

積分方程式による任意形状、多数空洞周辺応力の解析

APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION METHOD TO THE DETERMINATION
OF STATIC AND STEADY-STATE DYNAMIC STRESSES AROUND MANY
CAVITIES OF ARBITRARY SHAPE

丹羽義次*・小林昭一**・横田和男***
By Yoshiji Niwa, Shoichi Kobayashi and Kazuo Yokota

1. はじめに

近年、地下発電所やトンネル等の地中構造物がますます巨大化、長大化する傾向にあり、それについてこれら空洞周辺の応力状態をより適確に把握することが必須となってきた。地盤や岩盤は、構成物質の特性ならびに地質学的な種々の不連続性のために、きわめて複雑な挙動を呈するが、巨視的に見れば第1近似として弾性体と見なせる場合も多い。また、空洞周辺の全体的な挙動を把握する場合には、地盤や岩盤を弾性体と考えた第1近似解を求めるだけで十分な場合も多いであろう。したがって、この種の問題は、モデル化して弾性体内の空洞周辺の応力状態を解明することに帰着されよう。もちろん、わが国のように地震の多い国においては、静的な応力状態のみならず動的な挙動をも解明することが必須であることは言うまでもない。

弾性体内的空洞周辺の応力状態の解析は、静的な問題に関しては応力集中の問題として古くから数多くの理論的ならびに実験的研究が行なわれてきた。なかでも、2次元問題に関しては、Muskhelishviliらの発展させた等角写像を用いる方法¹⁾は有効であり、広く適用されている。しかしながら、この方法で取り扱える問題は静的な2次元問題だけに、しかも適當な写像関数が見出される場合だけに限られている。

一方、動的な応力集中の問題に関しては、最近になって実験的な方法も試みられているが、任意の波動を発生させることができ困難という難点があり、解析は特殊な例に限られている。また、理論的にも最近までは有効な解析方法がなく、解析された例はきわめて少なく、また空洞の形状も限られている。一般に動的な問題において、定常

状態を問題とするとときには、後述のように Hermholtz 方程式の解が必要となってくる。従来用いられてきた方法は、固有関数で展開した級数解を求めるものであり、そのためには、考えている座標系での Hermholtz の一般解が必要である。しかし、そのような一般解が見つかっているのは、円筒座標とか楕円筒座標など、わずかな座標系に対してのみである。したがって、この方法を任意形状の空洞の場合に適用することはできない。

最近になって、弾性学の境界値問題を積分方程式に帰着させて解く方法が Kupraze²⁾ をはじめ 2, 3 の研究者^{3)~10)}によって試みられ、注目を浴びるようになった。この方法によれば、Muskhelishvili の方法では取り扱うことのできなかった3次元問題や、動的问题も取り扱えるうえ、固有関数展開による級数解法では不可能であった任意形状の空洞も取り扱うことができる利点がある。積分方程式による解法は線形問題に対してはきわめて一般的であり、今後広範囲の問題に適用されることが期待される。

本論文は、多連結かつ任意形状の空洞周辺の応力状態を積分方程式による解法を用いて解析することを意図したものであり、静的な問題ばかりでなく動的な問題にも重点を置いて取り扱った。

2.~7. では、弾性学の境界値問題を積分方程式に帰着させる一般的方法ならびに関連した重要事項を略述し、8. では具体的な問題の取り扱いならびに数値計算上の手法を述べた。9. では 2, 3 の具体的な静的な問題に適用した例を示し、10. では同様な問題の動的な場合を取り扱ってみた。

2. 弾性学の基礎方程式

等方、均質な完全線形弾性体の運動方程式、構成式ならびに変位とひずみの関係は、カルテシアン・テンソルを用いて書き表わすと、次のように書ける。

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 京都大学助教授 同

*** 正会員 工修 新東京国際空港公團

$$\bar{\tau}_{ij,j} + \bar{f}_i = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2}$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \bar{\epsilon}_{kk} + 2 \mu \bar{\epsilon}_{ij}$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$$

ここに、 $\bar{\tau}_{ij}$, $\bar{\epsilon}_{ij}$, \bar{u}_i , \bar{f}_i および δ_{ij} は、それぞれ応力テンソル、ひずみテンソル、変位ベクトル、物体力ベクトルの各成分および Kronecker のデルタを表わし、 λ , μ は Lamé の定数を、 ρ は密度を表わすものとする。また、添字に関しては総和規約を適用するものとする。第 2, 第 3 式を第 1 式に代入すれば、変位で表わした基礎方程式 Navier-Cauchy の式が次のように求められる。

$$(\lambda + \mu) \bar{u}_{j,j} + \mu \bar{u}_{i,jj} + \bar{f}_i = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2} \dots \dots \dots (2.1)$$

いま、物体力 \bar{f}_i が次のような関数

$$\bar{f}_i(x, t) = \bar{f}_i^{(1)}(x) \cos \omega t + \bar{f}_i^{(2)}(x) \sin \omega t$$

で与えられるとすると、 ω が対象とする物体の固有振動数と異なっておれば、変位 $\bar{u}_i(x, t)$ もまた、過渡状態を除いて次のように書ける。

$$\bar{u}_i(x, t) = \bar{u}_i^{(1)}(x) \cos \omega t + \bar{u}_i^{(2)}(x) \sin \omega t$$

したがって、定常状態を問題とするときには、 $\bar{u}_i(x, t)$ を求める問題は、時間 t と無関係な場所 x だけの関数 $\bar{u}_i^{(1)}(x)$, $\bar{u}_i^{(2)}(x)$ だけを求めればよいことになる。

いま、新しく複素量

$u_i = \bar{u}_i^{(1)}(x) + i \bar{u}_i^{(2)}(x)$, $f_i = \bar{f}_i^{(1)}(x) + i \bar{f}_i^{(2)}(x)$ を導入すれば、 $\bar{u}_i(x, t)$, $\bar{f}_i(x, t)$ は次のようにも書き表わせる。

$$\bar{u}_i(x, t) = \operatorname{Re}\{u_i(x) e^{-i\omega t}\}$$

$$\bar{f}_i(x, t) = \operatorname{Re}\{f_i(x) e^{-i\omega t}\}$$

ここに、 Re は実部を取るという意味である。

上式を式 (2.1) に代入すれば、

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{j,j} + c_2^2 u_{i,jj} + \omega^2 u_i = - \frac{f_i}{\rho}$$

を得る。ここに、 $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$ である。

この式はベクトル表示すれば、

$$(c_1^2 - c_2^2) \nabla \cdot \mathbf{u} + c_2^2 \nabla^2 \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} = - \frac{\mathbf{f}}{\rho}$$

となる。ここに、 $\nabla = \partial/\partial x_1 \mathbf{i} + \partial/\partial x_2 \mathbf{j} + \partial/\partial x_3 \mathbf{k}$ を、 \cdot は内積を示す。

ここで、新しく演算子

$$\mathcal{A}^* = (c_1^2 - c_2^2) \nabla \nabla \cdot + c_2^2 \nabla^2$$

を導入すれば、上式はさらに簡単に書けて、次のようになる。

$$(\mathcal{A}^* + \omega^2) \mathbf{u} = - \frac{\mathbf{f}}{\rho}$$

物体力を考えなくてよい場合には、

$$(\mathcal{A}^* + \omega^2) \mathbf{u} = 0 \dots \dots \dots (2.2)$$

となる。これがこれから対象する問題の基礎方程式であ

る。とくに、静的な問題の場合には、さらに簡単になって、

$$\mathcal{A}^* \mathbf{u} = - \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \text{ あるいは } \mathcal{A}^* \mathbf{u} = 0$$

となる。

3. 境界条件

弾性問題の境界値問題は、境界条件の種類により、次のように分類される。

(1) 第 1 種境界値問題

図-1 に示すように、なめらかな曲面 S で囲まれた有界な領域を D_i , その補完領域を D_e とすれば、第 1 種境界値問題は S 上で変位ベクトル \mathbf{u} が与えられた問題である。この境界値問題は、対象とする領域により、さらに 2 つに分けられる。

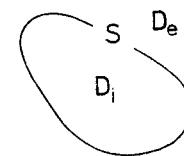


図-1 境界面と内部および外部領域

a) 内部第 1 種境界値問題

これを数式で表わせば、

$$(\mathcal{A}^* + \omega^2) \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in D_i$$

$$\{\mathbf{u}(y)\}_i = \mathbf{g}(y), \quad y \in S$$

となる。ここに、 $\{\cdot\}_i$ は内側から近づいた極限値を示すものとする。

b) 外部第 1 種境界値問題

$$(\mathcal{A}^* + \omega^2) \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in D_e$$

$$\{\mathbf{u}(y)\}_e = \mathbf{g}(y), \quad y \in S$$

ここに、 $\{\cdot\}_e$ は外側から近づいた極限値を示す。

(2) 第 2 種境界値問題

S 上で応力ベクトルの与えられたものが第 2 種境界値問題である。いま応力ベクトルを与える微分演算子として T^n を次のように定義する。

$$T^n \mathbf{u} = 2 \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u})$$

ここで、 \mathbf{n} は外向き法線ベクトルである。 $T^n \mathbf{u}$ の j 要素を $T_j^n \mathbf{u}$ と記せば、

$$T_j^n \mathbf{u} = \lambda n_j u_{k,k} + \mu n_i (u_{i,j} + u_{j,i})$$

で与えられる。

第 2 種境界値問題も、第 1 種の場合と同様に、内部問題および外部問題に分けられる。

a) 内部第 2 種境界値問題

$$(\mathcal{A}^* + \omega^2) \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in D_i$$

$$\{T^n \mathbf{u}(y)\}_i = \mathbf{g}(y), \quad y \in S$$

b) 外部第 2 種境界値問題

$$(\mathcal{A}^* + \omega^2)\mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in D_e$$

$$\{T^n \mathbf{u}(y)\}_e = \mathbf{g}(y), \quad y \in S$$

さらに、(1) および (2) が部分的に、あるいは、同一 S 上で適切な成分が与えられる問題は、第 3 種境界値問題と呼ばれ、同様に内部および外部問題が考えられる。

とくに外部問題を取り扱うときには、式 (2.2) および上述の境界条件だけからは、 $\mathbf{u}(x)$ の解は一意的に求められず、 $\mathbf{u}(x)$ の無限遠点でのふるまいをも考慮しなければならない。 $\mathbf{u}(x)$ の条件としては、①無限遠点すべての変位および応力成分は有界であり、②荷重の作用点から十分離れた点では、擾乱は外向きの波から成るという放射条件の 2 つが必要である。以後、外部問題を対象とするときには、 $\mathbf{u}(x)$ は常にこの 2 つの条件も満足しているものとする。

4. Betti の公式

S を区分的になめらかな曲面とし、 \mathbf{u}, \mathbf{v} を閉領域 $D_i + S$ で、2 階の導関数まで連続な関数とすれば、Gauss の発散定理を用いることにより、次式が成立することが容易に証明される。

$$\int_{D_i} \epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dV = \int_S (\mathbf{u} \cdot T^n \mathbf{v}) dS - \int_{D_i} (\mathbf{u} \cdot \mathcal{A}^* \mathbf{v}) dV \quad \dots \quad (4.1)$$

ここに、 $\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda u_{i,i} v_{j,j} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ を表わすものとする。 $\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ であるので \mathbf{u} と \mathbf{v} を交換して差をつくれば、

$$\int_{D_i} (\mathbf{u} \cdot \mathcal{A}^* \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathcal{A}^* \mathbf{u}) dV = \int_S (\mathbf{u} \cdot T^n \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot T^n \mathbf{u}) dS \quad \dots \quad (4.2)$$

を得ることができる。これらの式は、いずれも Betti の公式（第 1 および第 3）と呼ばれているものであり、以下の理論において重要な役割を演じるものである。

5. 基本特異解

次の方程式を満足する関数 $\boldsymbol{\Gamma}(x; y)$ を弾性方程式の基本特異解といいう。

$$(\mathcal{A}^* + \omega^2) \boldsymbol{\Gamma}(x; y) = -\delta(x-y) \mathbf{I}$$

ここに、 \mathbf{I} は単位行列を表わす。 $\boldsymbol{\Gamma}$ は Green の行列とも呼ばれているものである。

$\boldsymbol{\Gamma}$ の列ベクトルを $\boldsymbol{\Gamma}^{(k)}$ とすれば $\boldsymbol{\Gamma}^{(k)}$ の物理的意味は、点 y に x_k 方向に単位の集中力が働いた時の点 x における変位ベクトルである。 $\boldsymbol{\Gamma}^{(k)}$ の j 要素を Γ_{jk} で表わせば、

$$\Gamma_{jk} = A(\psi \delta_{jk} - x r_{,j} r_{,k})$$

となる。ここに、 A, ψ, x などは次のように与えられ

る。

a) 3 次元の場合

$$A = \frac{1}{4\pi\mu}$$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{e^{i\xi_2 r}}{r} + \left\{ \frac{i}{\xi_2 r} - \frac{1}{(\xi_2 r)^2} \right\} \frac{e^{i\xi_2 r}}{r} - \frac{\xi_1^2}{\xi_2^2} \left\{ \frac{i}{\xi_1 r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\xi_1 r)^2} \right\} \frac{e^{i\xi_1 r}}{r} \\ x &= - \left\{ 1 + \frac{3i}{\xi_2 r} - \frac{3}{(\xi_2 r)^2} \right\} \frac{e^{i\xi_2 r}}{r} + \frac{\xi_1^2}{\xi_2^2} \left\{ 1 + \frac{3i}{\xi_1 r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{(\xi_1 r)^2} \right\} \frac{e^{i\xi_1 r}}{r} \end{aligned}$$

b) 2 次元の場合

$$A = \frac{i}{4\mu}$$

$$\psi = H_0^{(1)}(\xi_2 r) - \frac{1}{\xi_2 r} H_1^{(1)}(\xi_2 r)$$

$$x = -H_2^{(1)}(\xi_2 r) + \frac{\xi_1^2}{\xi_2^2} H_2^{(1)}(\xi_1 r)$$

ここに、 $\xi_1 = \omega/c_1$, $\xi_2 = \omega/c_2$, $r = \sqrt{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}$, $H_n^{(1)}(\xi_i r)$ は、 n 次の第 1 種 Hankel 関数、 $r_{,j} = \partial r / \partial x_j$ である。

なお、静的な場合の基本特異解を $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}$ 、すなわち、

$$d^* \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(x; y) = -\delta(x-y) \mathbf{I}$$

とすると、その jk 成分は

$$\tilde{\Gamma}_{jk} = \hat{A} \{ \dot{\psi} \delta_{jk} - \dot{x} r_{,j} r_{,k} \}$$

で与えられる。ここに、 $\hat{A}, \dot{\psi}, \dot{x}$ は次のように与えられる。

c) 3 次元の場合

$$\hat{A} = \frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)\mu}, \quad \dot{\psi} = (\lambda+3\mu) \frac{1}{r}$$

$$\dot{x} = -(\lambda+\mu) \frac{1}{r}$$

d) 2 次元の場合

$$\hat{A} = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)\mu}, \quad \dot{\psi} = (\lambda+3\mu) \ln r, \quad \dot{x} = \lambda + \mu$$

次に、 $T^n \boldsymbol{\Gamma}^k(x; y)$ というベクトルを考える。 $\boldsymbol{\Gamma}^k(x; y)$ は x と y の関数であるので、演算子 T^n を作用させる変数を明らかにするため、以後は添字の n を省略し、新しい添字として、 x あるいは y にこの演算子を作用させる意味で $T^x \boldsymbol{\Gamma}^k(x; y)$ あるいは $T^y \boldsymbol{\Gamma}^k(x; y)$ という具合に用いることにする。

いま、 $T^x \boldsymbol{\Gamma}^k(x; y)$ を列ベクトルとする行列 $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_I$ を考えて、 $\tilde{\Gamma}_{Ijk}$ を k 番目の列ベクトルの j 要素とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{Ijk} &= \mu A \left[\left\{ \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k \right) + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,k} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k \right) + 2(n_j r_{,k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n_{j,k} r \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2r_{,k}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n} + \alpha\frac{\lambda}{\mu}n_{j,k}r_{,k}\Bigg\}\frac{x}{r} \\ & -\left\{2r_{,k}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\lambda}{\mu}r_{,k}n_j\right\}\frac{dx}{dr} \end{aligned}$$

となる。ここに, $r_{,j} = \partial r / \partial x_j$ であり, $\partial r / \partial n$ の微分は点 x について行なうものとする。なお, α は 3 次元の場合には 2, 2 次元の場合には 1 とする。

また, $\tilde{\Gamma}_I$ の x と y , 行と列とを交換した $\tilde{\Gamma}_I$ の転置行列 Γ_I を考えて, $\Gamma_I^{(k)}$ を Γ_I の列ベクトル, Γ_{Ijk} をその j 要素とすれば次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{Ijk} = \mu A & \left[\left\{ \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,kn}n_j \right) + \frac{\lambda}{\mu} n_k r_{,j} \right\} \frac{d\psi}{dr} \right. \\ & - \left\{ \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,kn}n_j \right) + 2(n_k r_{,j} \right. \\ & \left. \left. - 2r_{,j}r_{,k}\frac{\partial r}{\partial n} \right) + \alpha\frac{\lambda}{\mu}n_{k,j}r_{,k} \right\} \frac{x}{r} \\ & \left. - \left\{ 2r_{,k}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\lambda}{\mu}r_{,j}n_k \right\} \frac{dx}{dr} \right] \end{aligned}$$

ここに, $r_{,j} = \partial r / \partial y_j$ であり, $\partial r / \partial n$ の微分は点 y に関する行なうものとする。 $\Gamma_I^{(k)}$ は x に関して方程式 (2.2) を満足し, $x=y$ で特異性を示すので, これは式 (2.2) の第 2 の基本特異解と呼ばれている。

6. 一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャル

4. で述べた Betti の公式 (4.1) に, \mathbf{u} の代りに方程式 (2.2) を満足する関数 \mathbf{u} を, また \mathbf{v} の代りに $\Gamma^k(x; y)$ を代入する。 $\Gamma^k(x; y)$ は, 点 x と点 y が一致するときに無限大になる特異性を示すので, y の位置により, 次の 3 つの場合にわけることができる。

(1) y が D_i の外にあるとき

$\mathbf{u}(x)$ も $\Gamma^k(x; y)$ もともに D_i 内部で方程式 (2.2) を満足するので, 式 (4.1) の左辺は 0 になる。したがって,

$$\int_S \{\Gamma^k(x; y) \cdot T^x \mathbf{u}(x) \\ - T^x \Gamma^k(x; y) \cdot \mathbf{u}(x)\} dS_x = 0$$

(2) y が D_i の内にあるとき

領域 D_i から, y を中心とする半径 ϵ の小さな球 $\tau(y; \epsilon)$ を切り取り, 残った部分に Betti の公式を適用したのち, $\epsilon \rightarrow 0$ という極限操作を行なうと, 次のようになる。

$$\begin{aligned} u_k(y) = \int_S & \{\Gamma^k(x; y) \cdot T^x \mathbf{u}(x) \\ & - T^x \Gamma^k(x; y) \cdot \mathbf{u}(x)\} dS_x \end{aligned}$$

(3) y が S 上にあるとき

(2) と同様に考えればよいが, この場合には半径 ϵ の小さな球 $\tau(y; \epsilon)$ の代りに, 半球を取り除くと考えなければならない。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_k(y) = & \int_S \{\Gamma^k(x; y) \cdot T^x \mathbf{u}(x) \\ & - T^x \Gamma^k(x; y) \cdot \mathbf{u}(x)\} dS_x \end{aligned}$$

となる。

さて, A を a_{ij} を成分とする行列, φ を φ_j を成分とするベクトルとすれば,

$$A \cdot \varphi = a_{ij} \varphi_j, \quad \varphi \cdot A = a_{ij} \varphi_i$$

であるので, Γ_{kj} の k と j に関する対称性と x と y に関する対称性を考慮して, 上述の結果を, x と y を入れかえてまとめて書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta(x) \mathbf{u}(x) = & \int_S \{\Gamma(x; y) \cdot T^n \mathbf{u}(y) \\ & - \Gamma_I(x; y) \cdot \mathbf{u}(y)\} dS_y \dots\dots (6.1) \end{aligned}$$

ここに, $\delta(x)$ は

$$\begin{aligned} \delta(x) = & 1 \quad x \in D_i \\ = & \frac{1}{2} \quad x \in S \\ = & 0 \quad x \notin D_i \end{aligned}$$

n の方向として, 考える領域の外向き法線方向を取れば, 式 (6.1) は $\mathbf{u}(x)$ の無限遠点の有界条件と放射条件を満たしているので, 外部領域を取り扱うときにも適用できる。式 (6.1) の右辺第 1 項は密度 $T^n \mathbf{u}(y)$ による一重層ポテンシャル, 第 2 項は密度 $\mathbf{u}(y)$ による二重層ポテンシャルと呼ばれているものである。この一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャルは次のような性質を有している。

a) 密度 $\varphi(y)$ が連続なとき, 一重層ポテンシャル

$$\mathbf{u}_I(x) = \int_S \Gamma(x; y) \cdot \varphi(y) dS_y$$

は全空間で連続である。

b) 密度 $\varphi(y)$ が Lipschitz の条件を満足するとき, 一重層ポテンシャルに演算子 T^n を作用させた関数は, 次の極限値をもつ。

$$\begin{aligned} \{T^n \mathbf{u}_I(x_0)\}_i &= \frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int_S \tilde{\Gamma}_I(x_0; y) \cdot \varphi(y) dS_y \\ \{T^n \mathbf{u}_I(x_0)\}_e &= -\frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int_S \tilde{\Gamma}_I(x_0; y) \\ & \quad \cdot \varphi(y) dS_y \\ & \quad x_0, y \in S \end{aligned}$$

c) 密度 $\varphi(y)$ が Lipschitz の条件を満足するとき, 二重層ポテンシャル

$$\mathbf{u}_{II}(x) = \int_S \Gamma_I(x; y) \cdot \varphi(y) dS_y$$

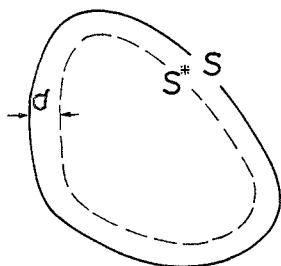


図-2 境界面と補助境界面

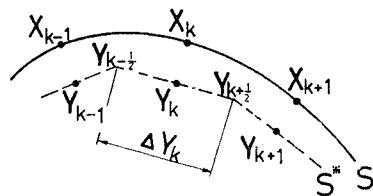


図-3 補助境界面の多角形近似

論文では Oliveira⁹⁾にしたがって次のような手法を考えた。図-2 に示されるような外部境界値問題において、境界面 S 上での密度 $\varphi(y)$ を求める代りに、これより δ だけ離れた補助境界面 S^* を考え、この曲面上に分布する新しい補助密度 $\varphi(y)$ により生じる応力が S 面上での境界条件を満たすように、適当な補助密度を見出す問題に変換しよう。こうすると、これより求められる解はもとの問題の解となっているはずである。

さて、このように考えた積分方程式を解く具体的な手法は、実際には数値積分法によらざるを得ない。ここでは、図-3 のように上述の補助境界面 S^* を n 多角形で近似し、その多角形の辺上では密度 $\varphi(y)$ は一定であると仮定して、積分方程式 (7.2) を次のような連立一次方程式に置き換える方法を用いた。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{11}(x_e, y_k) \varphi_1(y_k) + \sum_{k=1}^n a_{12}(x_e, y_k) \varphi_2(y_k) \\ = g_1(x_e) \\ \sum_{k=1}^n a_{21}(x_e, y_k) \varphi_1(y_k) + \sum_{k=1}^n a_{22}(x_e, y_k) \varphi_2(y_k) \\ = g_2(x_e) \end{aligned} \quad (e=1, 2, \dots, n)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_{ij}(x_e, y_k) &= \tilde{I}_{ij}(x_e, y_k) \times \Delta y_k \\ \Delta y_k &= y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。 \tilde{I}_{ij} は 5. で示したように与えられており、 $g_i(x_e)$ も既知であるので、この n 元一次連立方程式を解いて密度 $\varphi_i(y_k)$ を求めることができる。 $n \rightarrow \infty$ にすれば、積分方程式 (7.2) の解になることは Oliveira⁹⁾ により証明されている。

9. 空洞周辺応力の解析例（静的な場合）

(1) 一様応力場内の円孔周辺の応力分布

積分方程式による解法の精度を検証する目的で、一様引張応力場内の円孔周辺の応力分布を求めた。計算に際しては、平面ひずみ状態にあるものと仮定し（以下の解析例においても、特に断わらない限り平面ひずみ状態を仮定する）、図-4 のように境界（補助境界）を 24 点により等分割した。得られた結果を表-1 に示す。 δ の値が大きくなるほど精度がよくなっていることがわかる。しかしながら、 δ をあまり大きく取ると、連立方程式が正則でなくなるので注意が必要である。なお、密度 φ が多角形辺上で線形に分布すると仮定すれば、解の精度はさらによくなる。計算所要時間は、FACOM 230-60 で約 12 秒であった。

(2) 一様応力場内の馬蹄型空洞周辺の応力分布

空洞形状と補助境界ならびに分割方法を 図-5 に示す。

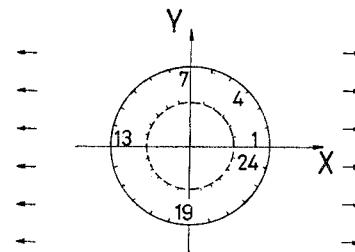


図-4 一様引張応力場内の円孔とその補助境界の分割

表-1 補助境界面の位置と解析精度

分割点	$\delta = 0.2\alpha$	$\delta = 0.5\alpha$	正解
1	-1.19	-1.00	-1.000
2	-0.895	-0.732	-0.732
3	-0.102	0.000	0.000
4	0.980	1.00	1.000
5	2.06	2.00	2.000
6	2.85	2.73	2.732
7	3.15	3.00	3.000

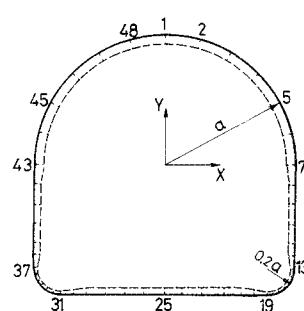


図-5 一様引張応力場内の馬蹄形空洞とその補助境界の分割

。壁面上の応力分布を図-6に示す。上部円弧部の応力分布は円孔の場合とほぼ同じであり(図-8の $\lambda=5.0$ を比較すれば容易にわかる), 底部偶角部には大きな応力集中が現われることがわかる。なお、計算所要時間は

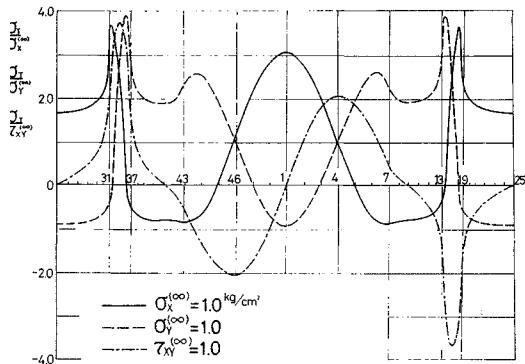


図-6 馬蹄形空洞壁面上の主応力分布(平面ひずみ)

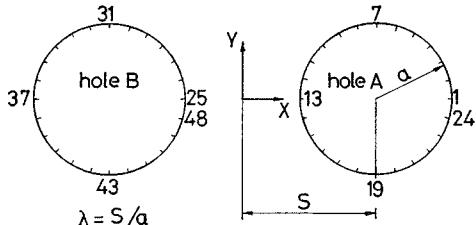


図-7 一様引張応力場内の2円孔とその境界の分割

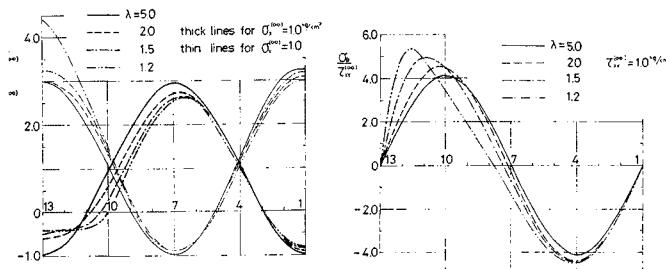


図-8 円孔壁面上の主応力分布(平面ひずみ)

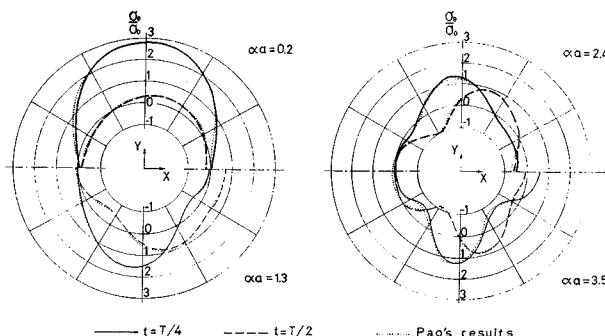


図-9 円孔壁面上の動的主応力分布(平面応力, ν=0.35, σ_0 は入力波の最大応力値, T は波の周期)

約60秒であった。

(3) 一様応力場内の2円孔周辺の応力分布

多連結領域に適用した例として、図-7に示すような2円孔周辺の応力分布を求めてみた。この場合には、 $\delta=0.1\alpha$ とし、多角形上で密度 φ が線形に変化すると考えた。結果を図-8に示す。当然予想されるように、円孔が接近すれば内側の円孔周辺上での応力集中は大きくなる。円孔が離れば、単一円孔の場合に近づく。なお、計算所要時間は約60秒であった。

10. 空洞周辺応力の解析例(動的な場合)

(1) 円孔周辺の応力分布

動的な問題に適用した場合の精度を検証する意味で、縦波平面波

$$u_1^{(i)} = A e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c_1} = \frac{2\pi}{l}$$

が、 x の負の方向から入射している場合を考える。ここに、 α は波数、 ω は円振動数、 l は波長である。幸にして、この問題に関しては、Paoの級数展開法による解^[13]がある(彼は、入射波として、スカラー・ポテンシャルを考えているが、本質的な差はない)。この問題ではPaoの解と比較する意味で平面応力状態を仮定した。計算に

は、 $\delta=0.5\alpha$ とし、円孔を24点で等分割した。結果は図-9に示す。実線および破線は、それぞれ波の山と節とがちょうど円孔の中心と一致する場合の壁面上の応力である。Paoの結果とよく一致している。 α/α の大きいほど、すなわち、波長の短いほど、応力分布は不規則になり、また最大応力集中は減少する。波長が長くなれば、静的な解に近づく。なお、本問題の解と静的な問題の解とを比較する場合には、この場合には2軸応力状態になっていることに注意されたい。計算時間は約40秒であった。

(2) 馬蹄型空洞周辺の応力分布

9.(2)で扱った馬蹄型空洞に、平面波が入射した場合の結果を図-10に示す。実線および破線は、それぞれ波の節および山がちょうど座標原点に一致する場合の壁面上の応力である。この場合には、平面ひずみ状態にあるものとし、Poisson比は0.2、境界の分割数は静的な場合と同様にした。波長の長い場合の結果は静的な場合の結果

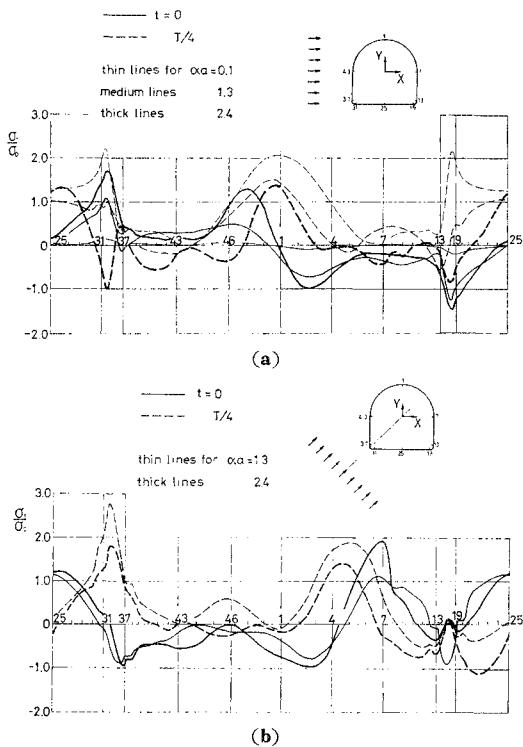
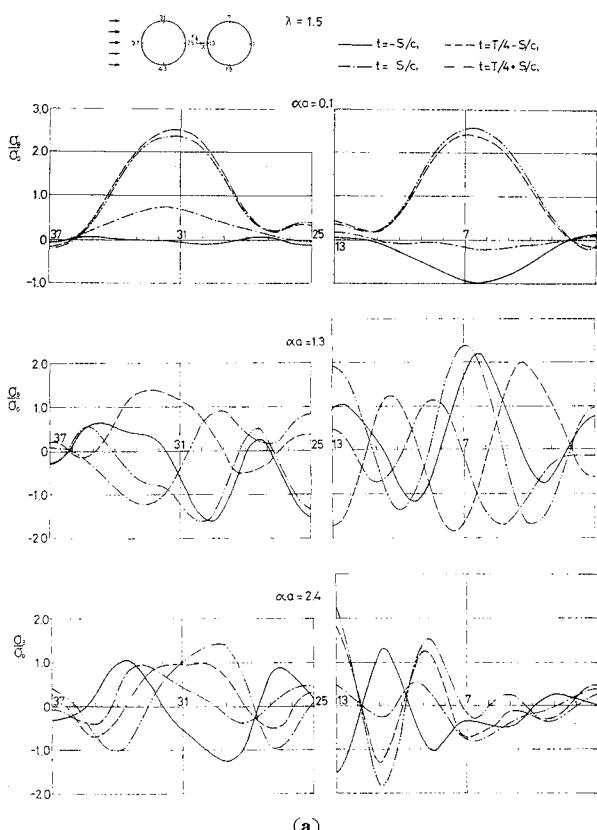


図-10 馬蹄形空洞面上の動的主応力分布（平面ひずみ、 $\nu=0.2$ 、 σ_0 は入力波の最大応力値、 T は波の周期）



とよく一致している（動的な場合には3軸応力状態にあることを考慮して比較せよ）。波長が短くなれば、局所的な変動が現われる。計算時間は約270秒であった。

(3) 2円孔周辺の応力分布

9.(3)で扱った2円孔に平面波が入射した場合の解析を行なった。平面ひずみ状態にあるものとし、Poisson比は0.2、 $\delta=0.2\alpha$ として、境界は静的な場合と同様に24個ずつに等分割した。2, 3の結果を図-11に示す。非常に波長の長い波が入射した場合には、当然予想されるように静的な場合とほとんど同じ結果となる（図-8参照）。

波長が短くなるにつれて応力分布は変動する。とくに、(a)の場合には、左側の円孔は単一の場合と大差はないが、右側の円孔は左側の影響を受けて応力分布が著しく変化する。(b)の場合には、両円孔の内側の壁面応力の変動が著しい。また、(c)の場合には、前2者の合成として得られるものであり、両者の特性をともに含んでいることがわかる。ちなみに、計算時間は約270秒であった。

11. おわりに

9., 10.で示した2, 3の例からも積分方程式による解法の有用性は十分推察されよう。解の精度に関しては、なお検討すべき点はあるが、積分方程式による解法は任意形状の境界値問題、とくに動的な問題の解法としてすぐれたものであり、今後広範囲の問題に適用されることが望まれる。なお、積分方程式の数値計算においては、境界の分割点を多く取れば連立方程式を解くこと自体が容易でない場合も生じる。このような場合には、最初からリラクゼーション法を併用すれば有利であろう。

なお、本文では、等方性の場合しか取り扱わなかったが、異方性の問題にも拡張して適用されることが望まれる。

なお、数値計算は京都大学大型計算機センターを利用したことを付記しておく。

参考文献

- 1) Muskhelishvili, N.I. : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, transl. J.R.M. Radok, Nordhoff, Groningen, 1953
- 2) Kupradze, V.D. : Potential Methods in the Theory of Elasticity, transl. H. Gutfreund, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965
- 3) Rieder, G. : Mechanische Deutung und Klassifizierung einiger Integralverfahren der ebene Elastizitätstheorie, Bull. L'Acad. Polon. Sci.,

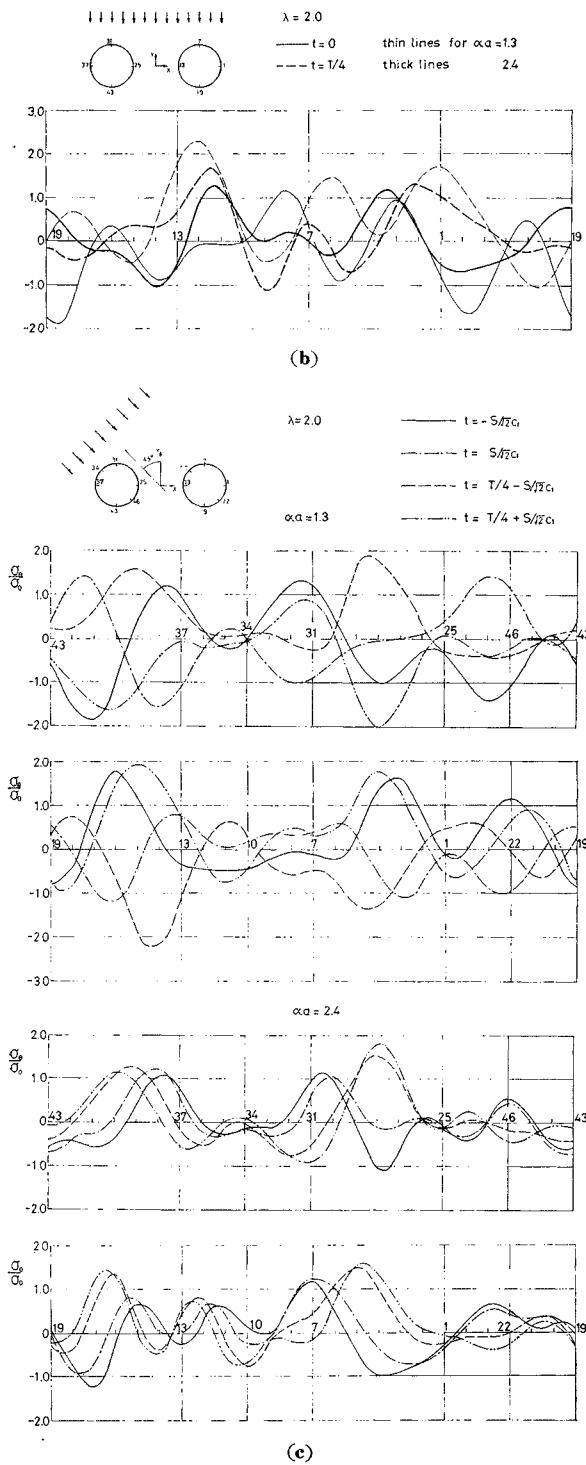


図-11 2 円孔の場合の壁面上の動的主応力分布（平面ひずみ、 $\nu=0.2$ 、 σ_0 は入力波の最大応力値、 T は波の周期）

- ser. sci. tech. **16**, pp. 101~114, 1968
- 4) Massonnet, Ch. : Numerical use of integral procedures, in "Stress Analysis", ed. O.C. Zienkiewicz & G.H. Holister, pp. 198~235, J. Wiley, New York, 1965
 - 5) Jaswon, M.A. : Integral equation methods in potential theory. I, Proc. Roy. Soc. A. **275**, pp. 23~32, 1963
 - 6) Symm, G.T. : Integral equation methods in potential theory. II, Proc. Roy. Soc. A. **275**, pp. 33~46, 1963
 - 7) Rizzo, F. : An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math. **25**, pp. 83~95, 1967
 - 8) Cruse, T.A. & F. Rizzo : A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, J. Math. Anal. Appl., **22**, pp. 244~259, 1968
 - 9) Oliveira, E.R.A. : Plane stress analysis by a general integral method, ASCE, EM 1, pp. 79~101, 1968
 - 10) Banaugh, R.P. & W. Goldsmith : Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape, J. Appl. Mech., **30**, pp. 589~597, 1963
 - 11) Borgwardt, F. : Über die numerische Berechnung von Spannungen und Verschiebungen in Krummlinig berandeten Scheiben, ZAMM. **45**, pp. T 106~T 108, 1965
 - 12) Chicurel, R. & E.W. Suppiger : The Reflection Method in Elasticity and Bending of Plates, ZAMP, **15**, pp. 629~638, 1964
 - 13) Pao, Yih-Hsing : Dynamical Stress Concentration in an Elastic Plate, J. Appl. Mech., **29**, pp. 299~305, 1962

(1971.4.26・受付)