

三角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析

STRESS ANALYSES OF A SEMI-INFINITE PLATE WITH A
TRIANGULAR NOTCH OR MOUND

長谷部 宣男*

By Norio Hasebe

1. ま え が き

本論文は、隅角部に丸味のある三角形の突起、あるいは切欠きを、またその特別な場合として、U字形切欠きを有する半無限板を、面内荷重が作用した平面弾性問題として、あるいは薄いプレートの面外への曲げの問題として解析し、その応力分布を求める。そして特に切欠き先端の隅角部の開角や曲率半径と、応力分布との関係、曲げモーメントとポアソン比との関係などを考察したものである。

切欠きあるいは突起を有する半無限板の平面弾性問題の応力解析は、双曲座標を用いて、円弧切欠きおよび突起を有する場合を石橋¹⁾、Weinel²⁾、Ling³⁾、鶴戸口⁴⁾の諸氏が、だ円座標を用いて半だ円切欠きの場合を樋口、鈴木⁵⁾、すみを丸めた長方形切欠きを鈴木⁶⁾、写像関数を用いてすみを丸めた三角形および長方形切欠き⁷⁾、またU字形切欠き⁸⁾をそれぞれ清家、切欠き先端に曲線を付けた三角形切欠きの開角 0° およびその他の開角の場合を岡林^{9),10)}の諸氏が、また Neuber¹¹⁾は、曲線座標を用いて浅い切欠きや、突起のある場合を解析している。

切欠きあるいは突起を有する半無限板の曲げの問題としての応力解析は、半円切欠きの場合を玉手、塩谷¹²⁾、半だ円切欠き¹³⁾、三角形や四角形の切欠き¹⁴⁾を塩谷が行っているが、その数はあまり多くないようである。

以上からも応力解析された半無限板の形状は、特定の曲線座標や2,3の写像関数を用いたものに限られているようであるが、任意的な種々の形状の半無限板に対する応力解析には、文献9),10)に用いられている分数式の和の形の有理型の等角写像関数を作り、これを用いるのが最も一般的に思われる。ここでもこの形の写像関数

を作り、そしてこれを用いて Muskhelishvili の方法¹⁵⁾により応力解析を行なう。

2. 等角写像関数

(1) 三角形切欠きおよび突起を有する半無限領域の等角写像関数

切欠き先端に曲線を付けた、三角形切欠きを有する半無限領域を、単位円内部に等角写像する関数を、Schwarz-Christoffel の変換公式を応用して導く。曲線の付け方には、文献9),10)の方法もあるが、ここでは文献16),17)に用いたと同じ方法を用いる。

単位円に写像したときの対応は、図-1に示す。 α は、隅角部の角度を表わすパラメーターであり、 β は切欠き先端にそう入する曲線の位置に関するパラメーターである。

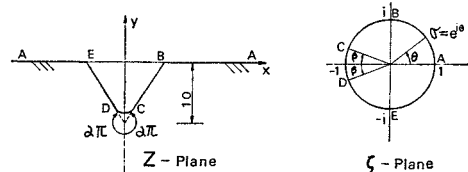


図-1

Schwarz-Christoffel の変換公式より、直線部分において

$$\frac{d}{d\zeta} \log \left(\frac{dz}{d\zeta} \right) = - \left[\frac{2}{\zeta-1} + \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{\zeta-i} + \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{\zeta+i} \right] \quad \dots\dots\dots (1)$$

また曲線部分においては、無限個の稜を有する多角形と考えると、

$$\frac{d}{d\zeta} \log \left(\frac{dz}{d\zeta} \right) = - \int_{\alpha+\frac{1}{2}}^{-\alpha+\frac{3}{2}} \frac{d\lambda}{\zeta - e^{i(k\lambda+c)}}$$

* 正会員 工修 名古屋工業大学講師 土木工学科

が考えられる¹⁶⁾。

ここに k, c は、直線部との接続より、

$$C: e^{i(\pi-\beta)} = e^{i\left\{k\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+c\right\}}$$

$$D: e^{i(\pi+\beta)} = e^{i\left\{k\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)+c\right\}}$$

$$\therefore k = -2\beta/(2\alpha-1)$$

$$c = \pi + 2\beta/(2\alpha-1)$$

である。

これらを上式に代入し、積分し、べき級数に展開すると

$$\frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} = \frac{2\alpha-1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\beta \cdot \zeta^{n-1} \dots\dots\dots (2)$$

を得る。

式 (1)、式 (2) より 多少の変形ののち、求めたい写像関数

$$Z = -iK \int \frac{f(\zeta)}{(1-\zeta)^2(1+\zeta^2)^{\alpha-0.5}} d\zeta \dots\dots\dots (3)$$

を得る。ただし $0.5 < \alpha < 1$ であり、

$$f(\zeta) = \exp \left[\frac{2\alpha-1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin n\beta \cdot \zeta^n \right]$$

とおいた。ここに $-i$ は、半無限領域が xy 平面の第 3, 4 象限を占めるように図形を回転させたものであり、実数 K は、隅角部に曲線のない鋭い角の場合の切欠き深さが、1.0 になるように決めた係数である (図-1 参照)。そして以後ことわらない限り、切欠きを有する半無限板の寸法の基準として、この長さをとる。

式 (3) は、 $\beta=0$ のとき、隅角部に曲線のない鋭い角を有する場合を、普通に Schwarz-Christoffel の公式より導いた式になる。 $\beta=0$ 、 $2\alpha\pi=360^\circ$ のとき式 (3) は、積分ができて

$$Z = -iK \int \frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^2 \sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta = -iK \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\zeta}$$

となる。これより $K = \sqrt{2}$ である。

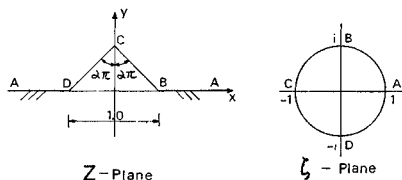


図-2

図-2 に示す隅角部に曲線の付いていない三角形突起を有する半無限領域を、単位円内部に等角写像する関数は、Schwarz-Christoffel の変換公式より、

$$Z = -iK \int \frac{(1+\zeta^2)^{0.5-\alpha}}{(1-\zeta)^2(1+\zeta)^{1-2\alpha}} d\zeta \dots\dots\dots (4)$$

である。ただし $0 < \alpha < 0.5$ である。 K は、突起の底部の長さが 1.0 になるように決める。したがってこと

わらないかぎり、これが三角形突起を有する場合の寸法の基準である。

(2) 有理近似写像関数

三角形切欠きあるいは突起を有する半無限領域の有理写像関数を、式 (3) あるいは式 (4) をもとにして分数式の和の形に作る。以下切欠きを有する場合の有理写像関数の作り方を中心に述べる。

a) 切欠きを有する半無限板の場合

式 (3) から収束の遅い項を取り出して分解すると、

$$\begin{aligned} Z/(-iK) &= \frac{A}{1-\zeta} - \frac{Bi}{1.5-\alpha} (1+i\zeta)^{1.5-\alpha} \\ &+ \frac{Ci}{1.5-\alpha} (1-i\zeta)^{1.5-\alpha} + \left\{ \frac{f(\zeta)}{(1-\zeta)^2(1+\zeta^2)^{\alpha-0.5}} \right. \\ &- \frac{A}{(1-\zeta)^2} - \frac{B}{(1+i\zeta)^{\alpha-0.5}} \\ &- \left. \frac{C}{(1-i\zeta)^{\alpha-0.5}} \right\} d\zeta \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} A &= 2^{0.5-\alpha} f(1) \\ &= 2^{0.5-\alpha} \exp \left[\frac{2\alpha-1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin n\beta \right] \\ &= 2^{0.5-\alpha} \exp \left[\frac{2\alpha-1}{\beta} \left\{ \beta \log 2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^\beta \log \left(\cot \frac{t}{2} \right) dt \right\} \right] \equiv 2^{0.5-\alpha} g(\beta) \\ B &= i \cdot 2^{-\alpha-0.5} f(i) = i \cdot 2^{-\alpha-0.5} [g(2\beta)]^{0.5} \\ &\quad \cdot \left\{ \cos \frac{(2\alpha-1)}{4} \pi + i \sin \frac{(2\alpha-1)}{4} \pi \right\} \\ C &= -i \cdot 2^{-\alpha-0.5} f(-i) = \bar{B} \end{aligned}$$

(バーは共役な値を示す)

である。式 (5) の第 1 項は、半無限の広がりを表わすが、この項は、有理関数であるから別に問題はない。しかしその他の項は、有理関数ではない。したがって第 2 項、第 3 項および積分項のおのおのに対して分数式の和の形の有理写像関数を作ろうとするものである。

第 2 項に対しては、 $\sum_{j=1}^{10} \frac{-A_j}{1+i\alpha_j\zeta}$ なる 10 個の分数式を考えた。そして第 2 項のべき級数と分数式のべき級数の項が

$$\begin{aligned} &1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \\ &2 \times 8, \quad 3 \times 8, \quad 4 \times 8, \quad 5 \times 8 \\ &2 \times 8^2, \quad 3 \times 8^2, \quad 4 \times 8^2, \quad 5 \times 8^2 \\ &2 \times 8^3, \quad 3 \times 8^3, \quad 4 \times 8^3, \quad 5 \times 8^3 \end{aligned}$$

の項で一致するように α_j, A_j を決めた¹⁷⁾。

一例として、 $2\alpha\pi=360^\circ$ に対する α_j, A_j の値を表-1 に示す。この α_j, A_j を分数式に代入し、べき級数に展開した項と、式 (5) 第 2 項のべき級数の項を比較してみると、低次の項では小数点以下 5, 6 けたまで、

表-1 分数式の係数
($2\alpha\pi=360^\circ$ の切欠きを有する半無限板の場合)

α_j	A_j	α_j	A_j
0.99950121896	0.00000738786	0.85025253695	0.01966173667
0.99769932736	0.00004304742	0.18492775973	0.81252475689
0.99252642858	0.00023697700	0.02221740268	8.36436971134
0.97836043916	0.00104723915	0.68305933913	0.06682814886
0.94061407718	0.00506081882	0.43915210988	0.21739989131

高次の項では 6, 7 けたまで, また 5×8^3 項目は, ζ の 2560 乗に当るので, ζ の 5000 乗の項でも小数点以下 6 けたまで一致する。

式 (5) 第 3 項に対する分数式は, 式 (5) 第 2 項に対する分数式の α_j を $-\alpha_j$ に置き換えることによって得られる。

式 (5) の積分項に対しては, そのべき級数の収束の比較的速いこと, およびべきの係数の値が単調に減少していないことより, $\sum_{j=1}^{14} \frac{B_j}{1-\beta_j\zeta}$ の 14 個の分数式を考え, ζ の 1 乗の項から ζ の 28 乗の項まで一致するように B_j, β_j を決めた。一般に B_j, β_j は, 複素数である。

式 (5) の積分項は, 切欠き先端の曲線部に関するパラメーター β を含むので, $2\alpha\pi$ —一定として β の値を変え, 切欠き先端に種々の大きさの曲率半径を有する写像関数を作る。1 例として 表-2 に $2\alpha\pi=360^\circ, \beta=1.2$ に対する B_j, β_j の値を示す。

表-2 分数式の係数
($2\alpha\pi=360^\circ, \beta=1.2$ ラジアン の切欠きを有する半無限板の場合)

β_j	B_j
$-0.18818423633 + 0.07420171520i$	$-0.36362915226 - 0.10857184064i$
$-0.16480578761 + 0.27669003539i$	$0.00218320011 - 0.14986209700i$
$-0.15131912232 + 0.47649519049i$	$0.02439203046 - 0.04235958894i$
$-0.13986195262 + 0.66730269563i$	$0.01140667348 - 0.01114248920i$
$-0.07717858003 + 0.85754503296i$	$0.00089357439 - 0.00187734730i$
$-0.02441821407 + 0.95346594072i$	$0.00010503729 - 0.00013849224i$
$-0.30429606027 + 0.88030456694i$	$0.0001665351 + 0.00005788760i$

および上値に共役な複素根の 7 組の β_j, B_j の値

こうして求めた分数式は, 式 (5) の積分項のべき級数と ζ^{28} より高次の項も (ζ^{50} で小数点以下 5 けた程度) かなりよく一致する。

以上より式 (5) に対する近似有理写像関数は,

$$Z=\omega(\zeta)=-iK\left[\frac{A}{1-\zeta}-\frac{A}{2}-\frac{Bi}{1.5-\alpha}\right. \\ \cdot \sum_{j=1}^{10}\left\{\frac{-A_j}{1+i\alpha_j\zeta}+\frac{A_j}{1+i\alpha_j}\right\} \\ +\frac{Ci}{1.5-\alpha}\sum_{j=1}^{10}\left\{\frac{-A_j}{1-i\alpha_j\zeta}+\frac{A_j}{1-i\alpha_j}\right\} \\ \left. +\sum_{j=1}^{14}\left\{\frac{B_j}{1-\beta_j\zeta}-\frac{B_j}{1-\beta_j}\right\}\right] \cdots \cdots (6)$$

である。しかし上式には, 半無限の直線縁が x 軸に一致

するように定数項を加えた。

また係数 K の値は, 式 (3) の $\beta=0$ の場合の切欠き深さが 1.0 になるように決めるのであるが, $2\alpha\pi=360^\circ$ の場合以外は, 解析的に求まりそうにないので, 各角度に対して $\beta=0$ の場合の式 (6) の表わす切欠き深さより求める。

次に式 (6) の精度について考察してみる。

図-3, 4, 5 には, $2\alpha\pi=360^\circ, \beta=1.2$; $2\alpha\pi=270^\circ, \beta=0.7$; $2\alpha\pi=200^\circ, \beta=0$ の場合の式 (6) の表わす領域を, また 表-4, 5, 6 の一部には, それぞれの場合の座標値およびその点での曲率半径 (負の値は境界線の外向きに凹を意味する) を示す。

いずれの場合も半無限直線縁を示す y 座標は, 0 の値が真の値であるが, その誤差は, 10^{-8} 以下で非常に小さいことがわかる。

また 表-4 より, U 字形の直線部を示す座標は, 0.1096 程度でかなり真直ぐな直線縁を示している。最も誤差が大きいののは, 突起部 B, E で, 角点になるべきところに小さな丸がついている。また切欠き底の曲線は, 円弧でなく, y 軸上の曲率半径が最も小さく, そこから徐々に大きな曲率半径に移行している。

b) 突起を有する半無限板の場合

三角形突起を有する半無限領域を, 単位円内部に等角写像する有理型の写像関数は, 切欠きを有する場合と同じようにして作ることができる。しかしこの場合は, $\zeta=1$ が半無限の広がり, $\zeta=-1$ が三角形の突起点 C (図-2 参照) に対応し, その近傍でべき級数の収束は遅いため, 式 (4) を

$$Z/(-iK)=\frac{2^{\alpha-0.5}}{1-\zeta}+\frac{2^{-2.5-\alpha}}{\alpha}(1+\zeta)^{2\alpha} \\ +\left\{\frac{(1+\zeta^2)^{0.5-\alpha}}{(1-\zeta)^2(1+\zeta)^{1-2\alpha}}-\frac{2^{\alpha-0.5}}{(1-\zeta)^2}\right. \\ \left.-\frac{2^{-1.5-\alpha}}{(1+\zeta)^{1-2\alpha}}\right\}d\zeta \cdots \cdots (7)$$

と分解して, 第 2 項および積分項に対する有理写像関数を分数式の和の形に作る。

第 2 項に対する分数式は, 分数式の個数, 一致させるべき係数の選び方等を, 切欠きの場合の式 (5) の第 2 項に対する分数式と同じ方法で作った。

式 (7) の積分項に対する分数式も 14 個選び, ζ の 1 乗から ζ の 28 乗の係数が一致するように作った。

かくして三角形突起を有する半無限領域を単位円内部に等角写像する有理写像関数は,

$$Z=\omega(\zeta)=-iK\left[\frac{2^{\alpha-0.5}}{1-\zeta}-\frac{2^{\alpha-0.5}}{2}+\frac{2^{-2.5-\alpha}}{\alpha}\right. \\ \cdot \sum_{j=1}^{10}\left\{\frac{-A_j}{1+\alpha_j\zeta}+\frac{A_j}{1+\alpha_j}\right\} \\ \left. +\sum_{j=1}^{14}\left\{\frac{B_j}{1-\beta_j\zeta}-\frac{B_j}{1-\beta_j}\right\}\right] \cdots \cdots (8)$$

表-3 分数式の係数
($2\alpha\pi=90^\circ$ の突起を有する半無限板の場合)

α_j	A_j	α_j	A_j
0.99950121896	0.00000738786	0.85025253695	0.01966173667
0.99769932736	0.00004304742	0.18492775973	0.81252475689
0.99252642858	0.00023697700	0.02221740268	8.36436971134
0.97836043916	0.00104723915	0.68305933913	0.06682814886
0.94061407718	0.00506081882	0.43915210988	0.21739989131
β_j	B_j		
-0.03558517122	4.22160305820		
-0.53715442692	0.01725238964		
-0.78441161877	0.00146074161		
-0.92899705871	0.00010983137		
-0.13463313669+0.37661151341 <i>i</i>	0.03160907497-0.03340455297 <i>i</i>		
-0.08216585537+0.60229633046 <i>i</i>	0.01013830509-0.00557021642 <i>i</i>		
-0.03759013123+0.76741827709 <i>i</i>	0.00305227069-0.00077937454 <i>i</i>		
-0.01005934364+0.88368587662 <i>i</i>	0.00071592097+0.00002810119 <i>i</i>		
-0.00142666790+0.96060118801 <i>i</i>	0.00009642392+0.00002742494 <i>i</i>		

および上値に共役な複素根の4組の β_j, B_j の値

として求まる。ここに定数項は、半無限直線縁が x 軸に一致するように図形を平行移動させたものである。

表-3 には、 $2\alpha\pi=90^\circ$ の突起の場合の式 (8) の分数式の係数を示す。

図-6 には、 $2\alpha\pi=90^\circ$ の場合の図形が、表-7 には、座標値とその点での曲率半径が示してある。

切欠きを有する場合と同様半無限直線縁の y 座標は、0 が真の値であるが、その誤差は、きわめて小さい。最大誤差は、角点であるはずの B, C, D に生ずるが、その点での曲率半径も比較的小さい。

3. 平面弾性問題としての解析

(1) 解法および境界条件

解法の一般論は文献 15) に、また写像関数が一次分数式の場合の解法の概略が文献 17) に述べてあるので、ここでは解法について述べることを割愛したい。

次に境界条件としては、最も基本的な外力と考えられる、大きさ P の x 軸方向一様引張りを考える (図-3, 6 参照)。

大きさ P の x 軸方向一様引張りの応力関数は、 $\frac{P}{2}y^2$ で、このときの複素応力関数 $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ は、

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{P}{4}\omega(\zeta), \psi_1(\zeta) = -\frac{P}{2}\omega(\zeta)$$

である。

次に複素応力関数 $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ が表わす境界線上での外力を打ち消す、別の複素応力関数 $\varphi_0(\zeta), \psi_0(\zeta)$ を考えれば、求めたい複素応力関数 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ は、

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta), \psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

である。そしてこのとき満足すべき境界条件式は、境界線上に外力が作用していないから、単位円周上 $\sigma=e^{i\theta}$ で

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0$$

である。したがって式 (9) を上式に代入し、変形して

$$\begin{aligned} \varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} \\ = -\frac{P}{2}\omega(\sigma) + \frac{P}{2}\overline{\omega(\sigma)} \end{aligned}$$

を得る。これより $\varphi_0(\zeta), \psi_0(\zeta)$ を求めればよい。

上式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ を乗じ、単位円周上に極のあることに注意して、単位円周上での積分をしたときの右辺の関数を $A(\zeta)$ とおくと、その1次導関数は、

$$A'(\zeta) = -\frac{P}{2} \left[\omega'(\zeta) + \frac{E-E}{2(1-\zeta)^2} \right]$$

となる (文献 17), 式 (12) 参照)。 E は、写像関数式 (6) あるいは式 (8) の $\frac{1}{1-\zeta}$ の係数である。

(2) 解析結果

a) 切欠きを有する半無限板の場合

図-3, 4, 5 および 表-4, 5, 6 には、それぞれ $2\alpha\pi=360^\circ$, 切欠き底の曲率半径 $\rho=-0.0826$; $2\alpha\pi=270^\circ$, $\rho=-0.2661$; $2\alpha\pi=200^\circ$, $\rho=-0.1340$ の切欠きを有する半無限板に、一様引張り力 1.0 が作用したときの、対称軸上の σ_x, σ_y および境界線に沿う縁応力 σ_θ を示す。寸法は、先にも述べたが、それぞれの角度で、切欠き底に丸味のない鋭い切欠き深さを 1.0 として、それを基準にしている。

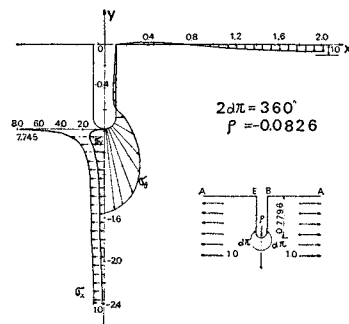


図-3

図-3, 表-4 より、切欠き底の応力 σ_x は、切欠きより離れるにつれ急速に減少していること、 σ_y の値は、 σ_x に比べてかなり小さいこと、U 字形の直線縁に圧縮応力が生じていること、突起点 B, E は角点でないため、小さな応力が生じていること、半無限の直線縁の σ_θ が 1.0 の大きさになるところは、切欠き部よりかなり離れていること、他の曲率半径を有する切欠きの応力

表-4 応力分布 ($2\alpha\pi=360^\circ$, $\beta=1.2$ ラジアン)

	θ ラジアン	曲率半径 ρ	座 標		縁 応 力 σ_θ	縁曲げモーメント M_θ^*
			x	y		
境界線上の応力	π	-0.0826	0.0	-0.77959	7.745	3.296 3.896
	3.05	-0.0832	0.00991	-0.77899	7.653	3.261 3.852
	2.8	-0.0909	0.03686	-0.77107	6.541	2.828 3.307
	2.6	-0.1054	0.05811	-0.75711	4.967	2.215 2.536
	2.3	-0.1550	0.08803	-0.71798	2.265	1.155 1.209
	2.0	-0.3023	0.10871	-0.63725	0.266	0.344 0.210
	1.9	1.7983	0.10961	-0.58888	-0.053	0.247 0.095
	1.7	-1.10 $\times 10$	0.10973	-0.40972	-0.201	0.250 0.099
	1.575	1.14 $\times 10$	0.10956	-0.07896	-0.013	0.136 0.050
	$\pi/2$	0.0217	0.11584	-0.00600	0.0007	0.061 0.025
	1.57	-0.1149	0.14459	-0.00008	0.0006	0.095 0.055
	1.56	-3.0443	0.23711	-0.00014	-0.040	0.253 0.188
	1.5	-4.37 $\times 10$	0.44890	0.00002	-0.126	0.514 0.438
	1.4	2.36 $\times 10^2$	0.66925	0.00001	-0.056	0.691 0.622
	1.2	1.32 $\times 10^3$	1.05221	0.00001	0.225	0.847 0.797
対称軸上の応力	0.8	2.36 $\times 10^4$	2.04285	0.00000	0.684	0.956 0.936
	0.1	3.95 $\times 10^6$	18.756	"	0.995	0.999 0.999
	0.04	1.50 $\times 10^{10}$	46.965	"	0.999	1.000 1.000
		座 標 y	σ_x	σ_y	M_x^*	M_y^*
	-1.00	-0.77959	7.745	0.0	3.296 3.896	0.0 0.0
	-0.99	-0.78068	7.542	0.099	3.292 3.862	-0.035 -0.015
	-0.90	-0.79177	5.975	0.782	3.195 3.543	-0.271 -0.114
	-0.80	-0.80722	4.678	1.200	3.002 3.188	-0.406 -0.171
	-0.70	-0.82695	3.727	1.371	2.760 2.846	-0.453 -0.191
	-0.60	-0.85229	3.029	1.386	2.502 2.530	-0.444 -0.187
	-0.40	-0.92740	2.125	1.176	2.012 1.995	-0.349 -0.148
	0.20	-1.65322	1.141	0.359	1.178 1.171	-0.075 -0.033
	0.60	-3.85772	1.013	0.081	1.027 1.027	-0.013 -0.006
	0.80	-8.50096	1.001	0.019	1.005 1.005	-0.003 -0.001
	0.90	-17.8733	1.000	0.005	1.001 1.001	-0.001 -0.0003

* 上段の値がポアソン比 0.0 下段の値がポアソン比 0.5 の場合

計算より、対称軸上の σ_x が 1.01 の大きさになるには、曲率半径に関係なく、切欠き底より切欠き深さのほぼ 4.6~4.8 倍程度であることなどがわかる。

図-4、表-5 より、突起点 B には、小さな応力（しかもこの場合は負）が生じている。

図-5、表-6 より、切欠き周辺の応力分布の変化は、図-3.4 に比べて小さいが、切欠き部より遠くまでその影響がおよんでいる。突起点 B は丸味がついているた

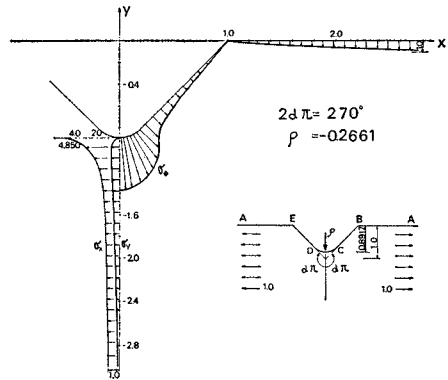


図-4

表-5 応力分布 ($2\alpha\pi=270^\circ$, $\beta=0.7$ ラジアン)

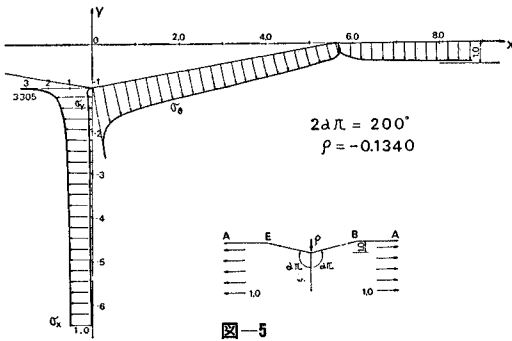
	θ ラジアン	曲率半径 ρ	座 標		縁 応 力 σ_θ	縁曲げモーメント M_θ^*
			x	y		
境界線上の応力	π	-0.2661	0.0	-0.89170	4.850	2.165 2.506
	3.05	-0.2679	0.02736	-0.89029	4.796	2.146 2.482
	2.7	-0.3175	0.13394	-0.85677	3.662	1.738 1.964
	2.2	6.05 $\times 10$	0.32731	-0.68397	1.092	0.966 0.964
	1.8	6.96 $\times 10$	0.62947	-0.38178	0.417	0.741 0.676
	1.575	2.6404	0.98993	-0.02129	0.004	0.402 0.289
	$\pi/2$	0.0096	1.01160	-0.00071	-0.002	0.253 0.162
	1.57	-0.0832	1.02004	-0.00002	-0.003	0.346 0.255
	1.56	-4.0740	1.07301	-0.00008	0.024	0.538 0.447
	0.8	5.89 $\times 10^4$	3.73357	0.00000	0.850	0.974 0.963
	0.2	7.16 $\times 10^7$	16.4264	"	0.992	0.999 0.998
	0.07	4.48 $\times 10^9$	47.1706	"	0.999	1.000 1.000
対称軸上の応力	ζ	座 標 y	σ_x	σ_y	M_x^*	M_y^*
	-1.0	-0.89170	4.850	0.0	2.165 2.506	0.0 0.0
	-0.99	-0.89472	4.735	0.053	2.161 2.487	-0.017 -0.007
	-0.85	-0.94449	3.431	0.558	2.055 2.217	-0.175 -0.075
	-0.70	-1.01759	2.527	0.750	1.879 1.946	-0.228 -0.098
	-0.60	-1.08154	2.117	0.760	1.752 1.784	-0.226 -0.098
	-0.40	-1.26091	1.590	0.649	1.516 1.516	-0.185 -0.080
	0.10	-2.30666	1.092	0.255	1.141 1.134	-0.062 -0.028
	0.60	-6.70606	1.005	0.041	1.016 1.015	-0.008 -0.004
	0.80	-14.9130	1.000	0.009	1.003 1.003	-0.002 -0.001

* 上段の値がポアソン比 0.0, 下段の値がポアソン比 0.5 の場合

め、応力は 0 になっていないが、この付近で急に小さくなっている。

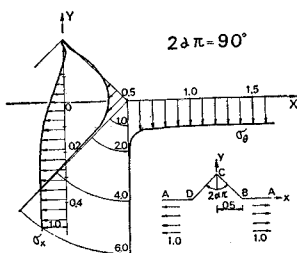
b) 突起を有する半無限板の場合

図-6、表-7 には、 $2\alpha\pi=90^\circ$ の突起を有する半無

表-6 応力分布 ($2\alpha\pi=200^\circ$, $\beta=0.0$ ラジアン)

	θ ラジアン	曲率半径 ρ	座 標		縁 応 力 σ_θ	縁曲げモーメント M_θ^*
			x	y		
境 界 線 に 沿 う の 応 力	π	-0.1340	0.0	-1.0	3.306	1.570 1.764
	3.13	-0.2131	0.01887	-0.99876	3.030	1.512 1.685
	3.10	4.1417	0.07377	-0.98906	2.159	1.328 1.432
	2.8	-1.03×10^4	0.77649	-0.86500	1.402	1.129 1.167
	2.5	3.79×10^6	1.61163	-0.71774	1.215	1.070 1.091
	1.9	8.94×10^3	3.81514	-0.32919	0.967	0.988 0.985
	1.58	-3.73×10	5.60851	-0.01300	0.615	0.856 0.817
	$\pi/2$	0.0290	5.68214	-0.00014	0.362	0.731 0.666
	1.5705	0.0641	5.68503	-0.00001	0.394	0.753 0.692
	1.53	1.56×10^3	5.99507	0.00004	0.730	0.912 0.887
対 称 軸 上 の 応 力	0.60	-5.84×10^6	19.8414	0.00000	0.987	0.996 0.995
	0.20	1.03×10^9	61.470	"	0.999	1.000 1.000
	ζ	座 標 y	σ_x	σ_y	M_x^*	M_y^*
	-1.0	-1.0	3.306	0.0	1.570 1.764	0.0 0.0
	-0.99	-1.01698	2.641	0.199	1.513 1.647	-0.044 -0.020
	-0.90	-1.21265	1.667	0.211	1.302 1.350	-0.054 -0.024
	-0.70	-1.80971	1.309	0.161	1.185 1.202	-0.046 -0.020
	-0.20	-4.51390	1.057	0.091	1.071 1.069	-0.027 -0.012
	0.20	-9.46990	1.008	0.038	1.025 1.022	-0.011 -0.005
	0.60	-24.7690	1.000	0.007	1.004 1.004	-0.002 -0.001

* 上段の値がポアソン比 0.0, 下段の値がポアソン比 0.5 の場合

表-7 応力分布 ($2\alpha\pi=90^\circ$)

	θ ラジアン	曲率半径 ρ	座 標		縁 応 力 σ_θ	縁曲げモーメント M_θ^*
			x	y		
境 界 線 に 沿 う の 応 力	π	0.0095	0.0	0.49609	0.0002	0.045 0.017
	3.14	1.1351	0.01516	0.48465	0.0001	0.086 0.039
	3.13	-1.5737	0.04104	0.45880	-0.010	0.159 0.089
	3.00	2.19×10	0.14356	0.35636	-0.067	0.351 0.251
	2.70	-3.33×10^2	0.25484	0.24508	-0.017	0.503 0.405
	2.65	-1.92×10^2	0.26924	0.23067	0.001	0.521 0.425
	1.80	1.54×10^2	0.46249	0.03743	0.757	0.843 0.821
	1.60	0.2567	0.49684	0.00301	2.399	1.166 1.297
	1.58	-0.0057	0.49906	0.00080	4.873	1.692 2.021
	1.575	-0.0036	0.49956	0.00045	5.811	2.030 2.431
対 称 軸 上 の 応 力	$\pi/2$	-0.0032	0.50003	0.00023	6.140	2.282 2.706
	1.57	-0.0032	0.50009	0.00020	6.127	2.315 2.737
	1.56	-0.0080	0.50130	-0.00004	4.656	2.285 2.587
	1.53	0.2359	0.50665	-0.00001	2.300	1.688 1.806
	1.00	2.18×10^6	0.75225	0.00000	1.105	1.076 1.087
	0.40	-2.55×10^7	1.90051	"	1.012	1.009 1.010
	0.07	7.07×10^9	10.8936	"	1.000	1.000 1.000
	ζ	座 標 y	σ_x	σ_y	M_x^*	M_y^*
	-1.00	0.49609	0.0002	0.0	0.045 0.017	0.0 0.0
	-0.9999	0.49381	0.0002	-0.00005	—	—
対 称 軸 上 の 応 力	-0.999	0.48281	-0.001	-0.00002	0.082 0.040	0.002 0.0002
	-0.99	0.44584	-0.012	0.004	0.168 0.105	0.005 0.001
	-0.98	0.42326	-0.017	0.008	—	—
	-0.9	0.32493	0.014	0.019	0.352 0.277	0.012 0.003
	-0.75	0.21137	0.156	0.002	0.478 0.417	0.024 0.007
	-0.70	0.17905	0.212	-0.009	0.509 0.454	0.028 0.009
	-0.40	-0.00377	0.567	-0.091	0.651 0.638	0.057 0.022
	-0.10	-0.21043	0.851	-0.131	0.769 0.785	0.071 0.028
	0.20	-0.51150	0.976	-0.090	0.879 0.899	0.051 0.020
	0.50	-1.11259	1.000	-0.031	0.959 0.968	0.019 0.007
対 称 軸 上 の 応 力	0.80	-3.42125	1.000	-0.004	0.995 0.996	0.003 0.001
	0.90	-7.23995	1.000	-0.001	0.999 0.999	0.006 0.002

* 上段の値がポアソン比 0.0, 下段の値がポアソン比 0.5 の場合

限板に、一様引張り力 1.0 が作用したとき、境界線に沿う縁応力 σ_θ 、および対称軸上の応力 σ_x , σ_y を示す。

隅角部B点は、角点でなく小さな丸味がついているが、かなりの応力集中の生じていること、また少し離れると急速に減少していること、突起の先端に行くと、引張りになったり、圧縮になったりして、応力分布が振動

していること、頂点Cは角点でないため、小さな応力が生じていること、対称軸上の σ_y の大きさは、 σ_x にくらべてかなり小さいことなどがわかる。

(3) 隅角部の角度と曲率半径と応力

本節は、鋭い角を持つ隅角部近傍の応力の order や応力分布の特性を考察し、前節の解析結果との対比を行なう。次に隅角部に丸味のある場合の最大応力と隅角部の曲率半径との関係を考察する。

平面弾性問題として、隅角部近傍の応力の振舞いに関する研究は、古くは奥田¹⁹⁾、隅角部の種々の境界条件に対して Williams²⁰⁾、隅角部が鋭い角ばかりでなく丸味のある場合を Weber²¹⁾、隅角部の角度と隅角部付近の応力分布の考察を岡林²²⁾の諸氏が行なっている。また長谷部¹⁷⁾は、十字形板の隅角部の曲率半径と応力との関係を考察した。

隅角部に丸味のない鋭い角を持つ弾性領域において、隅角部付近に外力の作用していないとき、隅角部の角度 $2r$ と応力の order m との関係は、

$$(m+1)\sin 2r + \sin 2(m+1)r = 0 \quad (10)$$

$$(m+1)\sin 2r - \sin 2(m+1)r = 0 \quad (11)$$

で表わされる(文献 17)、式 (14)、(15) 参照)。ここに式 (10) は、隅角部の 2 等分線 ($\theta=0$) に対称な応力分布の場合に、式 (11) は、逆対称な応力分布の場合に成り立つ。

また式 (10)、(11) は、 $2r$ —一定の角度で、 m が複素根も含め無限個の根を有する超越方程式である。この根をもって応力成分は一般に、

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} k_j r^{m_j} \quad (12)$$

と表わされる。ここに r は、隅角部の頂点からの距離、 m_j が式 (10) または式 (11) の根、 k_j は角度 θ 、 $2r$ 、 m_j および境界条件から定まる値である。

また無限個の根のうち、任意の角度 $2r$ に対して、 $R_e[m] \geq -0.5$ ($R_e[\]$ は $[\]$ の実部を示す) の m の値が、隅角部付近の応力の振舞いを、 $R_e[m] \leq -1$ の m の値が、無限遠での応力の振舞いを表わすのに対応している。今は隅角部付近の応力に注目しているから、式 (12) の m_j は、任意の角度について $R_e[m] \geq -0.5$

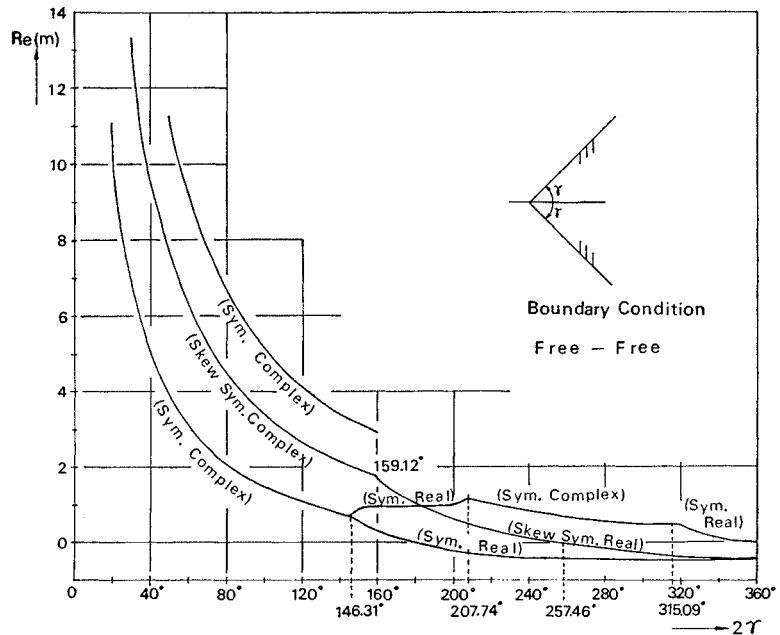


図-7

を考えればよい。

これらの厳密な証明は、Tranter²³⁾ がくさび状領域の応力解析に用いた、Mellin 変換を応用して示すことができる。

図-7 には、角度 $2r$ を横軸にとり、対称な応力分布の場合に成り立つ式 (10) の m の第1根および第2根を、また逆対称な応力分布の場合に成り立つ式 (11) の第1根を示す。 m が複素根の場合は、その実部で示してある。

m の第1根は、対称応力分布の場合には、 $2r < 146.31^\circ$ で、逆対称の場合には、 $2r < 159.12^\circ$ で複素根を持つこと、またこれらの角度を境いに $R_e[m]$ の勾配が変化すること、逆対称応力分布の場合には、 257.46° を境いに m が正から負に変わること、したがって $r=0$ 点は、 257.46° を境いに零点から極に変わることなどがわかる。

次に m が複素根の場合の応力分布を考察してみる。

式 (10) または式 (11) は、実係数を持つ方程式であるから、 m の複素根は常に共役な形で存在する。したがって式 (12) より互いに共役な m の複素根のみを取り出して書くと、応力 σ は、

$$\sigma = k r^m + \bar{k} r^{\bar{m}} = r^u \{k_1 \cos(v \log r) + k_2 \sin(v \log r)\} \quad (13)$$

と表わされる。ここに $m=u+iv$ (u, v は実数)、 k_1, k_2 は $\theta, 2r, u, v$ および境界条件より定まる実数である。

式 (13) より θ —一定の r 方向に応力分布は、振動性状を示すことがわかる。

表—8 最大応力および最大曲げモーメント

$2\alpha\pi$	β (ラジアン)	座標 y	曲率半径 ρ	最大応力 σ_{\max}	最大曲げ モーメント M_{\max} *
360°	0.3	-0.98165	-0.0056	32.205	14.903
	0.5	-0.95410	-0.0145	19.573	8.997
	0.8	-0.89364	-0.0371	12.047	3.592
	1.1	-0.81166	-0.0696	8.544	4.030
	1.3	-0.74509	-0.0966	7.057	3.380
	1.57	-0.63918	-0.1394	5.587	2.756
320°	0.3	-0.97893	-0.0165	18.953	7.703
	0.4	-0.96522	-0.0260	14.851	6.230
	0.7	-0.90950	-0.0692	9.030	4.083
	1.1	-0.80446	-0.1534	5.931	2.882
	1.3	-0.73891	-0.2053	5.027	2.525
	1.57	-0.63542	-0.2848	4.112	2.165
270°	0.15	-0.98901	-0.0224	14.368	—
	0.2	-0.98315	-0.0355	11.728	4.252
	0.4	-0.95284	-0.1161	7.125	3.073
	0.7	-0.89170	-0.2661	4.850	2.382
	1.1	-0.78508	-0.5214	3.516	1.929
	1.3	-0.72089	-0.6676	3.103	1.780
	1.57	-0.62110	-0.8812	2.670	1.620
240°	0.005	-1.0	-0.0027	26.956	5.886
	0.15	-0.98452	-0.0956	6.901	2.746
	0.7	-0.87597	-0.7815	3.110	1.756
	1.2	-0.73693	-1.5960	2.330	1.494
	1.57	-0.60717	-2.2728	1.993	1.372
200°	0.0	-1.0	-0.1340	3.306	1.692
	0.2	-0.96378	-2.2712	1.977	1.345
	0.4	-0.91894	-5.3264	1.712	1.261
	0.7	-0.84525	-9.8494	1.527	1.199
	1.2	-0.70426	-17.897	1.363	1.139
	1.55	-0.58694	-23.748	1.286	1.110

* ポアソン比 0.3 である。

$r \ll 1$ のところに注目すれば、対称応力分布の第1根が複素根である $2r < 146.31^\circ$ (図—7 参照) において、また逆対称応力分布の場合には、 $2r < 159.12^\circ$ において、応力分布は、近似的に式 (13) で表わされる。

前節で考察した 図—6 (表—7) の隅角部先端 C 付近の応力分布の振動性、図—3.4 (表—4.5) の B 点付近の

圧縮応力の発生など (いずれも隅角部の角度は 146.31° 以下) は、以上のことより説明され得るものと思われる。

次に隅角部に丸味のあるとき、隅角部の角度と曲率半径と応力との関係を考察してみる。

表—8 は、切欠きを有する半無限板に一樣引張り力 1.0 の作用したとき、切欠き底に生ずる最大応力と切欠き底の曲率半径の値を、いくつかの隅角部角度 $2\alpha\pi$ について示す。またそれらの値を両対数目盛に図示したのが 図—8 である。

図—8 より最大応力は、各角度で曲率半径 ρ の小さいところでは、直線的な変化をし、 ρ が大きくなると曲線的な変化をする。まず興味あることは、この直線の勾配が、式 (10) (いま考えている応力分布は、隅角部の 2 等分線に対称な場合に当たる) より求まる m の第1根にほぼ一致することである。そして ρ が大きくなると、 m の第2根が影響してくると思われる。

実際 図—8 に示す各角度の曲線は、 m の第1, 2 根をもって表わすことができる。ただし第1根および第2根ともに実根である場合には、

$$\sigma_{\max} = k_1 \rho^{m_1} + k_2 \rho^{m_2} \dots \dots \dots (14)$$

である。ここに m_1, m_2 は、第1根および第2根、 k_1, k_2 は、実定数である。

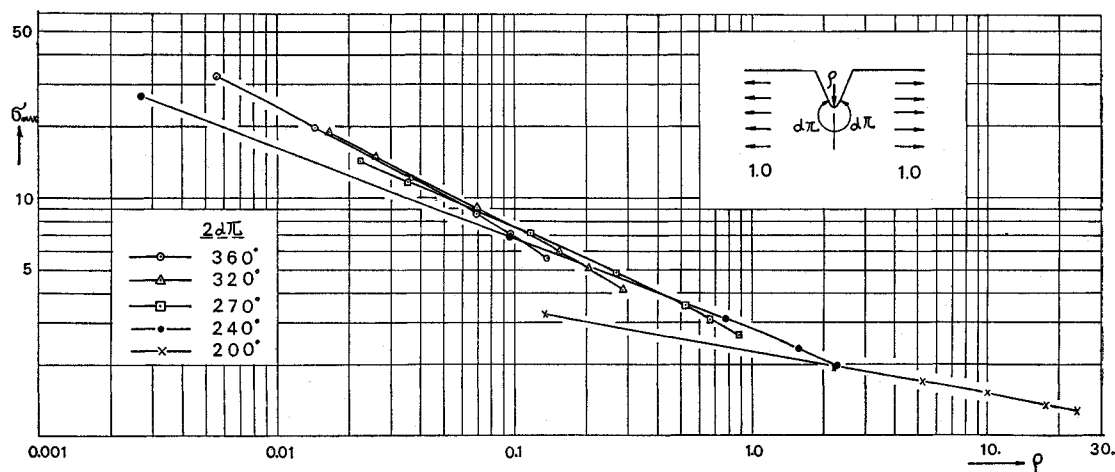
第1根が実根、第2根が複素根である場合には、

$$\sigma_{\max} = k_1 \rho^{m_1} + \rho^u \{ k_2 \cos(v \log \rho) + k_3 \sin(v \log \rho) \} \dots \dots \dots (15)$$

である。ここに m_1 は、第1根、 u, v は、第2根の実部および虚部、 k_1, k_2, k_3 は、実定数である。

表—9, 10 は、式 (14), (15) のおのおのの係数の値を示す。図—8 に示す各角度の ρ の範囲内で、最大応力 σ_{\max} は、ほぼ 1% 以内の誤差で近似される。

一般に最大応力 σ_{\max} は、式 (12) の r を曲率半径



図—8

表-9 式 (14) の係数

$2\alpha\pi$	m_1	m_2	k_1	k_2
360°	-0.5000	0.5000	2.41	-2.30
320°	-0.4965	0.4670	2.47	-0.89
200°	-0.1813	1.0183	2.31	-0.0003

表-10 式 (15) の係数

$2\alpha\pi$	m_1	$m_2=u+iv$	k_1	k_2	k_3
270°	-0.4555	0.6293+0.2313 <i>i</i>	2.55	-0.09	-1.7
240°	-0.3843	0.8336+0.2523 <i>i</i>	2.76	0.07	-0.4

ρ に置き換えることにより, 類似の形で

$$\sigma_{\max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \dots\dots\dots (16)$$

と表わされるであろう。ここに k_j は, 各角度で定まる定数である。

4. 薄いプレートの曲げの問題としての解析

(1) 解法および境界条件

その解法は, 数学的には, 平面問題の場合と全く同じ考え方で行なうことができる^{(24), (17)}。

境界条件としては, 最も基本的な外力と考えられる x 方向の無限遠で, 大きさ M の一様曲げモーメントが作用した場合を考える (図-9 参照)。またここでは, 紙面の裏側に引張り応力を生じさせるような曲げモーメントを正の曲げモーメントとしている。

求める複素応力関数 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ を

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta)$$

とする。ここに $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ は, x 方向無限遠での一様曲げを表わし,

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{M\omega(\zeta)}{4D(1+\nu)}, \quad \psi_1(\zeta) = -\frac{M\omega(\zeta)}{2D(1-\nu)}$$

である。ここに D は曲げ剛さ, ν はポアソン比。また $\varphi_0(\zeta), \psi_0(\zeta)$ は, $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ によって境界線上に生ずる外力を打ち消すような複素応力関数である。したがって $\varphi_0(\zeta), \psi_0(\zeta)$ を求める境界条件式は,

$$\begin{aligned} & -\frac{3+\nu}{1-\nu} \varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} \\ & = -\frac{M}{2D(1-\nu)} (\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}) \end{aligned}$$

である。上式両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ を乗じ, 単位円周上での積分を行なったときの右辺の関数を $B(\zeta)$ とすると, その1次導関数は

$$B'(\zeta) = \frac{-M}{2D(1-\nu)} \left[\omega'(\zeta) + \frac{\bar{E}-E}{2(1-\zeta)^2} \right]$$

となる (文献 17), 式 (19) 参照)。 E は, 写像関数式 (6) あるいは式 (8) の $1/(1-\zeta)$ の係数である。

(2) 解析結果

a) 切欠きを有する半無限板の場合

図-9, 10, 11 および 表-4, 5, 6 に, それぞれ一様曲げモーメント 1.0 が作用したとき, ポアソン比 $\nu=0.0$ および $\nu=0.5$ について, 対称軸上の曲げモーメント M_x, M_y と境界線に沿う縁曲げモーメント M_θ を示す

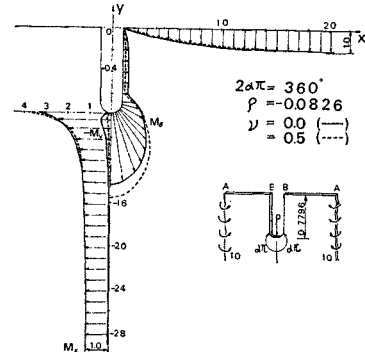


図-9

図-9, 表-4 より M_x の最大曲げモーメントは, $=0.5$ の方が $\nu=0.0$ の場合より大であること, また応力勾配も $\nu=0.5$ のときの方が大であり, 切欠き底より離れ中へ入ると, M_x は $\nu=0.0$ のときの方が大きくなっていること, M_y は負の曲げモーメントを生じ, M

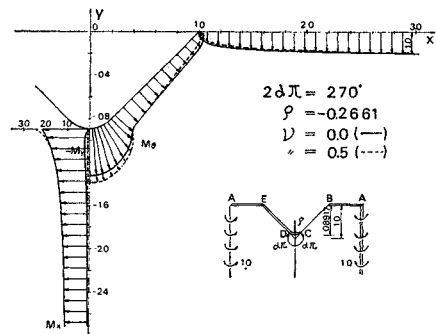


図-10

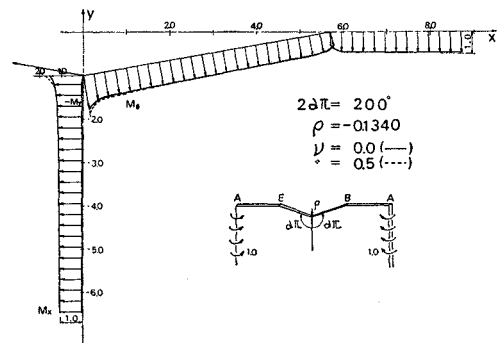


図-11

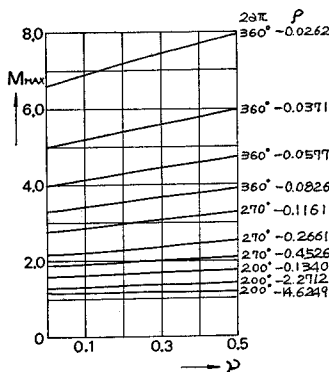
の値に比べその大きさはかなり小さいこと、また M_y は絶対値において、 $\nu=0.0$ の方が $\nu=0.5$ の場合より大であること、突起部B付近は、正の曲げモーメントが生じ、平面問題の応力分布のように負の値は生じていないこと、また突起部付近の M_θ は、 $\nu=0.0$ の方が $\nu=0.5$ の場合より大であることなどがわかる。

図—10、表—5 および 図—11、表—6 から同じようなことが考察される。

次に切欠き底に生ずる最大曲げモーメント M_{\max} とポアソン比 ν との関係を考察する。

隅角部角度および切欠き底の曲率半径を一定にして、ポアソン比 ν を 0.0 から 0.5 まで 0.1 きざみに、最大曲げモーメントを求め、図示したのが 図—12 である。

M_{\max} と ν との関係は、緩やかな上向き凸の曲線であるが、ほぼ直線的な関係と見なして十分であろう。隅角部の角度および曲率半径一



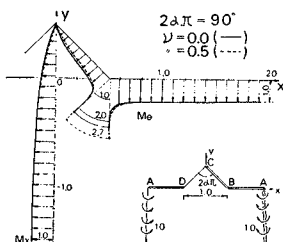
図—12

定のもとで、その勾配は一定である。またポアソン比の大きさの影響は、応力集中要素の厳しいほど、すなわち隅角部角度一定では、曲率半径の小さいほど、また曲率半径一定では、隅角部角度の大きいほど大きい。

b) 突起を有する半無限板の場合

図—13、表—7 には、 $2\alpha\pi=90^\circ$ の突起を有する半無限板に、一様曲げモーメント 1.0 が作用したとき、ポアソン比 $\nu=0.0$ および 0.5 について、境界線に沿う縁曲げモーメント M_θ および対称軸上の曲げモーメント M_x , M_y を示す。

突起部C点付近の曲げモーメント M_x は、 $\nu=0.0$ の方が $\nu=0.5$ のときより大きいこと、 M_y の値は、 M_x に比べてかなり小さいこと、切欠きの場合の M_y が、負であったのに比べ、この場



図—13

合は正の曲げモーメントであること、平面問題のときの σ_x の応力分布のように振動していないこと、隅角部 B では応力集中が生じ、 $\nu=0.5$ の方が $\nu=0.0$ の場合より大きいこと、また最大応力は、隅角部 B 点より少し右側によっていることなどがわかる。

(3) 隅角部の角度と曲率半径と応力

本節では、鋭い角を持つ薄いプレート、隅角部付近の曲げモーメントの order やその分布の特性等を考察し、前節の解析結果との対比を行なう。次に隅角部に丸味のある場合の最大曲げモーメントと隅角部の曲率半径との関係を考察する。

薄いプレートの曲げの隅角部付近の応力の振舞いに関する考察は、平面問題の場合と全く同じ考え方で行なうことができるが、平面問題の場合ほどには見当らないようである。隅角部の種々の境界条件に対して Williams²⁵⁾ が、また長谷部¹⁷⁾ は、十字形板の隅角部の曲率半径と応力について考察した。

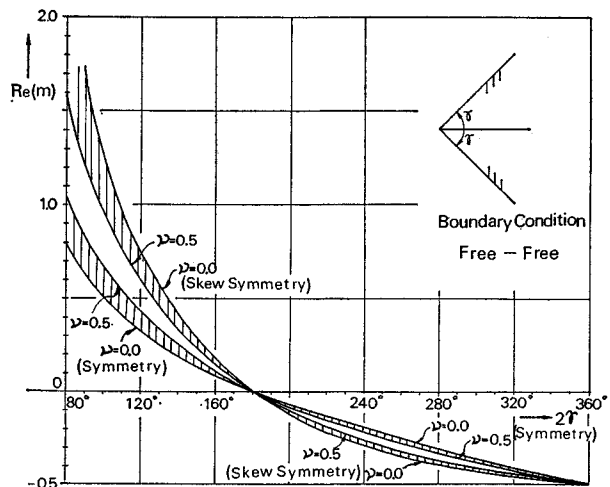
鋭い角を持つ弾性薄板の隅角部付近に、外力の作用していないとき、隅角部の角度 $2r$ と応力の order m とポアソン比 ν との関係は、

$$(\nu-1)(m+1)\sin 2r + (3+\nu)\sin 2(m+1)r = 0 \quad (17)$$

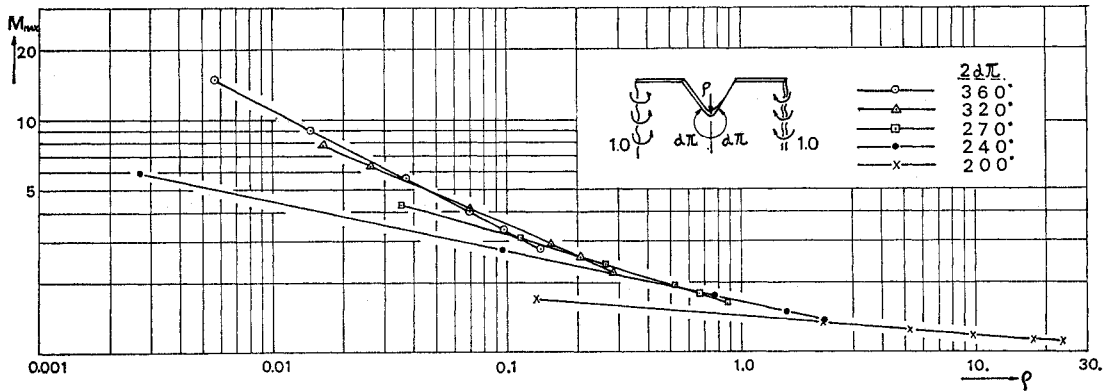
$$(\nu-1)(m+1)\sin 2r - (3+\nu)\sin 2(m+1)r = 0 \quad (18)$$

で表わされる(文献 17)、式 (21)、(22) 参照)。ここに式 (17) は、隅角部の 2 等分線 ($\theta=0$) に対称な応力分布の場合に、式 (18) は、逆対称な応力分布の場合に成り立つ。

$2r$ —一定、 ν —一定において、式 (17) または式 (18) より求まる無限個の根 m_j をもって、曲げモーメント



図—14



図—15

やねじりモーメントは、式 (12) と同じように、

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} k_j r^{m_j} \dots\dots\dots (19)$$

と表わされる。ここに k_j は、角度 θ , $2r$, ν , m_j および境界条件から定まる値である。

また平面問題の場合と同じく任意の角度 $2r$, および ν に対して, $R_e[m] \geq -0.5$ が, 隅角部付近の応力の振舞いを, $R_e[m] \leq -1$ が, 無限遠での応力の振舞いを表わすのに対応している。

これらの証明もプレートの問題に Mellin 変換を応用して示すことができる。

図—14 は, $\nu=0.0$ および 0.5 に対する角度 $2r$ と, 式 (17) および (18) の m の第 1 根の関係を示す。 $\nu=0.0 \sim 0.5$ の間の値に対しては, 斜線で示した間の値をとる。

これより, $r \ll 1$ の隅角部付近の応力の order m とポアソン比 ν と隅角部の角度 $2r$ との関係を知ることができる。 $2r > 180^\circ$ において, 対称応力分布の場合の m は, 負の値で ν の大きい方が大きい。したがって $r \rightarrow 0$ のとき $M \rightarrow \infty$ になる速さは, ν の大きいほど速い。しかし逆対称応力分布の場合には, ポアソン比の影響が対称な場合と逆であること, $2r < 180^\circ$ において, 対称応力分布の場合には, ν の大きいほど応力は小さく, また逆対称応力分布の場合は, それが逆であること, 平面問題の場合 (図—7) と違って m の第 1 根に複素根がないこと, したがって隅角部付近で応力の振動性は, 生じないことなどがわかる。

前節の解析結果で考察した, 切欠き底の最大曲げモーメントは, $\nu=0.5$ の方が, $\nu=0.0$ の場合より大であること, 応力勾配も急であること (図—9, 10, 11), 突起部では, $\nu=0.0$ の場合の方が, $\nu=0.5$ の場合より曲げモーメントの値が大きいこと (図—9, 13 など), 曲げモーメントの分布に振動性が生じていないことなどは, 本節の考察に符号するものと思われる。

表—11 式 (26) の係数 (ポアソン比 0.3)

$2\alpha\pi$	m_1	m_2	k_1	k_2
360°	-0.5000	0.5000	1.09	-0.44
320°	-0.4234	0.0981	1.362	-0.17
270°	-0.3018	0.2752	1.60	-0.03
240°	-0.2155	2.9434	1.65	-0.0009
200°	-0.0809	3.5974	1.44	0.0

次に隅角部に丸味のある薄板の, 隅角部の角度と曲率半径と曲げモーメントの関係を考察する。

表—8 には, ポアソン比 $\nu=0.3$ の切欠きを有する半無限板に, 一様曲げモーメント 1.0 の作用したとき, 切欠き底に生ずる最大曲げモーメントと切欠き底の曲率半径を, いくつかの隅角部角度について示す。またそれらを両対数目盛に図示したのが 図—15 である。

図—15 より平面問題の場合の考察と全く同じようなことが考察される。

したがって一般に最大曲げモーメント M_{\max} は, 式 (19) の r を曲率半径 ρ で置き換えることにより, 類似の形

$$M_{\max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \dots\dots\dots (20)$$

で表わされるであろう。ここに k_j は, 各角度およびポアソン比の値から定まる定数である。

実際 図—15 に示す各角度の M_{\max} は, 式 (20) の第 2 項まで用いて, その誤差をほぼ 1% 以内で近似させることができる。ただし m_j が第 1, 2 根ともに実数であるので,

$$M_{\max} = k_1 \rho^{m_1} + k_2 \rho^{m_2} \dots\dots\dots (21)$$

である。

表—11 に, 各角度に対する m_1, m_2, k_1, k_2 の値を示す。

5. あとがき

一般に任意の角度で鋭い角を持つ隅角部付近の応力の特性は, 式 (12) の第 1 項 (第 1 根が複素根の場合は式

(13)) や式 (19) の第 1 項から知ることができる (一般の場合は, 隅角部の 2 等分線に対称な応力分布と逆対称な応力分布の重ね合せである)。

また任意の角度で隅角部に丸味のある場合の最大応力は, 隅角部の曲率半径をもって式 (16) や式 (20) の形で表わされることがわかった。しかし実用的には, 始めの数項で十分であろう (式 (14), 式 (15), 式 (21) など)。

したがって何らかの方法で k_1 や k_2 などの係数が決まれば, 任意の曲率半径の最大応力は, 簡単に求められる。

平面弾性問題の場合の隅角部付近の応力分布と, 薄いプレートの曲げの場合の曲げモーメントの分布との形は, 類似しているが, 一番の違いは応力の order m の第 1 根に複素根が存在するかしないかである。

0.0~0.5 の間のポアソン比に対する曲げモーメントの分布は, 0.0 と 0.5 の場合の曲げモーメントの値より, 比例配分によって求めてよい。

本論文中の数値計算には, 京都大学大型計算機センターを利用した。

参 考 文 献

- 1) T. Isibasi : Memoirs of Faculty of Eng. Kyushu Imp. Univ. IX, 2 (1940), p. 131
- 2) E. Weinel : Z. angew. Math. Mech. Vol. 21 (1941), p. 228
- 3) C.B. Ling : Jour. Math. Phys. Vol. 26, No. 4 (1948-1), p. 284
- 4) 鶴戸口英善 : 日本機械学会論文集, 16 巻 55 号 (昭 25), p. 44
- 5) S. Higuchi and M. Suzuki : Technol. Rep. Tohoku Univ. 14 (1949), p. 95
- 6) 鈴木正彦 : 東北大学工学部内力および弾性学研究室報, 2 (昭 24), p. 61
- 7) 清家政一郎 : 日本機械学会論文集, 25 巻, 155 号 (昭 34-7), p. 613
- 8) M. Seika : Ingenieur-Archiv XXVII (1960), p. 20
- 9) 岡林 稔 : 名古屋工業大学学報第 18 巻 (1966), p. 165
- 10) 岡林 稔 : 名古屋工学大学学報第 19 巻 (1967), p. 363
- 11) Neuber : "Kerbspannungslehre", Julius Springer (1937)
- 12) 玉手・塩谷 : 日本機械学会論文集 24 巻 139 号 (昭 33-3), p. 139
- 13) S. Shioya : Ingenieur-Archiv XXIX (1960), p. 93
- 14) S. Shioya : Z. angew. Math. Mech. Vol. 39 (1959), p. 300
- 15) N.I. Muskhelishvili : "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", P. Noordhoff Ltd. (1963)
- 16) 野村恭雄 : 日本機械学会論文集, 25 巻 159 号 (昭 34-11), p. 1084
- 17) 長谷部宣男 : 土木学会論文報告集, 第 185 号 (昭 46-1), p. 9
- 18) 森口・宇田川・一松 : "数学公式 II", 岩波全書 p. 73
- 19) 奥田克己 : 造船協会会報, 56 号 (1935), p. 65
- 20) M.L. Williams : Jour. of App. Mech. (1952-12), p. 526
- 21) Von C. Weber : Z. angew. Math. Mech. Vol. 45 (1965), p. 25
- 22) 岡林 稔 : 土木学会論文報告集第 170 号 (1969-10), p. 1
- 23) C.J. Tranter : Quart. Jour. Mech. App. Math. (Oxford) 1 (1948), p. 125
- 24) G.N. Savin : "Stress Concentration around Holes", Chapter VI, Pergamon Press (1961)
- 25) M.L. Williams : 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics (1952), p. 325, McGraw-Hill Book Co.

(1971.4.8・受付)