

方形タンクの近似計算法

ANALYSIS OF RECTANGULAR TANKS BY USING FINITE ELEMENT TECHNICS

中村昌弘*・松村哲男**・成岡昌夫***
By Masahiro Nakamura, Tetsuo Matsumura and Masao Naruoka

1. はしがき

長方形の形状のタンク、ケーンなどの解析は、従来、側壁、底板、それぞれ単独に、周辺固定、三辺固定・一辺自由の長方形板の曲げのみを考慮して、取り扱われてきた。しかし、この方法によると、おのおのの板の境界線において不つり合いな曲げモーメントが生じる。また、板の境界では過大な曲げモーメントを、また、板の中点では、過少な曲げモーメントを与えるおそれがある。この点について、参考文献2)には、構造物をラーメン、弾性支承上のはりなど、簡単な構造におきかえ、曲げモーメントの不つり合いをなくする方法が示されている。

この点にかんがみ、有限要素法を用いて、3次元的に構造物の解析を行なって、その結果をおのおの平面的な板としての値と比較し、より有用な値を与えようとしたものである。

2. 解析法

有限要素法における立体構造物の解析は、面内剛性、面外剛性を同時に考慮しなければならない。しかし、一般的には、タンクのような各部分が板として解析されるような構造物では、面外変形のみを考慮して、面内変形は無視して解析できる。したがって、曲げのみを考慮し、図-1ののような長方形構造物に対して、解析する。

いま、図-1のように、構造物を無数の長方形要素に分け、図-2(a)のように、要素 e を考える。各点 i, j, k, l には、それぞれ次のような3つの自由度がある。

* 正会員 名古屋大学受託研究員(株)福山コンサルタント

** 正会員 三重県土木部道路課(当時)、現在、建設省金沢工事事務所

*** 正会員 工博 名古屋大学教授工学部土木工学科

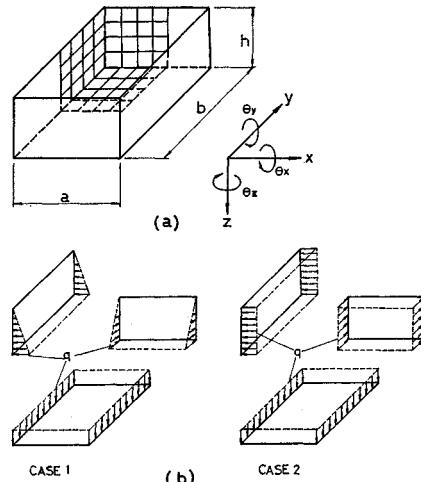


図-1 計算の対象とした立体構造物と載荷荷重

$$w, \theta_x = -\partial w / \partial y, \theta_y = \partial w / \partial x$$

したがって、節点 i について、

$$\{\delta_i\} = \{\theta_{xi}, \theta_{yi}, w_i\}^T$$

要素 e については、

$$\{\delta\}_e = \{\delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_l\}_e^T$$

同様に、節点力は次のようになる。

$$\{F_i\} = \{T_{xi}, T_{yi}, Z_i\}^T,$$

$$\{F\}_e = \{F_i, F_j, F_k, F_l\}_e^T$$

したがって、要素 e のstiffness matrixを $[K]_e$ とすると、次のようになる。

$$\{F\}_e = [K]_e \{\delta\}_e$$

ここで、 $[K]_e$ は、次のような変位関数より導びかれたものを用いた。

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

また、立体構造物としての座標変換については、各面の外側方向に正のたわみが生じる回転体を考え、図-2

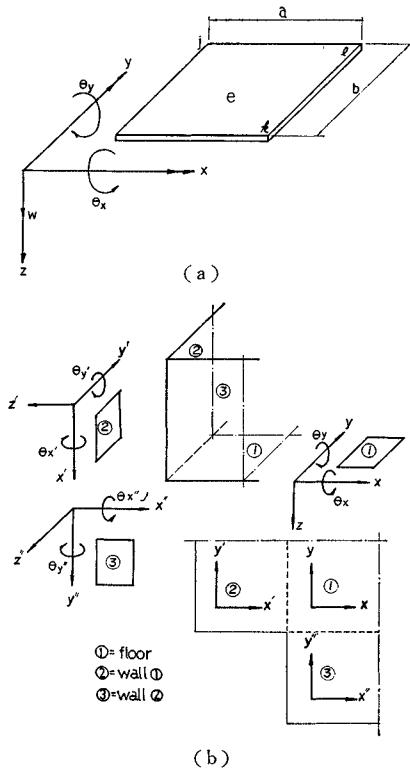


図-2 長方形要素および座標変換

(b) のような局所座標系をとることにする。

ここで、全体座標系における剛性方程式は、つぎのように表わされる。いま、全体座標を x, y, z で、局所座標を x', y', z' とすると、局所座標系における板の曲げに対する剛性方程式は、次の形でえられる。

$$\{F_i'\}_e = [K'] \cdot \{\delta_i'\}_e$$

$$\text{ここで, } \{\delta_i'\}_e = \begin{pmatrix} \theta_{xi'} \\ \theta_{yi'} \\ w_{i'} \end{pmatrix}, \{F_i'\}_e = \begin{pmatrix} T_{xi'} \\ T_{yi'} \\ z_{i'} \end{pmatrix}$$

$\{F_i'\}_e, \{\delta_i'\}_e$ を全体座標系に変換すると、

$$\{F_i'\}_e = [\lambda] \cdot \{F_i\}_e, \{\delta_i'\}_e = [\lambda] \cdot \{\delta_i\}_e$$

となる。ここで、

$$\{F_i\}_e = \begin{pmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \\ T_{zi} \\ z_i \end{pmatrix}, \{\delta_i\}_e = \begin{pmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ w_i \end{pmatrix}$$

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} & 0 \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lambda_{x'x} = \cos[x'x]$$

また、曲げモーメント、および、ねじりモーメントを求めるには、次のようにする。

$$\{M_i'\}_e = [S][\lambda] \{\delta_i\}_e$$

ただし、 $\{M_i'\}_e$ は局所座標系におけるモーメントベ

表-1

			1 : 1 : 0.5		
			I	II	%
CASE 1	A (B)	底板	中点	0.0261	127
		端部	-0.0513	76	
		側壁	-0.0392	-0.0220	178
	C	中点	0.0004	0.0042	10
		中点	0	0.0039	0
		端部	-0.0033	-0.0130	25
CASE 2	A (B)	底板	中点	0.0221	107
		端部	-0.0507	-0.0513	99
		側壁	0.0043	0.0050	86
	C	中点	0.0123	0.0120	103
		端部	-0.0312	-0.0336	93

			0.5 : 1 : 1			
			I	II	%	
CASE 1	A	底板	中点	0.0073	72	
		端部	-0.0294	-0.0207	142	
		側壁 ①	0.0115	-0.0352	84	
	B	底板	中点	-0.0001	0.0026	—
		端部	-0.0046	-0.0143	32	
		側壁 ②	中点	-0.0015	-0.0114	40
CASE 2	C	側壁 ①	中点	0.0172	0.0131	131
		端部	-0.0211	-0.0307	69	
		側壁 ②	中点	-0.0421	-0.0106	199
	A	底板	中点	-0.0005	0.0101	—
		端部	-0.0443	-0.0207	214	
		側壁 ①	中点	0.0190	-0.0574	77
	B	底板	中点	0.0048	0.0026	—
		端部	0.0054	-0.0143	—	
		側壁 ②	中点	-0.0041	-0.0142	—
	C	側壁 ①	中点	0.0424	0.0311	136
		端部	-0.0480	-0.0690	70	
		側壁 ②	中点	-0.0212	-0.0116	226

クトル、 $[S]$ は応力マトリックスである。

平面的な板については、種々の方法により解析される。この中で今回は有限要素法と比較するものとして、参考文献 1) に示される曲げモーメント影響線を参照する。この文献の解析方法は、たわみをフーリエ級数で仮定し、板の基礎微分方程式を解くことにより求められている。

3. 計算例

図-1 (b) に示されるような case 1, case 2 の 2 種類の荷重状態についてのタンクの計算を行なう。また、

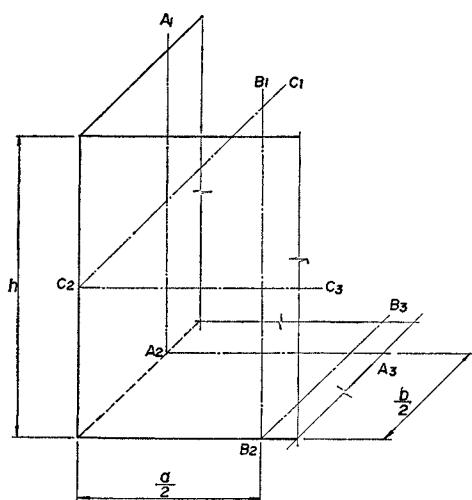
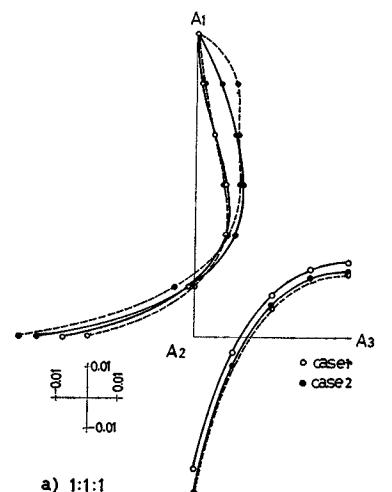


図-3 曲げモーメントを求めた断面図



a) 1:1:1

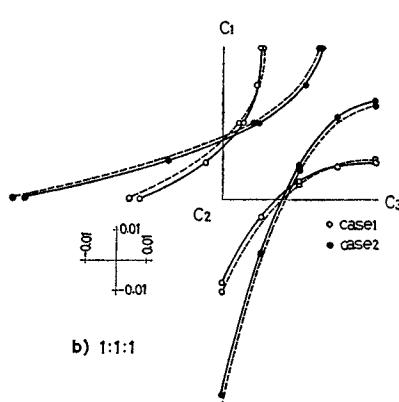
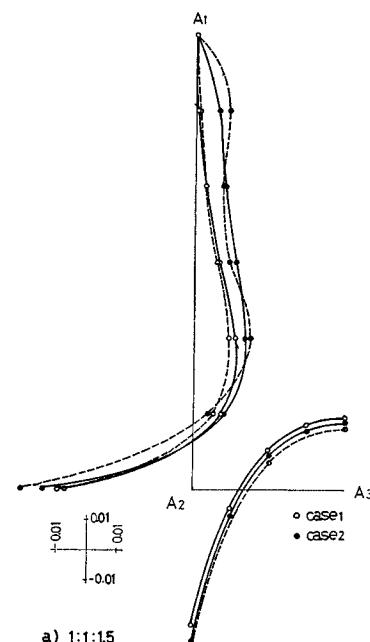
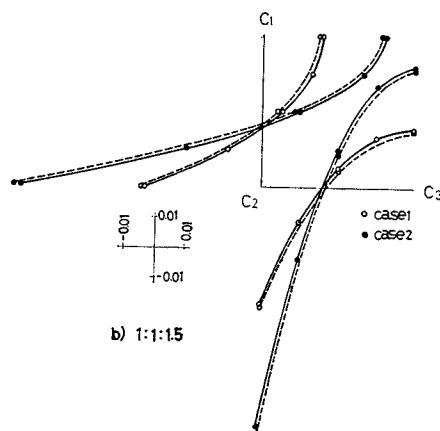
(実線は有限要素法、破線は単独な板)
による曲げモーメント

図-4 各断面における曲げモーメント図



a) 1:1:1.5



b) 1:1:1.5

(実線は有限要素法、破線は単独な板)
による曲げモーメント

図-5 各断面における曲げモーメント図

にする。

(3) 計算結果

図-3 のような、 A （底板と側壁①の中心線を結ぶ）、 B （底板と側壁②の中心線を結ぶ）、 C （側壁①と②との中心線を結ぶ）の切削面について、有限要素法による曲げモーメントの値と参考文献 1) に示されている値とを表-1 に示す。なお、曲げモーメントの単位は qb^2 であり、表で示す % は（有限要素法による値）/（おのおの単独な板としての値）を意味している。また、* 印は参考文献 1) に記されていない辺長比で、おのおのの辺長比からえられる値より求めた曲線による想定値である。

る。

4. 考 察

(1) 有限要素法による解析値とおのの単独な板としての値との比較

図-7 に、床板、側壁での端曲げモーメント、および、中央曲げモーメントの有限要素法による解析値と単独な板としての値との比を図示しているが、これによると、 $a/b=1.0$ で高さ h のみが変化しても、底板の曲げモーメントの変化はあまりなく、case 1 で 20%，case 2 で 10% の差がある。側壁についても $h/b < 0.5$ 以外はほぼ 20% 内におさまり、単独な板としての値は、比較的、有限要素法による値に近似している。幅 a のみが

変化し、高さ h 、および、奥行 b が一定の場合、 $a/b=1.0 \sim 1.5$ の範囲内では、ほぼ 20% 程度の差であるが、それ以外になると、単独な板としての値とは、かなりの差がでてくる。このことは、case 1 より case 2 において、特に顕著になる。

(2) 単独な板として扱う場合に境界に生じる不つり合い端モーメントの修正

参考文献 2) によると、端曲げモーメントの不つり合いは、側壁と底板の境界部では曲げ剛さ (EI) の比で、側壁と側壁との境界部では剛比に応じて配分することが提案されている。この方法を用いて、おのの単独な板による値の修正値と有限要素法による立体構造物としての値とを比較すると、表-2 のようになる。ただし、% は(有限要素法による値)/(参考文献 2) により補正さ

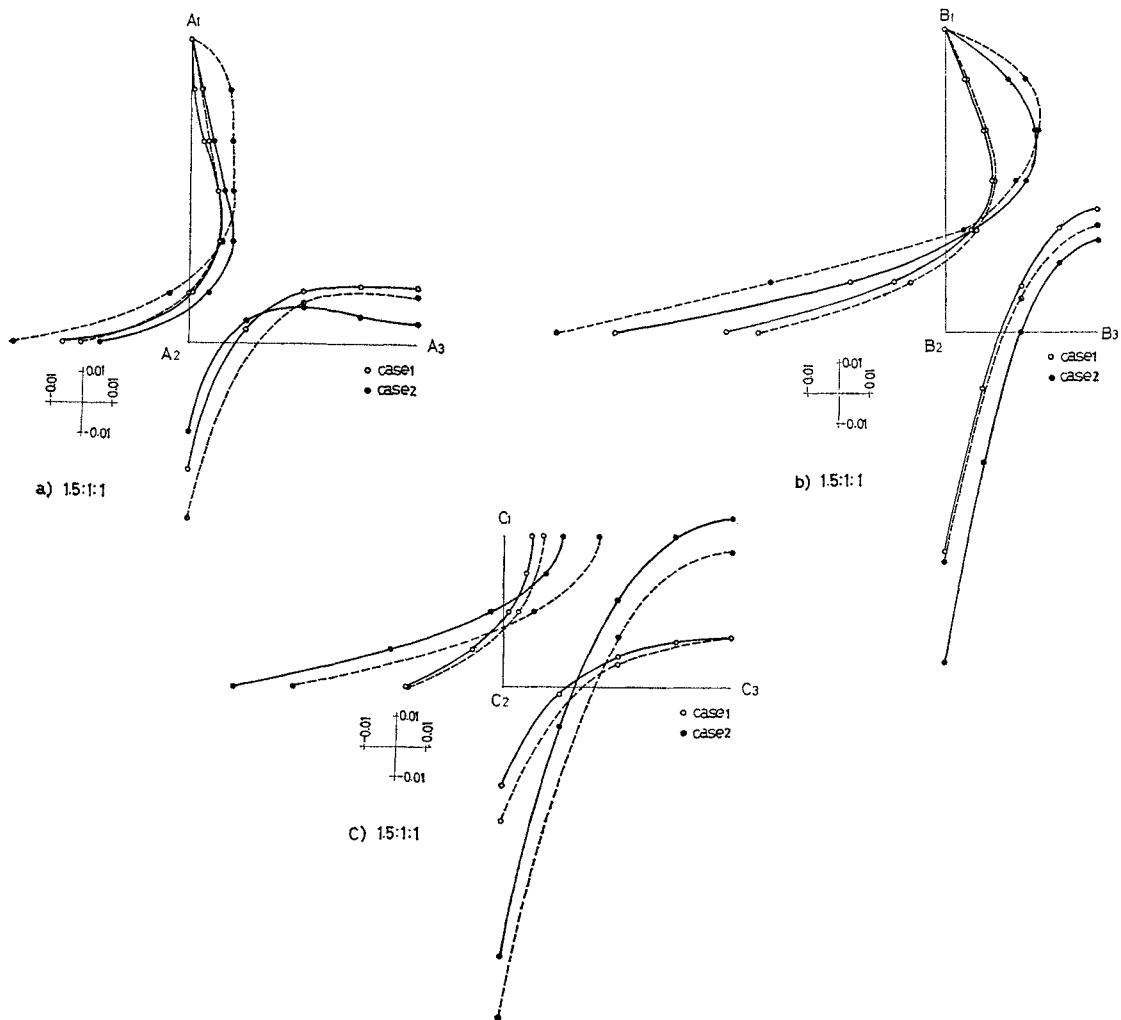


図-6 各断面における曲げモーメント図（実線は有限要素法、破線は単独な板による曲げモーメント）

れた値)であり、また、*印は剛比が1の場合を示す。この結果より、高さ h のみが変化する場合は、case 1 で側壁①と側壁②の境界線で $h/b < 0.75$ で 25% 程度の差がある以外は、10% 内の差におさまる。また、幅 a のみが変化する場合は、底板と側壁の

境界線では、case 1 について、A 断面で $a/b > 1.75$ 、B 断面で $a/b < 0.75$ になると、差が激しくなり、case 2 になると、この傾向がより顕著になり、 $=1.0$ を境にしてかなりの変化を示す。

これらのことから、高さ h のみが変化する場合は、 $h/b = 1.0 \sim 2.0$ 、幅 a のみが変化する場合は $a/b = 1.0 \sim 1.5$ については、この方法でも実用的に a/b さしつかえないようと思われる。

(3) 簡単な計算方法の提案

端曲げモーメントについては参考文献 2) に示される方法によりえられる値を、有限要素法による立体解析の場合と比較すると、比較的近似した値を示す。しかし、各板の辺長比が大きくなると差が大きくなる。したがって、ここでは別途に、おのおの単独な板としての計算値(修正しない値)と立体解析による値とを、 h/b 、および、 $a/b = 0.5 \sim 2.0$ の範囲内について、比較することにより、四辺固定、あるいは、三辺固定・一辺自由の板の曲げモーメントの値から、図-8 の位置における、タンク、ケーンなどの立体構造物の曲げモーメントの概算値を、最小二乗法により、次の簡単な式で求めることを提案する。

$$M = K \cdot \bar{M}$$

ただし、 M は立体構造物の曲げモーメントの値、 \bar{M} は板としての曲げモーメントの値、 K は次の式によって示される係数、 K_1 は case 1、 K_2 は case 2 の場合とする。また、曲げモーメントの位置、および、方向は図-8 に示すとおりである。

(i) $a : b : h = 1 : 1 : 0.5 \sim 2.0$ ($\alpha = h/b$)

底板：中央曲げモーメント ($M_{xc}^S = M_{yc}^S$)

$$K_1 = 0.08 \alpha^2 - 0.26 \alpha + 1.37,$$

$$K_2 = 0.04 \alpha^2 - 0.08 \alpha + 1.10$$

端部曲げモーメント ($M_x^S = M_y^S$)

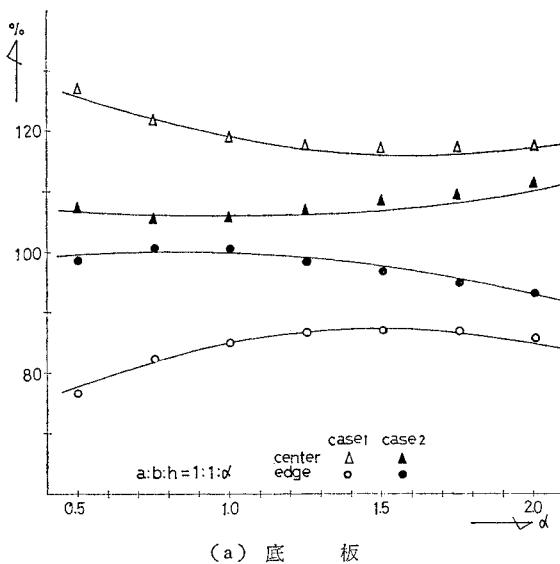
$$K_1 = -0.10 \alpha^2 + 0.30 \alpha + 0.65,$$

$$K_2 = -0.05 \alpha^2 + 0.08 \alpha + 0.97$$

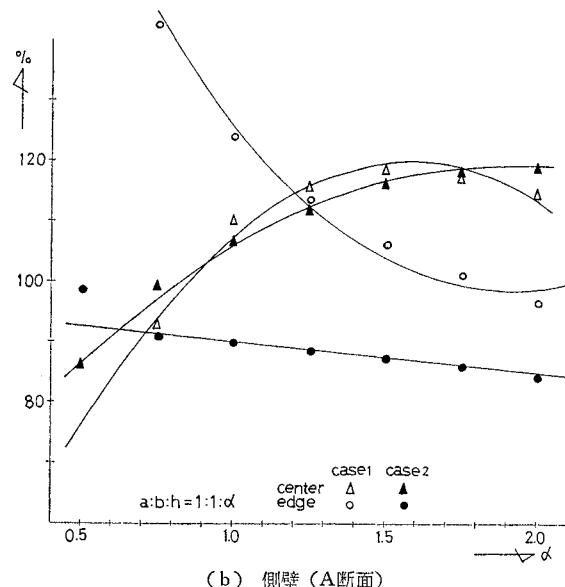
側壁：A(B) 断面、中央曲げモーメント

表-2 有限要素法による値と港湾技研資料 No. 58 の方法による値との比較

$\alpha = h/b$	CASE 1		CASE 2		$\alpha = a/b$	CASE 1		CASE 2	
	底 板	側 壁	底 板	側 壁		底 板 側壁①	底 板 側壁②	底 板 側壁①	底 板 側壁②
0.50	107	125	99	93	0.50	105	36	88	113
0.75	104	75	96	94	0.75	103	84	93	107
1.00	101	89	94	95	1.00	101	101	89	94
1.25	98	95	94	96	1.25	97	105	85	75
1.50	96	98	92	97	1.50	90	105	83	52
1.75	94	99	90	98	1.75	83	105	81	26
2.00	91	99	89	98	2.00	75	105	81	0



(a) 底板



(b) 側壁 (A断面)

図-7 有限要素法による値と

$$(M_{zc}^{w1}=M_{zc}^{w2})$$

$$K_1 = -0.37 \alpha^2 + 1.17 \alpha + 0.27,$$

$$K_2 = -0.17 \alpha^2 + 0.64 \alpha + 0.59$$

$$\text{C断面, 中央曲げモーメント } (M_{yc}^{w1}=$$

$$M_{xc}^{w2})$$

$$K_1 = -0.26 \alpha^2 + 0.91 \alpha + 0.28,$$

$$K_2 = 1.04$$

$$\text{C断面, 端部曲げモーメント } (M_y^{w1}=$$

$$M_x^{w2})$$

$$K_1 = -0.26 \alpha^2 + 0.88 \alpha + 0.25,$$

$$K_2 = 0.96$$

(ii) $a:b:h=0.5 \sim 2.0 : 1 : 1$ ($\alpha=a/b$)

$$\text{底板: 中央曲げモーメント } (M_{xc}^S)$$

$$K_1 = -0.40 \alpha^2 + 0.94 \alpha + 0.65,$$

$$K_2 = -1.98 \alpha^2 + 3.71 \alpha - 0.68$$

$$\text{中央曲げモーメント } (M_{yc}^S)$$

$$K_1 = -0.25 \alpha^2 + 0.60 \alpha + 0.82,$$

$$K_2 = -1.60 \alpha^2 + 3.79 \alpha - 1.19$$

$$\text{端部曲げモーメント } (M_x^S)$$

$$K_1 = 0.43 \alpha^2 - 1.53 \alpha + 2.00,$$

$$K_2 = -1.38 \alpha + 2.55$$

$$\text{端部曲げモーメント } (M_y^S)$$

$$K_1 = -0.39 \alpha^2 + 1.40 \alpha - 0.21,$$

$$K_2 = 0.99 \alpha - 0.05$$

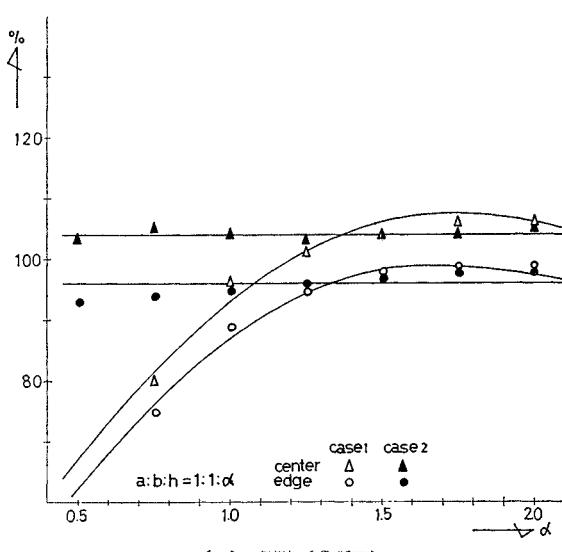
$$\text{側壁: A断面, 中央曲げモーメント } (M_{zc}^{w1})$$

$$K_1 = 0.11 \alpha^2 - 0.48 \alpha + 1.47,$$

$$K_2 = -0.53 \alpha + 1.59$$

$$\text{B断面, 中央曲げモーメント } (M_{zc}^{w2})$$

$$K_1 = -0.20 \alpha^2 + 0.49 \alpha + 0.73,$$



(c) 側壁 (C断面)

単独な板の値との比較

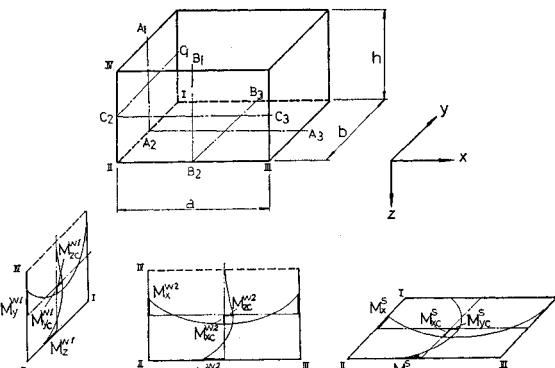


図-8 簡単な計算法の対象とした曲げモーメントの図示

$$K_2 = 0.64 \alpha + 0.31$$

$$\text{C断面, 中央曲げモーメント } (M_{yc}^{w1})$$

$$K_1 = -0.53 \alpha + 1.53,$$

$$K_2 = -0.75 \alpha + 1.77$$

$$\text{C断面, 中央曲げモーメント } (M_{xc}^{w2})$$

$$K_1 = -0.25 \alpha + 0.63,$$

$$K_2 = 0.61 \alpha + 0.32$$

$$\text{C断面, 端部曲げモーメント } (M_y^{w1})$$

$$K_1 = 0.32 \alpha + 0.55,$$

$$K_2 = 0.62 \alpha + 0.35$$

5. あとがき

直方体の形状をもつタンクなどについて、辺長比 a/b および h/b が $0.5 \sim 2.0$ の範囲内での有限要素法による解析、および、従来の計算法による値との比較検討を行なった。その結果、有限要素法による解析に対して、従来の慣用法による値は最大曲げモーメントのみを比較すると、 a/b および h/b が $1.0 \sim 1.5$ の範囲内でおのおの単独な板としての値で 20%，参考文献 2) に示される修正値で 10% 程度の差が表われている。後者は底板、側壁を一体とした解析と比較的近似した値を示しており、実用上はさほどさしつかえないと思われる。また、要素分割は底板で 8×8 、壁で 8×6 の長方形要素に分割したが、これ以上分割を増しても結果の変化は少なかった。

今回比較検討した有限要素法、および、板の基礎微分方程式の解、ともに近似計算法であるが、有限要素法による解析の方が、立体的に解析されており、より実際的である。また、これにより平面的、および立体的な板の違いがよくわかると思われる。

また、タンク、ケーソンなどの構造物は地中に埋込まれる場合が多く、より実際的には、弾性床上の構造物としての解析についても検討する必要がある

と思う。また、構造物の大きさから隔壁を設けることも考えられる。この点については、この解析ではとりあげなかつたが、今後の課題としたいと思う。

なお、この論文は Y.K. Cheung の論文をみての思いつきの計算にすぎないが、多少とも参考となるところがあろうかと考え、あえて発表する次第である。

計算は、京都大学大型計算機センター FACOM 230-60 によつた。

この研究は、成岡の指導のもとに、松村が学部の特別研究として着手し、そのあと、中村が名大受託研究員として、あとひきつづき研究したものをまとめたものである。大学院博士課程学生（当時）梶田建夫氏にはいろいろ助言いただいた。ここに記して謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 堀井修身・本 浩司：解析法による版の曲げモーメント数値表、港湾技研資料、No. 43, 1968
- 2) 北島昭一、他：港湾構造物設計基準作成にあたつての諸問題について、港湾技研資料、No. 59, 1968
- 3) 梶田建夫・成岡昌夫：Finite Element Method、土木学会誌 52.5 (昭和 42.5), pp. 45~51.
- 4) J.D. Davis and Y.K. Cheung : Analysis of rectangular tanks by use of finite element technique, Concrete, 1 (1967), pp. 169~174.
- 5) O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung : The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slab, Proc.ICE, 28 (1964), pp. 471~488.
- 6) J.D. Davis and Y.K. Cheung : Bending moment in long walled tanks. ACI Journal, 64 (1967), pp. 685~689.

(1971.3.8・受付)