

# 土工機械の待合せに関する基礎的考察

## FUNDAMENTAL STUDY ON THE QUEUING SYSTEMS IN EARTH MOVING

畠 昭 治 郎\*・荒 井 克 彦\*\*  
By Shojiro Hata and Katsuhiko Arai

### 1. ま え が き

工程管理に対するネットワーク手法の応用にみられるように、システム工学、OR などの適用による施工計画の合理化が進展しつつあるが、その根底をなす考え方は最適施工の定量的評価といえる。多面的要素から成る施工計画最適化理論の確立には広範な分野に関する組織的研究が必要であるが、本論文では機械化土工を対象とし施工作業に基づいた基礎的な面から施工を定量的に表現することを目的として、施工作業時間分布、土工機械の待合せに関する検討を試みた。

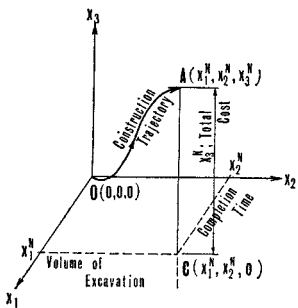
### 2. 機械化土工のモデル化

#### (1) 最適施工計画

現実の土木施工において現場技術者が工事管理の目標としている施工計画が最適計画であるという保証は明らかでなく、また必ずしも当初の計画通りに工事が進行するとは限らないため十分な施工管理を行ないにくく、さらに工事終了後、最適施工を行なったかどうかの評価も

困難である。工事規模の拡大に伴い施工の計画や管理が一層複雑になり、各場合の目的に応じた最適施工を行なうためには、定量的評価に基づいて施工計画を決めることが必要である。

施工計画最適化の評

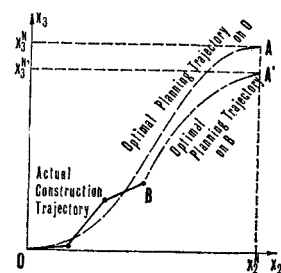


図—1

価は工期および工事全体に対してなされるべきであり、たとえば機械化土工において総掘削運搬土量  $x_1^N$ 、工期  $x_2^N$  が与えられている場合、総工費  $x_3^N$  を最小にする問題は次のように表現される。図—1 に示すように累積掘削運搬土量  $x_1$ 、工期  $x_2$ 、累積工費  $x_3$  を座標軸とする 3 次元状態空間において、原点  $O$  が工事開始点に相当し、工事が進むにしたがい図に示すような工事径路が描かれ、与えられた  $x_1^N, x_2^N$  により、工事径路が点  $C$  の上に到達したとき、すなわち  $A$  点が工事終了点に対応する。施工計画、管理の内容に応じて工事径路が変化するから総工費を表わす  $x_3^N$  もそれぞれの場合に応じて異なる。したがって最適施工計画を決める問題は評価関数が式 (1) で表わされるような、 $O$  から  $A$  に至る最適工事径路の決定問題に置き換えられる。

$$J = x_3^N \rightarrow \min \dots\dots\dots (1)$$

しかし実際の土木施工における土質、天候、その他の不確定な作業条件の下では、初めの計画どおり工事が進行することは期待できない。したがって不確定条件の下での最適施工計画を立てる場合、計画目標に対して実際の施工工程を制御するような施工管理を前提とせざるを得ない。しかも現段階の機械化施工では、この制御作用を計画において評価することが困難である。したがって当面は計画と管理を分離し、施工計画の段階では、工事径路における不確定条件をたとえば確率的なものとして処理することにより、工事開始から終了までの施工管理



図—2

の目標としての最適工事径路を決め（静的最適化）、施工管理の段階で、決められた最適工事径路に近づくように工程管理その他の管理を行なう方式が考えられる。

図—2 に示すように、工事進行現時点を表わす

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科  
\*\* 正会員 工修 鹿島建設(株) 土木見積部

B 点において新たに立てた計画最適工事径路は、O 点で立てた計画最適工事径路と異なるであろう。したがって工事進行のいくつかの段階で、その時点以後の計画最適工事径路を修正し、それを新たな目標として工事を進める、いわゆる適応制御に相当する方式が考えられるが、ここでは深くは立ち入らないで置く。また、将来の方向として建設の機械化が総合化、自動化の段階に進むことにより施工計画の内容も最適化制御、適応制御へと発展してゆくことが期待される<sup>1)</sup>。

(2) 機械化土工計画の基本的表現

機械化土工を分析してみると、その支配的特性が 図-3 に示すように、掘削、運搬、捨土という同一作業のくり返しであることが容易に理解され、このくり返して行なわれる作業サイクルを一つのシステムとみることが自然であろう。実際の工事では掘削、運搬、捨土の土工作業が単独で存在するわけではなく、他の施工作业や自然条件

などの影響下にあることから、図-3 に示すように土工全体の中に前述の掘削運搬捨土システムが存在し、施工における他の要素（環境）は制限条件、外乱などとしてシステムと互いに応答し合うと解釈する。次に土工の工程をみると、土工開始から完了まで掘削運搬捨土システム自体は変化せず、土工機械操作台数、運搬距離などのシステム変数と、土質、天候などの環境条件が工程に応じて変化することが理解される。以上のことから機械化土工における最適工事径路決定問題は、掘削運搬捨土システムの工程における最適操作問題として表わされ、たとえば工程における変化を離散的なものとして仮定すると、単純な多段決定過程として次のように表現される。図-4 において  $\theta^n, X^n, U^n$  はそれぞれ第  $n$  段階における操作変数、状態変数、外乱であり、これらのシステム変数は次の工期単位に移る場合にのみ変化しうるとする。 $\theta^n$  には機械操作台数、稼働時間など自由に操作しうるもの、 $U^n$  には天候その他全く制御できないものが含まれ、 $X^n$  は 図-1 を参照して次式で表わされる。

$$X^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n) = (\text{累積掘削運搬土量}^n, \text{工程}^n, \text{累積工費}^n) \dots\dots\dots(2)$$

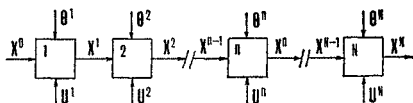


図-4

一方、掘削運搬捨土システムが後述するように作業時間を用いて表わされることから、3. で述べるように作業条件により作業時間分布があらかじめ得られるならば、掘削の進行に応じて、つまり  $X^{n-1}$  から工期単位  $n$  における作業条件が決り、したがって  $x_1^n$  は  $X^{n-1}, \theta^n, U^n$  から求められることになる。同様に、一般に  $X^n$  について次のような状態方程式が成立する。

$$X^n = F(X^{n-1}, \theta^n, U^n) \dots\dots\dots(3)$$

境界条件、制限条件は 図-1 を参照して適当に決められ、最適工事径路決定問題は評価関数が式 (1) で与えられるような、制約条件つき変分問題となり、DP、離散型最大原理などを用いた定式化<sup>2)</sup>が可能である。

機械化土工においては、土工機種、容量、設備台数、地山掘削順序などに関して種々の施工案が考えられるのが普通であり、最適施工計画を得るには、各施工案を前述のような方法により最適化した上で、その結果を比較するという手順が必要である。

(3) 掘削運搬捨土作業のモデル化

最適土工計画を掘削運搬捨土システムの最適操作問題として定式化するには、掘削運搬捨土システムをモデル化することにより定量的に表現する必要がある。土工機械の種類は多数であり、実際の工事では、いくつかの機種を併用する場合が多く、工事現場ごとの個別性はかなり強い。このような個別性の表現が可能であり、しかも一般的なモデルを得るための変数として作業時間を選ぶことにする。以下に、ショベル・ダンプトラック組合せ作業を例にとり具体的なモデル化の例を示す。

a) 掘削積込作業

ダンプトラックがショベルの両側に入るか、片側のみに入るか、およびショベルが複数の場合、積込みを受けるために待機するダンプトラックが各ショベルごとに待ち行列をつくるか、すべてのショベルに共通の待ち行列をつくるかにより、掘削積込作業形式としては 4 種類が考えられるが、簡単のためショベル 1 台、ダンプトラックがショベルの片側にのみ入る場合のモデルを 図-5, 6, 7, 表-1 に示す。第  $n$  番目に到着したダンプトラックは先のダンプトラックが積込みを終わって出発していれば

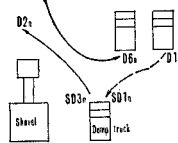


図-5 施工機械移動図 ( $D_{6n} > D_{2n-1}$ )、ただしにショベ

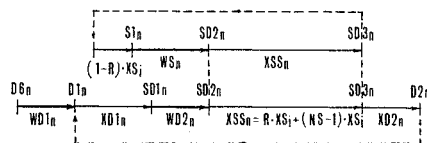


図-6 作業時間関係

表-1

	記号	説明
ダンプトラック	$D_{6n}$	積込みのための待ち行列位置に到着する時刻
	$WD_{1n}$	待ち行列位置で待つ時間
	$D_{1n}$	ショベル横へ入るために待ち行列位置を出る時刻
	$XD_{1n}$	待ち行列位置からショベル横までの走行時間
	$SD_{1n}$	ショベル横へ到着する時刻
	$WD_{2n}$	ショベル横で待つ時間
	$SD_{2n}$	積込開始時刻
	$SD_{3n}$	積込終了時刻
	$XD_{2n}$	ショベル横を去るのに要する時間
	$D_{2n}$	ショベル横を去った時刻
ショベル	$S_{1n}$	積込準備を終了する時刻
	$WS_n$	ショベルの待ち時間
	$XSi$	掘削→放土の1回の積込時間 ( $i=1,2,\dots,NS$ )
	$R$	$XSi$ において放土時間の占める割合 ( $0 < R < 1$ )
	$NS$	1台のダンプに対する積込回数

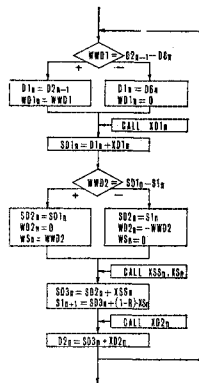


図-7 シミュレーション・フローチャート

ル横に入り、逆の場合はそのままダンプトラック待機位置で待つ。待ちが終るとショベル横に入り、ショベルの積込準備ができていれば ( $D_{1n} > S_{1n}$ )、ただちに積込みが開始され、そうでない場合はショベル横で待つ。積込みが終了するとダンプトラックはただちに出发し、次のダンプトラックがショベル横に入れる位置まで来たとき ( $D_{2n}$ )、積込作業を完全に終了する。あるダンプトラックに対する積込みを終えるとショベルはただちに次のダンプトラックのための積込準備を開始し、すぐに放土 (積込み) できる姿勢で待つとする。

b) 運搬作業

ダンプトラックが運搬路を走行する場合、先のダンプトラックを追い抜くことが許されるか許されないかにより2種類のモデルに分けられ、現実的な後者のモデルについて 図-8、表-2 に示す。このモデルは交通流問題でよく遭遇する、窓口数無限大、到着した顧客はただちにサービス

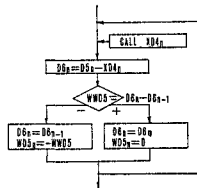


図-8

表-2

	記号	説明
往路	$D_{2n}$	積込場を出発し運搬路に入る時刻
	$XD_{3n}$	運搬路走行に要する時間
	$WD_{3n}$	運搬路上での待ち時間
	$D_{3n}$	捨土場へ到着する時刻
復路	$D_{5n}$	捨土場を出発し運搬路に入る時刻
	$XD_{4n}$	運搬路走行に要する時間
	$WD_{5n}$	運搬路上での待ち時間
	$D_{6n}$	積込場へ到着する時刻

を受けられるが、窓口を去る順序は到着順と同じという待合せモデルである。

c) 捨土作業

掘削積込作業と同様に、捨土を行なうために待機するダンプトラックの待ち行列のつくり方により2種類のモデルに分けられ、簡単のため捨土場1か所の場合のモデルを 図-9、10、表-3 に示す。

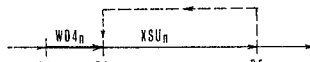


図-9

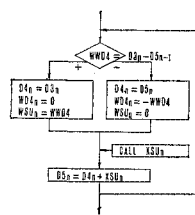


図-10

掘削積込作業その他における別の

形式のモデルや、スクレーパーなど別の土工機械を用いる場合のモデルも同様に分けられるが省略する<sup>7)</sup>。

以上に述べてきたことから、機械化土工計画最適化問題の解決には具体的に次のような解析が必要である。

表-3

記号	説明
$D_{3n}$	捨土場へ到着する時刻
$WD_{4n}$	捨土場でのダンプトラック待ち時間
$WSU_n$	捨土場が空いている時間
$D_{4n}$	捨土作業開始時刻
$XSU_n$	捨土作業時間
$D_{5n}$	捨土作業終了時刻

- (i) モデル化の変数とした作業時間に対する解析
- (ii) 掘削運搬捨土システムにおけるシステム変数間の関係を求めること
- (iii) 工事費見積の規格化
- (iv) 最適工事径路決定問題を基盤とする最適施工計画、管理システムの作成

これらのうち (iii), (iv) については個人的レベルの研究では十分でないので今後の課題とし、以下で (i), (ii) に対する検討を行なう。

3. 作業時間分布

土質その他の施工条件が与えられたとき、各種作業に要する時間の予測は施工計画作成のために不可欠の要素である。また前述のように本論文では作業時間をモデル化の変数とし、機械化土工作業における待合せ問題の検討を主な課題としているため、作業時間の平均値だけでなく、バラツキも重要な要素となる。そこで掘削運搬捨土システムの設計および解析の立場から、施工作业条件と作業時間分布特性の関係により、確率分布の特性値を用いて作業時間の性格を定量的に表現することを試み

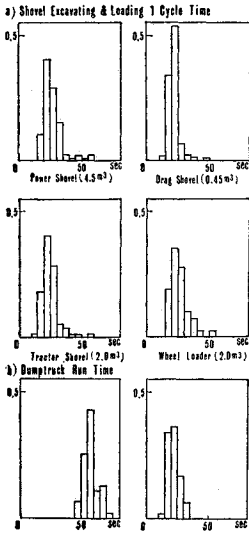


図-11 作業時間分布実測例

正規分布, 指数分布にそれぞれしたがう確率変数  $X_n, X_e$  のたたみこみ (Convolution) であるという太田の解釈<sup>3),4)</sup>がある。

$$X = X_n + X_e \dots\dots\dots(4)$$

ここで  $X_n$  は作業時間における定常的変動を意味するもので工事現場の特性を表わし,  $X_e$  は作業時間におけるランダムな変動を意味するもので作業管理の努力により小さくしようとされている。この考え方は作業時間分布を正規分布と指数分布に分ける方法が明確でないという欠点があるが, 実際の作業を観察するとき説得力のある解釈と感じられ, (3) で別の面から検討する。

(1) ゲーム継続時間分布<sup>5),6)</sup>

1次元ランダムウォークモデルにおいて,  $X_r$  を  $r$  回目の動点移動量とし, 移動の確率を次式とする。

$$P\{X_r=1\}=p_1>0.5, P\{X_r=-1\}=q_1=1-p_1 \dots\dots\dots(5)$$

図-12において, 動点が0から出発し吸収点  $a_1, b_1$  に至るまでに行なわれる移動の回数について, 次式を示す近似解が得られている。

$$\left. \begin{aligned} g_1(t) &= \frac{b_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{-\frac{(b_1-mt)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \\ M_1 &= \frac{b_1}{p_1-q_1}, V_1 = \frac{4b_1 p_1 q_1}{(p_1-q_1)^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

ここで  $m=p_1-q_1, \sigma^2=4p_1q_1$  とし,  $g_1(t)$  は動点が  $t$  回目に吸収点  $b_1$  に至る確率を示し, ゲーム継続時間分

布と称される。 $g_1(t)$  の具体例を 図-13 に示す。また  $M_1, V_1$  はそれぞれ, ゲーム継続時間分布の平均, 分散とする。

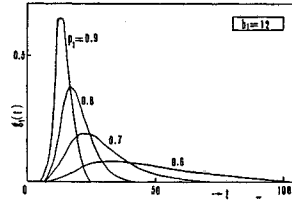


図-13

ここで今度の作業時間分布に関する検討の参考となることを目的として, いろいろの作業時間分布の解釈案を述べるにとどめる。

機械化土工を含めて一般に施工作业時間は 図-11 のような非対称の分布形を示すようである。施工作业時間分布に関する従来の研究としては, 作業時間  $X$  が, 式 (4) に示すようにそのまま施工作业に当てはめて解釈してみると次のようになる。ある施工作业が仮想的な  $b_1$  個の, 等価な作業段階から成るとし, 1つの作業段階遂行の成功, 失敗の確率を  $p_1, q_1=1-p_1$  とする。つまり 図-12 で動点が1だけ右, 左に移動することが, それぞれ作業段階遂行成功, 失敗に対応する。そして動点が0から出発すること, および吸収点  $b_1$  に至ることを, それぞれ施工作业開始, 終了に対応させれば, 動点が  $b_1$  に吸収されるまでに必要な移動の回数が作業所要時間に相当する。以上のことからゲーム継続時間分布  $g_1(t)$  を作業時間分布とみなし,  $p_1, b_1$  により作業の特性を表現することを試みる。作業時間実測データの平均  $M$ , 分散  $V$  を式 (6) の  $M_1, V_1$  に当てはめて,  $b_1, p_1$  について解くことにより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \{1 + \sqrt{M/(V+M)}\}/2 \\ b_1 &= M \cdot \sqrt{M/(V+M)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ショベル系掘削機の1回の積込作業時間の実測データについて  $b_1, p_1$  を求めた 表-4 の結果から, 1つの機種については, 作業量に相当する作業段階数  $b_1$  はほぼ一定であり, 作業の難易さに相当する作業段階遂行成功の確率  $p_1$  が作業条件の変化に応じて変わると解釈できるようなのである(ただし,  $b_1, p_1$  は仮想的な指標であり, 実際の作業上の値に具体的に対応するものではない)。したがって多くの資料を検討して, 同一機種については工事現場, 作業条件を変えても  $b_1$  が一定といえるならば, 土質その他の作業条件に応じた  $p_1$  の値を整理しておくことにより, 施工計画の段階において施工機種から  $b_1$ , 作業条件から  $p_1$  が求まり,  $g_1(t)$  としての作業時間分布が容易に得られることになる。またたとえば表-4におけるパワーショベルとホイールローダを比較した場合, 前者では作業段階数  $b_1$  が小さいが, 作業遂行の現実性を表わすと考えられる  $p_1$  もまた小さいため, 結果として作業時間分布の平均  $M$ , 分散  $V$  が大きくなっているのに対し, 後者では  $b_1$  が大きい  $p_1$  もまた大きい  $M, V$  が小さくなっていると, この工事現場の機械については解釈される。このようにゲーム継続時間分布は作業の性格を定量的に表現しうる可能性がある。

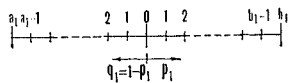


図-12

(2) 負の2項分布<sup>5)</sup>

図-14において0を出発点、 $b_2$ を吸収点とし、動点移動の確率を次式とすると、

$$\left. \begin{aligned} P\{X_r=1\} &= p_2, \\ P\{X_r=0\} &= q_2 = 1 - p_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

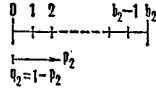


図-14

動点が0から出発し、 $b_2$ に到達するまでに行なう移動回数の確率密度関数  $g_2(t)$ 、平均  $M_2$ 、分散  $V_2$  は、 $m=p_2$ 、 $\sigma^2=p_2 \cdot q_2$  として次式で近似的に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} g_2(t) &= \frac{b_2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(b_2 - mt)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \dots\dots\dots (9) \\ M_2 &= b_2/p_2, \quad V_2 = b_2 \cdot q_2/p_2^2 \end{aligned} \right\}$$

つまり  $g_2(t)$  は、1回の成功の確率  $p_2$ 、失敗の確率  $q_2$  として、 $b_2$  回成功するのに必要な試みの回数の起こる確率を示していることになり、したがって離散型確率分布であることを除けば次式に示す負の2項分布と同一のものである。

$$p\{k; b_2, p_2\} = \binom{b_2+k-1}{k} p_2^{b_2-k} \cdot q_2^k \dots\dots\dots (10)$$

ここで  $p\{k; b_2, p_2\}$  は  $b_2$  回目の成功が  $(b_2+k)$  回目の試みで起こる確率を示し、詳細は省略するが  $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$  の分散  $V_1$ 、 $V_2$  は、この対応から求めたものである。施工作業時間分布に対する当てはめにおいて、 $b_2$  を仮想的作業段階数、 $p_2$  を作業段階遂行成功の確率と解釈するのはゲーム継続時間分布と同じとする。式(7)におけるのと同様にして  $p_2$ 、 $b_2$  は実測データの  $M$ 、 $V$  から次式により求められる。

$$b_2 = M^2/(V+M), \quad p_2 = M/(V+M) \dots\dots\dots (11)$$

具体例は表-4に示すが、 $b_2$ 、 $p_2$  に関して  $b_1$ 、 $p_1$  と同様な傾向がみられる。一般的推論については今後の資料の蓄積を待つ必要がある。

(3) アーラン分布と無限分解可能な分布、正規・指数たたみこみ分布

アーラン分布は、位相を変化させることにより多くの分布型を表わせる、より一般性のある確率分布といえるが、図-15に示すように実際の作業時間分布とよく適合するので、便宜的に作業時間がアーラン分布にしたがうとして、太田の作業時間分布の解釈に基づく解析を以下に試みる。

a) 無限分解可能な分布<sup>5), 8)</sup>

任意の無限分解可能な分布は正規分布とポアソン分布から合成できることから、太田の解釈における式(4)を参照して、アーラン分布にしたがう作業時間分布が無限分解可能な分布であり、したがって太田の解釈における

$X_n$ 、 $X_e$  と同じ意味をもつ、正規分布、ポアソン分布にそれぞれしたがう確率変数  $X_n$ 、 $X_p$  のたたみこみであると仮定すると、特性関数、平均、分散に関して次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} X &= X_n + X_p \\ 1/\left(1 - \frac{i\omega}{Rk}\right)^k &= \exp\left\{im\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2} + \lambda(e^{i\omega} - 1)\right\} \\ 1/R &= m + \lambda \\ 1/kR^2 &= \sigma^2 + \lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで  $(m, \sigma^2)$ 、 $(\lambda, \lambda)$ 、 $(1/R, 1/kR^2)$ 、 $(M, V)$  は正規分布、ポアソン分布、アーラン分布、作業時間分布の(平均、分散)であり、式(12)を  $m$ 、 $\sigma$ 、 $\lambda$  について解くと次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{(\cos \omega - 1)/R - \omega^2/2kR}{\cos \omega - 1} \\ &\quad \frac{+\omega^2/2R + k \log \sqrt{1 + \omega^2/R^2k^2}}{+\omega^2/2} \\ \lambda &= 1/R - m, \quad \sigma = \sqrt{1/kR^2 - 1/R + m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

数値計算によると  $m$  の値は0を除き  $\omega$  にほとんど影響されず、さらに  $\sigma$  は  $1/R$ 、 $k$  の変化によらず常に0となる。したがって作業時間分布は分散0の正規分布(単位分布)とポアソン分布のたたみこみとなり、 $m$ 、 $\sigma$ 、 $\lambda$  は次式から求められる。

$$m = M - V, \quad \sigma = 0, \quad \lambda = V \dots\dots\dots (14)$$

実際のデータから  $m$ 、 $\sigma$ 、 $\lambda$  を求めた結果を表-4に示すが、このような少数のデータからは正規分布、ポアソン分布部分ともに顕著な特性を見出だすのは困難のようである。

b) 正規・指数たたみこみ分布

アーラン分布にしたがうと仮定した作業時間分布が、式(4)と同じく正規分布、指数分布のたたみこみから成ると解釈すると特性関数、平均、分散に関して次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} X &= X_n + X_e \\ 1/\left\{1 - \frac{i\omega}{Rk}\right\}^k &= \exp\left\{im\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right\} \times \frac{\lambda}{\lambda - i\omega} \\ 1/R &= m + 1/\lambda \\ 1/kR^2 &= \sigma^2 + 1/\lambda^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ただし、式(15)中の記号は、指数分布の平均  $1/\lambda$ 、分散  $1/\lambda^2$  を除いて式(12)におけるのと同じ意味とする。式(15)を数値的に解いてみると  $\sigma = 1/\lambda$  が常に成立することから  $m$ 、 $\sigma$ 、 $1/\lambda$  は実測データ  $M$ 、 $V$  より次式により求められる。

$$m = M - \sqrt{V/2}, \quad \sigma = 1/\lambda = \sqrt{V/2} \dots\dots\dots (16)$$

具体的結果は表-4に示すとおりであるが、 $m$ 、 $\sigma$ 、 $1/\lambda$

表-4 ショベル系掘削機の1回の積込時間分布に対する適用例

機種	容量 (m <sup>3</sup> )	平均 M (秒)	分散 V	ゲーム継続時間分布		負の2項分布		無限分解可能な分布		正規・指数たたまこみ分布		
				p <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	m	λ	m	σ=1/λ	
パワーショベル	4.5	27.0	50.6	0.79	16	0.35	9	-23.6	50.6	22.0	5.0	
		31.3	87.0	0.76	16	0.26	8	-54.7	87.0	24.7	6.6	
		31.3	99.8	0.75	16	0.24	8	-68.5	99.8	24.2	7.1	
		27.0	51.2	0.79	16	0.35	9	-24.2	51.2	21.9	5.1	
	0.45	17.3	15.7	0.87	13	0.53	9	1.6	15.7	14.5	2.8	
		19.0	24.8	0.83	13	0.44	8	-5.8	24.8	15.5	3.5	
トラクターショベル	2.2	25.2	40.9	0.81	15	0.38	10	-15.7	40.9	20.7	4.5	
		25.3	45.0	0.80	15	0.36	9	-19.7	45.0	20.5	4.8	
		31.4	73.4	0.77	17	0.30	9	-42.0	73.4	25.3	6.1	
		26.6	57.1	0.78	15	0.32	9	-30.5	57.1	21.2	5.4	
ホイールローダー	3.6	27.4	12.4	0.92	23	0.69	19	15.0	12.4	24.9	2.5	
		27.4	8.2	0.93	23	0.77	21	19.2	8.2	25.4	2.0	
	2.2	24.6	14.4	0.90	20	0.63	16	10.2	14.4	21.9	2.7	
		25.8	21.3	0.88	20	0.55	14	4.5	21.3	22.5	3.3	
		25.7	12.6	0.92	20	0.67	17	13.1	12.6	23.2	2.5	
		26.9	13.5	0.91	22	0.67	18	13.4	13.5	21.3	2.5	
	2.0	28.4	56.7	0.79	17	0.33	10	-28.3	56.7	23.1	5.3	
		26.5	42.7	0.82	17	0.38	10	-16.2	42.7	21.9	4.6	
ドラッグショベル	0.45	24.7	18.6	0.88	19	0.57	14	6.1	18.6	21.6	3.1	
		日立	22.4	10.2	0.92	19	0.69	15	12.2	10.2	20.1	2.3
	0.45	22.0	17.6	0.88	17	0.56	12	4.4	17.6	19.0	3.0	
		24.7	17.4	0.89	19	0.59	14	7.3	17.4	21.7	3.0	
		小松	26.3	20.4	0.88	20	0.56	15	5.9	20.4	23.1	3.2
		25.4	11.5	0.91	21	0.69	18	13.9	11.5	23.0	2.4	

に関して顕著な特性は認められない。このように作業時間分布をアーラン分布と仮定すると、太田の解釈における正規分布部分が工事現場の特性を表わすことを立証するのは困難である。

以上に述べてきた作業時間分布の解釈案の、実際のデータに対する適合性を図-15に示すが、一般にどの解釈もほとんど差がなく実測データに良く適合する。作業時間分布の解析はいろいろの目的、立場において行なわれるべきであり、また前述のように著者らが実測したデ

ータ量が十分でないため、これらの解釈の適否を一概に述べることはできない。したがってここでは作業時間分布の解釈案を列挙するとともに、今後多くの資料による検討を待つことにする。

4. 待合せ問題の近似解法

掘削運搬捨土システムを作業時間を用いて待合せモデルとして表現したが、その待合せ形式は簡単でなく、待ち行列理論による結果をそのまま適用するのは困難である。たとえば、顧客が有限母集団から成る M/M/1 注1) 型待合せモデルを積込機械と運搬機械の待合せ問題に適用した Griffis の研究<sup>9)</sup>があるが、i) 積込作業における待合せ形式は M/M/1 型でなく到着時間間隔、サービス時間も指数分布にはしたがわない、ii) 待合せ問題は積込作業に際してのみ生じるのではない、iii) 運搬機械台数に応じて、そのサイクルタイムが変化する、などの点が、実際の作業を忠実に表現した前述の掘削運搬捨土システムモデルと比較して十分考慮されていない。また確率過程論に基づく解析も、このモデルの場合、実用的

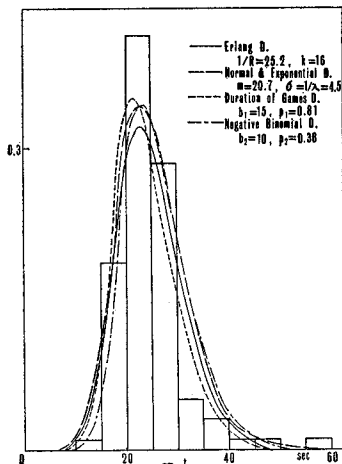


図-15

注1) Kendall の記号<sup>15)</sup>であり“到着時間間隔分布/サービス時間分布/サービス窓口の数”を表わす。記号として M: 指数分布, E<sub>k</sub>: 位相 k のアーラン分布, G: 一般の分布, を用いる。

成果を期待できず、シミュレーションによる解法も最適解を得るといふ立場からは十分でない。以上のことから、実際の作業をできるだけ忠実に解析することを目標として、統計的非線型制御理論に示唆を得た待合せ問題の近似解法について以下に検討する。

(1) 非線型制御理論の適用

a) ブロック線図による表現<sup>11)</sup>

G/G/1<sup>(注)</sup>型待合せモデルにおいて

$h_n, w_n, u_n$  を第  $n$  番目に到着した顧客のサービス時間、待ち時間、到着前にサービス窓口が空いている時間とし、 $x_{n-1}, y_{n-1}$  を  $(n-1)$  番目と  $n$  番目の顧客の到着時間間隔、出発時間間隔とすると、図-16 を参照して一般に式 (17) が成立し<sup>10)</sup>、これをブロック線図に表わしたものが図-17 である。

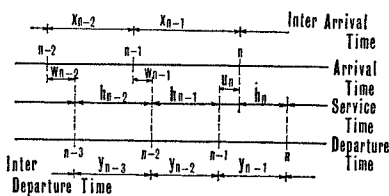


図-16 G/G/1・時間関係

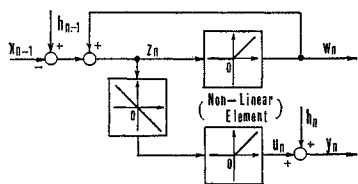


図-17 G/G/1・ブロック線図

$$\left. \begin{aligned} w_n &= [w_{n-1} + h_{n-1} - x_{n-1}]^+ \\ u_n &= [x_{n-1} - w_{n-1} - h_{n-1}]^+ \\ y_{n-1} &= h_n + u_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ただし、式 (17) および 図-17 の伝達要素による変換の意味は式 (18) および 図-18 に示すとおりである。

$$\left. \begin{aligned} x_n > 0 \text{ のとき } [x_n]^+ &= x_n \\ x_n \leq 0 \text{ のとき } [x_n]^+ &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

連続不規則系列  $z_n, y_n$  に関して、正でない  $z_n$  がすべて  $y_n=0$  として出力になるから、 $z_n < 0$  の確率がすべて  $z_n=0$  の確率に加算され、出力  $y_n$  の確率密度関数が図-18 の形になることは明らかである。次に、 $x_n, h_n$  に相当するダンブトラック到着時間間隔、捨土時間その他の実測データについて自己相関関数を計算してみると図-19 に例を示すように Dirac の  $\delta$  関数に近似される。すなわち  $x_n, h_n$  が白雑音 (White Noise)<sup>12)</sup> とみ

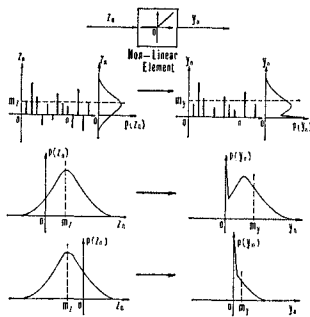


図-18

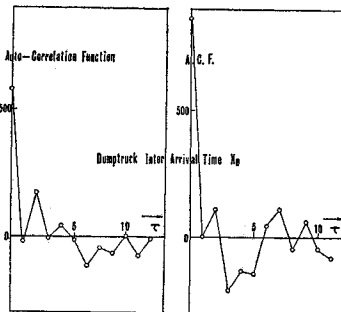


図-19

なされることから、 $x_n$  と  $x_{n+\tau}, h_n$  と  $h_{n+\tau}, x_n$  と  $h_n$  は  $\tau=0$  を除き、それぞれ互いに独立と仮定する。このことからすでに指摘されているように<sup>10)</sup>、図-17 における  $(h_n - x_n)$  と  $w_{n-1}$  は互いに独立となり、以上のことから 図-17 における信号の添字をすべて無視することができる。

b) 制御系における確率分布

正規分布は前述のように無限分解可能な分布であることから、線型要素への入力正規分布にしたがうとき出力もまた正規分布にしたがうという便利な性質をもつため統計的制御理論でよく用いられる<sup>12)</sup>。機械化土工における作業時間は必ずしも正規分布にしたがうわけではないが、図-17 から明らかなように非線型伝達要素への入力となるのに際して、確率変数である信号相互に必ずたたみこみが行なわれているから入力信号の確率分布は正規分布に近づくと考えられる。また、たたみこまれた確率分布には当然、負の領域が生じる可能性があり（このことが待合せ問題の本質であるが）、したがって負の領域でも定義される確率分布でなければ意味をなさず、以上のことから、待合せモデルを表わす 図-17 のブロック線図における非線型伝達要素への入力信号が正規分布にしたがうと仮定する。

c) Kazakov の統計的等価線型化法<sup>12), 14)</sup>

図-17 のブロック線図から明らかなように、待合せモデルは非線型変換を含む、いわゆる非線型制御系となり厳密な解を得るのは困難であるが、伝達要素の荷重関数が Dirac の  $\delta$  関数で表わされる Zero-Memory 型非線型制御系<sup>12), 13)</sup> であることに着目し、非線型制御理論における統計的等価線型化法を適用した待合せ問題の解析を試みる。統計的等価線型化法として一般に用いられるのは Booton 法、Kazakov 法であり、前者は解析方法は容易であるが、図-18 に示す待合せモデルの非線型変換における平均と分散の変化を正確に表わせない。Kazakov 法は多少複雑ではあるが 図-18 の変換にも適用しうるので Kazakov 法に基づく解析を以下に行う。Kazakov の等価線型化法は非線型変換式 (19) を線型

変換式 (20) により最良近似しようとするものである。

$$y_n = f(z_n) = [z_n]^+ \dots\dots\dots (19)$$

$$y_n = \kappa_0 \cdot m_z + \kappa_1 \cdot (z_n - m_z), \quad m_z = E[z_n] \dots (20)$$

ここに  $z_n, y_n$  は非線型伝達要素の入出力を表わし、 $m_z$  は入力  $z_n$  の平均値である。 $\kappa_0, \kappa_1$  の決め方として式 (21), 式 (22) の2つの方法がある。

$$E[f(z_n)] = E[\kappa_0 \cdot m_z + \kappa_1' \cdot (z_n - m_z)] \dots (21)$$

$$V[f(z_n)] = V[\kappa_0 \cdot m_z + \kappa_1'' \cdot (z_n - m_z)] \rightarrow \min \dots\dots\dots (22)$$

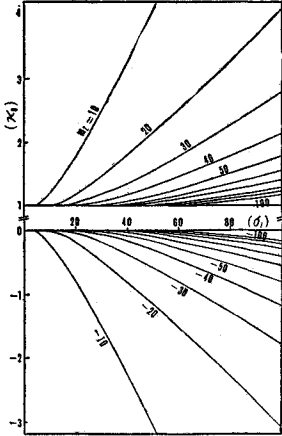


図-20

前述のように  $z_n$  が正規分布にしたがうとし、さらに  $z_n$  に関して定常性、および時間平均が集合平均に等しいという意味でのエルゴード性の仮定が満たされるとして式 (21), (22) を解くと、式 (23), 図-20, 21, 22 に示すように、2つの方法から求めた  $\kappa_0$  は一致するが  $\kappa_1$  は異なり、Kazakov は両者の算術平均を  $\kappa_1$  とすることを提案している<sup>12)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 &= \int_0^\infty z_n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left\{-\frac{(z_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz_n / m_z \\ \kappa_1' &= \sqrt{\int_0^\infty z_n^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left\{-\frac{(z_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz_n - (\kappa_0 \cdot m_z)^2 / \sigma_z^2} \\ \kappa_1'' &= \left\{ \int_0^\infty z_n^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left\{-\frac{(z_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz_n - \kappa_0 \cdot m_z^2 \right\} / \sigma_z^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

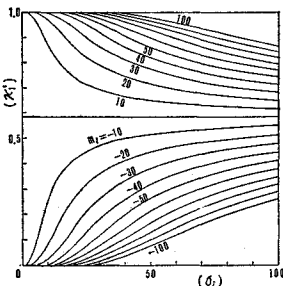


図-21

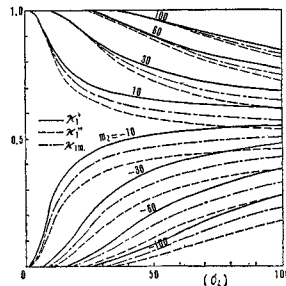


図-22

ここで  $\sigma_z^2$  は入力  $z_n$  の分散とする。一方、非線型要素出力  $y_n$  の平均  $m_y$ , 分散  $\sigma_y^2$  は

$$m_y = \kappa_0 \cdot m_z, \quad \sigma_y^2 = \kappa_1^2 \cdot \sigma_z^2$$

で求まるが、式 (23) を参照して  $\kappa_0, (\kappa_1')^2$  が  $z_n$  と  $y_n$  の平均、分散の比を正確に示している。したがって  $\kappa_1'$  を  $\kappa_1$  とする場合には必ずしも等価線型化法の概念を用いる必要はなく、単に入出力における平均と分散の比を  $\kappa_0, \kappa_1'$  の2つのパラメーターにより表わすとも解釈でき、この事は後述する平均分散比法において利用する。

d) 非線型制御系の解析

G/G/1 を表わす 図-17 のブロック線図を解析するには 図-23 に示す、正のフィードバックを持つ非線型制御系において、系の入力  $v_n$  の確率分布または平均、分散を既知としたときの、系の出力  $y_n$  または非線型要素への入力  $z_n$  の確率分布または平均、分散について知る必要がある。非線型制御系において、これらの結果を得ることは一般に困難であるが、等価線型化法はこのような非線型制御系のための近似解法といえる。図-23 における非線型要素を Kozakov の等価線型要素  $\kappa_0, \kappa_1$  で置き換えると、図-23 は 図-24 の線型制御系になる。ここで  $\kappa_0, \kappa_1$  は式 (23) からわかるように非線型

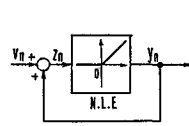


図-23

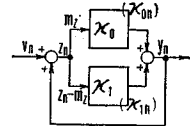


図-24

要素への入力  $z_n$  の平均  $m_z$ , 分散  $\sigma_z^2$  の関数であり、 $m_z, \sigma_z^2$  が制御系への入力  $v_n$  の平均  $m_v$ , 分散  $\sigma_v^2$  の関数になることから、 $\kappa_0, \kappa_1$  は  $m_v, \sigma_v^2$  の関数になる。

したがって非線型制御系への入力  $v_n$  の平均および分散に応じて  $\kappa_0, \kappa_1$  が決まれば、図-23 の非線型制御系は 図-24 の線型制御系として扱えることになる。

図-24 において、次式が成立することは明らかである。

$$\left. \begin{aligned} z_n &= v_n + y_n, \quad m_z = m_v + m_y \\ \sigma_z^2 &= \sigma_v^2 + \sigma_y^2 + 2 \cdot \text{Cov}(v_n, y_n) \\ &= \sigma_v^2 + \kappa_1^2 \cdot \sigma_z^2 + 2 \frac{\kappa_1}{1 - \kappa_1} \sigma_v^2 \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

したがって式 (25), (26) を得る。

$$m_z = m_v / (1 - \kappa_0), \quad \sigma_z^2 = \sigma_v^2 / (1 - \kappa_1^2) \dots\dots\dots (25)$$

$$m_y = \kappa_0 \cdot m_v / (1 - \kappa_0), \quad \sigma_y^2 = \kappa_1^2 \cdot \sigma_v^2 / (1 - \kappa_1^2) \dots\dots\dots (26)$$

式 (25) を式 (23) に代入すると次式が得られ



る。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 &= \int_0^\infty z_n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_v}{1-\kappa_1'}} \exp \left\{ -\frac{\left( z_n - \frac{m_v}{1-\kappa_0} \right)^2}{2 \left( \frac{\sigma_v}{1-\kappa_1'} \right)^2} \right\} dz_n \Big/ \frac{m_v}{1-\kappa_0} \\ \kappa_1' &= \sqrt{ \int_0^\infty z_n^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_v}{1-\kappa_1'}} \exp \left\{ -\frac{\left( z_n - \frac{m_v}{1-\kappa_0} \right)^2}{2 \left( \frac{\sigma_v}{1-\kappa_1'} \right)^2} \right\} dz_n - \kappa_0^2 \cdot \left( \frac{m_v}{1-\kappa_0} \right)^2 } \Big/ \frac{\sigma_v}{1-\kappa_1'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$m_v, \sigma_v^2$  を既知として式 (27) を  $\kappa_0, \kappa_1$  に関する 2 元連立方程式として解くことにより、 $\kappa_0, \kappa_1$  が  $m_v, \sigma_v^2$  から求められ、したがって式 (26) から  $m_y, \sigma_y^2$  が得られることになる。

一方、 $G/G/1$  を表わす 図-17 のブロック線図において、図-23 の非線型制御系の  $v_n, y_n$  に相当する  $h_n - x_n, w_n$  が互いに独立となることは前述のとおりである。しかし、式 (24) で  $v_n$  と  $y_n$  の共分散  $\text{Cov}(v_n, y_n)$  が存在することから明らかなように、等価線型化法を適用することにより  $v_n$  と  $y_n$  の独立性は失われる。したがって等価線型化法は非線型変換の近似精度だけでなく、非線型制御系全体をどの程度正確に表現しているかという観点から評価される必要があり、前述の  $\kappa_1$  として  $\kappa_1', \kappa_1''$  のいずれを探るかという問題も、この立場から判断されなければならない。

以上のことから判断して、前述のように  $\kappa_0, \kappa_1'$  を線型要素と考えず、単に 図-18 の非線型変換による入力

$z_n$ , 出力  $y_n$  における平均と分散の変化 (比) を表わすパラメーターと解釈することが改めて意味をもつわけであり、このように解釈した  $\kappa_0, \kappa_1'$  を  $\kappa_{0n}, \kappa_{1n}$  と表わし、これらを用いた非線型制御系の新たな解析法を仮に“平均分散比法”と名づけることにする。

e) 平均分散比法

図-23 において、 $v_n, y_n$  が独立であるとき、 $\kappa_{0n}, \kappa_{1n}$  を用いて次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} z_n &= v_n + y_n \\ m_z &= m_v + m_y, \quad \sigma_z^2 = \sigma_v^2 + \sigma_y^2 \\ m_y &= \kappa_{0n} \cdot m_z, \quad \sigma_y^2 = \kappa_{1n}^2 \cdot \sigma_z^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

式 (28) より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} m_z &= m_v / (1 - \kappa_{0n}), \quad \sigma_z^2 = \sigma_v^2 / (1 - \kappa_{1n}^2) \\ m_y &= \kappa_{0n} \cdot m_v / (1 - \kappa_{0n}), \quad \sigma_y^2 = \kappa_{1n}^2 \cdot \sigma_v^2 / (1 - \kappa_{1n}^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

式 (29) の  $m_z, \sigma_z^2$  を式 (23) に代入して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{0n} &= \int_0^\infty z_n \frac{\sigma_v}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_v}{\sqrt{1-\kappa_{1n}^2}}} \exp \left\{ -\frac{\left( z_n - \frac{m_v}{1-\kappa_{0n}} \right)^2}{2 \left( \frac{\sigma_v}{1-\kappa_{1n}^2} \right)^2} \right\} dz_n \Big/ \frac{m_v}{1-\kappa_{0n}} \\ \kappa_{1n} &= \sqrt{ \int_0^\infty z_n^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_v}{\sqrt{1-\kappa_{1n}^2}}} \exp \left\{ -\frac{\left( z_n - \frac{m_v}{1-\kappa_{0n}} \right)^2}{2 \left( \frac{\sigma_v}{1-\kappa_{1n}^2} \right)^2} \right\} dz_n - \kappa_{0n}^2 \cdot \left( \frac{m_v}{1-\kappa_{0n}} \right)^2 \Big/ \frac{\sigma_v}{\sqrt{1-\kappa_{1n}^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

式 (30) を、等価線型化法におけるのと同様に  $m_v, \sigma_v^2$  を既知とした、 $\kappa_{0n}, \kappa_{1n}$  に関する連立方程式とみて数値的に解いた結果を 図-25, 26 に示す。なお、 $\kappa_{0n}$  の不連続点  $\sigma_{v0}$  は標準正規分布密度関数  $\phi(x)$  を用いて次式で与えられる。

$$\sigma_{v0} = \sqrt{ 1 - \int_0^\infty x^2 \phi(x) dx + \left( \int_0^\infty x \phi(x) dx \right)^2 } \Big/ \int_0^\infty x \phi(x) dx \cdot (-m_v) \cong -2.03 m_v \dots(31)$$

(2) 待合せ問題の解析

$G/G/1$  を表わす 図-17 における非線型要素を等価線型化法、平均分散比法における  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_{0n}, \kappa_{1n}$  で置き換えたものが 図-27 である。

a) 平衡状態存在条件

サービス窓口で、顧客の待ち行列の長さが無限大にならない、いわゆる平衡状態が存在する条件として、 $G/G/1, G/G/s$  について次式が得られている<sup>(10), (15)</sup>。

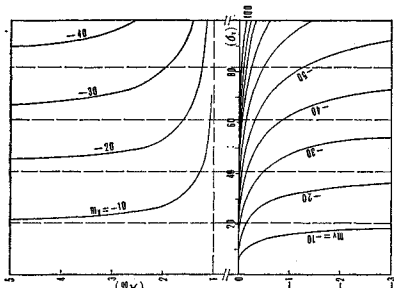


図-25

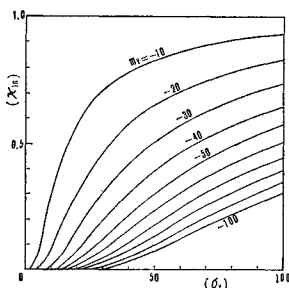


図-26

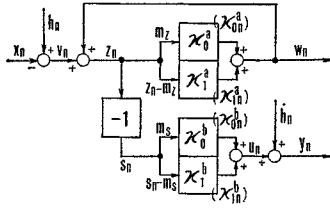


図-27

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \lambda/\mu = \frac{1}{\mu} \left/ \frac{1}{\lambda} < 1 \right. \quad (G/G/1) \\ \rho &= \lambda/s\mu = \frac{1}{s\mu} \left/ \frac{1}{\lambda} < 1 \right. \quad (G/G/s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで  $1/\lambda, 1/\mu$  は 図-17 における顧客の到着時間間隔  $x_n$ , サービス時間  $h_n$  の平均である。等価線型化法, 平均分散比法において, 図-23 の  $v_n$  の平均  $m_v$  は式 (25), (29) より次式で表わされる。

$$m_v = m_z(1 - \kappa_0) \quad \text{または} \quad m_v = m_z(1 - \kappa_{0n}) \dots\dots\dots (33)$$

図-18, 20 から明らかなように, 次式の条件があること

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 \quad (\text{または} \quad \kappa_{0n}) &\geq 1 \quad \text{のとき} \quad m_z < 0 \\ \kappa_0 \quad (\text{または} \quad \kappa_{0n}) &\leq 0 \quad \text{のとき} \quad m_z < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (34)$$

から, 図-23 の非線型制御系では  $m_v < 0$  の場合しか存在しえないわけである。このことは次式を参照して式 (32) と同じことを表現しており,  $G/G/1$  のブロック線図が 図-23 の非線型制御系を含んでいることが平衡状態存在条件にそのまま対応することになる。 $G/G/s$  に対しても同様な方法により式 (32) と同じ結果を得る。

$$m_v = E[h_n] - E[x_n] = 1/\mu - 1/\lambda < 0 \quad \dots\dots (35)$$

**b) サービス窓口が空いている確率**

待ち行列理論から,  $G/G/1$  において窓口が空いている確率  $P_0$  が到着時間間隔やサービス時間のバラツキと無関係に次式で与えられることが知られている<sup>15)</sup>。

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \lambda/\mu \dots\dots\dots (36)$$

一方, 図-17 におけるサービス窓口の空いている時間  $u_n$  を利用して,  $P_0$  は次のように求められる。図-27 において  $z_n, s_n$  の確率密度関数を  $p_z(z_n), p_s(s_n)$  と

すると,  $s_n = -z_n$  という関係から  $p_s(s_n) = p_z(z_n)$  が成立し,  $\kappa_0^b$  は,

$$\kappa_0^a = \int_0^\infty z_n \cdot p_z(z_n) dz_n / \int_{-\infty}^\infty z_n \cdot p_z(z_n) dz_n$$

を用いて次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \kappa_0^b &= \int_0^\infty s_n \cdot p_s(s_n) ds_n / \int_{-\infty}^\infty s_n \cdot p_s(s_n) ds_n \\ &= \int_0^\infty z_n p_z(z_n) dz_n / \int_{-\infty}^\infty z_n \cdot p_z(z_n) dz_n \\ &= 1 - \int_0^\infty z_n \cdot p_z(z_n) dz_n / \int_{-\infty}^\infty z_n \cdot p_z(z_n) dz_n \\ &= 1 - \kappa_0^a \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

したがって  $u_n$  の平均  $m_u$  は式 (29) を用いて次式で与えられ,

$$\begin{aligned} m_u &= E[u_n] = E[s_n] \cdot \kappa_0^b = E[-z_n] \cdot \kappa_0^b \\ &= \left( \frac{-m_v}{1 - \kappa_0^a} \right) \cdot (1 - \kappa_0^a) = -m_v = 1/\lambda - 1/\mu \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

顧客が到着したとき窓口が空いている確率  $P_0$  は次式のように求められるが, この結果は式 (36) と一致する。

$$P_0 = E[u_n] \left/ \frac{1}{\lambda} \right. = 1 - \lambda/\mu = 1 - \rho \dots\dots\dots (39)$$

以上のことは,  $z_n$  がいかなる確率分布にしたがう場合にも成立することは明らかであり, したがって式 (39) の結果は  $G/G/1$  に対して成立する。なお, このことは  $\kappa_0^a, \kappa_0^b$  のかわりに  $\kappa_{0n}^a, \kappa_{0n}^b$  を用いても同じ結果を得る。

これらの方法を用いて複雑な待合せモデルに対しても, 比較的容易に平衡状態存在条件や  $P_0$  を求めることが可能であろう。

**c) 待合せ問題解析の手順**

一般に待合せモデルは到着時間間隔  $x_n$ , サービス時間  $h_n$  の2つの確率変数を入力とするが,  $G/G/1$  における顧客の待ち時間  $w_n$  と, 窓口が空いている時間  $u_n$  が,  $h_n$  と  $x_n$  の差のみにより決まることは 図-17 のブロック線図における信号の関係から容易に理解される。このことは  $G/G/1$  について導かれた Wiener-Hopf 型積分方程式の形から Lindley が, “ $w_n$  の確率分布は

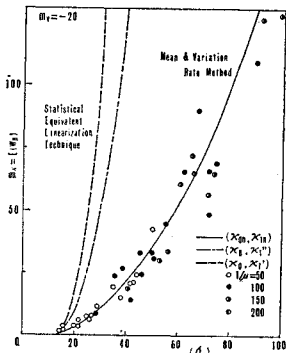


図-28 (a)

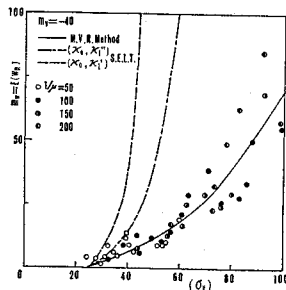


図-28 (b)

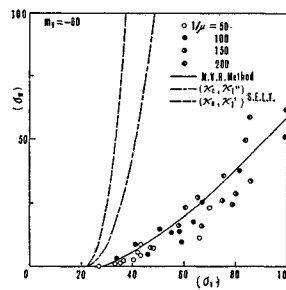


図-28 (c)

$h_n$  と  $x_n$  の差の確率分布より定まり、( $h_n$  と  $x_n$  の) それぞれの分布にはよらない”と表現しているが<sup>10)</sup>、すでに推察されるように等価線型化法、平均分散比法による待合せ問題の解析においては非線型要素への入力信号の確率分布を正規分布と仮定したから、実質的に  $w_n$ ,  $u_n$  の平均、分散が  $h_n$  と  $x_n$  の差の平均、分散のみにより決まることになる。具体例として  $E_k/E_l/1$  (注1) の待合せモデルにおいて、 $1/\mu = E[h_n] = 50, 100, 150, 200$ 、アーラン分布の位相  $k=3, 8, 12, 30, l=3, 8, 12, 30$ 、 $m_v = E[h_n] - E[x_n] = -20, -40, -60, -80, -100$  のあらゆる組合せについてシミュレーションを行なって、 $E[w_n], V[w_n]$  を求めた結果を前述したように  $m_v = E[h_n] - E[x_n]$ 、 $\sigma_v^2 = V[h_n] + V[x_n]$  により整理した1例を図-28に示す。 $E[w_n], V[w_n]$  の値

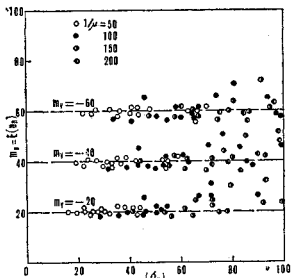


図-28

は、いくらか変動するが、 $m_v, \sigma_v^2$  により明確な傾向を示す。同じシミュレーションから  $E[u_n]$  を求めた結果を図-29に示す。式(38)によれば、 $G/G/1$  において  $E[u_n]$  は一定値  $1/\lambda - 1/\mu$  をとるべきであるが、か

なりの変動を示すことからみて、 $E[w_n], V[w_n]$  の変動もシミュレーションの誤差によるものが大きいと推定される。したがって  $w_n, u_n$  の平均、分散が  $h_n$  と  $x_n$  の差の平均、分散から決まるとすることは少なくとも  $E_k/E_l/1$  に対しては妥当と考えられる。図-28には、Kazakov の等価線型化法および平均分散比法に基づく  $E[w_n], V[w_n]$  の理論曲線を示すが、すでに予想されたように、非線型制御系における信号間の関係を最も忠実に表現している平均分散比法がシミュレーション結果とほとんど完全に一致する。平均分散比法でも、非線型要素への入力信号はすべて正規分布にしたがうと仮定していることから、 $E_k/E_l/1$  においても図-17における  $z_n$  などの分布が正規分布に近くなるほど平均分散比法による理論曲線に近づくわけであり、図-28において理論曲線から遠く離れたシミュレーション結果は  $E_{30}/E_3/1$  といった極端な場合が多い。これらのことは前述したシミュレーションによる誤差と考えあわせて、今後その適用範囲を検討すべきであろう。

次に、待合せ問題の解析に平均分散比法を用いる方法を例題により説明する。

【例題】 図-17, 27 を参照。

アーラン分布の位相  $k=3, l=12, 1/\mu = E[h_n] = 50, 1/\lambda = E[x_n] = 70$  とした  $E_k/E_l/1$  において、顧客の待ち

時間  $w_n$  の平均  $E[w_n]$ 、分散  $V[w_n]$ 、窓口の空き時間  $u_n$  の平均  $E[u_n]$ 、分散  $V[u_n]$ 、顧客の出発時間間隔  $y_n$  の平均  $E[y_n]$ 、分散  $V[y_n]$  を求める。

$$\bullet m_v = E[h_n] - E[x_n] = -20$$

$$\bullet \sigma_v^2 = V[h_n] + V[x_n] = 1/l\mu^2 + 1/k\lambda^2 = 1842, \sigma_v = 43$$

$$\bullet \text{図-25 より } \kappa_{0n} \geq 10, \text{ 図-26 より } \kappa_{1n} \alpha = 0.60$$

$$\bullet \text{式(29) より } E[w_n] = m_v \cdot \kappa_{0n} \alpha / (1 - \kappa_{0n} \alpha) \cong 20$$

$$\bullet \text{式(29) より } V[w_n] = \sigma_v^2 \cdot (\kappa_{1n} \alpha)^2 / \{1 - (\kappa_{1n} \alpha)^2\} = 1031$$

$$\bullet \text{式(38) より } E[u_n] = 1/\lambda - 1/\mu = 20$$

$$V[u_n] = \sigma_v^2 + 2m_v \cdot E[w_n] = 1041$$

$$\bullet E[y_n] = E[u_n] + E[h_n] = 70$$

$$V[y_n] = V[u_n] + V[h_n] = 1250$$

表-5

		理論値	シミュレーション
$w_n$	平均	20.0	21.2
	分散	1031.0	775.0
$u_n$	平均	20.0	19.1
	分散	1041.0	800.0
$y_n$	平均	70.0	65.9
	分散	1249.9	1120.0
アーラン分布位相	$w_n$	$20.0^2/1031.0 = 0.4 \pm 1$	
	$u_n$	$20.0^2/1041.0 = 0.4 \pm 1$	
	$y_n$	$70.0^2/1249.9 = 3.9 \pm 4$	

以上の結果とシミュレーション結果の比較を表-5、図-30に示すが、 $w_n, u_n, y_n$  の確率分布をアーラン分布に近似するとシミュレーション結果によく一致するようである。

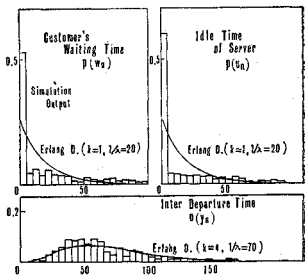


図-30

### (3) 結論と考察

非線型制御理論を待合せ問題に適用するのに際し、制御系における信号に対して用いた仮定は i) 定常不規則系列, ii) エルゴード性, iii) 白雑音, iv)  $x_n$  と  $h_n, x_n$  と  $x_{n+r}$  などの独立性, v) 非線型要素への入力が正規分布にしたがうこと、の5つである。ii)~iv) の仮定は一般に無理のないものであるが、i) より非定常状態の解は別に求める必要がある。また、v) の仮定は平均分散比法における根本的問題であって、たとえば図-23の非線型制御系において図-18からみて明らかに正規分布にはしたがわかない  $y_n$  が加合せ点で  $v_n$  とたまたまこまれることにより、非線型要素への入力  $z_n$  の確率分布が正規分布によって、どの程度近似されるかが問題となり、到着時間間隔、サービス時間の確率分布に応じた適

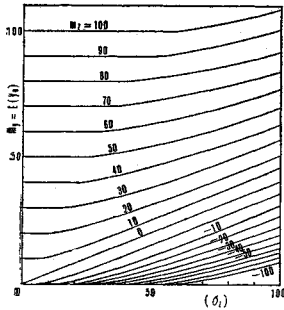


図-31

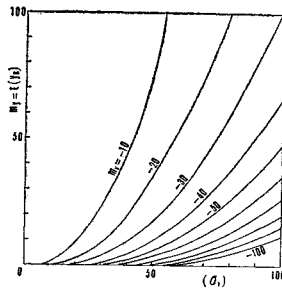


図-33

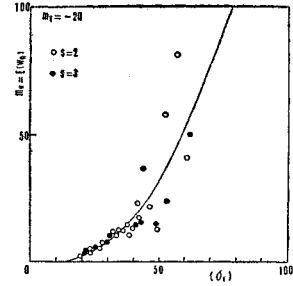


図-35

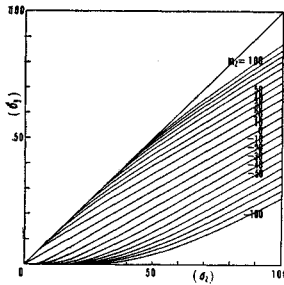


図-32

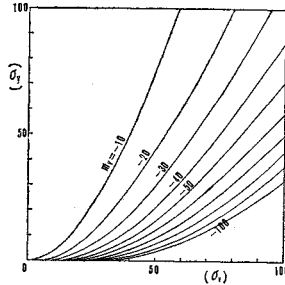


図-34

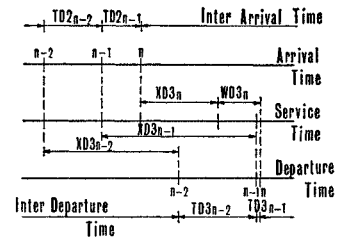


図-36 運搬作業・時間関係

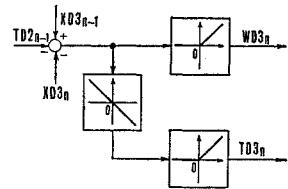


図-37

合性の検討が必要であるが、これらについては今後の課題とする。

平均分散比法による待合せ問題の解析は、要約すると、図-18 の非線型変換と 図-23 の非線型制御系の組合せにより待合せモデルを表現しようとするものである。図-18 による変換は式 (23), (24), 図-20, 21 をまとめて、図-31, 32 で表わされ、図-23 による変換は式 (29), (30), 図-25, 26 をまとめて、図-33, 34 で表わされる。この結果を用いて一般的な待合せモデルを解析することができ、先にモデル化した掘削運搬捨土システムに対する平均分散比法の適用を以下に試みる。

### 5. 掘削運搬捨土作業

#### (1) 捨土作業

捨土場が1つの場合の待合せモデルは、捨土作業のモデル化における説明から明らかなように、4. で例にとった  $E_k/E_l/1$  に相当し(実測データでは  $k=3\sim 8, l=10\sim 50$ )、図-17 における  $x_n, h_n, w_n, u_n, y_n$  を、それぞれ  $TD3_n = D3_{n+1} - D3_n, XSU_n, WD4_n, WSU_n, TD5_n = D5_{n+1} - D5_n$  で置き換えることにより全く同様に解析できる。

捨土場複数、待ち行列1列の場合のモデルは  $E_k/E_l/s$  に相当し、サービス(捨土)を終了する順序が必ずしも窓口(捨土場)に到着する順序と同じではないという、

複数窓口特有の現象のため解析は容易ではない。しかし、図-17 に示した  $G/G/1$  と似た形のブロック線図を得ることから、詳細は省略するが、平均分散比法を適用することにより、 $E_{s0}/E_s/2$  といった極端な場合を除けば、図-35 に示すように、ある程度の近似解が得られるようである。

#### (2) 運搬作業

モデル化の際に述べたように  $E_k/E_l/\infty$ 、顧客の出発順序は到着順という待合せモデルであり、図-36 を参照して一般に次式が成立し、これをブロック線図に表わしたものが 図-37 である。

$$\left. \begin{aligned} WD3_n &= [XD3_{n-1} - TD2_{n-1} - XD3_n]^+ \\ TD3_{n-1} &= [-WD3_n]^+ \\ &= [XD3_n + TD2_{n-1} - XD3_{n-1}]^+ \\ &\dots\dots\dots(40) \end{aligned} \right\}$$

ここで  $TD2_n = D2_{n+1} - D2_n, TD3_n = D3_{n+1} - D3_n$  とする。 $G/G/1$  などと異なり非線型制御系を含まないので、平均分散比法の適用は次のように簡単になる。

[例題]  $E[TD2_n] = 108, E[XD3] = 200$ , アーラン分布の位相  $k=6, l=10$  のとき、 $WD3_n, TD3_n$  の平

均、分散を求める。

$$\begin{aligned} \cdot m_z &= E[z_n] = E[XD3_n] - E[TD2_n] - E[XD3_n] \\ &= -108 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= V[z_n] = V[XD3_n] + V[TD2_n] + V[XD3_n] \\ &= 2 \cdot E[XD3_n]^2/l + E[TD2_n]^2/k = 9905 \end{aligned}$$

図-31,32 より  $E[WD3_n]=9.7, V[WD3_n]=590$

$$\cdot m_s = E[s_n] = -m_z = 108, \sigma_s^2 = V[s_n] = \sigma_z^2 = 9905$$

図-31,32 より  $E[TD3_n]=118, V[TD3_n]=7500$

以上の結果は、シミュレーション結果の  $E[WD3_n]=9.8, V[WD3_n]=586, E[TD3_n]=107.5, V[TD3_n]=7448$  とよく一致している。この例題は一般的とはいえないが、ショベル、ダンプトラック作業としては標準的なものである。

(3) 掘削積込作業

前述したショベル1台の場合の掘削積込作業モデルは、ダンプトラックがショベル横へ1台しか入れないことから、ダンプトラック(顧客)について  $WD1_n,$

$$\left. \begin{aligned} WD1_n &= [XD2_{n-1} + XSS_{n-1} + WD2_{n-1} + XD1_{n-1} + WD1_{n-1} - TD6_{n-1}]^+ \\ U_n &= [-WD1_n]^+ = [TD6_{n-1} - XD2_{n-1} - XSS_{n-1} - WD2_{n-1} - XD1_{n-1} - WD1_{n-1}]^+ \\ WD2_n &= [(1-R) \cdot XS_i - XD2_{n-1} - XD1_{n-1} - U_n]^+ \\ WS_n &= [-WD2_n]^+ = [XD2_{n-1} + XD1_{n-1} + U_n - (1-R) \cdot XS_i]^+ \\ TD2_{n-1} &= [XD2_n + XSS_n + WS_n + XS_n - XD2_{n-1}]^+ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

ここで  $TD6_n = D6_{n+1} - D6_n, TD2_n = D2_{n+1} - D2_n$  とする。

式(41)から図-39に示すブロック線図を得るが、 $WD2_n$ のフィードバックの存在が  $G/G/1$  などと異なり、このことが、待ち行列の長さ制限のある直列型待合せモデルの解析を複雑にしている。図-39よりショベルの遊休率(サービス窓口が空いている確率)  $P_0$  は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \kappa_{0n}^b &= 1 - \kappa_{0n}^a, \kappa_{0n}^d = 1 - \kappa_{0n}^c \\ E[U_n] &= -\{E[x_n] - E[t_n] \cdot \kappa_{0n}^c\} / (1 - \kappa_{0n}^c) \\ E[WS_n] &= -E[y_n] \cdot \kappa_{0n}^d = \{E[U_n] - E[t_n]\} \cdot (1 - \kappa_{0n}^c) \\ &= -E[x_n] - E[t_n] = E[TD6_n] - E[XS_n] \cdot NS \\ \therefore P_0 &= E[WS_n] / E[TD6_n] = 1 - E[XS_n] \cdot NS / E[TD6_n] \end{aligned} \dots\dots\dots(42)$$

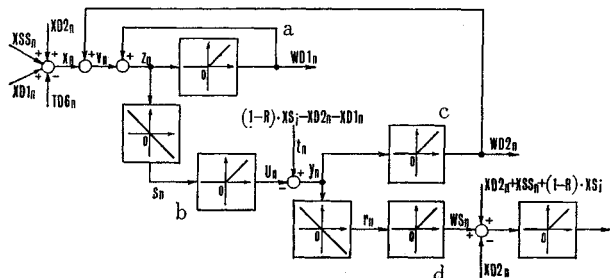


図-39

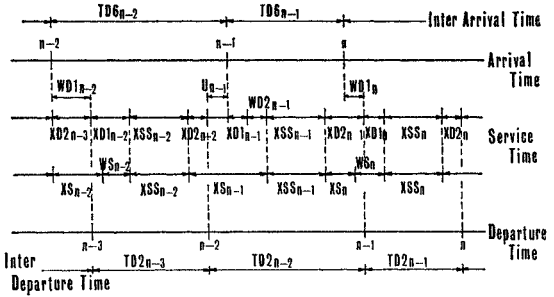


図-38 積込作業・時間関係

$WD2_n$ の2回の待ち時間が生じ、待ち行列の長さ制限のある待合せモデルを含む直列型待合せモデルとなる。しかも到着時間間隔、積込作業時間などはアーラン分布にしたがい、待ち行列理論の適用は困難であるが、平均分散比法により次のような結果を得ることができ

る。図-38を参照して次のような一般式が成立する。

モデル化に際して、実際の作業に忠実にダンプトラック進入時間  $XD1_n$ , 出発時間  $XD2_n$ などを考慮したにもかかわらず、 $P_0$ はダンプトラック平均到着時間間隔、ショベルの平均積込時間(1回の平均積込時間×積込回数)のみから決まるという予想外の結果を得る。モデル化においてショベルはあるダンプトラックに対する積込みを終了すると、ただちに次のダンプトラックのための掘削積込作業を始めると仮定しているが、このことは実際の作業において一般的なことである。またショベルが整地その他の別の作業を行なう時間は1回の積込作業時間のバラツキの中にも含めることができる。 $E[WD1_n], E[WD2_n]$ などは  $P_0$ のように簡単に求めることはできないが、実際の積込作業では  $WD2_n=0$ となる場合が多いことから、 $WD2_n$ のフィードバックが無いとしても大きな誤差は生じない。厳密に  $E[WD1_n]$ などを求めるには次節のような方法を用いればよい。

(4) 掘削運搬捨土作業

すでに推察されているように、掘削運搬捨土システムは円環型待合せ(Cyclic Queue)モデルであり、捨土、運搬、掘削積込作業の待合せモデルにおけるダンプトラック到着時間間隔の平均、分散はシステム設計の段階では未知数である。し

たがって Cyclic Queue としての掘削運搬捨土システム  
の解析が必要になる。

掘削運搬捨土システムについて次式が成立することは  
明らかである。

$$\begin{aligned}
 E[CT_n]/ND &= E[TD1_n] = E[TD2_n] = \dots = E[TD6_n] \\
 E[CT_n] &= E[XD1_n] + E[XSS_n] + E[XD2_n] + E[XD3_n] + E[XSU_n] \\
 &\quad + E[XD4_n] + E[WD1_n] + E[WD2_n] + \dots + E[WD5_n] \\
 E[WD1_n] &= \text{func}\{E[TD6_n], V[TD6_n], E[XD1_n], \dots, V[XD2_n]\} \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 E[WD5_n] &= \text{func}\{E[TD5_n], V[TD5_n], E[XD4_n], V[XD4_n]\} \\
 V[TD2_n] &= \text{func}\{E[TD6_n], V[TD6_n], E[XD1_n], \dots, V[XD2_n]\} \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 V[TD6_n] &= \text{func}\{E[TD5_n], V[TD5_n], E[XD4_n], V[XD4_n]\}
 \end{aligned} \tag{43}$$

ここで  $CT_n, ND$  をダンプトラックのサイクルタイム  
および全稼働台数,  $TD1_n = D1_{n+1} - D1_n$  とする。また掘削運搬捨土システムの待ちモデルにおける確率変数の添字  $n$  は平均分散比法を適用する際には前述のように無視することができる。

図-31, 32 などを適当な関数形に近似して, 式 (43) を連立方程式として解くことにより掘削運搬捨土システムの解を得ることができるであろう。たとえば, 積込作業現場へのダンプトラック平均到着時間間隔  $E[TD6_n]$  が式 (43) を解いて求まれば, 式 (42) からショベルの遊休率  $P_0$  が求まり, 単位時間当りの掘削運搬捨土量  $\langle Q \rangle$  が次式で求められる<sup>9)</sup>

$$\langle Q \rangle = (1 - P_0) \cdot t_s \cdot c / T_s$$

ここで,  $t_s$ : ショベル稼働率,  $c$ : ダンプトラック 1 台の積載容量,  $T_s$ : ダンプトラック 1 台に対するショベルの積込時間とする。

以上に述べてきたように平均分散比法により実際の現象を比較的忠実に解析することができるが, 本論文ではいろいろの待ちモデルに対する平均分散比法の適用に重点を置いたため, 実際の施工計画への応用に対する考慮が十分でない。たとえば, 平均分散比法には前述のように定常性の仮定が含まれており, 非定常状態の検討は別に行なう必要がある。掘削運搬捨土システムのシミュレーションを行なった限りにおいては, 施工機械が稼働し始める際の非定常状態は, あまり長く続かないことが知られているが, 稼働中のショベルの掘削位置移動, ショベル, ダンプトラックの故障など, システムの定常性を乱す現象とあわせて, 非定常状態の影響に対する検討が必要である。このほか, 実際の土工作业ではショベル, ダンプトラックやスクレーパー, ブッシャーブルなどのいろいろの掘削運搬捨土システムが併用される場合が多く, また捨土作業については, 盛土作業における締め固め機械, 敷均し機械との輻輳が生じる場合も多く, これらの複雑なシステムに対する検討が必要であるが, このような実際的な問題については今後の解析に待つことにする。

### 6. あとがき

多面的な性格をもつ施工計画全体を工学的に表現することは困難であり, 本論文の内容も施工計画の部分的断面を表わすに過ぎない。施工作业に立脚した施工計画研究例は従来ひじょうに少なく, また筆者らが実際の施工に対して未経験であるため具体的な応用面への配慮が不十分であり, 施工に携わる方々の批判を期待したい。最後に, 本論文作成に当り多大のご助力をいただいた近畿地建大和川工事事務所, 日本道路公団焼津工事事務所, 関西電力喜撰山発電所工事事務所, 青木建設 岩屋出張所, 鹿島建設津出張所, 同多摩作業所, 同羽田土木出張所, 同土木見積部の諸氏および太田秀樹氏をはじめとする京都大学土木工学教室土木施工学講座の諸氏に感謝の意を表する。

#### 参考文献

- 1) 辻 節三：最適制御概論, 養賢堂, 1947.
- 2) Fan, L.T. and Wang, C.S.: The Discrete Maximum Principle, John-Wiley & Sons, Inc, New York, 1964.
- 3) 太田秀樹：掘削工法の合理化に関する基礎的研究, 京都大学修士論文, 1968.
- 4) 島昭治郎・太田秀樹・荒井克彦：ショベル・ダンプ組合せに関する一考察, 土木学会関西支部講演概要集, 1968.
- 5) W. フェラー：確率論とその応用, 紀伊国屋, 1960.
- 6) Bartlett, M.S.: The Large Sample Theory of Sequential Tests, Proc. Camb. Phil. Soc. 42, 1945.
- 7) 荒井克彦：土工計画合理化に関する基礎的研究, 京都大学修士論文, 1970.
- 8) 伊藤 清：確率論, 岩波, 1953.
- 9) Griffiths, F.H.: Optimizing Haul Fleet Size Using Queuing Theory, Proc. of A.S.C.E., Vol. 94, 1968.
- 10) Lindley, D.V.: The Theory of Queues with a Single Server, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 48, 1954.
- 11) 高橋安人：自動制御理論, 岩波, 1954.
- 12) 榎木義一他：統計的自動制御理論, コロナ社, 1966.
- 13) 榎木義一他：統計学的手法による自動制御理論, オーム社, 1967.
- 14) Pugachev, V.S.: Non-Linear System Theory, Statistical Methods in Automatic Control, Proc. 2nd Con. Int. Fed. Automatic Control, 1960
- 15) 本間鶴千代：待ち行列の理論, 理工学社, 1966.

(1970.12.2・受付)