

変厚四辺形板の曲げ解析

BENDING ANALYSIS OF QUADRILATERAL PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

倉田宗章*・谷平勉**

By Muneaki Kurata and Tsutomu Tanihira

1. まえがき

異形平板の曲げ問題については、従来から多くの研究者によって、種々の方法が提案されてきている。それらは、ある種の特定な形、または特定の境界条件の板について研究されたものが多いようであるが、一般的な異形板については普遍的な厳密解は見あたらないようと思われる。本研究は、任意の変厚四辺形板の曲げ問題について、解析的近似法によって、厳密解に近い解を求めたものである。本研究では、解析的近似法として、「板内選点最小2乗法」というべき方法を用いた。

板内各点を表現しうる座標系として図-1 のような、 ξ, η 座標を用いる。このような 2 变数 ξ, η 座標を板の解析に応用した例としては、Iron らが有限要素法において、一般的な四辺形要素を用い、その Stiffness Matrix を計算する場合に用いているようであるが、この幾何学的性質を板全体について、有効な方法を提案したものは見あたらぬようである。

本論文でいう「板内選点最小2乗法」は、たわみ関数として境界条件を満たすような2重級数を仮定し、板内部で板のつりあい方程式を満足するように、そのたわみ関数を決定しようとするものである。板内部で板のつりあい方程式を満足させる方法として、著者らは、以前に「板内選点法」と称すべき方法を試みてみた。これは、仮定したたわみ関数の有限個の未知係数を決定するために、未知数の個数と同じ数の板内の点で、板のつりあい方程式を作り、その連立方程式を解くことにより、未知係数を決定するという方法である。この論文では、この板内選点法を発展させて未知係数の個数よりも多くの点を板内にとり各点で成立すべき板のつりあい方程式が誤差を含んでいるものとし、その誤差の2乗和を最小にす

るようく係数を決めるという方法によった。これは観点をかえると、板内にわたって規則的に点を選べば、仮定したたわみ関数の誤差の2乗の関数のシンプソン公式的な数値積分を極小にするという意味をもつものである。これをエネルギーの変分原理からみると、とりもなおさず Galerkin 法に他ならない。しかし「板内選点最小2乗法」の見地に立てば、たとえば関数の急変する部分とか、特に詳細に調べたい部分では細かく点をとるという方法が工学的実用的な意味をもつことがわかる。この方法によると、各選点で独立に板のつりあい方程式をたてることになるので、変断面板でも等断面板と同様、特に困難性は生じない。変断面形状が板剛度として2回微分可能な関数形で与えられるならば、本質的に同じ方法で解くことができる。

本文では、単純支持辺、または固定辺をもつ、任意の等断面および変断面の四辺形板のたわみ、曲げモーメントについて、2重級数の収束性を調べて、解法の妥当性を検討した。

なお、本解析法を手計算ですることはとうてい不可能なことであり、電子計算機を使うことを前提としている。したがって、式の表現にはできるだけプログラミングに都合のいいような表記法を用いた。

2. 板のつりあい方程式

等厚板および変厚板の曲げに関して、たわみ w についてのつりあい方程式を直交座標 (x, y) で表わせば、ラプラスの演算子 Δ を使って次のように書くことができる。

$$D \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + D \Delta w \\ - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q \dots \dots \dots (2)$$

* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

ここで、 q は荷重強度、 D は板剛度、 ν はポアソン比である。

全周単純支持板の場合、境界条件は $w=0$, $\Delta w=0$ であるのでモールの方法により、補助変数 S を使って式(1)を、次のように分解して解くのが便利である。

式(3), (4)を解く場合に全く同じ境界条件となるから, w と S について同じ関数形を仮定し, 同じ方法を 2 度くり返せばよいことになる。変厚板の場合には, 式(2)は次の 2 つの式に分解できる。

$$D \Delta S + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + S \Delta D - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

式(6)は w と S を同時に含むので式(5)と連立させて解く必要があるが、2階の微分方程式になるので取扱いが容易である。

全周固定の場合には、たわみおよびたわみ角が 0 という境界条件を満たすようなたわみ関数を仮定し、直接 4 階の微分方程式(1) または式(2)を解くこともできるが、 S という補助的な関数として境界で任意の値を取り得るような関数形を導入すれば、2 階の微分方程式(3), (4) または式(5), (6)を取り扱うことも可能である。

特に単純支持辺を含む場合には、モールの方法により2階の微分方程式におとすという方法は計算の容易さを考慮すると、次のような利点がある。すなわち図-1のような斜交座標(ξ , η)系を用いてたわみ関数を変数分離形で与える場合、 ξ または η 一定の直線が境界辺と交わる角度は、一般的に直角ではないので、たわみの曲率が0という単純支持条件は複雑となる。そこで S という補助変数を導入して、単純支持辺で $S=0$ という境界条件をみたすような関数形の S を仮定して式(3), (4)または式(5), (6)を並列的もしくは連立的に解くのである。

本文では上述の 2 つの方法を

- (I) 式(3), (4) または式(5), (6) から補助変数 S を用いて 2 階の微分方程式を解く方法
 (II) 式(1) または式(2) から直接 4 階の微分方程式を解く方法

のように分けて、それぞれについて解析法を述べ、境界条件によって適宜使い分けて計算した。

3. 座標変換

板を解析する場合、特に規則的でない形の平板を取り扱

う場合には、板内部を表わす座標系として、数学的に取扱いやすいものを採用するということが重要な出発点になる。境界が全くでたらめな形であれば板内を規則的な座標（たとえば直交座標、極座標）を用いて、板内でつりあい方程式を満足する一般解を求め、境界において支持条件を満たすように、境界選点法等により解くほかないであろう。また境界辺が複雑でも支持条件が単一なものであれば、写像を使って解析した例は多い。

任意の四辺形板については、幾何学的に図-1のような座標 ξ, η により、内部の点を表現できることは明らかである。このような座標を使えば、矩形板、円形板等の場合と同じように境界条件を満たす関数形を仮定できる。ただし内部では微分方程式の形は簡単にはならず、 ξ, η に関するあらゆる微分項がでてくるので、数値的な解法によるのが有利となる。

このように ξ , η の関係は、直交座標や極座標のようには単純ではないが、任意の四辺形板を ξ , η 座標で表わせるという性質を利用して、普通、直交座標で表わされた $44w$, $4w$, その他板の断面力を求めるのに必要なものを、 ξ , η 系の表現に変換する。

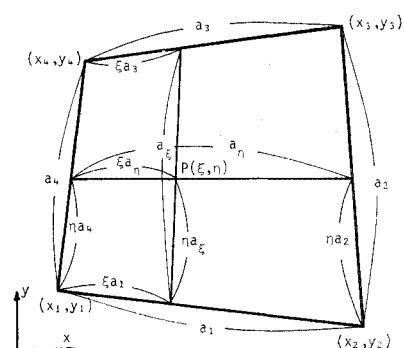
その前になります、 x, y 座標と ξ, η 座標との間の関係を表わすものとして、 $x = F(\xi, \eta)$, $y = G(\xi, \eta)$ という関数を導入する。図-1 の点 $P(\xi, \eta)$ の x, y 座標を四辺形の四隅の座標から幾何学的に定めることにより、関数 F, G は次のように書ける。

$$\left. \begin{array}{l} x = F(\xi, \eta) = \alpha_1 \xi \eta + \beta_1 \xi + r_1 \eta + \delta_1 \\ y = G(\xi, \eta) = \alpha_2 \xi \eta + \beta_2 \xi + r_2 \eta + \delta_2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで係数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i (i=1, 2)$ は四隅の座標によって決まるもので次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ \beta_1 = x_4 - x_1 \\ \gamma_1 = x_2 - x_1 \\ \delta_1 = -x_4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_2 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \\ \beta_2 = y_4 - y_1 \\ \gamma_2 = y_2 - y_1 \\ \delta_2 = -y_1 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

この座標変換の関係をもとにしても、前節の板のつりあ



— 1

い方程式 (1), (2), (3), (6) を変数変換公式を使って, ξ, η による微分方程式に変換する公式を次節に示す。

4. つりあい方程式の変換

一般に (ξ, η) 座標から (x, y) 座標への変換の関係式 F, G を使って, 2変数 ξ, η で表わされたある関数 f の ξ, η に関する偏導関数を, x, y の偏導関数へ変換する公式は次のように導かれる。なお以後の記述で添字として用いられた x, y または ξ, η はそれによる偏微分を意味する。

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{yy} \\ f_{\xi\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_{\xi\xi} \\ f_{\xi\eta} \\ f_{\eta\eta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

この式の係数行列の各項は, 次式によって与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = J^{-1}G_\eta \\ A_2 = -J^{-1}G_\xi \\ B_1 = -J^{-1}F_\eta \\ B_2 = J^{-1}F_\xi \\ T_1 = -J^{-2}(F_\xi G_\eta + F_\eta G_\xi)J_\eta \\ T_2 = -J^{-2}(F_\xi G_\eta + F_\eta G_\xi)J_\xi \\ T_3 = -J^{-2}F_\eta G_\eta \\ T_4 = J^{-2}(F_\xi G_\eta + F_\eta G_\xi) \\ T_5 = -J^{-2}F_\xi G_\xi \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} X_1 = 2J^{-2}G_\xi G_\eta J_\eta \\ X_2 = 2J^{-2}G_\xi G_\eta J_\xi \\ X_3 = J^{-2}G_\eta^2 \\ X_4 = -2J^{-2}G_\xi G_\eta \\ X_5 = J^{-2}G_\xi^2 \\ Y_1 = 2J^{-2}F_\xi F_\eta J_\eta \\ Y_2 = 2J^{-2}F_\xi F_\eta J_\xi \\ Y_3 = J^{-2}F_\eta^2 \\ Y_4 = -2J^{-2}F_\xi F_\eta \\ Y_5 = J^{-2}F_\xi^2 \end{array} \right\} \quad (10)$$

なお $L_i = X_i + Y_i (i=1 \sim 5)$ である。

ここで, 上式中 F, G の ξ, η に関する偏導関数は式 (7) を用いれば, 次のように導かれる。

$$\left. \begin{array}{l} F_\xi = \alpha_1 \eta + \beta_1 \\ F_\eta = \alpha_1 \xi + \gamma_1 \\ F_{\xi\eta} = \alpha_1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} G_\xi = \alpha_2 \eta + \beta_2 \\ G_\eta = \alpha_2 \xi + \gamma_2 \\ G_{\xi\eta} = \alpha_2 \end{array} \right\} \quad (11)$$

また J はヤコビアンであり, $F_{\xi\xi} = F_{\eta\eta} = G_{\xi\xi} = G_{\eta\eta} = 0$ であることを考慮すると, 次の関係が成立つ。

$$\left. \begin{array}{l} J = F_\xi G_\eta - F_\eta G_\xi \\ J_\xi = J^{-1}(F_\xi G_{\xi\eta} - G_\xi F_{\xi\eta}) \\ J_\eta = J^{-1}(G_\eta F_{\xi\eta} - F_\eta G_{\xi\eta}) \end{array} \right\} \quad (12)$$

さて, さらに以後の記述を簡潔にするために, 式 (9) の係数行列の各行の 1~5 までの添字のついた文字を, ひとまとめにして行マトリックスとして取扱い, [] の記号で示し, また板剛度 D , たわみ w , モーメント和 S についてそれらを, $\xi, \eta, \xi\xi, \xi\eta, \eta\eta$ で偏微分したものを 5つの要素をもつ列マトリックスとして取扱い, { } の記号で示す。たとえば,

$$[L] = [L_1, L_2, L_3, L_4, L_5] \quad \{w\} = \{w_\xi, w_\eta, w_{\xi\xi}, w_{\xi\eta}, w_{\eta\eta}\} \quad (13)$$

以上, 式 (9)~(13) で与えた変換式および記号を使って式 (3)~(6) を書きかえると以下のように表わせる。

$$[L]\{w\} = S \quad (14)$$

$$[L]\{S\} = q/D \quad (15)$$

$$D \cdot [L]\{S\} + 2[L]\{D\} \cdot [A]\{S\} + [B]\{D\}$$

$$+ [B]\{S\} + [L]\{D\} \cdot S - (1-\nu)[X]\{D\}$$

$$+ [Y]\{w\} - 2[T]\{D\} \cdot [T]\{w\} + [Y]\{D\}$$

$$+ [X]\{w\} = q \quad (16)$$

次に, $d w$ を ξ, η 系で表わすために, 式(14)の w のところに $d w$ を代入すると,

$$\begin{aligned} d w = [L]\{d w\} &= L_1(d w)_\xi + L_2(d w)_\eta \\ &+ L_3(d w)_{\xi\xi} + L_4(d w)_{\xi\eta} + L_5(d w)_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。この式中の $d w$ を ξ, η で偏微分したものは, たとえば

$$\begin{aligned} (d w)_\xi &= L_{1,\xi} w_\xi + L_{2,\xi} w_\eta + L_{3,\xi} w_{\xi\xi} + L_{4,\xi} w_{\xi\eta} \\ &+ L_{5,\xi} w_{\eta\eta} + L_1 w_{\xi\xi\xi} + L_2 w_{\xi\xi\eta} + L_3 w_{\xi\xi\xi\xi} \\ &+ L_4 w_{\xi\xi\xi\eta} + L_5 w_{\xi\xi\eta\eta} \end{aligned} \quad (18)$$

のようになり, 残りの $(d w)_\eta, (d w)_{\xi\xi}, (d w)_{\xi\eta}, (d w)_{\eta\eta}$ についても, 同様の演算により, $L_{i,\xi}, L_{i,\eta}, L_{i,\xi\xi}, L_{i,\xi\eta}, L_{i,\eta\eta} (i=1 \sim 5)$ を係数とする, $w_\xi, w_\eta, w_{\xi\xi}, \dots$ から $w_{\eta\eta\eta\eta}$ までの 14 個のいくつかをもつ式となる。 $L_{i,\xi}, L_{i,\eta}, L_{i,\xi\xi}, L_{i,\xi\eta}, L_{i,\eta\eta} (i=1 \sim 5)$ は, 式(10), (11), (12) より, $F_\xi, F_\eta, G_\xi G_\eta, F_{\xi\xi}, G_{\xi\xi}, J, J_\xi, J_\eta$ すなわち, 板の 4隅の座標が与えられ, ξ, η 座標系が定まった場合に決まってくる ξ, η の関数によって表わされるもので, ここでは詳述を省く。結局, 式 (18) と同様のこれらの式を式 (17) に代入して, w_ξ, w_η, \dots から $w_{\eta\eta\eta\eta}$ までの 14 項についてまとめ

$$\begin{aligned} d w = C_1 w_\xi + C_2 w_\eta + C_3 w_{\xi\xi} + C_4 w_{\xi\eta} + C_5 w_{\eta\eta} \\ + C_6 w_{\xi\xi\xi} + C_7 w_{\xi\xi\eta} + C_8 w_{\xi\xi\xi\xi} + C_9 w_{\xi\xi\xi\eta} \\ + C_{10} w_{\xi\xi\xi\xi\xi} + C_{11} w_{\xi\xi\xi\xi\eta} + C_{12} w_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} \\ + C_{13} w_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + C_{14} w_{\eta\eta\eta\eta} \end{aligned} \quad (19)$$

と書くことにして, この係数 $C_i (i=1 \sim 14)$ は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = [L]\{L_1\} \quad C_2 = [L]\{L_2\} \\ C_3 = [L]\{L_3\} + L_1^2 + 2L_3L_{1,\xi} + L_4L_{1,\eta} \\ C_4 = [L]\{L_4\} + 2L_1L_2 + 2L_3L_{2,\xi} + L_4L_{1,\xi} \\ + L_4L_{2,\eta} + 2L_5L_{1,\eta} \\ C_5 = [L]\{L_5\} + L_2^2 + L_4L_{2,\xi} + 2L_5L_{2,\eta} \\ C_6 = 2L_3(L_1 + L_{3,\xi}) + L_4L_{3,\eta} \\ C_7 = 2(L_1L_4 + L_2L_3 + L_3L_{4,\xi} + L_5L_{3,\eta}) \\ + L_4(L_{3,\xi} + L_{4,\eta}) \\ C_8 = 2(L_1L_5 + L_2L_4 + L_3L_{5,\xi} + L_5L_{4,\eta}) \\ + L_4(L_{4,\xi} + L_{5,\eta}) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} C_9 &= 2L_5(L_2 + L_{5,\eta}) + L_4L_{5,\xi} \\ C_{10} &= L_3^2, \quad C_{11} = 2L_3L_4, \quad C_{12} = 2L_3L_5 + L_4^2 \\ C_{13} &= 2L_4L_5, \quad C_{14} = L_5^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

最後に式(2)を ξ, η 座標に変換する。たとえば、第2, 3項については、式(9)より

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \\ \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} (\Delta w)_\xi \\ (\Delta w)_\eta \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

と書くことができる。 $(\Delta w)_\xi, (\Delta w)_\eta$ は式(18)およびそれと同様の演算により与えられ、次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \\ \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{1,\xi} & L_{2,\xi} & (L_1 + L_{3,\xi}) \\ L_{1,\eta} & L_{2,\eta} & L_{3,\eta} \\ (L_2 + L_{4,\xi}) & L_{3,\xi} & L_4 & L_5 & 0 \\ (L_1 + L_{4,\eta}) & (L_2 + L_{5,\eta}) & 0 & L_3 & L_4 & L_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\xi & w_\eta & w_{\xi\xi} & w_{\xi\eta} & w_{\eta\eta} & w_{\xi\xi\xi} & w_{\xi\xi\eta} \\ w_{\xi\eta\eta} & w_{\eta\eta\eta} \end{bmatrix}^T \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

式(6)の第1項は式(19)から、第4, 5項は式(9)から変形できるのでこれらをまとめ

$$\begin{aligned} D\Delta w + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + 4D\Delta w \\ - (1-\nu)\left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right. \\ \left. + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = E_1w_\xi + E_2w_\eta + E_3w_{\xi\xi} + E_4w_{\xi\eta} \\ + E_5w_{\eta\eta} + E_6w_{\xi\xi\xi} + E_7w_{\xi\xi\eta} + E_8w_{\xi\eta\eta} + E_9w_{\eta\eta\eta} \\ + E_{10}w_{\xi\xi\xi\xi} + E_{11}w_{\xi\xi\xi\eta} + E_{12}w_{\xi\xi\eta\eta} + E_{13}w_{\xi\eta\eta\eta} \\ + E_{14}w_{\eta\eta\eta\eta} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

とおくことになると、係数 $E_1 \sim E_{14}$ は、

$$\begin{aligned} H(i) &= DC_i + 2[[A]\{D\} \cdot (A_1L_{i,\xi} + A_2L_{i,\eta}) \\ &\quad + [B]\{D\} \cdot (B_1L_{i,\xi} + B_2L_{i,\eta})] + [L]\{D\} \cdot L_i \\ &\quad - (1-\nu)[[X]\{D\} \cdot Y_i - 2[T]\{D\} \cdot T_i \\ &\quad + [Y]\{D\} \cdot X_i]] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

$$H'(i, j) = 2[[A]\{D\} \cdot (A_1L_i + A_2L_j) \\ + [B]\{D\} \cdot (B_1L_i + B_2L_j)] \quad \dots \dots \dots \quad (25)$$

という関数を使って次のように書くことができる。ただし $L_0=0$ とする。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= H(1), \quad E_2 = H(2) \\ E_3 &= H(3) + H'(1, 0) \\ E_4 &= H(4) + H'(2, 1) \\ E_5 &= H(5) + H'(0, 2) \\ E_6 &= DC_6 + H'(3, 0) \\ E_7 &= DC_7 + H'(4, 3) \\ E_8 &= DC_8 + H'(5, 4) \\ E_9 &= DC_9 + H'(0, 5) \\ E_{10} &= DC_{10}, \quad E_{11} = DC_{11}, \quad E_{12} = DC_{12} \\ E_{13} &= DC_{13}, \quad E_{14} = DC_{14} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (26)$$

5. たわみ関数、補助関数の仮定

たわみ関数 w 、および補助関数 S を、 ξ, η の変数分離形で仮定し次のように表現する。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n a_{mn} U(\xi, m) V(\eta, n) \\ S &= \sum_m \sum_n b_{mn} Q(\xi, m) R(\eta, n) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

6. 解 法

2. 節で述べた(I), (II)の方法による解法について述べる。

(1) 等厚板(I)の方法

式(14)に式(27)を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n a_{mn} [L_1 U_\xi V + L_2 U V_\eta + L_3 U_{\xi\xi} V \\ + L_4 U_\xi V_\eta + L_5 U V_{\eta\eta}] = \sum_m \sum_n b_{mn} Q R \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

式(15)についても同様に

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n b_{mn} [L_1 Q_\xi R + L_2 Q R_\eta + L_3 Q_{\xi\xi} R \\ + L_4 Q_\xi R_\eta + L_5 Q R_{\eta\eta}] = q/D \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (29)$$

となる。上記の式(29)は左辺の b_{mn} を未知数とし、その未知数の係数としての[]内の式が、変数 ξ, η および m, n の関数となるような級数式である。この無限級数の未定係数 b_{mn} をいま、有限個 k 個とり、それを $b_i (i=1, \dots, k)$ とする。また、[]内の式を $Z_i(\xi, \eta)$ で表わすこととすると式(29)は

$$\sum_{i=1}^k b_i Z_i(\xi, \eta) = q(\xi, \eta)/D \quad \dots \dots \dots \quad (30)$$

と書くことができる。いま k 個より多い l 個の点で式(30)に対する誤差 $\epsilon_j (j=1, 2, \dots, l)$ を考える。これを式で表現すると

$$\epsilon_j = \sum_{i=1}^k b_i Z_i(\xi_j, \eta_j) - q(\xi_j, \eta_j)/D \quad (j=1, 2, \dots, l) \quad \dots \dots \dots \quad (31)$$

この2乗和 $\sum_{j=1}^l \epsilon_j^2$ を最小にする b_i 、すなわち b_{mn} を決定するためには、

$$\frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{j=1}^l \epsilon_j^2 = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

を k 元連立方程式として解けばよい。 b_{mn} が既知になれば式(28)についても、式(29)の場合と全く同一の方法によって a_{mn} を決定することができる。たわみ関数が決まれば式(9)以下を適当に用いて曲げモーメントが求まる。

(2) 等厚板(II)の方法

式(19), (27)を使って式(1)を変形し整理すると、次

のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n a_{mn} [& C_1 U_\xi V + C_2 U V_\eta + C_3 U_{\xi\xi} V + C_4 U_\xi V_\eta \\ & + C_5 U V_{\eta\eta} + C_6 U_{\xi\xi\xi} V + C_7 U_{\xi\xi} V_\eta + C_8 U_\xi V_{\eta\eta} \\ & + C_9 U V_{\eta\eta\eta} + C_{10} U_{\xi\xi\xi\xi} V + C_{11} U_{\xi\xi\xi} V_\eta \\ & + C_{12} U_{\xi\xi} V_{\eta\eta} + C_{13} U_\xi V_{\eta\eta\eta} + C_{14} U V_{\eta\eta\eta\eta}] \\ = q/D \end{aligned} \quad (33)$$

これは式(28)の[]内の式が異なるだけで、式(29)を解く場合と全く同様の方法で a_{mn} を定めることができる。

(3) 変厚板(I)の方法

式(5),(6)を ξ, η 座標系に変換した式(14),(16)に式(27)を代入して次の2式がえられる。

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n a_{mn} [L_1 U_\xi V + L_2 U V_\eta + L_3 U_{\xi\xi} V + L_4 U_\xi V_\eta \\ + L_5 U V_{\eta\eta}] - \sum_m \sum_n b_{mn} QR = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n a_{mn} [\varrho_1 U_\xi V + \varrho_2 U V_\eta + \varrho_3 U_{\xi\xi} V + \varrho_4 U_\xi V_\eta \\ + \varrho_5 U V_{\eta\eta}] - \sum_m \sum_n b_{mn} [L \{ D \} \cdot QR \\ + \theta_1 Q_\xi R + \theta_2 Q R_\eta + DL_3 Q_{\xi\xi} R + DL_4 Q_\xi R_\eta \\ + DL_5 Q R_{\eta\eta}] = q \end{aligned} \quad (35)$$

なお式(35)における $\varrho_i (i=1, 2, \dots, 5)$, $\theta_i (i=1, 2)$ は次のような式である。

$$\left. \begin{aligned} \varrho_i &= -(1-\nu) [X \{ D \} Y_i - 2 [T] \{ D \} \cdot T_i \\ &+ [Y] \{ D \} \cdot X_i] \quad (i=1, 2, \dots, 5) \\ \theta_i &= 2 [A] \{ D \} \cdot A_i + 2 [B] \{ D \} \cdot B_i + DL_i \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

表-1 3角級数による仮定関数 ($m, n=1, 2, 3, \dots, 0.0 < \xi, \eta < 1.0$)

支 持 条 件 $\xi=\eta=1.0$	$\xi=\eta=0.0$	单 純 支 持		固 定	
		$U=\sin m\pi\xi, \quad Q=\sin m\pi\xi$	$V=\sin n\pi\eta, \quad R=\sin n\pi\eta$	$U=\sin(m+1/2)\pi\xi - (-1)^m \sin m\pi\xi/2, \quad Q=\sin(m-1/2)\pi\xi$	$V=\sin(n+1/2)\pi\eta - (-1)^n \sin n\pi\eta/2, \quad R=\sin(n-1/2)\pi\eta$
单 純 支 持		$U=\cos(m+1/2)\pi\xi - \cos m\pi\xi/2$	$V=\cos(n+1/2)\pi\eta - \cos n\pi\eta/2$	$U=\cos(m+1)\pi\xi - \frac{1}{2}[1-(-1)^m] \cos m\pi\xi - \frac{1}{2}[1+(-1)^m]$	$V=\cos(n+1)\pi\eta - \frac{1}{2}[1-(-1)^n] \cos n\pi\eta - \frac{1}{2}[1+(-1)^n]$
固 定		$Q=\cos(m-1/2)\pi\xi$	$R=\cos(n-1/2)\pi\eta$	$Q=\cos(m-1)\pi\xi$	$R=\cos(n-1)\pi\eta$

表-2 べき級数による仮定関数 ($m, n=1, 2, 3, \dots, -0.5 < \xi, \eta < 0.5$)

支 持 条 件 $\xi=\eta=0.5$	$\xi=\eta=-0.5$	单 純 支 持		固 定	
		$U=Q=\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)\left\{\xi^{m+1}-\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\xi}{3}\right)-(-1)^m\left(\frac{1}{2}-\frac{\xi}{3}\right)\right)\frac{2m+3}{2^{m+1}}\right\}$	$V=R=\left(\eta^2-\frac{1}{4}\right)\left\{\eta^{n+1}-\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta}{3}\right)-(-1)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{3}\right)\right)\frac{2n+3}{2^{n+1}}\right\}$	$U=\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2\left(\xi^m+(-1)^m\frac{m+1}{2^{m+1}}\right)$	$V=\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\left(\frac{1}{2}-\eta\right)^2\left(\eta^n+(-1)^n\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$
单 純 支 持		$U=\left(\frac{1}{2}+\xi\right)^2\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\left(\xi^m-\frac{m+1}{2^{m+1}}\right), \quad Q=\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\xi^{m-1}$	$V=\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^2\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\left(\eta^n-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right), \quad R=\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\eta^{n-1}$	$U=\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2\left(\frac{1}{2}+\xi\right)^2\xi^{m-1}, \quad Q=\xi^{m-1}$	$V=\left(\frac{1}{2}-\eta\right)^2\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^2\eta^{n-1}, \quad R=\eta^{n-1}$
固 定					

み関数 w および補助関数 S としては、3角級数による方法と、べき級数による方法について計算を行なった。表一1、表一2に仮定した関数型を示す。べき級数の場合には、 ξ, η 座標の原点を板の中央にもってきて、板内部を $-0.5 \leq \xi, \eta \leq 0.5$ で定義する。この場合、式(8)が座標移動によって少し変化するだけである。

(2) 変厚形状については、板剛度が ξ, η の関数として、2階導関数まで求まるものであれば、どんな形のものでもよいわけであるが、数値計算例としては、次式で表わされるような放物線関数型の板剛度を取扱った。

$$D = [4(\alpha-1)(\xi-0.5)^2 + 1] \cdot [4(\alpha-1)(\eta-0.5)^2 + 1] D_c \quad (0 \leq \xi, \eta \leq 1.0) \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

ただし α は 0.3 の場合について計算した。この時の板剛度 D 、および板厚 h の分布形状を中央点 ($\xi=\eta=0.5$) の値 D_c, h_c を基準として現わしたものを見図-2 に示す。

(3) 2重級数 $\sum_m \sum_n$ の項数を増加させた時の収束性を調べるために、 $m, n=1, 2, \dots, M$ の M の値が 3, 5, 7, 9, 11 なる場合について計算した。計算は原級数の対

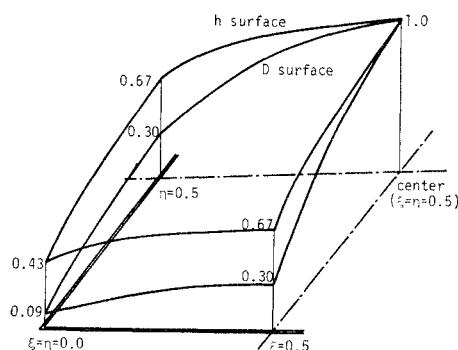


図-2

角級数を採って行ない、 $m+n > M+1$ の範囲の項は省いたので未知数の個数 k は $k=M(M+1)/2$ で表わされる。

(4) 選点の数 l は、未知数の個数 $k=M(M+1)/2$ に対して、 $l=M^2$ をとり、その位置は一边を $(M+1)$ 等分し、相対 2 辺の各点を結んでえられる網目の点を選んだ。したがって集中荷重の取扱いは、ちょうど差分法による場合と同じように 1 つの網目のまことに分布するものと考えることができる。

(5) 本方法の妥当性、および収束性を調べるために、厳密解のわかっているものの例として、全周単純支持、全周固定、および相隣る 2 辺単純、残り固定の正方形板について、さらに異形の例として図-3 のような板形の場合について、項数を増加させた場合の、中央点 ($\xi=\eta=0.5$) のたわみ、曲げモーメント、固定辺上の曲げモーメントの値を、

a) 全面等分布荷重、中央点集中荷重

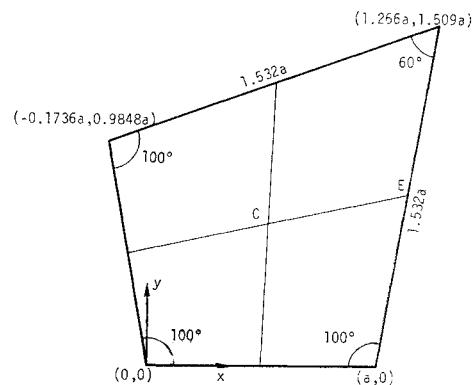


図-3

表-3 全周単純支持正方形板に等分布荷重が載荷した場合

板厚	$m (=n)$	未知係数の個数	中央点たわみ (qa^4/D_c)				中央点曲げモーメント $M_x (qa^3)$			
			三角級数		べき級数		三角級数		べき級数	
			(I)の方法	(II)の方法	(I)の方法	(II)の方法	(I)の方法	(II)の方法	(I)の方法	(II)の方法
等厚板	3	6	0.003688	0.003688	0.003756	0.003999	0.04469	0.04469	0.04508	0.04722
	5	15	0.003894	0.003894	0.003936	0.004060	0.04647	0.04647	0.04679	0.04790
	7	28	0.003967	0.003967	0.003995	0.004058	0.04699	0.04699	0.04728	0.04785
	9	45	0.004001	0.004001	—	0.004061	0.04739	0.04739	—	0.04788
	11	66	0.004020	0.004020	—	0.004062	0.04748	0.04748	—	0.04788
	Timoshenko		0.00406				0.0479			
変厚板	3	6	0.004435	0.004443	0.004448	0.004722	0.04934	0.04944	0.04856	0.05044
	5	15	0.005141	0.005158	0.005174	0.005488	0.05339	0.05358	0.05357	0.05598
	7	28	0.005471	0.005491	0.005517	0.005801	0.05579	0.05601	0.05614	0.05821
	9	45	0.005653	0.005671	—	0.005942	0.05722	0.05743	—	0.05931
	11	66	0.005765	0.005781	—	0.006015	0.05794	0.05810	—	0.05983

表-4 相隣る2辺が単純支持、残り2辺が固定された正方形板に等分布荷重が載荷した場合
[(II)の方法による場合]

板厚	$m (=n)$	中央点たわみ (qa^4/D_c)		中央点曲げモーメント $M_x (qa^2)$		固定辺中点 ($\xi=1.0$, $\eta=0.5$) の曲げモーメント $M_x (qa^2)$	
		三角級数	べき級数	三角級数	べき級数	三角級数	べき級数
等厚板	3	0.001958	0.002088	0.03050	0.03033	-0.04037	-0.06650
	5	0.002046	0.002103	0.02960	0.03050	-0.04970	-0.06799
	7	0.002084	0.002101	0.03064	0.03039	-0.05448	-0.06770
	9	0.002093	0.002099	0.03037	0.03039	-0.05718	-0.06757
	11	0.002096	0.002099	0.03052	0.03039	-0.05888	-0.06772
Timo.		—		0.0304		-0.0678	
変厚板	3	0.002674	0.002834	0.03836	0.03670	-0.01938	-0.03291
	5	0.003008	0.003216	0.04547	0.03924	-0.02926	-0.04540
	7	0.003205	0.003349	0.03970	0.04001	-0.03573	-0.05168
	9	0.003282	0.003407	0.03878	0.04048	-0.03983	-0.05504
	11	0.003331	0.003432	0.04016	0.04066	-0.04261	-0.05675

表-5 全周固定正方形板に等分布荷重が載荷した場合
[(II)の方法による場合]

板厚	$m (=n)$	中央点たわみ (qa^4/D_c)		中央点曲げモーメント $M_x (qa^2)$		($\xi=1.0$, $\eta=0.5$) 点の曲げモーメント $M_x (qa^2)$	
		三角級数	べき級数	三角級数	べき級数	三角級数	べき級数
等厚板	3	0.001256	0.001259	0.02552	0.02270	-0.02994	-0.05100
	5	0.001263	0.001266	0.02273	0.02260	-0.03689	-0.05147
	7	0.001286	0.001265	0.02370	0.02291	-0.04097	-0.05145
	9	0.001289	0.001266	0.02335	0.02289	-0.04310	-0.05187
	11	0.001279	0.001271	0.02331	0.02296	-0.04441	-0.05393
Timo.		0.00126		0.0231		-0.0513	
変厚板	3	0.002339	0.001847	0.04330	0.02937	-0.01770	-0.02608
	5	0.002108	0.002061	0.02718	0.03063	-0.02362	-0.03536
	7	0.002194	0.002192	0.03411	0.03091	-0.02881	-0.04014
	9	0.002195	0.002156	0.03084	0.03112	-0.03204	-0.04269
	11	0.002209	0.002170	0.03306	0.03123	-0.03426	-0.04437

表-6 全周単純支持異形板(図-2の形)
に等分布荷重が載荷した場合
(三角級数で仮定した場合)

板厚	$m (=n)$	中央点たわみ (qa^4/D_c)		中央点曲げモーメント $M_x (qa^2)$	
		(I)の方法	(II)の方法	(I)の方法	(II)の方法
等厚板	3	0.007760	0.007411	0.06425	0.06264
	5	0.008255	0.007851	0.06955	0.06598
	7	0.008396	0.007988	0.06799	0.06642
	9	0.008477	0.008051	0.07060	0.06706
	11	0.008512	0.008086	0.06894	0.06710
変厚板	3	0.009203	0.008820	0.06958	0.06749
	5	0.01070	0.01030	0.07893	0.07523
	7	0.01137	0.01105	0.07880	0.07826
	9	0.01177	0.01149	0.08435	0.08131
	11	0.01201	0.01178	0.08223	0.08232

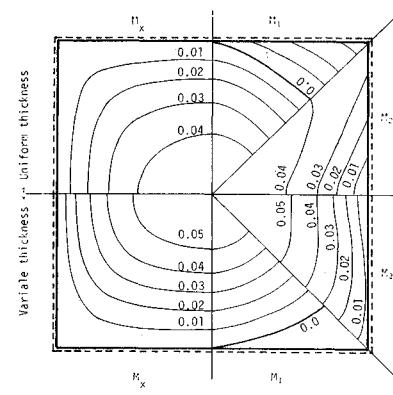


図-4 全周単純支持正方形板に等分布荷重が載荷した場合の曲げモーメント M_x , 主モーメント M_1 , M_2 の図 (qa^2)

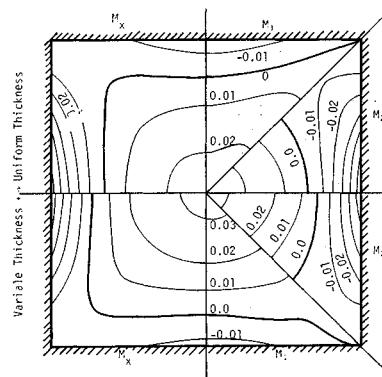


図-5 全周固定正方形板に等分布荷重が載荷した場合の曲げモーメント M_x , 主モーメント M_1 , M_2 の図 (qa^2)

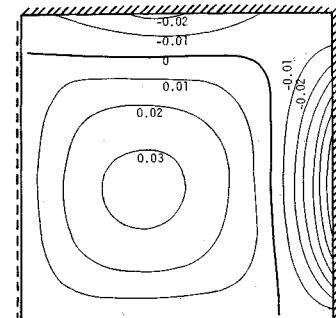


図-6 相隣る2辺が単純支持、残り2辺が固定された正方形板に等分布荷重が載荷した場合の曲げモーメント M_x の図 (等厚板の場合) (qa^2)

表-7 全周固定異形板（図-2 の形）に等分布荷重が載荷した場合
〔(II)の方法による場合〕



板厚	m (=n)	中央点たわみ (qa^4/D_c)		中央点曲げモーメント $M_x(qa^2)$		$(\xi=1.0, \eta=0.5)$ 点の曲げモーメント $M_x(qa^2)$	
		三角級数	べき級数	三角級数	べき級数	三角級数	べき級数
等厚板	3	0.002178	0.002516	0.02962	0.03107	-0.03698	-0.07274
	5	0.002127	0.002647	0.02725	0.03375	-0.04354	-0.06702
	7	0.002236	0.002640	0.02820	0.03314	-0.04948	-0.06587
	9	0.002321	0.002640	0.02977	0.03327	-0.05333	-0.06579
	11	0.002380	0.002637	0.03003	0.03324	-0.05594	-0.06518
変厚板	3	--	0.003507	--	0.03775	--	-0.03561
	5	--	0.004210	--	0.04418	--	-0.04609
	7	--	0.004449	--	0.04465	--	-0.05238
	9	--	0.004526	--	0.04544	--	-0.05550
	11	--	0.004547	--	0.04540	--	-0.05669

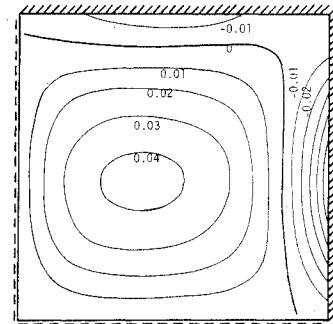


図-7 相隣る 2 辺が単純支持、残り 2 辺が固定された正方形板に等分布荷重が載荷した場合の曲げモーメント M_x の図（変厚板の場合）
(qa^2)

表-8 全周単純支持正方形板の中央に集中荷重が載荷した場合
(三角級数で仮定した場合)



板厚	m (=n)	中央点たわみ (Pa^4/D_c)		$(\xi=0.4, \eta=0.5)$ 点の曲げモーメント $M_x(P)$	
		(I)の方法	(II)の方法	(I)の方法	(II)の方法
等厚板	3	0.01109	0.01109	0.1699	0.1699
	5	0.01134	0.01134	0.1930	0.1930
	7	0.01144	0.01144	0.2048	0.2048
	9	0.01149	0.01149	0.2100	0.2100
	11	0.01152	0.01152	0.2113	0.2113
	Tim. 0.01160			--	
変厚板	3	0.01433	0.01451	0.1956	0.1978
	5	0.01498	0.01452	0.2199	0.2151
	7	0.01487	0.01548	0.2286	0.2349
	9	0.01587	0.01511	0.2397	0.2320
	11	0.01516	0.01594	0.2338	0.2416

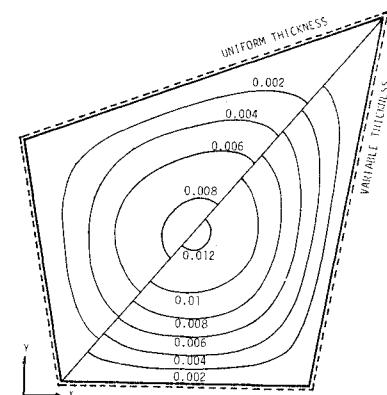


図-8 全周単純支持異形板に等分布荷重が載荷した場合のたわみの図 (qa^4/D_c)

表-9 全周単純支持異形板（図-2 の形）の中央に集中荷重が載荷した場合
(三角級数で仮定した場合)



板厚	m (=n)	中央点たわみ (Pa^4/D_c)		$(\xi=0.4, \eta=0.5)$ 点の曲げモーメント $M_x(P)$	
		(I)の方法	(II)の方法	(I)の方法	(II)の方法
等厚板	3	0.02301	0.02007	0.2497	0.2189
	5	0.02504	0.02499	0.2955	0.2903
	7	0.02457	0.02342	0.3084	0.2959
	9	0.02531	0.02488	0.3204	0.3159
	11	0.02489	0.02390	0.3190	0.3099
変厚板	3	0.02921	0.02452	0.2838	0.2420
	5	0.03335	0.03565	0.3419	0.3531
	7	0.03094	0.02828	0.3384	0.3158
	9	0.03590	0.03683	0.3714	0.3796
	11	0.03174	0.03007	0.3475	0.3329

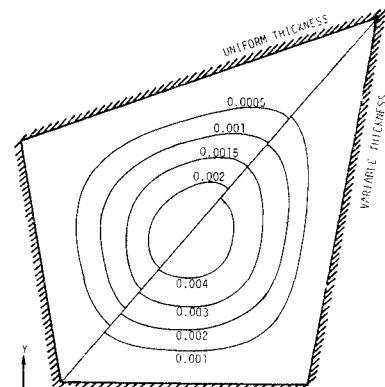


図-9 全周固定異形板に等分布荷重が載荷した場合のたわみの図 (qa^4/D_c)

表-10 全周単純支持正方形板に等分布荷重が載荷した場合の隅角部集中反力
[べき級数, (II) の方法による] (qa^2)

$m (=n)$	等 厚 板	変 厚 板
3	0.06164	0.007430
5	0.06369	0.009525
7	0.06420	0.01071
9	0.06457	0.01131
11	0.06475	0.01165
Timoshenko	0.065	—

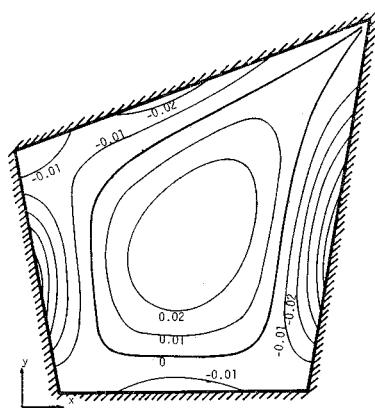


図-10 全周固定等厚異形板に等分布荷重が載荷した場合の曲げモーメント M_x の図 (qa^2)

- b) 等厚板, 変厚板
- c) 仮定する関数型として, 3角級数, べき級数
- d) (I)の方法, (II)の方法

の各組合せの場合について計算した。それらを表-3～10に示す。それらのうちのいくつかについて、曲げモーメントの等高線図を図-4～10に示す。ただし、集中荷重の場合の曲げモーメントは中央点より少しづれた点 ($\xi=0.4, \eta=0.5$) の値により収束性を調べた。

8. あとがき

各場合の計算結果を考察することにより、次のようなことがいえる。まず各場合の収束性については、境界条件、荷重状態、板形によっても異なってくるし、3角級数によるか、べき級数によるかによっても、また(I)の方法、(II)の方法によってもそれぞれ収束性は違ってくる。一般的にいって、本計算の範囲内では板形がいびつになるほど収束性がわるくなるようである。また等分布荷重の場合、3角級数を用いた場合には、固定よりも単純支持の方が収束性がよく、べき級数では、単純支持の場合も非常に精度がよいが、固定板の場合に特に固定辺付近での性状をよく表わしうるようである。集中荷重の場合には、べき級数よりもむしろ3角級数の方が比較

的迅速に収束する。同じ項数をとった場合に、3角級数とべき級数では、板中央部ではよく一致するが、周辺部では誤差の程度が異なるようである。たとえば、2辺単純支持2辺固定の M_x の分布形状を調べると、 $M_x=0$ となる位置が辺長の1割程度ずれてくるところもある。

また、理論解では載荷点は特異点であって応力は∞となるから、本方法と理論解または実験との比較によって近似度を検証し、適用領域を推定しなければならない。

単純支持の場合、2.でも述べたように矩形でない板のたわみを表-1, 2で示したような関数で仮定して、補助変数 S (モーメント和) を使って境界を処理することにすれば、中央部の曲げモーメント、たわみ等は、正方形の場合(表-3)に比べると収束性は良くはないが、かなり妥当な値に収束していくものと考えられる。単純支持辺近くで曲げモーメントが問題になることはあまりないので曲げモーメントに関する限りはこの方法でかなり良い結果がえられるものと思われる。せん断力、反力についての信頼性を検討するのは困難であるが、正方形、等厚、等分布荷重の場合の隅角部集中反力の値(表-10)が Timoshenko の値に非常によく一致することから考えて、周辺部での値、反力等についても妥当な値が得られると考えられる。固定板の場合には、たわみおよびたわみ角が0という条件を容易に仮定することができるので、単純支持の場合に比べると簡単に処理できる。しかし3角級数を用いた場合、3角級数の性質から、たわみ角が0という条件を入れると、モーメントの変化率も0という条件が同時にいってしまうのでどうしても収束性が悪くなる。べき級数で仮定した場合には非常に収束性がよい(表-5, 7)。中央部分では3角級数、べき級数の差はほとんどなくどちらもよく収束するようである。

全周単純支持異形板の場合、(II)の方法によるのは、周辺条件を満足させることができ一般に困難となるので、(I)の方法によるのが適当であるが、参考のため表-6, 9に両者の計算値を示す。この結果を見ると(I)の方法によるものと、(II)の方法によるものとで収束値がやはり異なっている。これは関数の仮定が境界で不適切であるからであるが、板中央付近では、等分布荷重の場合、両者の差は約数%程度で板形がもっと矩形に近づけばもっと差は小さくなると思われる。

変厚板で集中荷重の載荷した場合、特に異形板の場合には、べき級数を用いたものは、項数を増加していっても、モーメントの値は振動するような状態になり適切な解を判定することは困難である。3角級数を用いてもやはり少し振動があるが、ある値を中心で振動しながら収束するような状態になり、適当な処理を行なえば、近似的にはある程度の信頼性のある値がえられるものと考えられる。

以上の数値計算を通じて結論としていえることは、異形（四辺形）板で等厚断面の場合、および矩形板で変断面の場合には、工学的に十分実用的な解がえられるようである。したがって本方法により任意の四辺形板の解が多項式で与えられる。また変断面形状が微分可能な関数で与えられれば、どのような変断面板でも解くことができるものと考えられる。ただし異形でかつ変断面の場合には断面力の値はかなり誤差を含むようで、特に集中荷重の場合には1割程度の誤差があるものと思われる。それらの場合には、十分収束するところまで項数を増加させる必要があろう。なお自由辺のある場合には、この方法をそのまま使えないが、今後の問題として挙げることができるだろう。

最後に本研究は文部省科研費の補助を得、また計算は京都大学大型計算機センターを利用したこと記しておく。

参考文献

- 1) Fuchssteiner, W. : "Entwicklungsfunctionen für Polygona Begrenzte Dünne Platten", Bauingenieur, Vol. 28, Heft 3, p. 243, 1953
- 2) 小松定夫：“平行四辺形板の曲げについて”，土木学会論文集第33号，p. 12, 1956
- 3) Conway, H.D. : "The Approximate Analysis of Certain Boundary-value Problems", J. of Appl. Mech. Vol. 27, p. 275-277, 1960
- 4) Conway, H.D. : "The Bending, Buckling, and Flexural Vibration of Simply Supported Polygonal Plates by Point-Matching", J. of Appl. Mech., Vol. 28, p. 288-291, 1961
- 5) Kacner, A. : "Bending of Thin Anisotropic Plates of Variable Thickness", Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Tech., 9, 4, p. 201-207, 1961
- 6) Conway, H.D. : "Triangular Plates Analyzed by Point-Matching", J. of Appl. Mech., Vol. 29, p. 755-756, 1962
- 7) 岡村宏一：“異形平板の境界値問題に対する選点法の応用について”，大阪工業大学紀要, p. 185, 1963
- 8) Contri, L. : "Exact Solution of a Problem of Rectangular Elastic Plates of Variable Thickness", J. of Math. Phys. 43, 1, p. 72-74, 1964
- 9) Yonezawa, H., Mikami, I. : "Deflexion and Bending Moment of Orthotropic Rectangular Plates of Variable Thickness", Proc. 14th Japan National Congr. for Appl. Mech., 39-43, 1965
- 10) Basuri, S. : "Bending of Uniformly Compressed Rectangular Plate of Variable Thickness under Lateral Loads", Indian J. of Theoretical Physics, 13, 3, 73-81, 1965
- 11) Desayi, P. : "Approximate Solution of Simply Supported Rectangular Plate of Variable Thickness", J. of Instn. Engrs. India, 45, 9, Part CI 5, 748-754, 1965
- 12) Feng, G.G. : "Bending of Elastic Plate with Arbitrally Shapes", Proc. of A.S.C.E., EMD, 93, 6, 167-178, 1967
- 13) Ergatoudis, I., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. : "Curved, Isoparametric, "Quadrilateral" Elements for Finite Element Analysis", Int. J. Solid Structures, Vol. 4, 31-42, 1968
- 14) 久保慶三郎・吉田 裕：“任意形状の平板曲げの数値解析法”，土木学会論文集，第167号，p. 9-22, 1969
- 15) Mazumber, J. : "A Method for Solving Problems of Elastic Plates of Arbitrary Shape", J. of Australian Math. Society, 11, 1, 95-112, 1970
- 16) Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. : "Theory of Plates and Shells", 2nd Ed. McGraw-Hill, 1959
- 17) 倉田宗章・谷平 勉：“任意四辺形板の解析”，土木学会第24回年次学術講演会講演集，第I部，p. 111-114
- 18) 倉田宗章・谷平 勉：“四辺形板の曲げ解析”，昭和45年度土木学会関西支部年次学術講演会概要
- 19) 倉田宗章・谷平 勉：“四辺形板の曲げ解析(つづき)”，土木学会第25回年次学術講演会講演集，第I部 p. 267-270
- 20) Kurata, M., Tanihira, T. : "Numerical Analysis of Quadrilateral Plates", Memoirs of Faculty of Engineering, Osaka City University, Vol. 11, Dec., 1970

(1971.5.13・受付)