, ST 3, 1967, pp. 11~34
- 8) Davenport, A.G. & Isyumov, N. : The application of the boundary layer wind tunnel to the application of wind loading, Int'l Research Seminar, Wind Effects on Buildings and Structures, Ottawa, 1967, pp. 201~230
- 9) Vellozzi, J. & Cohen, E. : Gust response factors, Jnl of the Str. Div., Proc. ASCE, ST 6, 1968, pp. 1295~1313
- 10) 小松定夫 : 長大吊橋の耐風設計法と安定性について, 土木学会論文集 No. 142, 1967, pp. 10~19
- 11) 笠口辰宏・坂田 弘・田中博喜 : 不規則気流による吊橋振動に関する研究, 構造物の耐風性に関する第1回シンポジウム論文集, 1970, pp. 227~234
- 12) Vickery, B.J. : Load fluctuations of bluff shapes in turbulent flow, Engineering Science Research Report BLWT-4-67, Univ. of Western Ontario, Canada, 1967
- 13) Vickery, B.J. : Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross-section in a smooth and in a turbulent stream, Jnl Fluid Mechanics, Vol. 25, Part 3, 1966, pp. 481~494
- 14) Novak, M. & Davenport, A.G. : Aeroelastic instability of prisms in turbulent flow, Jnl of Engineering Mechanics, Proc. ASCE, EM 1, 1970, pp. 17~39
- 15) Chiu, A.N.L. : Response of structures to time-varying wind loads, Jnl of Str. Div., Proc. ASCE, ST 2, 1970, pp. 381~391
- 16) von Karman, Th. & Sears, W.R. : Airfoil theory of non-uniform motion, Jnl of Aeron. Sci., Vol. 5, No. 10, 1938, pp. 379~390
- 17) Blackman, R.B. & Tukey, J.W. : The measurement of power spectra, Dover, 1958
- 18) Sears, W.R. : Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application, Jnl of Aeron. Sci., Vol. 8, No. 3, 1941, pp. 104~108

- 19) Kuethe, A.M. & Sears W.R. : The growth of circulation of an airfoil flying through a gust, Jnl of Aeron. Sci., Vol. 6, 1939, pp. 376~378
- 20) Kemp, N.H. : On the lift and circulation of airfoils in some unsteady flow problems, Jnl of Aeron. Sci., Vol. 19, 1952, pp. 713~714
- 21) Horlock, J.H. : Fluctuating lift forces on airfoil moving through transverse and chordwise gust, Jnl of Basic Engineering, Trans. ASME, 1968, pp. 494~500
- 22) Isaacs, R. : Airfoil theory for flows of variable velocity, Jnl of Aeron. Sci., Vol. 12, 1945, pp. 113~117
- 23) Scanlan, R.H. & Sabzevari, Ali : Suspension bridges flutter revisited, ASCE Str. Eng'g Conf./Seattle, Washington, May, 1967
- 24) Bendat, J.S. & Piersol, A.G. : Measurement and analysis of random data, J. Wiley, 1967, p. 110
- 25) 白石成人：平板状構造物の曲げねじれフリッター特性に関する基礎的考察, 土木学会論文報告集 No. 186, 1971
- 26) Batchelor G.K. : The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press, 1956, p. 35
- 27) Shiotani, M. : Structures of gusts in high winds, Interim report Part 4 to Japan Railway Construction Corporation, March, 1970
- 28) Fung, Y.C. : The theory of aeroelasticity, J. Wiley, 1955, pp. 187~193
- 29) Walshe, D.E. : A resume of the aerodynamic investigations for the Forth Road and Severn Bridges, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol. 37, 1967, pp. 87~108

付録：水平方向変動風成分に関する空力増幅関数（一般化された Horlock 関数の誘導）

Horlock 理論の一般化を行なうために弦長 2 の平板を考え、その中央点を原点とし、座標パラメーターを x 、時間を t 、束縛渦を $r_s(x)$ 、擬定常渦を $r_0(x, t)$ 、後流渦を $r(x, t)$ とすれば、平板に作用する揚力 L は

$$L = \rho \int_{-1}^1 u r_s(x) dx + \rho U \int_{-1}^1 r_0(x, t) dx - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 r_0(x, t) x dx + \rho U \int_{-1}^{\infty} \frac{r(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad \dots \quad (A.1)$$

のようになる^{16), 21)}。ここに ρ は空気密度、 u は水平方向風速の変動成分、 U は平均風速である。

いま相対迎え角を α とすれば、平板に直角な方向の速度に関する条件より

$$\int_{-1}^1 \frac{r_0(x, t)}{2\pi(x' - x)} dx' = -\alpha u \quad \dots \quad (A.2)$$

が求められる。いま式 (A.2) のもとで、Karman-Sears 理論^{16), 18)}より式 (A.1) を求めるために

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= 2 U \left\{ A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right\} \\ \alpha &= \varphi + \frac{1}{U} (\dot{\eta} + \dot{\varphi} x) \\ u &= u_0 \sin (\nu t - k' x) \\ x &= -\cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (A.3)$$

のようにおく、ここに θ は x に関する変換パラメー

ターであり、 A_0 、 A_n は未定係数、 φ は平板のねじれ変位、 η はたわみ変位、 ν は振動数、 k' は換算振動数 ($= \nu/U$) である。式 (A.3) を式 (A.2) に代入すれば

$$\begin{aligned} U \int_0^{\pi} A_0 d\theta &= u_0 \left(\varphi + \frac{\dot{\eta}}{U} \right) \left\{ \sin \nu t \int_0^{\pi} \cos(k' \cos \theta) d\theta \right. \\ &\quad + \cos \nu t \int_0^{\pi} \sin(k' \cos \theta) d\theta \left. \right\} \\ &- \frac{u_0}{U} \dot{\varphi} \left\{ \sin \nu t \int_0^{\pi} \cos \theta \cos(k' \cos \theta) d\theta \right. \\ &\quad + \cos \nu t \int_0^{\pi} \cos \theta \sin(k' \cos \theta) d\theta \left. \right\} \\ U \int_0^{\pi} A_n \cos^2 n\theta d\theta &= -u_0 \left(\varphi + \frac{\dot{\eta}}{U} \right) \left\{ \sin \nu t \int_0^{\pi} \cos n\theta \right. \\ &\quad \cdot \cos(k' \cos \theta) d\theta + \cos \nu t \int_0^{\pi} \cos n\theta \\ &\quad \cdot \sin(k' \cos \theta) d\theta \left. \right\} \\ &+ \frac{u_0}{U} \dot{\varphi} \left\{ \sin \nu t \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos(k' \cos \theta) d\theta \right. \\ &\quad + \cos \nu t \int_0^{\pi} \cos n\theta \sin(k' \cos \theta) d\theta \left. \right\} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{u_0}{U} \left(\varphi + \frac{\dot{\eta}}{U} \right) J_0(k') \sin \nu t - \frac{u_0}{U^2} \dot{\varphi} J_1(k') \cos \nu t \\ A_n &= -\frac{2 u_0}{U} \left(\varphi + \frac{\dot{\eta}}{U} \right) \left\{ J_n(k') \cos \frac{n\pi}{2} \sin \nu t \right. \\ &\quad + J_n(k') \sin \frac{n\pi}{2} \cos \nu t \left. \right\} \\ &- \frac{u_0}{U^2} \dot{\varphi} \left[\sin \nu t \left\{ J_{n+1}(k') \cos \frac{(n+1)\pi}{2} \right. \right. \\ &\quad + J_{n-1}(k') \cos \frac{(n-1)\pi}{2} \left. \right] \\ &\quad \left. \cdot \cos \nu t \left\{ J_{n+1}(k') \sin \frac{(n+1)\pi}{2} \right. \right. \\ &\quad + J_{n-1}(k') \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \left. \right] \quad \dots \quad (A.4) \end{aligned}$$

となり、これを式 (A.3) に代入すれば、

$$\begin{aligned} r_0(\theta, t) &= 2 u_0 \left(\varphi + \frac{\dot{\eta}}{U} \right) \left[\sin \nu t J_0(k') \cot \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \sin \nu t \cos \frac{n\pi}{2} J_n(k') \right\} \sin n\theta \left. \right] \\ &\quad + 2 \cos \nu t \sin \frac{n\pi}{2} J_n(k') \left\} \sin n\theta \right. \\ &\quad - \frac{2 u_0}{U} \dot{\varphi} \left[\cos \nu t J_1(k') \cot \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \sin \nu t \left(J_{n+1}(k') \cos \frac{(n+1)\pi}{2} \right. \right. \\ &\quad + J_{n-1}(k') \cos \frac{(n-1)\pi}{2} \left. \right) \left. \right] \\ &\quad + 2 \cos \nu t \left(J_{n+1}(k') \sin \frac{(n+1)\pi}{2} \right. \\ &\quad + J_{n-1}(k') \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \left. \right) \left\} \sin n\theta \right] \end{aligned}$$

をうる。いま式 (A.1) について

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \int_{-1}^1 u r_s(x) dx, \quad I_2 = \rho U \int_{-1}^1 r_o(x, t) dx \\ I_3 &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 r_o(x, t) x dx, \quad I_4 = \rho U \int_1^\infty \frac{r(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (A.5)$$

とおけば、Karman-Sears 理論より

$$I_4 = -I_2 \frac{K_0(ik')}{K_0(ik') + K_1(ik')}$$

である。ここに J_n は Bessel 関数、 K_n は変形 Bessel 関数であるので、Theodorsen 関数 $C(k')$ を用いれば、式 (A.1) は

$$L = I_1 + I_2 C(k') + I_3 \quad \dots \dots \dots \quad (A.6)$$

のようく表わされる。したがって I_1 , I_2 , I_3 を計算すれば、揚力 L が求められることになる。

(1) I_1 の計算

平板の場合、Glauert の公式²⁸⁾より、束縛渦 r_s は

$$r_s(x) = r_s(\theta) = 2U\varphi \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

であるので、これを式 (A.5) に用いれば次のようになる。

$$I_1 = 2\pi\rho U u_0 \varphi \{J_0(k') \sin \nu t + J_1(k') \cos \nu t\} \quad \dots \dots \dots \quad (A.7)$$

(2) I_2 の計算

J.H. Horlock²¹⁾ によれば

$$I_2 = 2\pi\rho U^2 \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$$

となるから、式 (A.4) より $n=1$, $n=0$ に対する A_n を求めれば、次のようなになる。

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi\rho U u_0 \left(\varphi + \frac{\dot{\eta}}{U} \right) \{J_0(k') \sin \nu t - J_1(k') \cos \nu t\} \\ &\quad - 2\pi\rho u_0 \dot{\varphi} \left\{ -\frac{1}{2} (J_0(k') - J_2(k')) \sin \nu t \right. \\ &\quad \left. + J_1(k') \cos \nu t \right\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (A.8)$$

(3) I_3 の計算

同様にして I_3 を計算すれば、次のように求められる。

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\pi\rho U \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \right\} \\ &= 2\pi\rho U u_0 \left[\left\{ \left(\varphi + \frac{\dot{\eta}}{U} \right) J_1(k') + \frac{\ddot{\varphi}}{U^2} \frac{J_2(k')}{k'} \right\} \cos \nu t \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\dot{\varphi}}{U} J_2(k') - \left(\frac{\dot{\varphi}}{U} - \frac{\ddot{\eta}}{U^2} \right) \frac{J_1(k')}{k'} \right\} \sin \nu t \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (A.9)$$

したがって、式 (A.7), (A.8), (A.9) を式 (A.6) に代入し、これらを整理すれば、非定常揚力 L は次のように求められる。

$$\begin{aligned} L &= 2\pi\rho U u_0 e^{i\nu t} \left[T_0(k') \varphi + T_1(k') \frac{\dot{\eta}}{U} + T_2(k') \frac{\dot{\varphi}}{U} \right. \\ &\quad \left. + T_3(k') \frac{\ddot{\varphi}}{U^2} + T_4(k') \frac{\ddot{\eta}}{U^2} \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (A.10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} T_0(k') &= J_0(k') \{1 + C(k')\} + iJ_1(k') \{2 - C(k')\} \\ T_1(k') &= J_0(k') C(k') + iJ_1(k') \{1 - C(k')\} = S(k') \\ T_2(k') &= \frac{1}{2} \{J_0(k') - J_2(k')\} \{1 - C(k')\} \\ &\quad + iJ_1(k') C(k') \\ T_3(k') &= -i \frac{J_2(k')}{k'} = -i \frac{J_1(k') + J_3(k')}{4} \\ T_4(k') &= \frac{J_1(k')}{k'} = \frac{1}{2} \{J_0(k') + J_2(k')\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (A.11)$$

である。

さて、式 (A.10) は弦長 2 の平板に対するものであるから、弦長 $2b$ に対しては次のように表わされる。

$$\begin{aligned} L &= 2\pi\rho b U u_0 e^{i\nu t} \left[T_0(k) \varphi + T_1(k) \frac{\dot{\eta}}{U} \right. \\ &\quad \left. + T_2(k) \frac{b\dot{\varphi}}{U} + T_3(k) \frac{b^2\ddot{\varphi}}{U^2} + T_4(k) \frac{b\ddot{\eta}}{U^2} \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (A.12)$$

$$k = \frac{b\nu}{U}$$

(1971.3.10・受付)