土木学会論文報告集
第195号・1971年11月

重力式擁壁に作用する振動土圧と力のつり合いについて

RESEARCHES ON OSCILLATING EARTH PRESSURES AND EQUILIBRIUM OF FORCES ACTING ON A GRAVITY WALL

丹　羽　　新*
By　*Shin*　*Niwa*

1. まえがき

著者らが人工地震発生装置をつくって，重力式擁壁に作用する地震時土圧の研究を始めてからはや 18 年の歳月が流れた。昭和28年に始まるこの研究は，昭和37年までを第1期とし，それ以後を第2期にわけることができる。この中で第1期の研究内容についてはすでに報告した[1)~8)]。第2期の実験は昭和38年8月から同40年12月までの間に行なわれ，その後実験結果の解析を行なった。本報告書は，すべて第2期の研究に属するものである。

本研究の最終目標は，地震時に重力式擁壁に作用する土圧と壁体の運動との関係を，力学モデルで表現することである。本報告書では，まず測定した運動と分布土圧を直観的に把握しうる形で表現し，これから力の分布形状を実験式で表わしてこれを積分し，壁体に作用する合力と合モーメントを求めた。次にこのようにして求めた合力と合モーメントがどのようにして運動方程式を満足するかを考察した。実測によってえられた土圧と壁体の変位が運動方程式を満足するという事実は，実測値を用いて土圧の力学モデルを考察することを可能ならしめた。土圧の力学モデルについては，二，三のものについて試算を行なってみたが，満足すべき結果がえられず今後に残された問題となった。

2. 実験装置

Fig. 1 に人工地震発生装置および試験壁体の配置を示す。人工地震発生装置によって地盤に定常振動を起こした場合，あるいは試験壁体の頂部に取り付けた壁頂起振機によって壁体自身を振動源とした場合に，試験壁体の背後および底面に作用する土圧と壁体の運動を観測した。これらの装置や，振動および振動土圧測定装置についての詳細はすでに報告したもの[1)~8)]を参照されたい。ここでは第1期の実験と異なる点について述べることとする。

Fig. 1 に示したように，人工地震発生装置から 10.6 m 離れた地盤中に，長さ 5 m，高さ 3 m，底幅 1.5 m の試験壁体をつくり，この鉛直壁面に Goldbeck 型振動土圧計 9 個 (No. 13, 14, 15, 16, 17, 18, 1, 2, 3)，底面に 3 個 (No. 4, 5, 6) を取り付け，振動前後および振動中の土圧を測定した。**Fig. 2** に試験壁体の標準断面と，裏込め側から見た鉛直壁面上の土圧計の位置を示す。第1期の実験では裏込め側の 2 m より深い部分は，割り栗石および原地盤となっていたが，第2期の実験ではこの部分を壁底まで掘り取り，新たに No. 1, 2, 3 の 3 個の土圧計を壁面から突出して取り付けた。

試験壁体の裏込めは多摩川砂で，その有効径は 0.26 mm，均等係数は 4.35 である。この砂を注水しながら十分踏み固めて埋めもどし，その後約1ヵ月間放置してから振動実験を開始した。裏込めのある実験は約 21 ヵ月続き，この間裏込めの入れ替えは行なわなかった。最後

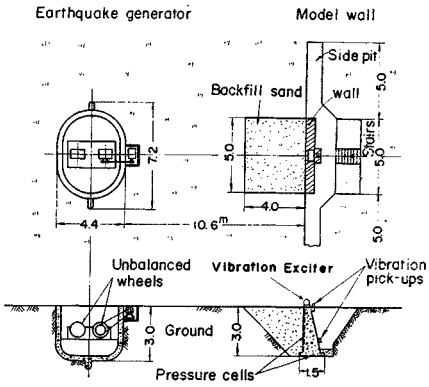


Fig. 1 General arrangement of the experimental equipments

* 正会員　工博　運輸省船舶技術研究所　海洋開発工学部

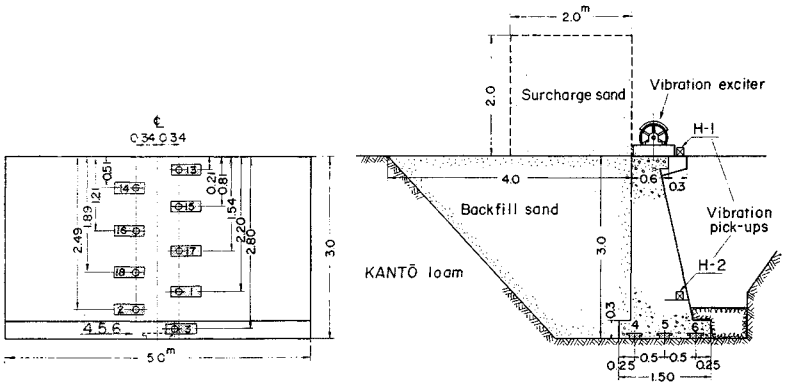


Fig. 2 Details of the model wall and the arrangement of pressure cells

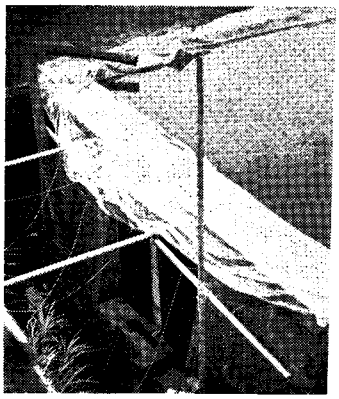


Photo 2 Filled with water instead of backfill sand

に裏込めを掘り取った際，裏込めの各部 15 ヵ所から サンプルを採り土質試験を行なった。その結果，湿潤単位体積重量 1.69 g/cm³，含水比 6.94%，内部摩擦角 29° であった。なおこの砂の真比重は 2.69 であり，突固め試験の結果，最適含水比 12.5%，最大乾燥密度は 1.89 g/cm³ である。

3. 実験とその結果

(1) 実験の方法

人工地震発生装置あるいは壁頂起振機を種々の回転数で定常回転させ，そのとき壁体の背面に取り付けた土圧計および底面の土圧計によって振動前，振動中，振動後の土圧を測り，同時に壁体の振動を 2 個の振動計，H-1 と H-2 で測定した（**Fig. 2** 参照）。底面の土圧計 No. 5 は設置後まもなく（昭和 30 年頃）故障し，No. 4 も完全な記録を示さない。したがって底面の記録で解析に耐えるのは Toe 側の No. 6 1 点だけである。

ここで人工地震発生装置で加振した実験を I 群とし，壁頂起振機を用いた実験を II 群の実験と名づけることとする。裏込め側の状態は次の 6 つの場合について実験を行なった。

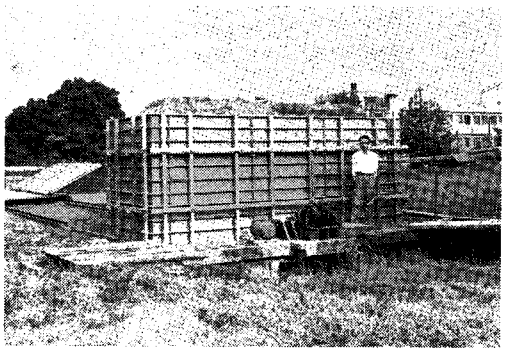


Photo 1 Surcharge, mass of sand 5 m×2 m×2 m in a steel frame

1. 載荷重を加える前の裏込めのみの場合
2. **Fig. 2** の右図のように，壁体に接して全長 5 m，高さ 2 m，幅 2 m の鋼製フレームの中に砂を満たして，裏込め上に載荷重を加えた場合。**Photo 1** にその状態を示す。
3. 上記の載荷重の高さを 1 m にした場合
4. 載荷重を取り除いた場合
5. 裏込めの砂を掘り取って，代りに水を満たした場合。**Photo 2** にそのときの状態を示す。
6. 裏込めがからの場合

Table 1 にこれらの組み合わせを示す。以下では，この表に示された番号によって実験番号を表わすこととする。たとえば I-2-5.44 は，人工地震発生装置によって加振し，裏込め上に高さ 2 m の載荷重を加えた場合の実験で，そのときの加振振動数が 5.44 Hz であることを示す。

(2) 実験結果の一例

Photo 3 に I-2-5.40 の実験記録を示す。上 2 枚のオシログラムは，振動計 H-1，H-2 の変位および加速度記録で，下の 9 枚は Facsimile paper に記録された振動中の土圧である。

この記録で，壁体背後に作用する振動土圧記録の波形の位相を無視し，振動中の土圧の最大値と最小値を，深

Table 1 Classification of experiments

Source of vibration / No. of classification / Conditions of backfilling		Earthquake generator I	Exciter on the wall II
Backfill before surcharged	1	I-1 (10)	II-1 (3)
Surcharged by 2 m height	2	I-2 (12)	II-2 (6)
Surcharged by 1 m height	3	I-3 (9)	II-3 (5)
Backfill after surcharged	4	I-4 (3)	II-4 (4)
Filled with water	5	I-5 (6)	II-5 (7)
Without backfill (empty)	6	I-6 (4)	II-6 (3)

Numbers in brackets show kinds of frequency

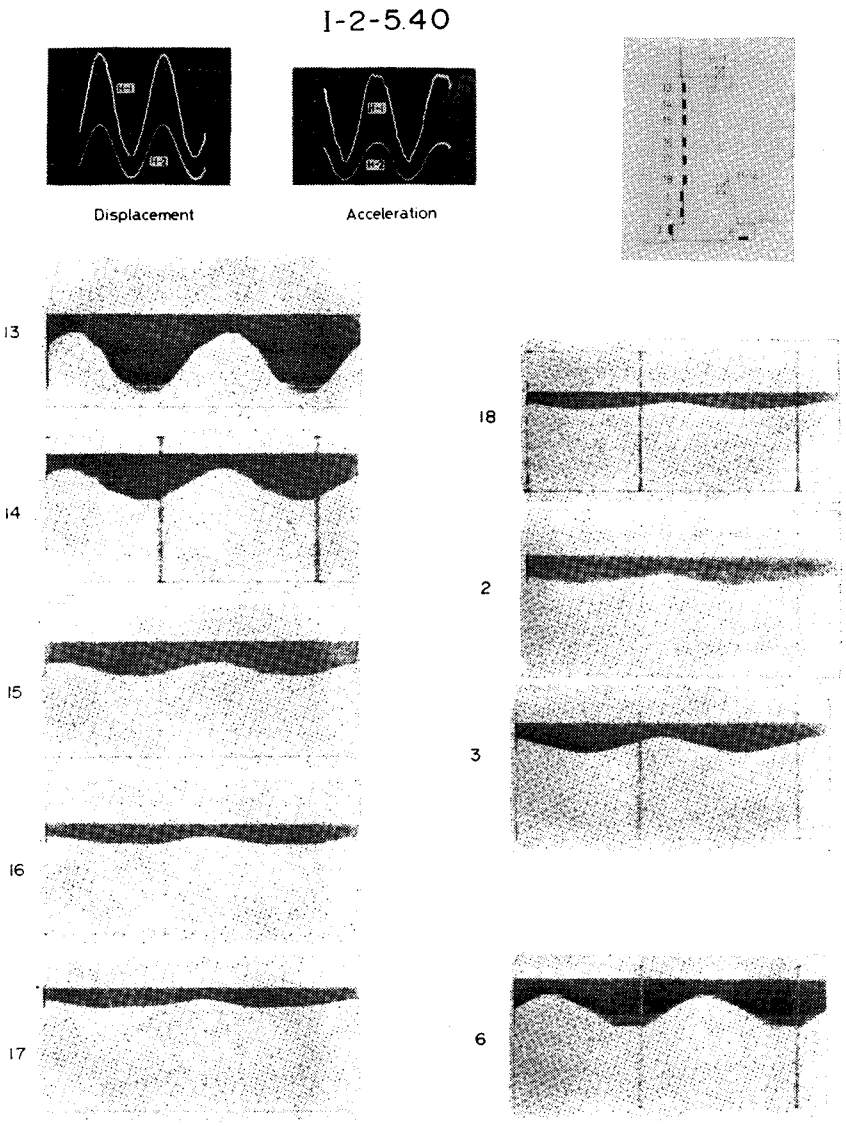


Photo 3 Oscillograms of vibration and records of oscillating earth pressure

さ z に対してプロットしたものが，**Fig. 3** ① 中の陰影を施した部分で，振動中の土圧の変化量の絶対値を表わしている。さらに，この図の中には振動前の土圧（実線）および振動後の土圧（破線）も同時にプロットしてある。

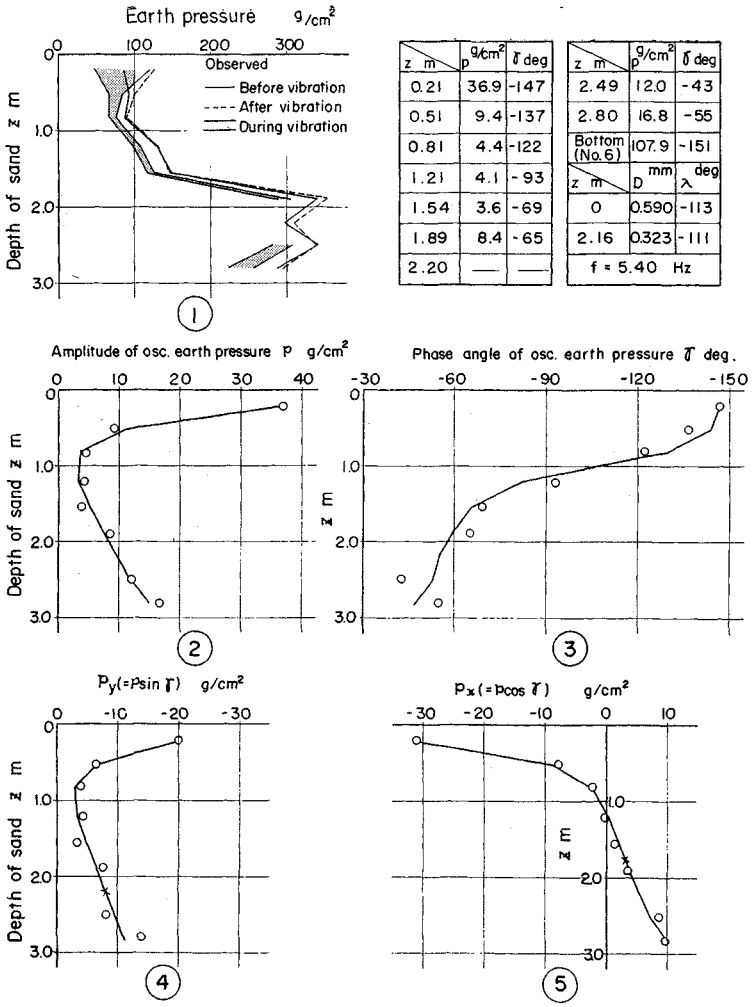
本報告書では座標は右手系とし，z 軸を鉛直下向きにとることとする。また定常振動現象を $a\cos(\omega t+\alpha)$ の形で表現し，位相角は"度"で表わすことに決めておく。位相角の負値は"遅れ"を意味し，位相角——振動数曲線を書くときは，遅れ角を縦軸の上向きにとることにする。

さて次に記録紙上にえがかれた振動土圧波形の1周期を 12 分割して波形分析を行ない，基本波の振幅 p(g/cm²)，位相角 γ (deg) を求めてこれを深さに対してプロットすれば **Fig. 3** の ② および ③ となる。さらに $p\sin\gamma$ および $p\cos\gamma$ を深さに対してプロットしたものが，④ および ⑤ である。図中○印は実測値であり，実線は **4.3** で述べるようにこれらの値を実験式化した結果である。④ および ⑤ については改めて次節で述べる。なお **Fig. 3** の右肩に側方および底面（土圧計 No. 6）土圧の p と γ，および壁体の上下2ヵ所（$z=0$ と $z=2.16$ m）で測定した変位の基本波振幅 D_1, D_2，その位相角 λ_1, λ_2 を表示した。他の一例として裏込めの砂の代りに水を満たし，壁頂起振機を加振源としたときの動水圧の実験結果を **Fig. 4** に示す。

最後に，波形分析の結果についてひとこと触れておこう。**Photo 3** から明らかなように変位波形，土圧波形ともに，一見して正弦波形からのずれがあまり大きくないことがわかる。事実，波形分析を行なっても大半のものは基本波が卓越している。2次または3次調波の振幅が，基本波の振幅の 20% を超えるものは全体の約 1/5 程度である。

（3） 回転ベクトルを用いた実験結果の表示法——立体表示法

記録された一つの振動土圧波形は，i) 振幅，ii) 位相，iii) 時間，iv) 測定された位置，の4つの情報を持っている。この4つを1枚の紙の上に同時にアナログ量で表現するのは不可能であり，波形分析を行なって基本波振動のみを問題としているいま，いちいち正弦波形を書いて上記の i), ii), iii) を表わすのは大して意味がなく，また直観的に把握しにくい。壁体のどの部分に，どれだけの振幅の力が，どんな位相で，時間的に全体がど



z m	p g/cm²	γ deg
0.21	36.9	-147
0.51	9.4	-137
0.81	4.4	-122
1.21	4.1	-93
1.54	3.6	-69
1.89	8.4	-65
2.20	—	—

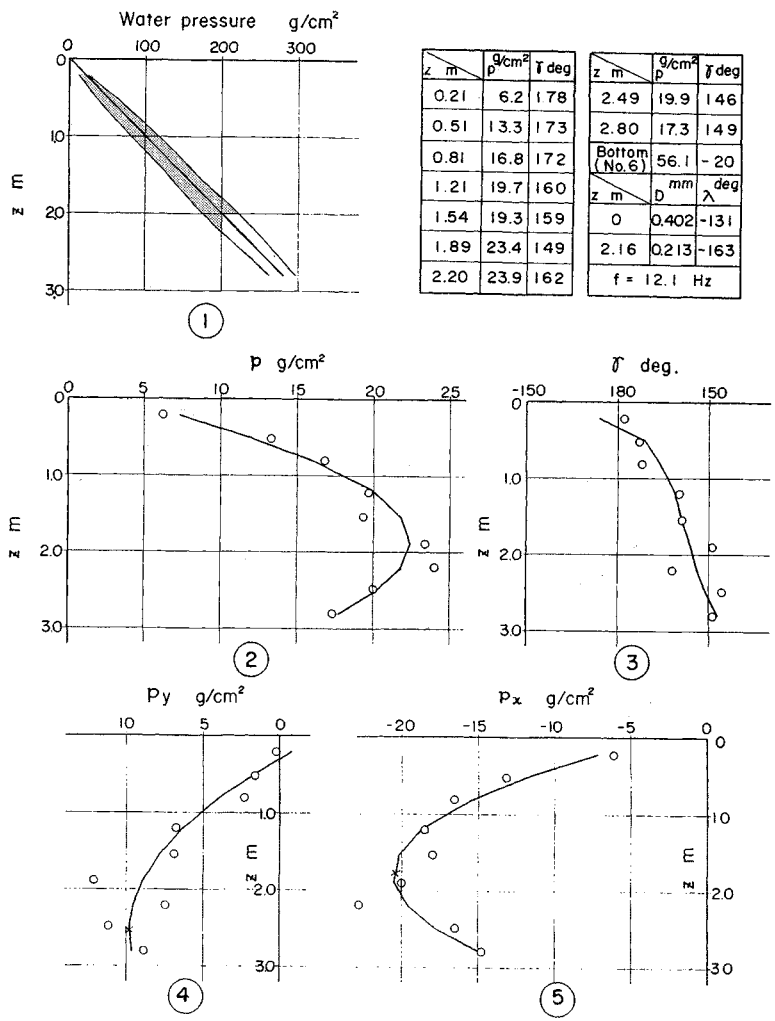
z m	p g/cm²	γ deg
2.49	12.0	-43
2.80	16.8	-55
Bottom (No.6)	107.9	-151

z m	D mm	λ deg
0	0.590	-113
2.16	0.323	-111

f = 5.40 Hz

○ : Observed values —— : Empirical formula

Fig. 3 Vertical distributions of earth pressure



z m	p g/cm²	γ deg
0.21	6.2	178
0.51	13.3	173
0.81	16.8	172
1.21	19.7	160
1.54	19.3	159
1.89	23.4	149
2.20	23.9	162

z m	p g/cm²	γ deg
2.49	19.9	146
2.80	17.3	149
Bottom (No.6)	56.1	-20

z m	D mm	λ deg
0	0.402	-131
2.16	0.213	-163

f = 12.1 Hz

○ : Observed values —— : Empirical formula

Fig. 4 Vertical distributions of water pressure

んな具合に変化して行くのか，ということを直視的に，かつすぐそのイメージが頭に浮かぶような表現法はないであろうか？。著者はひとつひとつの振動を回転ベクトルで表現し，これを立体的に配置した表現法を考えた。

いま壁面上のある1点に作用する振動土圧を $p\cos(\omega t+\gamma)$ で表わすと

$$p\cos(\omega t+\gamma)=p\cos\gamma\cdot\cos\omega t-p\sin\gamma\cdot\sin\omega t$$
$$=p_x\cos\omega t-p_y\sin\omega t$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}p_x&=p\cos\gamma\\p_y&=p\sin\gamma\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

であり，これは力のベクトル p が位相角 γ を持って，角速度 ω で回転している回転ベクトルで表わされることは衆知のとおりである。ここで $\omega t=0$ の瞬間を考えると **Fig. 5** のようになり（ベクトルの回転方向は x 軸の正方向が y 軸の正方向と一致する方向にとる），p_x および p_y はベクトルの絶対値（振幅）p の，x および y 軸上への投影となる。p と γ は深さ（測定点）z の関数であり，**Fig. 5** の p と γ を，各実測値に置きかえつつ z 方向へ配置して行くと **Fig. 6** のようになる。p の先端を結んでできる曲線を L_p, L_p の xz 平面への投影曲線を ${}_xL_p$, yz 平面への投影曲線を ${}_yL_p$ で表わすことにする。z 軸を回転軸として L_p が角速度 ω で回転するとき，${}_xL_p$ は時々刻々その形を変えて行くが，このときの ${}_xL_p$ の横座標の変化は，まさに **Photo 3** にかかげた振動土圧記録そのものである。L_p は一般的に空間曲線であり，これが回転軸（z 軸）に剛結されて回転するとき，その投影曲線が壁体の各点に作用する土圧を表わすのである。したがって空間曲線 L_p を定めることができれば，振動土圧の性質をあます所なく知りえたことになる。

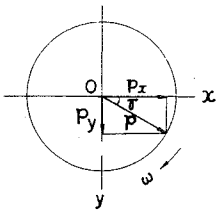


Fig. 5 Rotating vector

さきに例示したⅠ-2-5.40の実験結果をこの方法で表示したのが **Photo 4** で，$\omega t=0$ の位置のものである。また写真中の白黒の線 L_D は，壁体の変位を同様の方法で表わしたものである。いま **Fig. 6** において直線 oz に沿って切断し，z 軸を中心にして yz および xz 平面を左右に開くと，z 軸の左側に曲線 ${}_yL_p$，右側に ${}_xL_p$ がえがかれた2枚のデータをえる。これがさきにかかげた **Fig. 3** の④および⑤の意味である。すなわち **Fig. 3** の④は曲線 L_p の yz 平面への投影曲線 ${}_yL_p$ を，⑤は同じく ${}_xL_p$ を表わしている。

Photo 5 に，**Fig. 4** としてかかげたⅡ-5-12.1の実験結果を表示したものを示す。前掲のものとはベクトルの縮尺率は違うが，一見して非常に異なっている様子が良くわかると思う。

以上述べたように空間曲線 L_p を定めることが当面の目標となる。

4. 振動土圧の分布形状の決定——実験式化

(1) xz, yz 平面への投影曲線を放物線で表わした場合

壁体の背後および底面の媒体が Voigt 体であると仮定して壁体の運動方程式をたて，これを解いた結果から

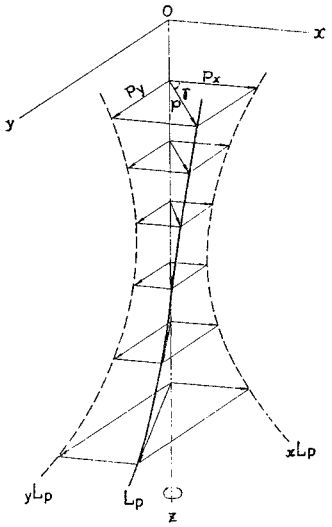


Fig. 6 Representation of oscillating earth pressure employing rotating vectors

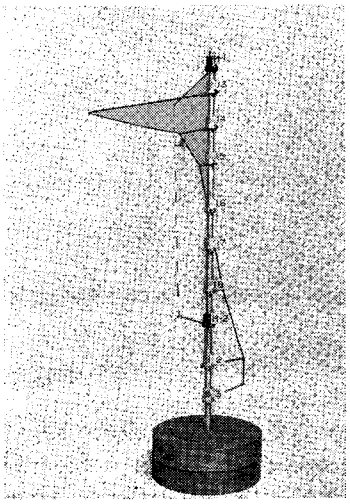


Photo 4 Representation of oscillating earth pressure employing rotating vectors Data No. Ⅰ-2-5.40, shown in Photo 3

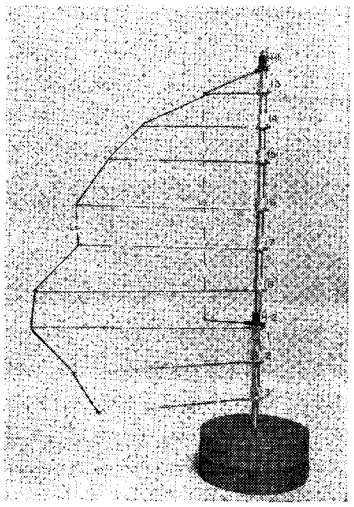


Photo 5 Representation of oscillating water pressure employing rotating vectors Data No. Ⅱ-5-12.1

背後に作用する振動土圧を求めると，L_p は空間直線となる。しかし実測データはこのように簡単な直線形式では表わしえない。さきに示した **Photo 5** (**Fig. 4**) は，裏込めの砂の代りに水を満たし，壁頂起振機で加振して，壁に作用する動水圧を測定した結果を表わしたものであるが，II-5 の実験結果を立体表示したものを観察すると，${}_xL_p$, ${}_yL_p$ ともに放物線にきわめて近い形をしている。そこで xz および yz 平面への投影曲線を Eq. (2) のように放物線で表わした。

$$\left.\begin{aligned} p_x&=C_x(z-z_x)^2+\bar{p}_x \\ p_y&=C_y(z-z_y)^2+\bar{p}_y \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで C_x, C_y は放物線の係数，z_x, z_y および $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ は各投影面における放物線の頂点の縦および横座標である。いま II-5 の実験結果を立体表示し，これを回転しながらその投影を観察すると，ほぼ直線になる位置が存在する。そこで Eq. (2) の座標を z 軸のまわりに $\theta'=\tan^{-1}\{-(C_x/C_y)\}$ 回転すれば，xz 平面への投影が直線になることがわかる。このことは Eq. (2) で示される曲線は xz 平面に垂直で，この直線を含む平面内にあるわけで，本質的に平面曲線であることがわかる。p-z 曲線および γ-z 曲線は Eq.(1) から次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} p&=\sqrt{p_x^2+p_y^2} \\ \gamma&=\tan^{-1}\frac{p_y}{p_x} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

この場合 $z_x=z_y$ ならば，両曲線ともその点を中心にして上下対称の形を持つことは簡単にわかる。

(2) さらに高次にした場合

前節で述べた II-5 の実験を除いたものの，④および⑤を詳細に調べた結果次のことが明らかとなった。

i) 図に表われている分布曲線上か，あるいはその延長上に曲線の対称点を求めることができる。

ii) この対称点を中心にして，程度の差はあるがほとんどすべてのものは奇関数の形をしている。すなわち z の奇数ベキの項を含んでいる。

iii) 曲線の対称点付近における接線が，z 軸と平行でないものがほとんどである。

実測データについての以上の性質をふまえて，実測値を表現する実験式はさらに，A) xz および yz 平面の曲線は同じ形の式で表わす。B) 実験式はなるべく簡単なものとする。C) 部分的に2次放物線に近い形を含んだ式とする。などのことを考慮して種々検討の結果，次式が最も適したものであるという結論に達した。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} p_x&=A_x(z-z_x)^n+B_x(z-z_x)+\bar{p}_x \\ p_y&=A_y(z-z_y)^n+B_y(z-z_y)+\bar{p}_y \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

ここで A_x, A_y は高次放物線の係数，B_x, B_y は曲線の対称点における接線勾配，z_x, z_y および $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ は曲線の対称点の縦および横座標を表わし，$n=3, 5, 7$ とする。第1式の概形を **Fig. 7** に示す。図からも明らかなように $B_x>0$ のときは極値を持たず，$B_x<0$ のときは2つの極値を持つ。Eq. (4) で表わされる空間曲線は，もし $z_x=z_y$ という条件があれば，平面曲線を表わすことは前節と同様にして証明することができる。

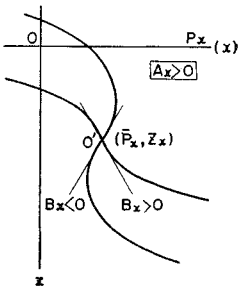


Fig. 7 Schematic diagram of p_x in Eq. (4)

(3) 係数の決定

Eq. (4) に含まれる A_x, B_x, $\bar{p}_x$, z_x などの値は，最小自乗法と逐次近似法を用いて，その最確値を求めた。Eq. (2) についても同じである。係数の最確値が求まると，この値を用いて z を所定の値（土圧計の位置）にかえて Eq. (4) または Eq. (2) から p_x と p_y を計算し，さらに Eq. (3) を用いて p と γ を求める。p_x, p_y, p, γ を求めるとき，z の各点における残差の自乗和を計算しておく。Eq. (2) を適用するのは II-5 の実験のみで他は Eq. (4) を用いるのであるが，このときは $n=3$, 5, 7 の3通りについて計算し，残差の自乗和が最小となる n の値を選ぶ。このようにして求めた n の値を **Table 2** に示す。A_x, B_x などの値と n の値が求まったので，これらの値を用いて計算した p_x, p_y, p, γ の値を前掲 **Fig. 3** および **Fig. 4** の ⑤, ④, ②, ③ に実線で示した。⑤および④の中の×印は曲線の対称点の位置である。一般的にいって土圧実験は実測値のばらつきが大きいものであるが，この図の実測値（○印）と実験式による値（実線）はなかなか良い一致を示しているといえよう。

Table 2 Values of n

Conditions of backfilling \ Source of vibration	I	II
1	3	7
2	7	7
3	3	7
4	3	7
5	3	2[Eq.(2)]

5. 分布土圧の積分

(1) 側方分布土圧の積分

前章で重力式擁壁の背後に作用する振動土圧の分布を決定した。すなわち，Eq. (2) あるいは Eq. (4) と Eq. (3) によって，背後の各点に作用する振動土圧の振幅と位相角をあます所なく知ることができる。壁面上の任意の1点に作用する振動土圧は，

$$\boldsymbol{p}=p\cos(\omega t+\gamma)=p_x\cos\omega t-p_y\sin\omega t\cdots(5)$$

で表わされている。いま側方振動土圧の合力を $\boldsymbol{P}$, 壁体の重心に関する合モーメントを $\boldsymbol{M}$ として，これを次のように置く。

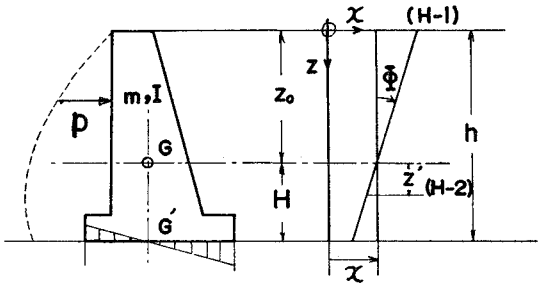
$$\boldsymbol{P}=P\cos(\omega t+\Theta_P)=P_x\cos\omega t-P_y\sin\omega t \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\left.\begin{array}{l}P_x=P\cos\Theta_P\\P_y=P\sin\Theta_P\end{array}\right\}\text{から}\left.\begin{array}{l}P=\sqrt{P_x^2+P_y^2}\\\Theta_P=\tan^{-1}\dfrac{P_y}{P_x}\end{array}\right\}\cdots(7)$$

同様にして

$$\boldsymbol{M}=M\cos(\omega t+\Theta_M)=M_x\cos\omega t-M_y\sin\omega t \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}M_x=M\cos\Theta_M\\M_y=M\sin\Theta_M\end{array}\right\}\text{から}\left.\begin{array}{l}M=\sqrt{M_x^2+M_y^2}\\\Theta_M=\tan^{-1}\dfrac{M_y}{M_x}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$



l : length of the wall

Fig. 8 Simbols in relation to the model wall

いっぽう，土圧分布を2次元分布と仮定すると，$\boldsymbol{P}$ は Eq. (5) を積分して（**Fig. 8** 参照）

$$\boldsymbol{P}=l\int_0^h(p_x\cos\omega t-p_y\sin\omega t)dz$$
$$=\cos\omega t\cdot l\int_0^h p_x dz-\sin\omega t\cdot l\int_0^h p_y dz \quad \cdots(10)$$

Eq. (10) を Eq. (6) と等置して

$$P_x=l\int_0^h p_x dz,\ P_y=l\int_0^h p_y dz \cdots(11)$$

をえる。また土圧の合モーメントも同様に，

$$\boldsymbol{M}=l\int_0^h(z_0-z)(p_x\cos\omega t-p_y\sin\omega t)dz=\cos\omega t\cdot l\int_0^h(z_0-z)p_x dz-\sin\omega t\cdot l\int_0^h(z_0-z)p_y dz \quad \cdots\cdots(12)$$

Eq. (12) を Eq. (8) と等置して

$$\left.\begin{array}{l}M_x=l\int_0^h(z_0-z)p_x dz\\M_y=l\int_0^h(z_0-z)p_y dz\end{array}\right\}\cdots\cdots(13)$$

をえる。

Eq. (11) と Eq. (13) に，Eq. (2) あるいは Eq. (4) を代入して積分を実行し，この結果を Eq. (7) と Eq. (9) に代入すると合力の振幅と位相角，および合モーメントの振幅と位相角を求めることができる。

I 群の実験について，以上の計算結果を図示すると **Fig. 9** のようになる。この図では計算結果を滑らかな曲線に引きなおして示してあり，I-4 の実験は異なった振動数の実験が3つしかないのでここでは省略した。I-1 の実験は他より実測点のばらつきが大きいが，これは裏込め投入後初めての振動実験であるため，振動によって裏込めが"落ちつく"過程の現象ではないかと考えている。そ

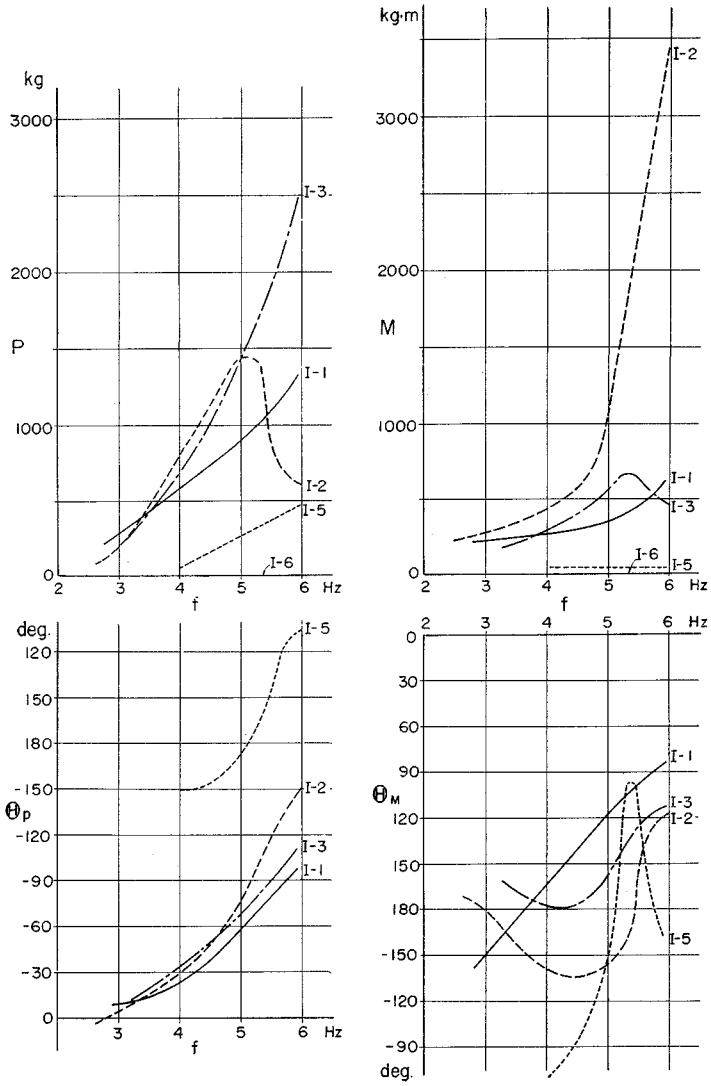


Fig. 9 Frequency responses of resultant forces and resultant moments of lateral oscillating earth pressure

の他のものはこの図の曲線によくのっている。一見して θ_M の曲線が異常であるが，I-2 および I-3 の曲線の，振動数の低い方ではやや疑問がある。

(2) 底面に作用する振動土圧

振動中における力のつり合いを考える第1の準備として，振動中の底面反力の実測値を調べよう。**Fig. 2** に示したように底面には3個の土圧計が取り付けてあるが，このうち，中央の No. 5 はほとんど機能を失っており，Heel 側の No. 4 も完全ではない。壁体の構造上，あまり沢山の土圧計を底面に取り付けることもできず，いまの場合，1個の土圧計が故障すると，底面反力の分布形状を正確に決定するのが困難になる。またたとえ土圧計が完全であっても，実測値のばらつきは側方土圧より大きく，実測値から底面反力の分布形状を決定するのは容易なことではない。

土圧計 No. 4 の記録は完全なものではないが，裏込めのない場合の実測値を調べると，i) 振動数の低い方では振幅は Heel 側と Toe 側で，**Fig. 8** の G' 点を通る直線分布になるが，位相角は両者で必ずしも逆相になっていない。ii) 振動数の高い方では振幅は直線分布

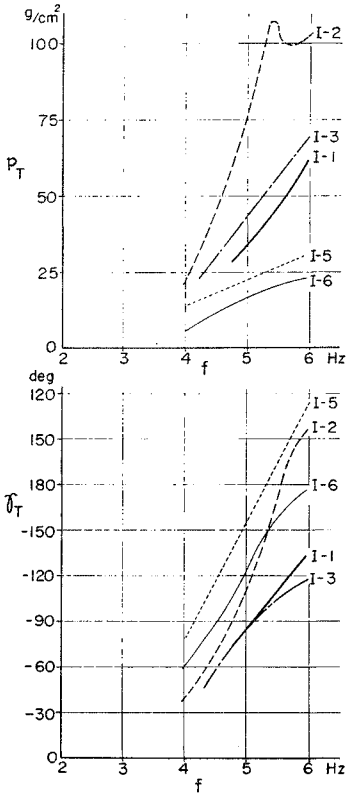


Fig. 10 Frequency responses of vertical oscillating earth pressure observed by the cell No. 6

になっていないが，位相角は完全に逆相になっている。

壁体背後に側方土圧が作用している場合の底面反力は，Heel 側の記録で解析に耐えるものが少なく，いきおい，Toe 側の実測値にたよらざるをえない。**Fig. 10** に側方土圧が作用したときの土圧計 No. 6 の実測値を示す。今後，Toe 側の底面反力の実測値を $p_T=p_T\cos(\omega t+\gamma_T)$ で表わすこととする。

6. 力のつり合い

(1) 変位の分解

振動中における力のつり合いを考える第2の準備として，実測によってえられた壁体の変位を並進成分 x と回転成分 Φ に分解しよう。ここで壁体の上下動に関してであるが，この実験に用いた振動測定器の倍率では，上下動は観測にかからなかったので以下ではこれを無視する。

Fig. 8 に示したように，壁頂（H-1 の位置）における壁体の水平変位振幅を D_1，位相角を λ_1 とし，H-2 の位置におけるそれを D_2，λ_2 とすると

$$\left.\begin{aligned} x+z_0\Phi&=D_1\cos(\omega t+\lambda_1)\\ x-z'\Phi&=D_2\cos(\omega t+\lambda_2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

となる。この式に $x=a\cos(\omega t+\alpha)$，$\Phi=\varphi\cos(\omega t+\beta)$ を代入し，$a, \alpha, \varphi, \beta$ を求めればよい。このようにして求めた結果を **Fig. 11** に示す。I-2 の実験は a, φ ともに 5.3 Hz でピークを持つが，これは裏込め上に置かれた載荷重の共振を示している。

(2) 力と変位に関する定性的考察

力のつり合いを論ずる前に，ここで **Fig. 9**, **Fig. 10**, **Fig. 11** を包括的に眺めてえられる，力と変位についての定性的な特性を列記してみる。

1) 並進変位の振幅 a は，水平合力 P の有無，大小にかかわらず1本の振動数特性で表わしうるとみなされる。I-5 を除いた位相角も力と変位とでは比較的近い値をとる。

2) 回転変位の振幅 φ は，合モーメント M の有無，大小，および Toe 側の底面反力 p_T の大小にかかわらず1本の振動数特性で表わしうるとみなされる。しかし I-2 および I-3 のように φ にピークがあっても，それに対応する M の位置にピークがないもの，あるいはその逆の場合などが含まれている。位相角は β と γ_T は似た傾向を示すが，θ_M のみは他と非常に異なった傾向を示している。

3) 以上の2点を要約すると，外力およびそのモーメント P, p_T, M は実験の種類（I-1, I-2, I-3 など）によって極端に異なった値をとるが，それらが原因で起

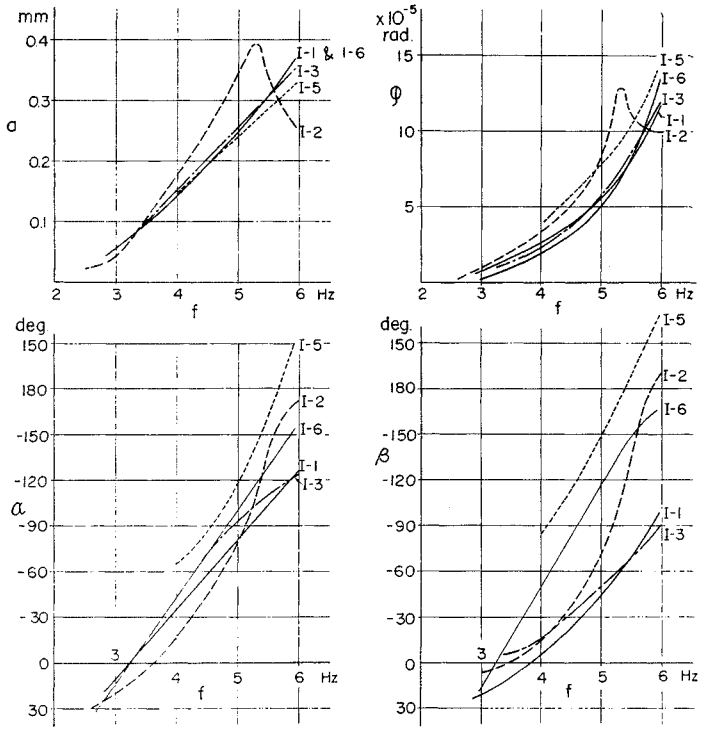


Fig. 11 Frequency responses of translational and rotational displacements of the wall

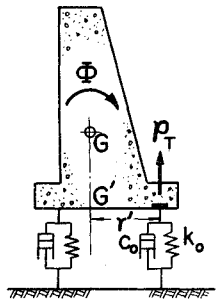


Fig. 12 Simple model of foundation of the wall

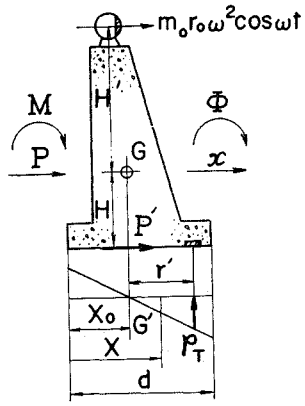


Fig. 13 Equilibrium of forces and moments

こる変位 a, φ は常に同じ値を示し，1本の振動数特性で表わされ，かつ a, φ ともに裏込めがない場合のもの（I-6）で代表される。すなわち，振幅だけを見ていると，あたかも力と変位の間には直接的な関係がないかのように見える。

4) 並進および回転変位の位相角 α と β は，互いに平行移動すれば大体一致する。全体として α, β, Θ_P, γ_T が同じ傾向で，Θ_M のみが著しく異なった傾向を示す。ただし I-1 の実験のみは，Θ_P と Θ_M は振動数のいかんにかかわらずほぼ正確に逆相関係である。

5) 裏込め部分に水を満たした実験（I-5）では，位相遅れが一番大きく，この場合を除くと，α, β, γ_T ともに I-6 の実験が最も遅れが大きい。すなわち，並進および回転変位，Toe 側の底面反力の位相は，裏込めがない場合が一番遅れ，裏込めがある場合の方が遅れが小さい。

6) いま簡単な底面基礎の力学モデルとして **Fig. 12** を考え，Toe 側の底面反力 $\boldsymbol{p}_T$ を求める。$\boldsymbol{p}_T$ は上向きを正とすると

$$\boldsymbol{p}_T = p_T \cos(\omega t + \gamma_T) = r'(k_0 \Phi + C_0 \dot{\Phi})$$

となる。ここで r' は土圧計 No. 6 と壁体の重心との水平距離，k_0, C_0 は底面の分布ばね係数，および分布減衰係数である。この式から明らかなように，γ_T は Φ の位相角 β よりも必然的に進まねばならない。しかるに実測値では γ_T が β より逆に遅れている。両者の位相角は，この振動数の範囲では平行移動すれば一致し，その量は実験の種類によって異なるが，0°～40° の範囲である。

（3） 力のつり合い

剛体としての壁体に作用する力とモーメント，および壁体の変位が明らかになったので，振動中にこれらがどのようにして運動方程式を満足するかを調べよう。すでに **5.(2)** で述べたように，底面に作用する力で解析に耐えるのは Toe 側のデータのみであり，Heel 側の力はこれから推定せざるをえない。振動中に底面反力を生じさせる原因は，壁体の回転変位と上下動であると考えられるが，実験で上下動は観測されなかった。このことを考慮して底面反力の分布を **Fig. 13** に示すように，Toe 側の実測値 p_T と，壁重心直下の G' 点を結ぶ直線分布とし，Toe 側と Heel 側とでは逆位相であると仮定する。底面分布土圧によって生じる壁体の重心に関するモーメントを $\boldsymbol{M}_b$ とすると，$\boldsymbol{M}_b$ は **Fig. 13** を参照して次のように求められる。

$$\boldsymbol{M}_b = -l\int_0^d \frac{\boldsymbol{p}_T}{r'}(X-X_0)^2 dX = -\frac{J_3}{r'}\boldsymbol{p}_T$$

ここで J_3 は壁底面の2次モーメントである。

壁体に作用する力とモーメント，および壁体の変位は **Fig. 13** に示したようになり，壁体の運動方程式は次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}'+m_0r_0\omega^2\cos\omega t \\ I\ddot{\Phi} &= \boldsymbol{M}-H\boldsymbol{P}'-\frac{J_3}{r'}\boldsymbol{p}_T+H'm_0r_0\omega^2\cos\omega t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

ここで $\boldsymbol{P}'$ は壁体の底面に作用する水平力の合力を表わす。また m_0r_0 は壁頂起振機の不平衡モーメント，H'は壁頂起振機の回転軸と壁体の重心との鉛直距離である。Eq. (15) でⅠ群の実験では $m_0=0$ と置く。

壁体の底面に作用する水平方向の分布力は実測することがほとんど不可能である。したがって実験によって直接 $\boldsymbol{P}'$ を求めることができないので，Eq. (15) の第1式から逆算せざるをえない。$\boldsymbol{P}'$ を求めてこの値を Eq. (15) の第2式に代入して左右辺がベクトルとして一致すれば，すべての実測値が運動方程式を満足したことになる。しかしこれは成功しなかった。そこで $\boldsymbol{p}_T$ の代りに $\boldsymbol{p}_T'\{=p_T'\cos(\omega t+\gamma_T')\}$ とおきかえて，運動方程式を満足する $\boldsymbol{p}_T'$ を逆算し $\boldsymbol{p}_T$ と $\boldsymbol{p}_T'$ を比較して見ることとした。すなわち運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}'+m_0r_0\omega^2\cos\omega t \\ I\ddot{\Phi} &= \boldsymbol{M}-H\boldsymbol{P}'-\frac{J_3}{r'}\boldsymbol{p}_T'+H'm_0r_0\omega^2\cos\omega t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(16)$$

と書き改められる。Eq. (16) から求めた p_T' と γ_T' を **Fig. 14** に示す。**Fig. 14** と **Fig. 10** を比較してみると次に列記する事柄に気付く。ここで **Fig. 14** の縦軸は **Fig. 10** の半分に縮めてあることに注意されたい。

1) 振動数の低い所では実測値がないので両者を比較することはできないが，振幅においても，位相角においても両者の間に強い近親性のあることが認められる。$\boldsymbol{p}_T'$ の計算には，$x, \Phi, \boldsymbol{p}$ の実測値に伴う誤差とばらつきが含まれていることを考えると，この計算結果のばらつきは非常に小さく，良好な結果であるといえる。

2) まず振幅についてであるが，p_T と p_T' の傾向は良く一致し，振動数に対する分布形状も両者で大体一致する。$p_T'/p_T=\nu$ は大半のものは 1.6～2.7 の範囲内にあり，全部の平均は 2.1 である。

3) 両位相角の差 $\gamma_T'-\gamma_T=\varepsilon$ は，Ⅰ-7 および Ⅰ-6 では，振動数のいかんにかかわらず約 20° であり，他は 10° 以下であって誤差の範囲で両者は一致するものとみなされる。ただ Ⅰ-1 と Ⅰ-2 で 4 Hz 以下の γ_T' の値が急激に変化する。この点に対応する実測値がないので比べられないが，$\boldsymbol{M}$ の位相角（**Fig. 9** 参照）がきいているようで，前述のようにやや疑問が残る。γ_T と γ_T' を全般的に比べると，γ_T' の方が進んでいる場合がほとんどである。また壁体の回転変位 Φ の位相角 β（**Fig. 11** 参照）とここでえた力の位相角 γ_T' を比べると，Ⅰ-6 の場合だけ γ_T' が β より進んでいて，他は一致するか，あるいは 20°～30° 程度 γ_T' が遅れている。ここでも **6.(2)**，6) で述べた疑問がなお残っている。

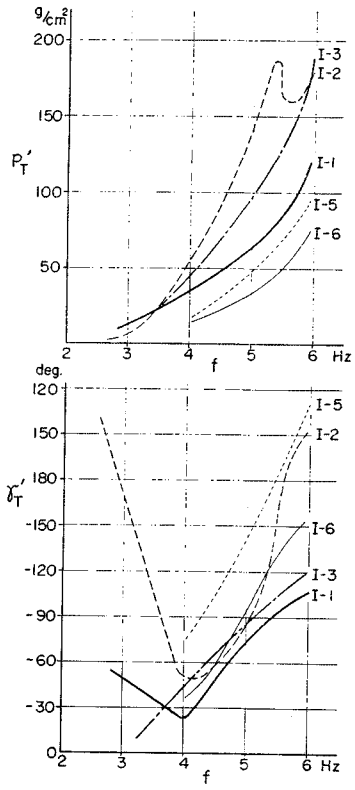


Fig. 14 Frequency responses of vertical oscillating earth pressure at the position of the cell No. 6, calculated by Eq. (16)

以上はⅠ群の実験についてであるが，Ⅱ群の実験については

4) Ⅰ群の場合とくらべて点のばらつきがやや大きく，ν, ε ともに振動数に対して平坦になる場合は少なく，一般的にゆるやかな直線変化をする。その絶対値もⅠ群の場合より大きく，$\nu=2$～4, $\varepsilon=\pm40°$ の範囲内に分布している。

5) Ⅱ-5 は γ_T' が γ_T より遅れるが，他はすべて γ_T' が進んでいる。γ_T' と β をくらべると，ほとんどのものは力の位相角の方が進んでいて，この場合は常識的に理解しやすい形となっている。

本節では運動方程式 Eq.(15) を満足させるためには，実測値 $\boldsymbol{p}_T$ の代りに $\boldsymbol{p}_T'$ を用いねばならず，$\boldsymbol{p}_T'$ は $\boldsymbol{p}_T$ と強い近親関係にあることがわかった。しからば $\boldsymbol{p}_T'$ と $\boldsymbol{p}_T$ は力学的にどのような関係にあるのであろうか？次節で両者の相互関係について考えてみよう。

（4） 底面に作用する振動土圧分布の決定

前節で底面の鉛直分布土圧を積分してそれによるモーメントを求めるとき，暗黙のうちに底面の2次元分布（壁体の長さ l の方向に）を仮定していた。いま土圧計 No. 6 の位置を通り壁体の l 方向の断面を考えると，**Fig. 15** に示すように $p_T' > p_T$ という関係はすべての実験結果について成立するから，図示のように l の方向に上に凸の分布曲線を考えれば，実測値 p_T は分布力の最小値を測っていたことになり，p_T と p_T' との関係が無理なく理解される。すなわち，壁体の長さ方向に3次元分布を考え，この分布曲線によって囲まれる面積が $p_T' \times l$（p_T' は長さ方向の各断面で異なっている）になるように曲線を定めれば，各断面における分布曲線の集りが運動方程式を満足することになる。実際には振幅と同時に位相角の分布も考慮に入れなければならない。

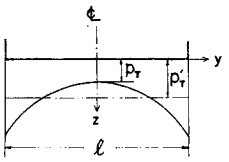


Fig. 15 Horizontal distribution of vertical oscillating earth pressure at the longitudinal section passing through the cell No. 6

Fig. 16 に示すように座標を定め，壁体の幅方向の断面における底面振動土圧の分布を前節と同様に直線分布とし，その中央断面における分布を

$$(X-X_0)\frac{p_T}{r'}$$

とする。また y 軸方向の分布形状については，すでに **4.(1)** で論じた方法の応用として二つの放物筒面の交線として表わすこととする。いま任意の点における底面振動土圧を $\boldsymbol{p}_b$ とすると $\boldsymbol{p}_b$ は次式で表わされる。

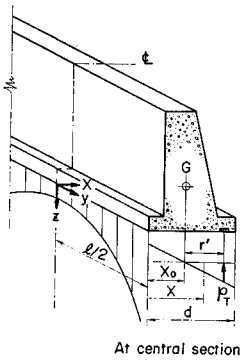


Fig. 16 Three dimensional distribution of vertical oscillating earth pressure acting on the bottom surface

$$\boldsymbol{p}_b=(X-X_0)\{(E_x y^2+N_x)\cos\omega t - (E_z y^2+N_z)\sin\omega t\} \quad \cdots\cdots(17)$$

この式に含まれる係数を中央断面における実測値で表わしてみる。Eq.(17) に $y=0$, $X=X_0+r'$ で $\boldsymbol{p}_b=\boldsymbol{p}_T\cos(\omega t+\gamma_T)$ という条件を入れると

$$\left.\begin{aligned} N_x&=\frac{p_T}{r'}\cos\gamma_T \\ N_z&=\frac{p_T}{r'}\sin\gamma_T \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(18)$$

をえる。底面分布土圧による合モーメント $\boldsymbol{M}_b$ は

$$-\boldsymbol{M}_b=\int_{-l/2}^{l/2}\int_0^d (X-X_0)\boldsymbol{p}_b dX dy = J_3\left\{\left(\frac{E_x l^2}{12}+N_x\right)\cdot\cos\omega t-\left(\frac{E_z l^2}{12}+N_z\right)\sin\omega t\right\}$$

これが Eq. (16) を満足させるためには次式が成立しなければならない。

$$J_3\left\{\left(\frac{E_x l^2}{12}+N_x\right)\cos\omega t-\left(\frac{E_z l^2}{12}+N_z\right)\sin\omega t\right\} = \frac{J_3}{r'}\boldsymbol{p}_T' = \frac{J_3}{r'}\nu\, p_T\cos(\omega t+\gamma_T+\varepsilon)$$

この式から

$$\left.\begin{aligned} E_x&=\frac{12}{l^2}\frac{p_T}{r'}\{\nu\cos(\gamma_T+\varepsilon)-\cos\gamma_T\} \\ E_z&=\frac{12}{l^2}\frac{p_T}{r'}\{\nu\sin(\gamma_T+\varepsilon)-\sin\gamma_T\} \end{aligned}\right\} \cdots(19)$$

をえる。したがって実測値を満足する運動方程式は Eq. (16) の代りに次式となる。

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}'+m_0 r_0\omega^2\cos\omega t \\ I\ddot{\Phi}&=\boldsymbol{M}-H\boldsymbol{P}'-\int_{-l/2}^{l/2}\int_0^d (X-X_0)\boldsymbol{p}_b dX dy \\ &\quad +H' m_0 r_0\omega^2\cos\omega t \\ \boldsymbol{p}_b&=(X-X_0)\{(E_x y^2+N_x)\cos\omega t \\ &\quad -(E_z y^2+N_z)\sin\omega t\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(20)$$

ここで N_x, N_z は Eq. (18) で，E_x, E_z は Eq. (19) で与えられる。I 群の実験では $m_0=0$ とおく。

以上，底面に作用する振動土圧を3次元分布と考えることによって，実測によってえられた力と変位は運動方程式 Eq. (20) を満足することを示した。実測した力と変位が運動方程式を満足するということは，これらの実測値を用いて土圧を受ける重力式擁壁の力学モデルを考えて良いということを意味し，Eq. (16) または Eq. (20) は力学モデルを考えるときの指標となるものである。

7. 結びとあとがき

人工地震発生装置を加振源とした実験は，自然地震によって起こる現象の本質をそこなわないようにこれを単純化したものであり，実験に用いられた試験壁体は，現場で用いられている最小程度の規模のものであるから，実験の相似則に気を使うことなく，ここにえられた実験データは現実のありのままの姿を示しているといえよう。またこの実験は隣接地域にかなりの振動障害を起こすので，現在の社会情勢のもとでは，もはやこの実験を再現することがほとんど不可能であることを考え合わせると，この実験結果は，まことに貴重なものであると思う。用いられた測定装置は，その後の急速な技術革新を経た今日からふり返えってみても，いささかも陳腐性を感じさせないばかりか，振動土圧計に至っては，まさに

今日いうディジタル計測の原理そのものであり，このon-off判別の結果を重ね合わせてアナグロ表示したものと考えることができる。ここで用いた振動土圧測定装置に，現在の新しい技術の光をあてて検討すれば，そこに新しい発展への芽がかくされていることが発見できるであろう。

実験によってえられた壁体背後に作用する振動土圧を立体表示法によって表現すれば，ベクトルの振幅と位相，その作用点と時間的変化を同時に表わすことができる。このように実験結果を直視的な形で表現することは，複雑な現象を理解する上で大いに役立つ。またこの立体表示は土圧に限らず，実測値が正弦変化をする場合に広く応用されるものである。

実測によってえられた壁体背後に作用する振動土圧は，Eq.(4)によってあます所なく表現され，この式は簡単に積分されて合力と合モーメントが求められる。このようにして求めた壁体に作用する力とその変位は，**6.(3)**および**6.(4)**で述べたように考えることによって，運動方程式を満足させることができ，この運動方程式を基礎にして，振動中に土圧を受ける壁体の力学モデルへの道が開かれたのである。また**6.(2)**に示した力と変位の間にある定性的な関係，およびEq.(16)またはEq.(20)は力学モデルを考える上での大切な指標となる。

この報告書の最初に述べたように，"振動土圧に関する研究"は2期に区分され，その第1期の研究を総括して文献8)にかかげたものにまとめた。しかしその内容については不満が多く，当初から書き改めたいと願っていた。幸い，実験を最初から組織的に行なう機会にめぐまれ，その実験結果を解析するためにも十分な時間が与えられたので，前報を改訂するつもりで個々の問題に取り組んだ。しかし結果は，この研究の最終目標である力学モデルの完成までの道のりが，はるかに遠くてけわしいことを痛感させられたにとどまり，まことに残念であるとともに著者の力の無さを恥じるばかりとなってしまった。今後，本報告を一つの踏み台として，同学の士が大いにこの分野を発展させられることを切望するものである。

本報告書をとじるに当って，次の方々にお礼申し上げねばならない。第1には，昭和28年に著者がこの研究にたずさわってから延々18年の長い歳月にわたって，常に行きとどいたご指導と，暖かい御はげましを賜わった 学習院大学学長 近藤正夫先生に心からお礼申し上げる。第2には，第2期にあたる研究の機会を与えられ，実験結果の解析に十分な時間を与えて頂いた当研究所の上司の方々に深く感謝の意を捧げる。第3には，第2期の実験をともに行ない，実験資料の整理などに協力して頂いた当研究室山川賢次技官に感謝する。

なお，本報告の詳細は船舶技術研究所報告に登載される予定であることを付記しておく。

参考文献

1) Kondo M, G. Hasegawa, M. Ichihara, and S. Niwa,: Researches on Earth Pressures, Part I, Report of Transportation Technical Research Institute, No. 15, May, 1955, pp. 1～11
2) 市原松平・丹羽 新：人工地震発生装置および地震時土圧測定装置について，土木学会論文集，第38号，昭 31.10 pp. 43～48
3) 丹羽 新：壁体自身の振動による裏込土圧の実測，土木学会論文集，第39号，昭 31.12, pp. 58～61
4) 丹羽 新：振動土圧に関する研究，運輸技術研究所報告，8巻3号，1958年9月，pp. 1～30
5) 丹羽 新：人工地震発生装置による振動土圧の実測，土木学会論文集，第60号，昭 34.1, pp. 54～59
6) 丹羽 新：陰極線オシロスコープによる定常地震動（変位・速度・加速度）の観測装置，土木学会誌，45巻6号，昭 35.6, pp. 29～34
7) S. Niwa, : An Experimental Study of Oscillating Earth Pressures Acting on A Quay Wall, Proc. of the 2nd WCEE, Vol. I, July, 1960, pp. 281～296
8) 丹羽 新：地震時土圧による擁壁の振動機構について，私費出版，昭 36.7, pp. 1～215

(1971.4.30・受付)