土木学会論文報告集
第 194 号・1971 年 10 月

非線型有限変形法（大変形法）によるトラスの大変形解析とその応用プログラム

LARGE DEFORMATION METHOD FOR TRUSSES AND THE APPLICATION PROGRAMS

後藤茂夫*・大西聿紀**・大槻　護***・新村祐南****
By Shigeo Goto, Itsuki Ohnishi, Mamoru Ohtsuki and Sukenami Niimura

要　旨　本論文は，架設中の吊橋の構造系や，柔軟な立体吊構造トラスなどの大変形解析のための厳密理論とその応用プログラムについて述べたものである。

1. まえがき

本論文で対象とする構造系においては，各構成部材の応力，ひずみ状態は，弾性域をこえることはないが，その構造変形は，もはや，有限変形とは呼べないような大変形であると考える。

したがって，節点変位と部材変形の適合条件式は，十分に厳密なものでなければならず，安易な省略は許されない。

また，解式の剛性マトリックスを構成するための Unit Equation となる非線型材端力式も，反復計算において，十分な収束性の得られるよう配慮された厳密式であることが必要である。

本文における大変形法（非線型有限変形法）の基本的な考え方は，著者の有限変形法に関する既論文[1),2),3)]と同じく，先行荷重と先行部材力によるつり合い構造系を既知として，付加荷重による新たな変形と部材力増分を求める点にあるが，もちろん，初期状態は，任意に設定できるので，無応力状態よりの厳密解を求めることもできる。

一般に，近似的な適合条件式と部材力式とを用いて構成された，従来の有限変形理論の非線型解式は，変形が極端に大きくなると厳密解に収束しなくなるため，荷重を分割載荷させながら，構造系の座標値をそのつど修正して，反復計算させることが必要となる。

これに対し，本理論は，収束性のきわめて良好な厳密解式を用い，単純な反復計算のみで厳密解が得られるよう配慮されているため，無効材の発生（ケーブルなどの非抗圧材のゆるみ）を考慮する場合は別として，相当な大変形時においても，荷重の分割載荷の必要は，ほとんど認められない。

本理論を用いた，応用プログラムの一つは，平面，および立体の非抗圧材を有するトラス構造の大変形解析プログラム（ATRUSS-Ⅲ）である。

これは，吊橋のキャットウォーク・ストームケーブル構造など，荷重の状態によっては，非抗圧材のゆるみによる骨組系の変化を考慮しなければならない構造を解析するものである。

非抗圧材の処理に関しては，付加荷重に対して，いくつかの無効材を生ずるような場合，付加荷重群をゼロから一様に漸増せしめ，それらの非抗圧材の各合計部材力（先行部材力と部材力増分との合計）が，逐次ゼロとなる境界荷重状態ごとに，その非抗圧材を無効としながら，最終付加荷重状態に到達するという力学モデルを考えて，各段階の部材力増分，変形の解を求め，最後に集計するという方法をとっている。

また，本プログラムは，付加荷重として，独立な荷重群のほかに，逐次，追加されるシリアルな荷重群をインプットすることができるようになっており，このときには，先行状態がそのつど修正される，いわゆる荷重漸増方式となるため，事実上，いかなる大変形時の厳密解析も可能である。

いま一つのプログラムは，架設中における吊橋の大変形解析プログラム（ELSUS-X）として開発されたもので，完成系の吊橋の厳密解析にもきわめて有効である。

本プログラムは，実用的な見地から，大変形挙動は，主ケーブルのみと考え，また，主ケーブルは，格点間で直線状をなすものとしており，この仮定のもとに，吊橋の各種の架設状態の厳密解析が可能である。

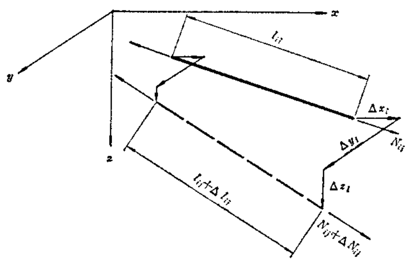
たとえば，吊橋の完成系から全死荷重を取り去り，初期主ケーブル形状および応力状態を計算させ，次に，こ

* 正会員　工博　（株）宮地鉄工所開発本部第1開発室長
** 正会員　同　課長
*** 正会員　工修　同　係長
**** 正会員　同　係長

れを出発点として，架設完了，閉合，後死荷重載荷の各条件で求めた解より，当初の完成時の状態に完全に一致した数値を確認することができる。

2. 基礎理論

変形前の状態において，構造物の各節点の座標を x_i, y_i, $z_i (i=1, 2, \cdots n)$ と表わせば，座標軸 x, y, z に関する，部材 ij の原位置における方向余弦は，



図―1

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}=\begin{bmatrix}\alpha_{ij}\\ \beta_{ij}\\ \gamma_{ij}\end{bmatrix}=\frac{1}{l_{ij}}\begin{bmatrix}x_i-x_j\\ y_i-y_j\\ z_i-z_j\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

となる。

いま，変形前に，材端力 N_{ij} を生じてつり合っていた部材 ij が，付加荷重により変形し，材端力が $N_{ij}+\Delta N_{ij}$ と変化して，新たなつり合い状態に達したものとする。

この場合の i 端の変位成分を

$$\Delta \boldsymbol{d}_i=\begin{bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta y_i\\ \Delta z_i\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

とおき，さらに

$$\Delta \boldsymbol{d}_{ij}=\Delta \boldsymbol{d}_i-\Delta \boldsymbol{d}_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

と表わすことにする。

部材 ij の変形による伸びを Δl_{ij} とすれば，両端の変位との関係は，

$$(l_{ij}+\Delta l_{ij})^2=(\boldsymbol{\alpha}_{ij}l_{ij}+\Delta \boldsymbol{d}_{ij})^*(\boldsymbol{\alpha}_{ij}l_{ij}+\Delta \boldsymbol{d}_{ij}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となるので，次式が得られる。

$$\left(1+\frac{\Delta l_{ij}}{2l_{ij}}\right)\Delta l_{ij}=\boldsymbol{\alpha}_{ij}{}^*\Delta \boldsymbol{d}_{ij}+\frac{1}{2\,l_{ij}}\Delta \boldsymbol{d}_{ij}{}^*\Delta \boldsymbol{d}_{ij} \quad \cdots(5)$$

ここで

$$\omega_{ij}=2\frac{\boldsymbol{\alpha}_{ij}{}^*\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}{l_{ij}}+\frac{\Delta \boldsymbol{d}_{ij}{}^*\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}{l_{ij}{}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

とおいて，Δl_{ij} を級数表示すれば，次のようになる。

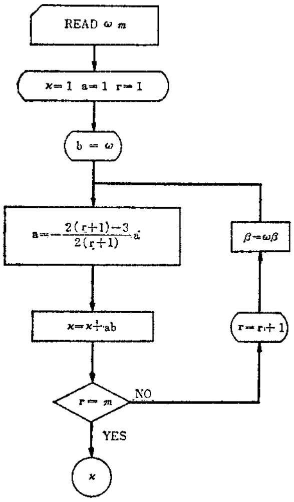
$$\Delta l_{ij}=l_{ij}\left(\frac{\omega_{ij}}{2}-\frac{\omega_{ij}{}^2}{8}+\frac{\omega_{ij}{}^3}{16}-\frac{5}{128}\omega_{ij}{}^4+\frac{7}{256}\omega_{ij}{}^5-\frac{21}{1024}\omega_{ij}{}^6+\cdots\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

さらに，

$$\kappa_{ij}=\frac{2\,l_{ij}}{2\,l_{ij}+\Delta l_{ij}}=1-\frac{\omega_{ij}}{4}+\frac{\omega_{ij}{}^2}{8}-\frac{5}{64}\omega_{ij}{}^3+\frac{7}{128}\omega_{ij}{}^4-\frac{21}{512}\omega_{ij}{}^5+\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

とおいて表わすことにすれば，

$$\Delta l_{ij}=\frac{l_{ij}}{2}\omega_{ij}\kappa_{ij}=\kappa_{ij}\left(\boldsymbol{\alpha}_{ij}{}^*+\frac{\Delta \boldsymbol{d}_{ij}{}^*}{2\,l_{ij}}\right)\Delta \boldsymbol{d}_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$



図―2

となる。ここで＊は，マトリックスの転置記号である。

一般に，κ_{ij} は，きわめて1に近い値であるが，図―2 の流れ図を用い，m を適当に設定することにより，コンピューターの固有精度によって許容される一定値にまで，容易に収束せしめることができる。

次に，部材 ij に関する定数を

EA_{ij}：伸び剛性

l_{0ij}：基準温度，無応力時の部材長

Δl_{tij}：温度変化による自由膨張時の伸び量

$$F_{ij}=\frac{EA_{ij}}{l_{0ij}}$$

とおけば，付加荷重による部材力の増分 ΔN_{ij} は，

$$\Delta N_{ij}=F_{ij}(\Delta l_{ij}-\Delta l_{tij}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

と表わすことができる。

さて，先行荷重による初期つり合い系から，付加荷重を加えた新たなつり合い系へと移行する間に，部材 ij に蓄えられる全ポテンシャルエネルギーを Λ_{ij} とすると

U_{ij}：ij 部材のひずみエネルギーの増加

Π_{ij}：ij 部材の材端力のポテンシャル損失

とおいて，

$$\Lambda_{ij}=U_{ij}-\Pi_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

となる。有限変形法では，さらに，

ΔU_{ij}：付加応力によるひずみエネルギー

$\tilde{U}_{ij}$：先行応力によるひずみエネルギー

$\Delta \Pi_{ij}$：増加材端力のポテンシャル損失

$\tilde{\Pi}_{ij}$：先行材端力のポテンシャル損失

を用いて，次のように表わすことができる。

$$\Lambda_{ij}=\Delta U_{ij}+\tilde{U}_{ij}-(\tilde{\Pi}_{ij}+\Delta\Pi_{ij}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

したがって，軸力部材の場合をこの式に適用すれば，

$$\Lambda_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\Delta N_{ij}^2}{F_{ij}}+N_{ij}\Delta l_{ij} -\Delta \boldsymbol{d}_{ij}^*(\boldsymbol{D}_{ij}+\Delta \boldsymbol{D}_{ij}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

が得られる。ここで，

$\boldsymbol{D}_{ij}$：部材 ij の i 端における先行材端力ベクトル

$\Delta \boldsymbol{D}_{ij}$：同端における材端力の増分ベクトル

である。

変形後の構造系もまた，新たなつり合い状態にあるので，Λ_{ij} は，極値を示すことになり，したがって，式 (13) を付加相対変位 $\Delta \boldsymbol{d}_{ij}$ で微分して得られる列ベクトルは，ゼロでなければならない。

すなわち，

$$\frac{\partial\Lambda_{ij}}{\partial\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}=\frac{\partial\Delta l_{ij}}{\partial\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}(N_{ij}+\Delta N_{ij}) -(\boldsymbol{D}_{ij}+\Delta \boldsymbol{D}_{ij})=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

となる。ここで，式 (5) を $\Delta \boldsymbol{d}_{ij}$ で偏微分してみると

$$\frac{\partial\Delta l_{ij}}{\partial\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}+\frac{\Delta l_{ij}}{l_{ij}}\frac{\partial\Delta l_{ij}}{\partial\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}=\boldsymbol{\alpha}_{ij}+\frac{\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}{l_{ij}}$$

$$\therefore\ \frac{\partial\Delta l_{ij}}{\partial\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}=\frac{l_{ij}}{l_{ij}+\Delta l_{ij}}\left(\boldsymbol{\alpha}_{ij}+\frac{\Delta \boldsymbol{d}_{ij}}{l_{ij}}\right)\cdots\cdots\cdots(15)$$

が得られることになる。これを式 (14) に代入し，

$$N_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}=\boldsymbol{D}_{ij}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

を用いれば，結局

$$\Delta \boldsymbol{D}_{ij}+F_{ij}\Delta l_{tij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}=\left(F_{ij}-\frac{N_{ij}+\Delta N_{ij}}{l_{ij}+\Delta l_{ij}}\right) \cdot\boldsymbol{\alpha}_{ij}\Delta_{lij}+\frac{N_{ij}+\Delta N_{ij}}{l_{ij}+\Delta l_{ij}}\Delta \boldsymbol{d}_{ij}\cdots\cdots\cdots(17)$$

となる。したがって，

$\Delta \boldsymbol{D}_{tij}=F_{ij}\Delta l_{tij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}$：温度荷重項

$\mu_{ij}=\dfrac{N_{ij}+\Delta N_{ij}}{l_{ij}+\Delta l_{ij}}$　：部材力パラメーター

$\boldsymbol{e}$　：3行3列の単位マトリックス

とおいて，式 (17) を書きなおせば，次の式が得られることになる。

$$\left\{F_{ij}\kappa_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*+\mu_{ij}(\boldsymbol{e}-\kappa_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*) +\frac{F_{ij}-\mu_{ij}}{2l_{ij}}\kappa_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\Delta \boldsymbol{d}_{ij}^*\right\}\Delta \boldsymbol{d}_{ij} =\Delta \boldsymbol{D}_{ij}+\Delta \boldsymbol{D}_{tij} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

この材端力式 (18) は，厳密な適合条件式と部材力式から作られたもので，左辺のカッコ内のマトリックスは，大変形法の剛性マトリックスを構成する unit となるものである。

この意味において，式 (18) を Unit Equation と呼ぶことにする。

なお，式 (18) は，微小変形理論においては，

$$F_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*\Delta \boldsymbol{d}_{ij}=\Delta\boldsymbol{D}_{ij}+\Delta \boldsymbol{D}_{tij} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

となり，線型化有限変形法の場合には，

$$\{F_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*+\mu_{ij}(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*)\}\Delta \boldsymbol{d}_{ij} =\Delta \boldsymbol{D}_{ij}+\Delta \boldsymbol{D}_{tij}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

となるものである。

ここで，幾何学的なつり合い条件から考えてみると，部材 ij の部材力と材端力との関係は，

変形前 $\boldsymbol{\alpha}_{ij}N_{ij}=\boldsymbol{D}_{ij}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$

変形後 $(\boldsymbol{\alpha}_{ij}+\Delta \boldsymbol{\alpha}_{ij})(N_{ij}+\Delta N_{ij}) =D_{ij}+\Delta \boldsymbol{D}_{ij}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$

である。ここに $\boldsymbol{\alpha}_{ij}+\Delta \boldsymbol{\alpha}_{ij}$ は，部材 ij の変形後の方向余弦ベクトルとする。

式 (21), (22) より

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}\Delta N_{ij}+\Delta\boldsymbol{\alpha}_{ij}(N_{ij}+\Delta N_{ij})=\Delta \boldsymbol{D}_{ij}\cdots\cdots(23)$$

が得られ，方向余弦の変化量 $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ は，厳密に

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{ij}=\frac{\Delta \boldsymbol{d}_{ij}-\boldsymbol{\alpha}_{ij}\Delta l_{ij}}{l_{ij}+\Delta l_{ij}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

と表わされ，したがって，これと式 (9) より

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{ij}=\frac{1}{l_{ij}+\Delta l_{ij}} \cdot\left(\boldsymbol{e}-\kappa_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*-\kappa_{ij}\frac{\boldsymbol{\alpha}_{ij}\Delta \boldsymbol{d}^*_{ij}}{2l_{ij}}\right)\Delta \boldsymbol{d}_{ij} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

となる。すなわち，これを式 (23) に代入し，整理すれば，式 (18) が得られることになる。

さて，Unit Equation (18) は，

$$\boldsymbol{A}_{ij}=F_{ij}\kappa_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*+\mu_{ij}(\boldsymbol{e}-\kappa_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$\boldsymbol{B}_{ij}=\frac{F_{ij}-\mu_{ij}}{2l_{ij}}\kappa_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\Delta \boldsymbol{d}_{ij}^*\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

とおくことにより，

$$(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})(\Delta \boldsymbol{d}_i-\Delta \boldsymbol{d}_j)=\Delta \boldsymbol{D}_{ij}+\Delta \boldsymbol{D}_{tij} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

と表わされる。

いま，i 点の付加荷重ベクトルを $\Delta \boldsymbol{D}_i$ とすれば，

$$\sum_j\Delta \boldsymbol{D}_{ij}=\Delta \boldsymbol{D}_i \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

となるので，式 (28) を j について集計し，$i=1, 2, \cdots n$ とおいて，全体をマトリックス表示する，

すなわち

$$\boldsymbol{K}_A=\begin{bmatrix}\Sigma\boldsymbol{A}_{1j} & & -\boldsymbol{A}_{ki}\\ & \Sigma\boldsymbol{A}_{2j} & \\ -\boldsymbol{A}_{ik} & & \Sigma\boldsymbol{A}_{nj}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_B=\begin{bmatrix}\Sigma\boldsymbol{B}_{1j} & & -\boldsymbol{B}_{ki}\\ & \Sigma\boldsymbol{B}_{2j} & \\ -\boldsymbol{B}_{ik} & & \Sigma\boldsymbol{B}_{nj}\end{bmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{d}_1\\ \Delta\boldsymbol{d}_2\\ \vdots\\ \Delta\boldsymbol{d}_n\end{bmatrix},\quad \Delta\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{D}_1\\ \Delta\boldsymbol{D}_2\\ \vdots\\ \Delta\boldsymbol{D}_n\end{bmatrix},$$

$$\Delta\boldsymbol{D}_t=\begin{bmatrix}\Sigma\Delta\boldsymbol{D}_{t_1j}\\ \Sigma\Delta\boldsymbol{D}_{t_2j}\\ \vdots\\ \Sigma\Delta\boldsymbol{D}_{tnj}\end{bmatrix}$$

と表わすことにより

$$(\boldsymbol{K}_A+\boldsymbol{K}_B)\Delta\boldsymbol{d}=\Delta\boldsymbol{D}+\Delta\boldsymbol{D}_t \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

が得られる。

$\boldsymbol{K}_A$ は，κ_{ij}, μ_{ij} を定数とみなせば，直接には変位項を含まないので，線型剛性マトリックスと呼び，これに対して，$\Delta\boldsymbol{d}_{ij}$ を含む $\boldsymbol{K}_B$ は，非線型剛性マトリックスと名付けることにする。

また，$\boldsymbol{K}_A$ は，完全な対称マトリックスであるが，$\boldsymbol{K}_B$ は，$\boldsymbol{B}_{ij}$ が非対称なので，サブマトリックス $\boldsymbol{B}_{ij}$ の配置に対してのみ対称性を有する。

式 (30) に，支点条件を挿入すれば，反復計算によって，これを解き，$\Delta\boldsymbol{d}$ の厳密解を求めることが可能となる。

3. 厳密解を求める反復機構

前章における Unit Equation (18)，および，それから構成されたマトリックス方程式 (30) は，まず完全な厳密式である。

しかしながら，非線型方程式のため，厳密解に達するまで，どうしても反復計算が必要である。

そのための近似解として，Unit Equation を

$$\{F_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*+\mu_{ij}(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*)\}\Delta\boldsymbol{d}_{ij}$$
$$=\Delta\boldsymbol{D}_{ij}+\Delta\boldsymbol{D}_{tij}$$

とする線型化有限変形法の解を用いることは，きわめて有効である。

すなわち，まず，これを用いて，

$$\boldsymbol{K}_B=0,\ \kappa_{ij}=1$$

のまま μ_{ij} を反復計算で収束させ解を求める。

この解は，非線型有限変形法の初期値として用いるものであり，線型解と呼ぶことにする。

もちろん，線型解を求める過程での部材力式は，

$$\Delta N_{ij}=F_{ij}\{\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*\Delta\boldsymbol{d}_{ij}-\Delta l_{tij}\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

という線型式を用いなければならない。

次に，収束した線型解より，

$$\mu_{ij}=\frac{N_{ij}+\Delta N_{ij}}{l_{ij}+\Delta l_{ij}}$$

$$\omega_{ij}=2\frac{\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*\Delta\boldsymbol{d}_{ij}}{l_{ij}}+\frac{\Delta\boldsymbol{d}_{ij}^*\Delta\boldsymbol{d}_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$\kappa_{ij}=1-\frac{1}{4}\omega_{ij}+\frac{1}{8}\omega_{ij}^2-\frac{5}{64}\omega_{ij}^3$$

$$+\frac{7}{128}\omega_{ij}^4-\cdots\cdots$$

を計算し（κ_{ij} は，図―2 の流れ図により，計算する），新たに，$\boldsymbol{K}_A, \boldsymbol{K}_B$ を作成し，

$$\Delta\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{K}_A+\boldsymbol{K}_B)^{-1}\Delta\boldsymbol{D} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

を解いて，次段への近似解 $\Delta\boldsymbol{d}$ を求める。

このまま，式 (32) を単純に反復させてもよいが，場合によって（節点変位は大きいが，部材の伸び量がきわめて微小な場合）収束しないことがある。

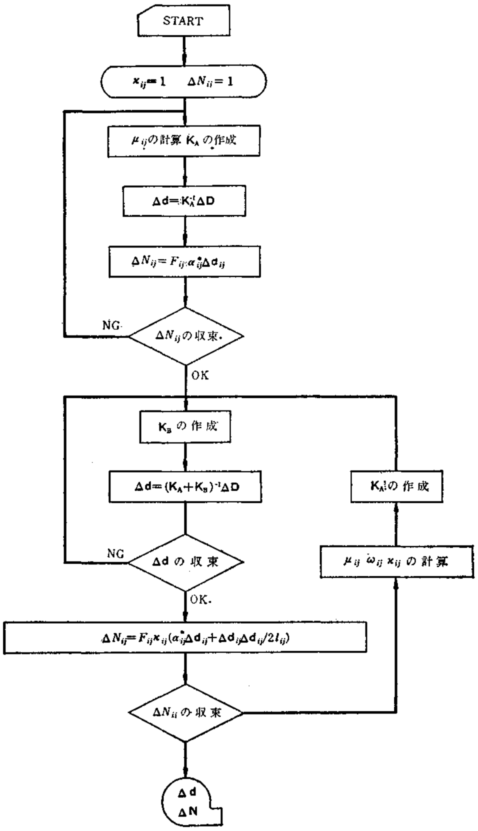
確実な収束性を条件づけるためには，式 (32) の連立方程式を，μ_{ij}, κ_{ij} の値を固定したまま，解の $\Delta\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{K}_B$ の中の $\Delta\boldsymbol{d}$ が，ある精度まで一致するよう反復し，この小ループで収束した解を用いて，

$$\Delta N_{ij},\ \mu_{ij},\ \omega_{ij},\ \kappa_{ij}$$

を計算し，次に $\boldsymbol{K}_A, \boldsymbol{K}_B$ を補正して大ループの反復を行なうようにするとよい。

なお，小ループの反復は，解式の収束性がきわめて良いので，単純な繰返しでも十分であるが，以下の手法がさらに効果的である場合も考えられる。

小ループでは，κ_{ij}，μ_{ij} を固定するので，$\boldsymbol{K}_A$ は，定数マトリックス，$\boldsymbol{K}_B$ は，$\Delta\boldsymbol{d}_{ij}$ の一次関数で構成され



図―3

る非線型剛性マトリックスとなる。

すなわち，

$$(\boldsymbol{K}_A+\boldsymbol{K}_B\{\Delta \boldsymbol{d}\})\Delta \boldsymbol{d}=\Delta \boldsymbol{D} \quad \cdots\cdots\cdots(33)$$

を解くこととなる。いま，厳密解 $\Delta \boldsymbol{d}$ を，近似解 $\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}$ と誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ を用いて

$$\Delta \boldsymbol{d}=\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{\varepsilon} \quad \cdots\cdots\cdots(34)$$

と表わせば，

$$K_B\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\cdot\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}=K_B\{\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}\}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$$

となることを考えると，式 (33) は，

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{K}_A+\boldsymbol{K}_B+\boldsymbol{K}_B\{\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}\})^{-1}$$
$$\cdot[(\boldsymbol{K}_A+\boldsymbol{K}_B\{\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}\})\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}-\Delta \boldsymbol{D}] \quad \cdots\cdots\cdots(35)$$

と変換することができる。

したがって，反復公式として，

$$\Delta \boldsymbol{d}^{r+1}=\Delta \boldsymbol{d}^{r}-(\boldsymbol{K}_A+2\,\boldsymbol{K}_B\{\Delta \boldsymbol{d}^{r}\})^{-1}$$
$$\cdot[(\boldsymbol{K}_A+\boldsymbol{K}_B\{\Delta \boldsymbol{d}^{r}\})\Delta \boldsymbol{d}^{r}-\Delta \boldsymbol{D}] \cdots(36)$$

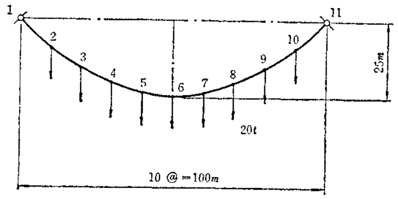
が得られることになる。

図—3 に，本章の概略を流れ図で示しておく。初期値としての ΔN_{ij} の設定は，無応力状態から計算する不安定架構の場合には，ゼロでない推定値を入れておく必要があるが，通常はゼロでよい。

4. 数値計算例による理論と反復機構の検討

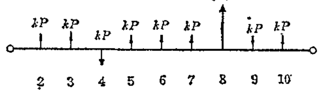
(1) 単純な平面ケーブル構造の大変形解析

図のように，各節点に 20 t の集中垂直荷重の作用する，初期放物線形状のケーブル構造を考える。



図—4

付加荷重は，次のようなものとする。



図—5

計算は，上図の P を 20 t とし，途中の解の経過をみるため，k を 0.1 から 1.0 まで変化させてみた。

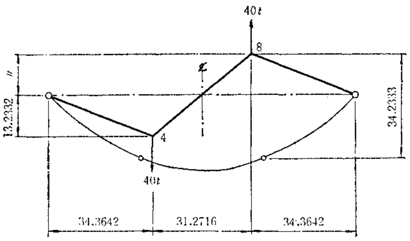
最終状態は，合計格点荷重が，4 点に下向きに 40 t，8 点に上向きに 40 t となり，他の格点は，すべてゼロとなる。

すなわち，変形後の形状は，最終的には，1–4，4–8，8–11 間が直線となる。

図—6 に計算結果による最終ケーブル形状を示すことにする。節点変位，部材軸力などの計算結果を **表—1**，**表—2** に示すことにする。

表—3 に，最終変形時の中間節点における，力のつり合い条件の精度を示す。

これは，各節点における合計荷重を，変形後の骨組と合成部材力 $N+\Delta N$ から逆算したもので，先行荷重と



図—6

表—2 部 材 軸 力　(単位 t)

部材番号	ij	初期軸力 N	軸力増分 ΔN	合計軸力 $N+\Delta N$
1	1～ 2	134.536 24	−99.728 52	34.807 72*
2	2～ 3	122.065 56	−87.257 84	34.807 72*
3	3～ 4	111.803 40	−76.995 69	34.807 71*
4	4～ 5	104.403 07	−61.848 52	42.554 56**
5	5～ 6	100.498 76	−57.944 21	42.554 55**
6	6～ 7	100.498 76	−57.944 21	42.554 55**
7	7～ 8	104.403 07	−61.848 52	42.554 55**
8	8～ 9	111.803 40	−76.995 66	34.807 74*
9	9～10	122.065 56	−87.257 81	34.807 75*
10	10～11	134.536 24	−99.728 47	34.807 76*

表—3　(単位 t)

節 点	ΣX	合 計 水平荷重	ΣY	合 計 垂直荷重
2	0.000 004	0	−0.000 011	0
3	0.000 009	0	−0.000 007	0
4	0.000 024	0	40.000 027	40
5	−0.000 001	0	−0.000 008	0
6	−0.000 001	0	−0.000 003	0
7	0.000 000	0	−0.000 002	0
8	−0.000 020	0	−40.000 099	−40
9	−0.000 010	0	−0.000 014	0
10	−0.000 001	0	−0.000 022	0

表—1 節 点 変 位　(単位 m)

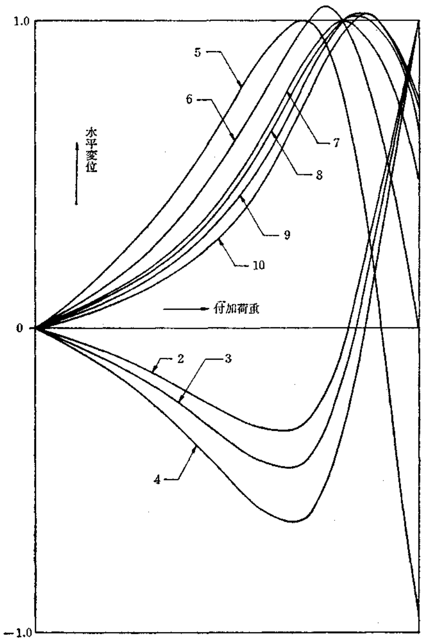
節点番号	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δx	2.5486	3.9348	4.3642	2.3310	0.0000	−2.3310	−4.3642	−4.9348	−2.5486
Δy	−4.1677	−6.7830	−7.7668	−17.5094	−25.0000	−30.4907	−34.2333	−25.2171	−13.8324

付加荷重との合計と比較することによって，計算結果の精度を確かめることができる。

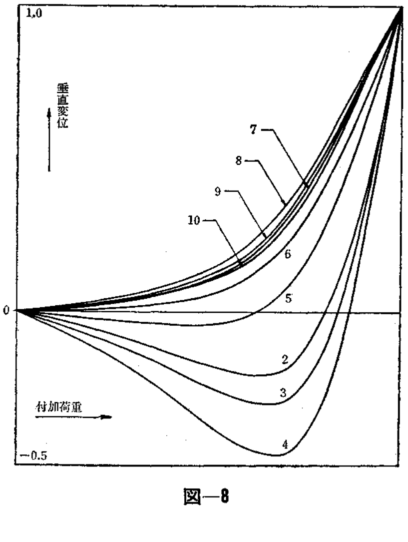
なお，以上の計算は，精度（軸力の自乗平均誤差）を0.000 05 と指定して行なったものであるが，最大変位が34 m に達するにもかかわらず，演算結果は，十分満足すべき精度を有している。この場合の計算時間は，CDC 6600 を用いて，10 回分合計で約 37 秒であった。

もちろん，このような単純なケーブル構造は，力のつり合い条件のみの反復計算でも解くことができよう。

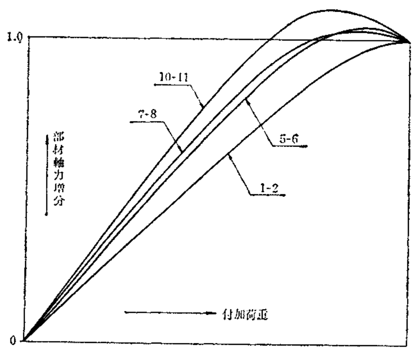
しかし，複雑な立体構造の大変形解析，あるいは，架設中の吊橋など，極端な柔構造と部分的に剛な補剛トラスとの合成系を解くための，厳密解析プログラムとしては，このようなケーブルのみの極端な大変形解析でも，骨組構造として，剛性マトリックスを作成して厳密計算することができるということが，プログラムと理論の弾力性を示す証左として，重要な事であると考えられる。



図—7



図—8



図—9

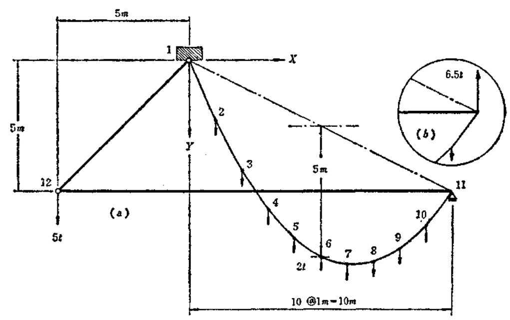
次に示す，図—7，図—8，図—9 は，付加荷重と変位，および付加荷重と軸力増分の関係を，それぞれ各段階の最大値を1として，示したものである。

（2） ケーブル合成構造の大変形解析

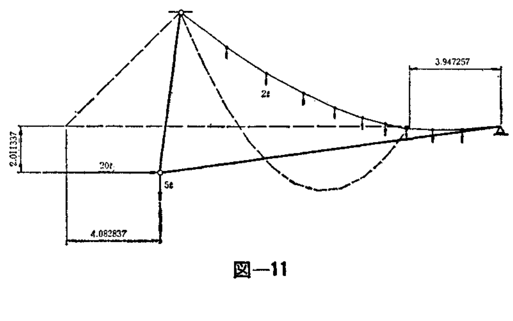
次の 図—10 に示すような，きわめて変形の容易な構造系について計算をする。

ケーブル中間節点 2～10 には，すべて先行荷重として垂直方向に 2 t が作用しているものとする。

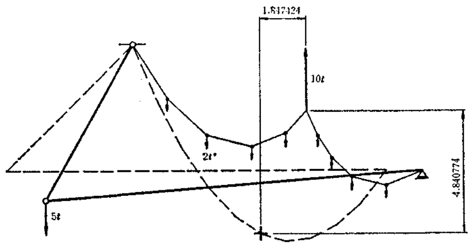
(a) は，節点 11 が単純支持されている場合で，(b) は，11 が無拘束で，(a) の反力と等価な先行荷重 6.5 t



図—10



図—11



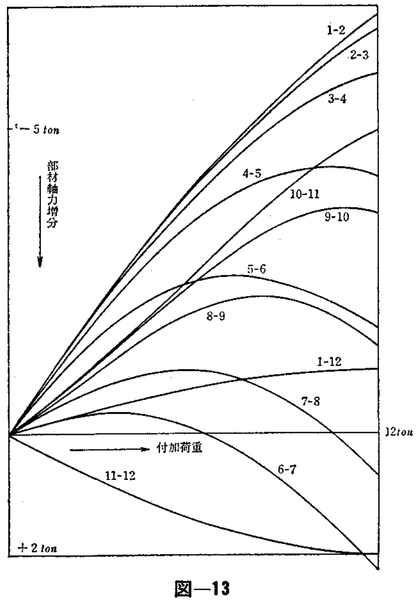
図—12

表—4.1　　(単位 t)

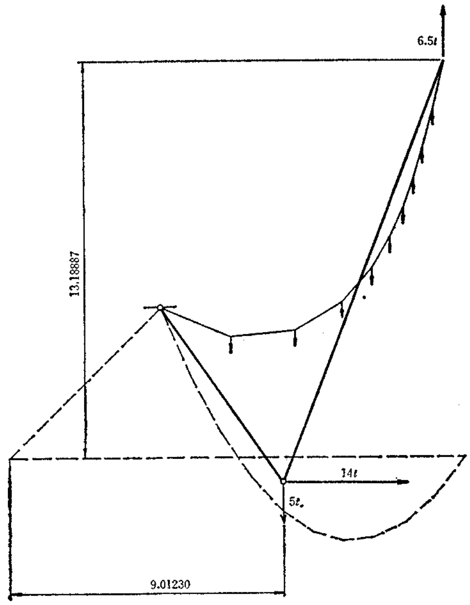
節　点	ΣX	合　計 水平荷重	ΣY	合　計 垂直荷重
2	−0.000 000	0	2.000 000	2
3	−0.000 000	0	2.000 000	2
4	0.000 000	0	2.000 000	2
5	−0.000 000	0	2.000 000	2
6	0.000 001	0	2.000 000	2
7	−0.000 001	0	1.999 999	2
8	0.000 001	0	1.999 999	2
9	0.000 000	0	1.999 999	2
10	−0.000 001	0	2.000 000	2
12	20.000 005	20	5.000 011	5

表—4.2

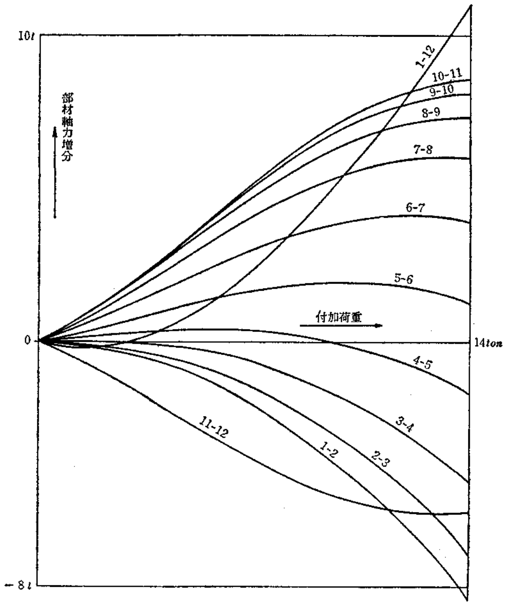
節　点	ΣX	合　計 水平荷重	ΣY	合　計 垂直荷重
2	−0.000 006	0	2.000 029	2
3	−0.000 006	0	2.000 011	2
4	0.000 003	0	1.999 982	2
5	−0.000 007	0	1.999 978	2
6	−0.000 009	0	1.999 989	2
7	−0.000 005	0	2.000 013	2
8	0.000 004	0	2.000 003	2
9	0.000 002	0	1.999 999	2
10	−0.000 001	0	2.000 001	2
11	0.000 135	0	−6.500 165	−6.5
12	13.999 834	14	5.000 228	5



図—13



図—14



図—15

が上向きに作用している場合である。

まず，(a) の場合に，節点 12 に水平荷重を 20 t 作用せしめた場合の骨組の変形状態を 図—11 に示す。

なお，断面性能は，

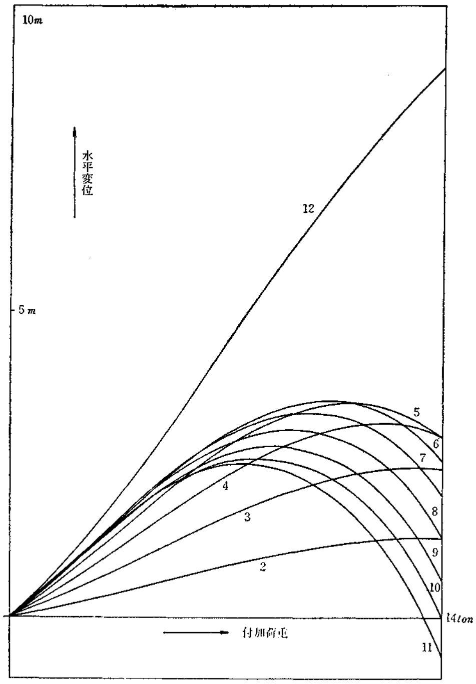
$E=2\times 10\mathrm{t}^7/\mathrm{m}^2$

ケーブル　　　　：$A=0.01\ \mathrm{m}^2$

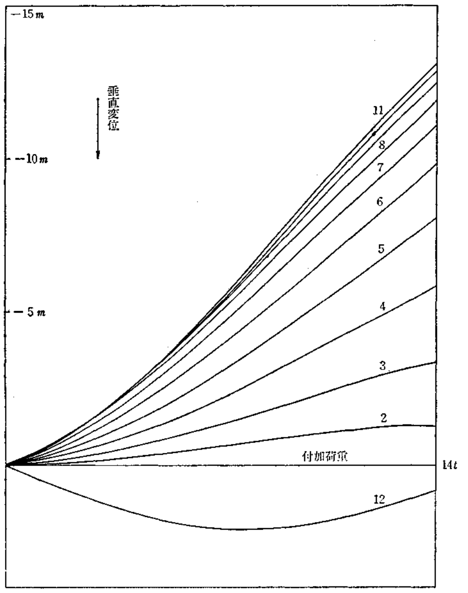
11〜12 および 1〜12：$A=0.105\ \mathrm{m}^2$

とした。

この計算は，精度を 0.000 02 と指定したものである



図—16



図—17

が，表—3 と同様な各節点における力のつり合い状態を表—4.1 に示す。

次に，ケーブル節点6に，付加荷重を上向きに，2t ずつ合計 12t に達するまで加えたときの最終変形図と，その間の付加荷重と部材軸力の関係を示す荷重—部材軸力曲線を 図—12，図—13 に示す。

(b) の場合，節点 12 に水平荷重を右向きに 2t ずつ，合計 14t まで作用させてみた。

精度は，0.005 と指定したもので，各節点における最終付加荷重時のつり合い状態は，表—4.1 のようになった。

図—14 に，この場合の最終形状，図—15，図—16，図—17 にその間の部材軸力，変位の推移を図示する。

(3) ま と め

本理論の厳密解を求める反復機構の収束性と精度の検討のため，微小変形理論では不安定となる構造系の大変形時の計算例を示した。

これらの結果からもわかるように，極端な大変形時にも，十分な厳密解を得ることができる。

なお，演算における実用的な指定精度，また，変形が極端になり，骨組形状が急変するような場合における，単純反復計算とシリアルな漸増荷重による分割載荷計算との演算時間の長短など，case by case で勘案しなければならない点がある。

5. 非抗圧材を有するトラスの大変形解析プログラム

(1) 理論の概要

吊橋のキャットウォーク・ストームケーブル構造など，非抗圧材をふくみ，微小変形理論的には，不安定架構となる構造を対象とするプログラムとしては，前述の理論に基づいた大変形解析機能のほかに，非抗圧材のゆるみ，すなわち，無効材の発生に対処する機能も備えていなければならない。

一般に，与えられた付加荷重に対する構造物の非抗圧材のゆるみは，付加荷重がゼロから一様に漸増して，規定値に達する間に，遂次一つずつ発生していくものと考えてよい。

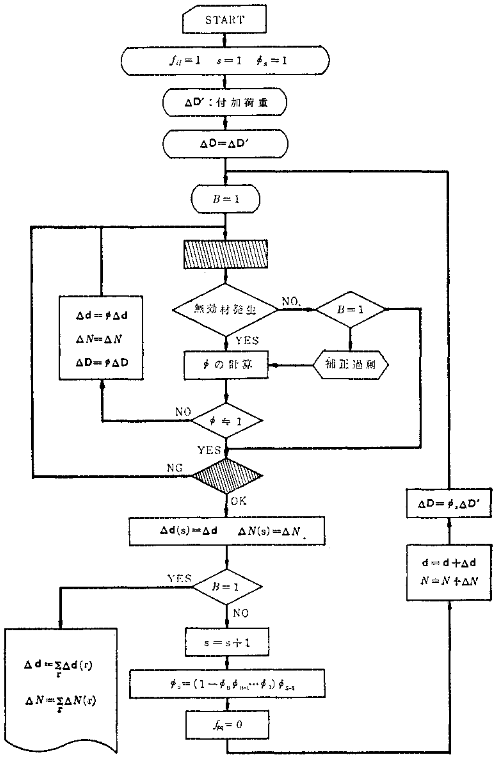
したがって，規定値の付加荷重に対する，無効材の発生数に応じた，境界荷重を見出すことが必要になる。

ここで，境界荷重とは，その非抗圧材の合計部材力がちようどゼロとなる，付加荷重群 $\Delta \boldsymbol{D}$ に比例した荷重の大きさをいう。

基本的な考え方としては，与えられた付加荷重ベクトル $\Delta \boldsymbol{D}$ を用いて，非抗圧材なしとした場合の解を求め，圧縮領域に入っている非抗圧材の先行荷重による部材力 N_{pq} と，部材力増分 ΔN_{pq} との比の最小値

$$\phi = \mathrm{Min}\left\{-\frac{N_{pq}}{\Delta N_{pq}}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

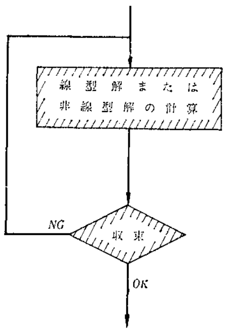
を求める。線型であれば，上式を満足する非抗圧材が，漸増付加荷重に対して，最初に無効材となり，その境界



図—18

荷重は，$\phi\varDelta \boldsymbol{D}$ として得られ，次には，$(1-\phi)\varDelta \boldsymbol{D}$ に対して，該当する無効材を取りはずして，同様な手順を繰返えせばよい。

しかし，ここでは，κ_{ij}, μ_{ij} および非線型剛性マトリックス $\boldsymbol{K}_B$ の反復修正とからみ合わせた，繰返し計算が必要である。図—18 に，そのための概略の流れ図を示すことにする。



図—19

図—18 の斜線の部分は，図—3 の反復機構流れ図の略記で，図—19 のようなものである。

また，ϕ は補正過剰の場合には，前回，すなわち B−1 のときの pq について計算するものである。

f_{ij} は，無効材を次回からはずすための係数で，1 または 0 の値をとる。

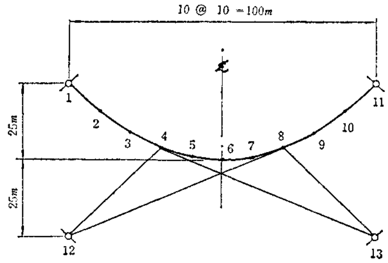
したがって，図—3 の $\boldsymbol{K}_A$, $\boldsymbol{K}_B$ の作成および $\varDelta N_{ij}$ の計算において，

$$\boldsymbol{A}_{ij} \rightarrow f_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}$$
$$\boldsymbol{B}_{ij} \rightarrow f_{ij}\boldsymbol{B}_{ij}$$
$$\varDelta N_{ij} \rightarrow f_{ij}\varDelta N_{ij}$$

としておかなければならない。

（2） 数値計算例

次の 図—20 に示すような初期形状のケーブル構造の計算例を示すことにする。



図—20

初期状態において，スティケーブルの軸力の合力は，垂直成分のみで 20 t となっており，中間節点 2，3，5，6，7，9，10 には，先行荷重として垂直下向きに 20 t ずつ載荷され，その結果，主ケーブルは放物線形状をなしているものとする。

この状態に，付加荷重として節点 2，3，4，5 に，それぞれ 50 t の垂直荷重を載荷した場合を計算してみた。

なお，各ケーブルは，すべて，

$E=20\times10^6\,\mathrm{t/m^2}$

$A=0.01\,\mathrm{m^2}$

とし，非抗圧材の無効材発生に対する境界荷重決定のための誤差を 0.0001，解の収束精度を 0.000 05 と指定したものである。

結果は，4-12 および 8-12 部材が，それぞれ無効材となり，表—5，表—6 に変位，部材力の計算値を示す。

また，中間節点における，変形後のつり合い条件の精度は，表—7 のようになる。

この数値も，プログラムでは，必ずアウトプットされるようになっている。

次に，付加荷重を 5 t ずつ増加して 10 回にわけて計算して，途中の変形および部材力の変化をみることにした。この場合の計算時間は，10 回分合計して，CDC 6600 で約 47 秒であった。

表—5 節　点　変　位　　（単位 m）

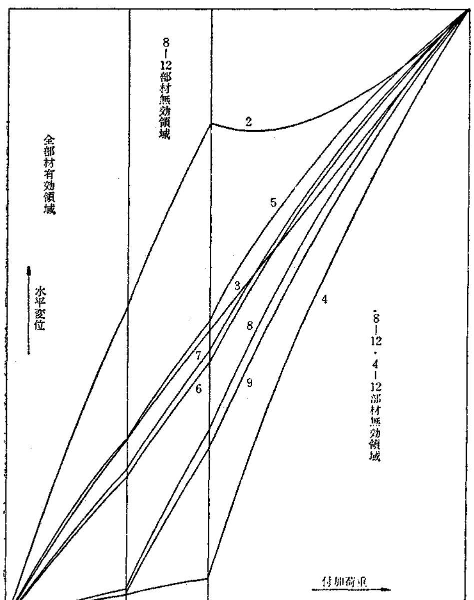
i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varDelta x$	−0.1048	−0.1811	−0.2253	−0.3317	−0.2788	−0.2966	−0.1014	−0.3695	−0.3569
$\varDelta y$	0.1478	0.2869	0.4076	0.7585	−0.4292	−0.6348	−0.0929	−0.4178	−0.4066

表—6 部 材 軸 力 (単位 ton)

i j	N	ΔN	$N+\Delta N$
1, 2	134.536 240	330.345 700	464.881 940
2, 3	122.065 560	298.451 514	420.517 074
3, 4	111.803 400	272.063 758	383.867 158
4, 5	104.403 070	102.407 265	206.810 335
5, 6	100.498 760	95.415 722	195.914 482
6, 7	100.498 760	96.804 969	197.303 729
7, 8	104.403 070	96.283 350	200.686 420
8, 9	111.803 400	62.667 124	174.470 520
9, 10	122.065 560	63.079 616	185.145 176
10, 11	134.536 240	62.738 964	197.275 204
4, 12	20.143 244	−20.143 244	0.000 000
4, 13	15.676 425	141.400 155	157.076 580
8, 12	15.676 425	−15.676 425	0.000 000
8, 13	20.143 244	40.944 143	61.087 387

表—7

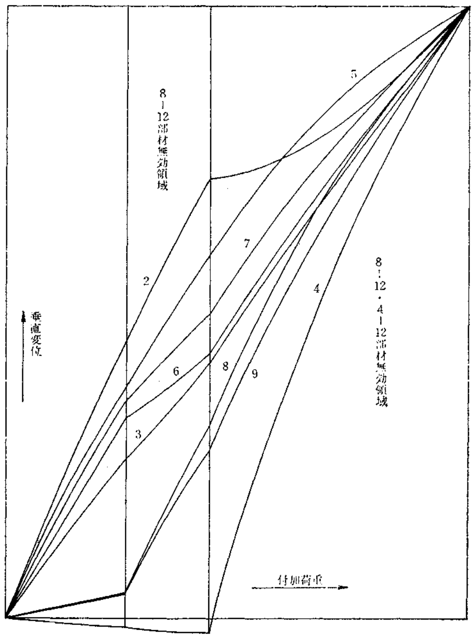
節 点	ΣX	合計水平荷重	ΣY	合計垂直荷重
2	−0.000 004	0	70.000 000	70
3	0.000 002	0	70.000 000	70
4	0.000 001	0	49.999 992	50
5	0.000 004	0	70.000 015	70
6	0.000 000	0	19.999 981	20
7	−0.000 005	0	19.000 980	20
8	0.000 015	0	0.000 030	0
9	−0.000 009	0	19.999 988	20
10	−0.000 004	0	19.999 989	20



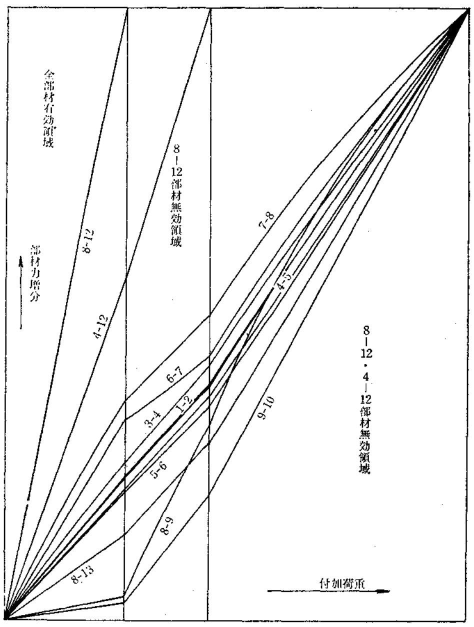
図—21

次の 図—21，図—22 および 図—23 は，それぞれ最大値を1とした場合の，付加荷重と変位，および部材力増分の関係を示すものである。

当然のことであるが，二つの境界荷重において不連続となる曲線群が得られることになる。



図—22



図—23

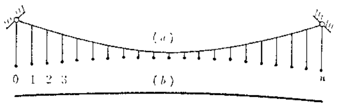
6. 架設時吊橋の大変形解析プログラム

このプログラムは，吊橋の架設時の変形，応力の厳密解析のために作られたものであるが，もちろん完成後の活荷重に対する解析にもきわめて有効であり，その汎用性のための演算時間の増加はほとんどない。

（1）　吊橋の架設時における構造解析理論の概要

次のような，単純なモデルについて説明する。

(a) は，主ケーブルおよび吊材の初期状態，(b) は無応力状態の補剛桁の形状（製作そりのまま）とする。



図—24

いま，ある架設段階，たとえば，$j\sim k$ 節点間の補剛桁が吊材にとりつけられ，その間の桁が節点で剛接された状態と等価な状態を，(a), (b) を用いて構成することにすれば，

i）まず，(b) の $j\sim k$ 区間内以外の全節点をすべてヒンジとする。

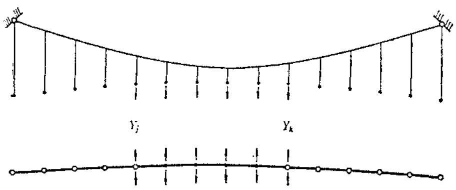
ii）次に，この桁を (a) の吊材下端（所定の補剛桁取付け位置）の対応点にとりつける。

iii）$j\sim k$ 節点に所定の補剛桁自重および架設機材などの架設荷重を作用させる。

という操作をすることになろう。

もちろん，(a) の吊材下端の示す形状は，(b) の補剛桁形状とは，くい違いがあるため，$j\sim k$ 区間の節点の取り付けに際しては，若干の応力が導入されることになる。

また，次の架設段階へ移行する前段として，これに次の架設ブロックが，無補剛のまま吊り下げられた状態が考えられるが，この場合には，前記の状態に，当該節点をヒンジのままとし，単に新たな自重のみを追加すればよいことになる。



図—25

以上のように考えた場合，構造系 (a) と (b) は，共通の不静定力 $Y_0, Y_1, \cdots Y_n$ (図—25) を介して一体化される。

こうして，図—24 の (a) と (b) は，それぞれの初期形状の差による相対くい違い量をゼロとするような変形を生ずる。このときの主ケーブル節点の水平変位ベクトルを $\boldsymbol{x}$，垂直変位ベクトルを $\boldsymbol{y}$，および，補剛桁節点の垂直変位ベクトルを $\boldsymbol{y}'$ とし，主ケーブルに関する非線型有限変形法の Unit Equation を用いて，節点荷重と節点変位との関係を表わす基礎方程式を次のようにかくことにする。

$$\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{dy}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_t \cdots\cdots(38)$$

$$\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{by}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}_t \cdots\cdots(39)$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は，正方対称な3連マトリックスであり，線型化有限変形法とは異なり，$\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{c}$ は等しくはならない。

$\boldsymbol{X}$ は，水平荷重項であり，曲げ剛性をもつ塔位置のほか通常はゼロである。

ここでは，中間主塔などの処理は，換算水平ばね係数を用い，これがマトリックス $\boldsymbol{a}$ の対応する対角要素に加えられて，$\boldsymbol{X}$ には未知項はなくなっているものとする。

$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{d}$ の各マトリックスの内容は，

$$\boldsymbol{B}(a)=\begin{bmatrix} a_1+a_2, & -a_2 & & \\ -a_2, & a_2+a_3, & -a_3 & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & -a_n, & a_n+a_{n+1} \end{bmatrix} \cdots\cdots(40)$$

とおいて

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{B}\ (a)+\boldsymbol{\nu} \cdots\cdots(41)$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}\ (b) \cdots\cdots(42)$$

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{B}\ (c) \cdots\cdots(43)$$

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{B}\ (d) \cdots\cdots(44)$$

また，

$$a_i=K_i\left\{\alpha_i{}^2+\frac{\alpha_i(x_i-x_{i-1})}{2\,l_i}\right\}+\mu_i \cdots\cdots(45)$$

$$b_i=K_i\left\{\beta_i{}^2+\frac{\beta_i(y-y_{i-1})}{2\,l_i}\right\}+\mu_i \cdots\cdots(46)$$

$$c_i=K_i\left\{\alpha_i\beta_i+\frac{\beta_i(x_i-x_{i-1})}{2\,l_i}\right\} \cdots\cdots(47)$$

$$d_i=K_i\left\{\alpha_i\beta_i+\frac{\alpha_i(y_i-y_{i-1})}{2\,l_i}\right\} \cdots\cdots(48)$$

$$K_i=\kappa_i(F_i-\mu_i) \cdots\cdots(49)$$

である。

区間を表わす指標 i は $i-1\sim i$ を意味する。

また，$\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{Y}_t$ などは，温度荷重項であり既知とする。したがって，$\boldsymbol{Y}$ のみが，吊材を介して主ケーブルへ伝えられる未知垂直荷重項となる。

次に，補剛桁に関しては，格間長 λ_i，曲げ剛性 EI_i として

$$t_i=\frac{\lambda_i}{6\,EI_i},\ \gamma_i=\frac{1}{\lambda_i}$$

よりなる3連マトリックス $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\gamma}$ を

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix} 2(t_1+t_2), & t_2 & & \\ t_2, & 2(t_2+t_3), & t_3 & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & t_{n-1}, & 2(t_{n-2}+t_{n-3}), \end{bmatrix} \cdots\cdots(50)$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix} -\gamma_1, & \gamma_1+\gamma_2, & -\gamma_2 & & \\ & -\gamma_2, & \gamma_2+\gamma_3, & -\gamma_3 & \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & -\gamma_{n-1}, & \gamma_{n-1}+\gamma_n, & -\gamma_n \end{bmatrix} \cdots\cdots(51)$$

と定義すれば，曲げモーメント $M_1, M_2, \cdots M_{n-1}$ よりなる列ベクトル $\boldsymbol{M}$ と，たわみ $y_0', y_1', \cdots y_n'$ よりなる列ベクトル $\boldsymbol{y}'$ との間には，

$$\boldsymbol{\gamma}^*\boldsymbol{M}=\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Y} \cdots\cdots(52)$$

$$\boldsymbol{tM}=\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{y}' \cdots\cdots(53)$$

なる関係がある。

架設時の条件により，$\boldsymbol{M}$ は，つねにゼロとなる要素をいくつか有しており，このための条件マトリックス，すなわち，$n-1$ 次の単位マトリックスにおいて，補剛桁中間節点のヒンジ点に対応する単位要素をゼロとおきかえたものを $\boldsymbol{i}$，その補数マトリックスを $\boldsymbol{i}'$ として，式 (52)，(53) に代入すれば，

$$\bar{\boldsymbol{t}}=(\boldsymbol{i}'+\boldsymbol{iti})^{-1}\boldsymbol{i} \cdots\cdots(54)$$

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\gamma}^*\bar{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{\gamma} \cdots\cdots(55)$$

とおいて

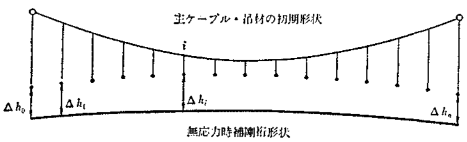
$$\boldsymbol{Gy}'=\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Y} \cdots\cdots(56)$$

が得られる。

次に，初期形状における吊材下端と製作形状における補剛桁節点とのくい違い量ベクトルを

$$\boldsymbol{\Delta h}=\begin{bmatrix}\Delta h_0\\ \Delta h_1\\ \vdots\\ \Delta h_n\end{bmatrix} \cdots\cdots(57)$$

とする。



図—26

このベクトル $\boldsymbol{\Delta h}$ は，図—26 の補剛桁が，幾何学的な線型移動（平行移動および回転）することによる変更を加えても，解に与える効果は不変である。

すなわち，無数にある $\boldsymbol{\Delta h}$ の組合わせのうち，任意の一組みをとればよいことになる。

このことは，一つの吊橋においては，すべての架設段階における $\boldsymbol{\Delta h}$ に共通のものを用いてもよいことを示している。

さて，主ケーブルと補剛桁間の節点変位の関係は，両系の一体化により，次のように表わされる。

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Delta h}+\boldsymbol{fY}+\boldsymbol{\Delta h}_t \cdots\cdots(58)$$

ここに，$\boldsymbol{\Delta h}_t$ は，温度による吊材の自由伸縮量による列ベクトル，$\boldsymbol{f}$ は，吊材長を l_{h_i}，伸び剛性を $E_hA_{h_i}$ としたとき，

$$f_i=\frac{l_{h_i}}{E_hA_{h_i}}$$

を要素とする対角マトリックス，すなわち，$\boldsymbol{fY}$ は，軸力による吊材の伸び量を表わす列ベクトルである。

吊材のない節点がある場合にも適用するため，$\boldsymbol{f}$ の逆マトリックス $\boldsymbol{k}$ を用いて

$$\boldsymbol{ky}'=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Delta h})+\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{\Delta h}_t \cdots\cdots(59)$$

とし，式 (56)，(59) より $\boldsymbol{y}'$ を消去して $\boldsymbol{Y}$ を求めれば，

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{W}'-\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Delta h}+\boldsymbol{\Delta h}_t) \cdots\cdots(60)$$

が得られる。

ここで，

$$\boldsymbol{W}'=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{W} \cdots\cdots(61)$$

$$\boldsymbol{G}'=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G} \cdots\cdots(62)$$

である。

もちろん，$\boldsymbol{G}$ は，単独ではデターミナントが 0 となるが $\boldsymbol{k}$ を加えることにより正則となり，$\boldsymbol{G}'$ は，対称マトリックスとなる。

吊材の弾性伸びを無視すれば

$$\boldsymbol{W}'=\boldsymbol{W},\ \boldsymbol{G}'=\boldsymbol{G}$$

である。

なお，本プログラムでは，吊材の傾斜の影響は，無視しているので，補剛桁の水平変位は，構造解析上不要となる。

以上により，式 (38) と式 (39) および式 (60) より $\boldsymbol{Y}$ を消去した式を連立させて，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を求めることができる。

すなわち，

$$\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{dy}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_t \cdots\cdots(63)$$

$$\boldsymbol{cx}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{G}')\boldsymbol{y}=\boldsymbol{W}'+\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{\Delta h}-\boldsymbol{\Delta h}_t)+\boldsymbol{Y}_t \cdots\cdots(64)$$

が求める解式である。

なお，補剛桁をトラスとして計算する場合，すなわち，補剛トラスの腹材の変形の影響を考慮する場合には式 (50) の $\boldsymbol{t}$ を

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix} 2(t_1+t_2), & t_2 & & \\ t_2, & 2(t_2+t_3), & t_3 & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & t_{n-1}, & 2(t_{n-1}+t_n) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} s_1+s_2, & -s_2 & & \\ -s_2, & s_2+s_3, & -s_3 & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & -s_{n-1}, & s_{n-1}+s_n \end{bmatrix} \cdots\cdots(65)$$

と変更すればよい。ここで，

$$s_i=\frac{1}{\lambda_i GA_i}$$

GA_i：補剛トラスの換算せん断剛性

である。

（2） プログラムの概略の流れ図

図—27 に，本プログラムの主要部分の概略流れ図を示すことにする。

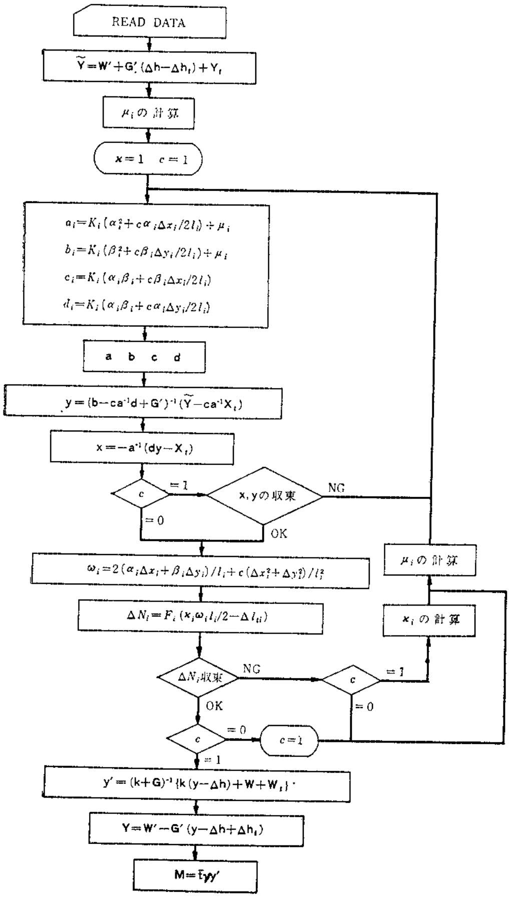
主なインプットデータは，

初期主ケーブル形状
塔頂番号
主ケーブル断面定数
主ケーブル初期水平分力
初期吊材長および吊材の断面定数
吊材下端初期形状と無応力時補剛桁節点とのくい違い量
補剛桁各格間の長さ，断面定数，およびヒンジの位置
塔の断面定数および推定軸力
温度変化量
荷重
計算精度の指定

などであり，出力データは，

主ケーブル形状の変形後の座標値
各節点の変位
主ケーブルの軸力増分および合計軸力
補剛桁の曲げモーメントおよびせん断力
主ケーブル節点におけるつり合い条件の精度

などである。

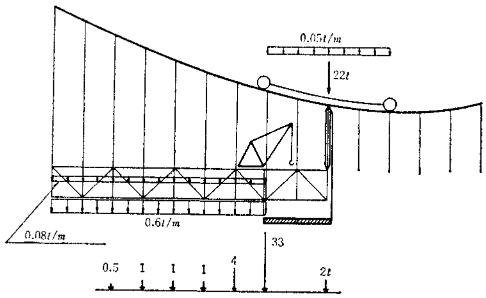


図—27

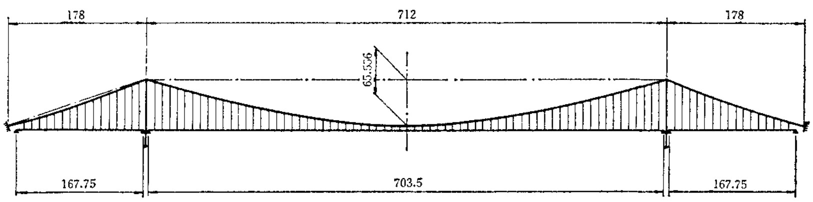
（3） 吊橋架設時の計算例

図のような吊橋の架設時の計算を示すことにする。入力諸元は，次の通りである。

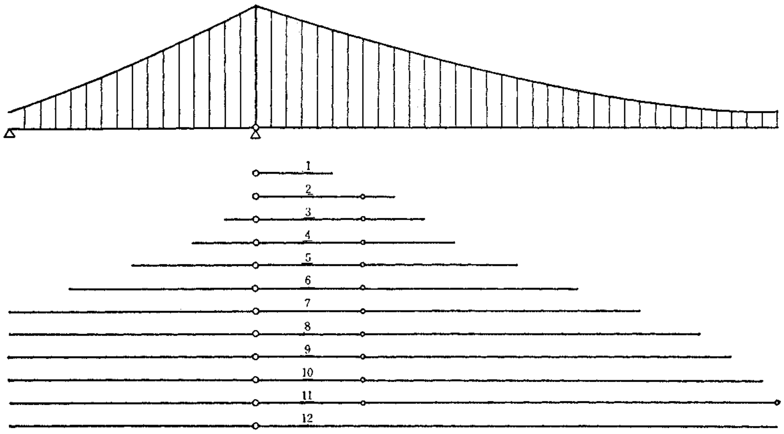
主ケーブル総節点数 101（固定端を含む）
塔　数　　　　　　4（スプレーサドルを含む）
ケーブル断面積
　主ケーブル：$0.2796\ m^2$
　ハンガー　：$0.00588\ m^2$
ケーブル弾性係数
　$E_c=E_h=2\times10^7\,\mathrm{ton/m^2}$
主ケーブル初期水平力（主ケーブル関係自重による）
　側径間　2 629.959 ton
　主径間　2 591.694 〃
補剛トラス断面二次モーメント



図—29

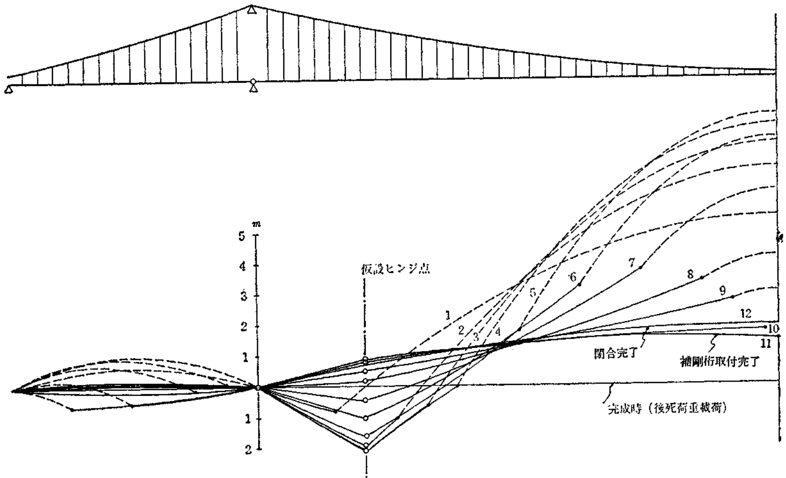


図—28



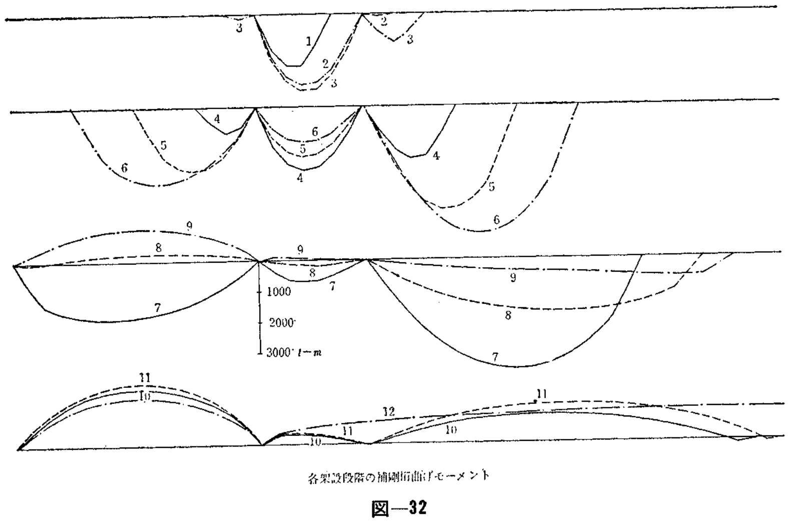
各架設状態

図—30



各架設段階の補剛桁たわみ図
(破線は吊材下端の位置)

図—31



各架設段階の補剛桁曲げモーメント

図—32

側径間　　1.299 m^4

主径間　　1.505 m^4

主塔断面二次モーメント　4.460 m^4

主塔高　　136.037 m

計算は，まず完成系すなわち最終形状から全橋床死荷重を取り去り，吊材下端（補剛桁への取付位置）の変位量を求め，“くい違い量”を計算すると同時に，主ケーブル，塔，ハンガー系の初期形状が求められる。

これをもとにして，補剛桁閉合までの各架設段階 12 ステップの架設状態に対して計算を行なった。

架設時の荷重としては

補剛桁自重　側 径 間　3.897 t/m

　　　　　　中央径間　4.052 〃

架設機材関係重量は **図—29** の通りである。

図—30，**図—31**，**図—32** に，各架設状態図とそれに対応する補剛桁節点および吊材下端のたわみ図，桁の曲げモーメント図を示すことにする。

なお演算時間は，CDC 6600 を用いて１ケース当り平均約 90 秒程度であった。

7. 結　　言

（1） 非線型有限変形法（大変形法）による，トラス構造の大変形解析理論とその応用プログラムについて説明した。

（2） 本理論による解式は大変形時の厳密解を解析的に正確に表現するものであり，実際の構造物がとり得るいかなる極端な大変形時に対しても，確実な収束性をもった厳密解析が可能であることを，いくつかの数値計算例を示すことにより実証した。

参 考 文 献

1) 後藤：不規則吊材を有する吊橋の解法，第 11 回橋梁構造工学研究発表会，1964.
2) 後藤：有限変形法による吊橋の解法，土木学会論文集 第 156 号，1968.
3) 後藤：有限変形法に関する二，三の考察，土木学会論文報告集第 163 号，1969.

(1971.4.19・受付)