

塔と多柱基礎の連成立体振動

THREE-DIMENSIONAL VIBRATIONS OF TOWER AND MULTI-COLUMN PIER FOUNDATIONS

多田 浩彦*・進藤 泰男**・倉田 宗章***
By Hirohiko Tada, Yasuo Shindo and Muneaki Kurata

1. まえがき

最近、本州四国連絡橋をはじめとする海峡、あるいは、大河川横断架橋計画が立案されており、これらには水中等の悪施工条件のもとで、大規模基礎を築造しなければならなくなることが多い。このような個所の基礎の一形式として、主として施工的な要請から、いわゆる多柱基礎が提案されている。

多柱基礎はケーソン基礎のような剛体基礎と異なり、構造的に柔軟なので、安定解析にも基礎躯体の弾性変形を考慮しなければならない。また、可撓的構造であることから、地震時に、海底地形の傾斜、地震入力方向の任意性、塔反力の偏心、基礎構造の非対称性等が要因となって、基礎のねじり現象をも含めた複雑な挙動を生起するおそれがあり、それらを正確に評価することのできる解析法を確立する必要がある。

そこで、多柱基礎とその上に載る吊橋主塔との連成系について、回転、並進運動からなる剛体振動、ねじれ運動をも含む弾性振動などを考慮した立体振動解析を試みた^{1),2)}。構造系はすべて有限個の質点に置換し、地盤、橋面、ケーブルによる復元力は、それぞれ作用位置の質点における集中ばねと仮定した。さらに、それらの相互関係は、影響係数で関連させて解析した。運動方程式は、結局、剛体振動系と弾性振動系を連立させることになる。剛体振動の運動方程式は差分法で、また、弾性振動の運動方程式は modal analysis 法によって 1 自由度の微分方程式に変換した後、数値積分法³⁾を用いて漸化式で表わし、計算時間間隔ごとの、初期値接続問題として解いた。

このような多質点系で、自由度が特に大きい振動解析の問題点として、実構造物になるべく忠実なモデル化と、計算精度の確保の 2 点があげられる。このような観点から、質点個数、および、その分布、さらに数値計算法などが解の信頼性に与える影響につき検討を加えた。

2. 基本仮定

構造は、図-1 に示すような 9 本の脚柱と塔柱、および、両者を結ぶ構造体(以下頂板と仮称する)よりなるものとし、脚柱、および、塔柱は若干個の質点に分割し、頂板は水平運動に関しては重心点における単一の質点とみなし、回転運動、ねじれ運動に関しては剛体と仮定して、脚柱、塔柱の変位を拘束するものとする^{4)~6)}。ケーブル、橋面、および地盤が構造系に与える作用はすべて集中ばねで置換する。

海底地盤の傾斜を考慮し、脚柱の根入れ長は不等、かつ、剛度も変化するものとして取り扱い、塔柱は、図-1 (a) に示すような不連続な変断面ばりとして仮定する。地震作用方向は、図-1 (b) に示すように α 軸と角 θ をなすものとする。この系の振動は構造全体の剛体としての並進運動、回転運動、および、脚柱、塔柱の構造要素としての弾性振動の 2 系の運動が連成された

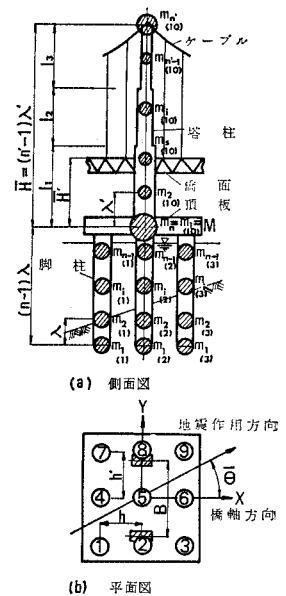


図-1 構造の力学モデル

* 正会員 本州四国連絡橋公団設計第2部設計第3課
** 正会員 工修 大阪設計コンサルタンツ(株) 研究室
*** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学教室

ものである。

3. 運動方程式

(1) 水平運動方程式

各種ばね、および、各質点での変位の定義を 図-2 に示す。また、運動方程式は脚柱部、塔柱部、頂板部のこのおのの質点について表わす。

a) 脚柱部の質点の運動方程式

いま、 j 番柱の x 方向変形のモデルを 図-3 に示す。

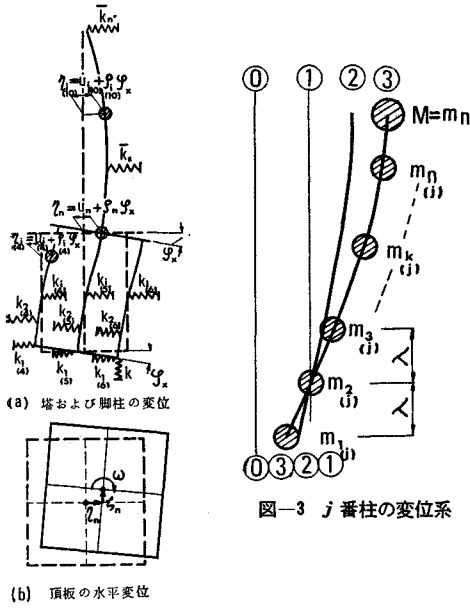


図-2 構造の変位系

図中の①—①線は柱の静止位置、②—②線は地動 u_0 の並進位置、③—③線は柱頭部の拘束曲げによる弾性変形位置、④—④線は水平力、および、ねじりによる x 方向弾性変形位置である。 y 方向変形については、 図-3 において、 $u_k \rightarrow v_k, \rho_k \varphi_x \rightarrow \rho_k' \varphi_y, \eta_k \rightarrow \zeta_k$ とおきかえればよい。上記の図を参照すれば、 j 番柱 i 番質点の x 方向運動方程式は、次のようになる。

$$m_k \left(\ddot{u}_k + \ddot{\varphi}_x \rho_k \right) + \sum_{i=1}^n \rho_{xi}^x u_i + \rho_{\theta n}^x \omega + C_k (\dot{u}_k + \dot{\varphi}_x \rho_k) = -m_k \ddot{u}_0 \cos \bar{\theta} \quad (j=1, 2, 3, \dots, 9; k=1, 2, 3, \dots, n-1) \dots (1)$$

同様に y 方向運動方程式は、

$$m_k \left(\ddot{v}_k + \ddot{\varphi}_y \rho_k' \right) + \sum_{i=1}^n \rho_{yi}^y v_i + \rho_{\theta n}^y \omega + C_k' (\dot{v}_k + \dot{\varphi}_y \rho_k') = -m_k \ddot{u}_0 \sin \bar{\theta} \quad (j=1, 2, 3, \dots, 9; k=1, 2, 3, \dots, n-1) \dots (2)$$

ここに

n = 柱の質点個数、番号 n は頂板質点を示す。

- u_k, v_k = 水平力、および、ねじれにより、 j 番柱 k 番質点に生ずる x, y 方向弾性変位
- ω = 頂板重心を通る鉛直軸まわりの水平ねじれ回転角
- φ_x, φ_y = x, y 方向頂板回転傾斜角
- \ddot{u}_0 = 地動加速度
- $\bar{\theta}$ = x 軸に対する地動入射角 (反時計まわりが正)
- m_k = j 番柱 k 番質点の質量
- C_k, C_k' = j 番柱 k 番質点の x, y 方向水平運動減衰係数
- ρ_{xi}^x, ρ_{yi}^y = 反力影響係数、すなわち、 j 番柱の各質点位置に支点を仮想した連続ばりにおいて、 i 番支点のみを x , または、 y 方向に単位変位させるとき k 番支点に生ずる x , または、 y 方向反力
- ρ_k, ρ_k' = 頂板が φ_x , または、 φ_y 傾斜することにより j 番柱の k 番質点に生ずる x , または、 y 方向変位を φ_x , または φ_y の 1 次関数で表わしたときの係数
- $\rho_{\theta n}^x, \rho_{\theta n}^y$ = 頂板に単位のねじれが生ずるとき、 j 番柱の k 番支点に生ずる x , または、 y 方向反力

上記記号のうち、 $\rho_{xi}^x, \rho_{yi}^y, \rho_k, \rho_k', \rho_{\theta n}^x, \rho_{\theta n}^y$ については、後節で述べる。ただし、 $i=n$ の時、つまり、頂板点においては、頂板が剛であるため変位は柱番号に無関係に、 $u_n = u_n, v_n = v_n$ と表わせる。

b) 塔柱部の質点の運動方程式

$$m_k \left(\ddot{u}_k + \ddot{\varphi}_x \rho_k \right) + \rho_{xi}^x u_n + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{xi}^x u_i + C_k (\dot{u}_k + \dot{\varphi}_x \rho_k) = -m_k \ddot{u}_0 \cos \bar{\theta} \dots (3)$$

$$m_k \left(\ddot{v}_k + \ddot{\varphi}_y \rho_k' \right) + \rho_{yi}^y v_n + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{yi}^y v_i + C_k' (\dot{v}_k + \dot{\varphi}_y \rho_k') = -m_k \ddot{u}_0 \sin \bar{\theta} \dots (4)$$

$$I_k \ddot{\omega}_k + \sum_{i=1}^{n'} \rho_{\theta i}^{\theta k} \omega_i + \bar{C}_k \dot{\omega}_k = 0 \quad (k=2, 3, \dots, n') \dots (5)$$

式中の各変位、質量、影響係数の表示は添字を除いて脚柱の場合と同様である。添字 (10) は、塔柱番号を意味する。

- n' = 塔柱の質点個数で、番号 1 は頂板質点を示す。
- I_k = 塔柱の k 番質点のねじれ回転慣性モーメント
- ω_k = 塔柱の k 番質点のねじれ回転角
- \bar{C}_k = 塔柱の k 番質点のねじれ運動減衰係数
- $\rho_{\theta i}^{\theta k}$ = 塔柱の i 番質点に単位ねじれが生ずる時、 k 番質点に生ずるねじれ反力モーメント、くわしい

計算式は後節で述べる。

c) 頂板部の質点の運動方程式

$$M(\ddot{u}_n + \ddot{\phi}_x \rho_n) + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{xi}^{jn} u_i + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{xi}^{x1} u_i + (\sum_{j=1}^9 \rho_{xn}^{jn} + \rho_{x1}^{x1}) u_n + C_n(\dot{u}_n + \dot{\phi}_x \rho_n) = -M \cdot \ddot{u}_0 \cos \bar{\theta} \dots\dots\dots (6)$$

$$M(\ddot{v}_n + \ddot{\phi}_y \rho_n') + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{yi}^{jn} v_i + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{yi}^{y1} v_i + (\sum_{j=1}^9 \rho_{yn}^{jn} + \rho_{y1}^{y1}) v_n + C_n'(\dot{v}_n + \dot{\phi}_y \rho_n') = -M \cdot \ddot{u}_0 \sin \bar{\theta} \dots\dots\dots (7)$$

$$I\ddot{\omega} + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} (\rho_{xi}^{jn} u_i + \rho_{yi}^{jn} v_i) + \rho_{\theta n}^{\theta n} + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{\theta i}^{\theta 1} \omega_i + \bar{C} \dot{\omega} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ここに

- M = 頂板質量
- u_n, v_n = 水平力による頂板点の x, y 方向弾性変位
- C_n, C_n' = 頂板点の x, y 方向水平運動減衰係数
- ρ_n, ρ_n' = 頂板質点における ρ_k, ρ_k' と同様の係数
- $\rho_{xn}^{xn}, \rho_{x1}^{x1}, \rho_{yn}^{yn}, \rho_{y1}^{y1}$ = 頂板質点における $\rho_{xi}^{xk}, \rho_{xi}^{yk}, \rho_{yi}^{yk}$, ρ_{yi}^{xk} と同様の係数
- I = 頂板重心を通る鉛直軸まわりの頂板のねじれ回転慣性モーメント
- \bar{C} = 頂板質点のねじれ運動減衰係数
- $\rho_{\theta n}^{\theta n}$ = 頂板に単位のねじれが生ずる時、頂板に生ずるねじれ反力モーメント

(2) 回転運動方程式

a) 構造各部の質点に作用する x, y 方向慣性力 P_x, P_y

脚柱部 k 番質点に作用する慣性力を P_{kx}, P_{ky} とすれば、式 (1), (2) より

$$P_{kx} = m_k(\ddot{u}_k + \ddot{\phi}_x \rho_k) + C_k(\dot{u}_k + \dot{\phi}_x \rho_k) + m_k \ddot{u}_0 \cos \bar{\theta} = - \sum_{i=1}^n \rho_{xi}^{xk} u_i - \rho_{\theta n}^{xk} \omega \dots\dots\dots (9)$$

$$P_{ky} = m_k(\ddot{v}_k + \ddot{\phi}_y \rho_k') + C_k'(\dot{v}_k + \dot{\phi}_y \rho_k') + m_k \ddot{u}_0 \sin \bar{\theta} = - \sum_{i=1}^n \rho_{yi}^{yk} v_i - \rho_{\theta n}^{yk} \omega \dots\dots\dots (10)$$

同様に、塔柱部、頂板部の各質点に作用する慣性力、 $P_{kx}, P_{ky}, P_{nx}, P_{ny}$ も式 (3), (4), (6), (7) からそれぞれ求める。

b) 鉛直地盤反力による復元モーメント

脚柱の足を連ねる底平面が y 軸のまわりに ϕ_x, x 軸のまわりに ϕ_y なる微小角傾いているものとすれば、鉛直地盤反力による y, x 軸まわりの復元モーメント $M_{\phi_x},$

M_{ϕ_y} は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{\phi_x} &= 2(M_{\phi_x}^{(3)} + M_{\phi_x}^{(6)} + M_{\phi_x}^{(9)}) = 6 kh^2 \phi_x \\ M_{\phi_y} &= 2(M_{\phi_y}^{(7)} + M_{\phi_y}^{(8)} + M_{\phi_y}^{(9)}) = 6 kh'^2 \phi_y \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

ただし、添字の () 内の数字は脚柱の番号を示す。

k = 支持地盤鉛直方向ばね定数
 $h, h' = x, y$ 方向柱間隔長 (図-1 (b) 参照)

c) 水平地盤反力による復元モーメント

水平地盤反力による j 番柱の x, y 方向の復元モーメント M_u, M_v は、柱本数 9 本を考慮して次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_u &= \sum_{j=1}^9 M_u = \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^9 \sum_{i=1}^{r(j)} k_i (u_i + \phi_x \rho_i) (i-1) \lambda \\ M_v &= \sum_{j=1}^9 M_v = \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^9 \sum_{i=1}^{r(j)} k_i (v_i + \phi_y \rho_i') (i-1) \lambda \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

$k_i = j$ 番柱 i 番質点に作用する水平方向地盤ばね定数

λ = 脚柱の質点間距離
 $r(j) = j$ 番柱の根入れ部の質点個数

d) 吊橋ケーブル、および橋面による復元モーメント

橋面は、一般には吊橋塔柱とは結合されていないため復元性はないとみなされるが、今回の解析には一応考慮した。よって、ケーブル、橋面の塔柱に与える影響を、橋軸方向にのみ作用する集中ばねと考えれば、その復元モーメント \bar{M} は次式で与えられる。

$$\bar{M} = \bar{k}_n \{ u_n' + \phi_x \rho_n' \} \{ (n-1) \lambda + \bar{H} \} + \bar{k}_s \{ u_s + \phi_x \rho_s \} \{ (n-1) \lambda + \bar{H}' \} \dots\dots (13)$$

$\bar{k}_n =$ ケーブルを集中ばねとみなしたときのばね定数

$\bar{k}_s =$ 橋面を集中ばねとみなしたときのばね定数

$\bar{H} =$ 頂板重心より塔頂までの高さ

$\bar{H}' =$ 頂板重心より橋面までの高さ (図-1(a) 参照)

e) 回転運動方程式

式 (9), (10), および、式 (3)~(7) から求まる同様な慣性力による脚柱底面 x, y 軸まわりのモーメントと、式 (11)~(13) に列挙した復元力による同一軸まわりのモーメントがつりあうという条件より x, y 方向について、

$$\sum_{j=1}^9 \sum_{k=2}^{n-1} P_{kx} (k-1) \lambda + P_{nx} (n-1) \lambda + \sum_{k=2}^{n'} P_{kx} \{ (n-1) \lambda + (k-1) \lambda' \} + \bar{C}_x \dot{\phi}_x + \bar{M} + 6 kh^2 \phi_x + \sum_{j=1}^9 M_u = 0 \dots\dots (14)$$

$$\sum_{j=1}^9 \sum_{k=2}^{n-1} P_{ky} (k-1) \lambda + P_{ny} (n-1) \lambda + \sum_{k=2}^{n'} P_{ky} \{ (n-1) \lambda + (k-1) \lambda' \} + \bar{C}_y \dot{\phi}_y + 6 kh'^2 \phi_y + \sum_{j=1}^9 M_v = 0 \dots\dots (15)$$

式 (14), (15) に式 (9), (10) など代入すれば結局次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \rho_{xi}^{xk} u_i^{(j)} (k-1) \lambda \\
 & -\sum_{k=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \rho_{xi}^{xk} u_i \{ (n-1) \lambda + (k-1) \lambda' \} \\
 & -\sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{\theta n}^{xk} \omega (k-1) \lambda + \bar{C}_x \dot{\varphi}_x + \bar{M} + 6 kh^2 \varphi_x \\
 & + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{r(j)} k_i (i-1) \lambda \{ u_i^{(j)} + \varphi_x \rho_i^{(j)} \} = 0 \dots \dots \dots (16) \\
 & -\sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \rho_{yi}^{yk} v_i^{(j)} (k-1) \lambda \\
 & -\sum_{k=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \rho_{yi}^{yk} v_i \{ (n-1) \lambda + (k-1) \lambda' \} \\
 & -\sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{\theta n}^{yk} \omega (k-1) \lambda + \bar{C}_y \dot{\varphi}_y + 6 kh'^2 \varphi_y \\
 & + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{r(j)} k_i (i-1) \lambda \{ v_i^{(j)} + \varphi_y \rho_i^{(j)} \} = 0 \dots \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

4. 解 法

図-2 にも示すように、弾性変形量を次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_k &= u_k + \varphi_x \rho_k & \zeta_k &= v_k + \varphi_y \rho_k' \\
 \eta_k &= u_k + \varphi_x \rho_k & \zeta_k &= v_k + \varphi_y \rho_k' \\
 \eta_n &= u_n + \varphi_x \rho_n & \zeta_n &= v_n + \varphi_y \rho_n'
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

また、脚柱については円形断面であるので、

$$\rho_{xi}^{xk} = \rho_{yi}^{yk} \dots \dots \dots (19)$$

相反作用の定理から

$$\rho_{xi}^{xk} = \rho_{xk}^{xi}, \rho_{yi}^{yk} = \rho_{yk}^{yi} \dots \dots \dots (20)$$

さらに、頂板重心軸まわりの反力モーメント $\rho_{xi}^{\theta n}, \rho_{yi}^{\theta n}$ は

$$\rho_{xi}^{\theta n} = \rho_{xk}^{xi}, \rho_{yi}^{\theta n} = -\rho_{yn}^{yi} x = -\rho_{xn}^{xi} \dots \dots \dots (21)$$

反力モーメントについてもやはり相反性があり

$$\rho_{xi}^{\theta n} = \rho_{\theta n}^{xi}, \rho_{yi}^{\theta n} = \rho_{\theta n}^{yi} \dots \dots \dots (22)$$

式 (18) の表示、および、式 (19)~(22) の関係を式 (1)~(8) に代入して整理すれば、水平運動方程式は結局次式となる。

脚柱部について

$$\begin{aligned}
 & m_k \ddot{\eta}_k + \sum_{i=1}^n \rho_{xi}^{xk} \eta_i + \rho_{xn}^{xk} \omega + C_k \dot{\eta}_k \\
 & = -m_k \ddot{u}_0 \cos \bar{\theta} + \varphi_x \sum_{i=1}^n \rho_{xi}^{xk} \rho_i \dots \dots \dots (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m_k \ddot{\zeta}_k + \sum_{i=1}^n \rho_{yi}^{yk} \zeta_i - \rho_{xn}^{xk} \omega + C_k' \dot{\zeta}_k \\
 & = -m_k \ddot{u}_0 \sin \bar{\theta} + \varphi_y \sum_{i=1}^n \rho_{yi}^{yk} \rho_i' \dots \dots \dots (24) \\
 & (j=1, 2, 3, \dots, 9; i=1, 2, 3, \dots, n-1)
 \end{aligned}$$

塔柱部について

$$\begin{aligned}
 & m_k \ddot{\eta}_k + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{xi}^{xk} \eta_i + \rho_{x1}^{xk} \eta_n + C_k \dot{\eta}_k \\
 & = -m_k \ddot{u}_0 \cos \bar{\theta} + \varphi_x \left(\rho_{x1}^{xk} \rho_n + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{xi}^{xk} \rho_i \right) \dots \dots \dots (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m_k \ddot{\zeta}_k + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{yi}^{yk} \zeta_i + \rho_{y1}^{yk} \zeta_n + C_k' \dot{\zeta}_k \\
 & = -m_k \ddot{u}_0 \sin \bar{\theta} + \varphi_y \left(\rho_{y1}^{yk} \rho_n' + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{yi}^{yk} \rho_i' \right) \dots \dots \dots (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_k \ddot{\omega}_k + \sum_{i=1}^{n'} \rho_{\theta i}^{\theta k} \omega_i + \bar{C}_k \dot{\omega}_k = 0 \dots \dots \dots (27) \\
 & (k=2, 3, \dots, n')
 \end{aligned}$$

頂板部について

$$\begin{aligned}
 & M \ddot{\eta}_n + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{xi}^{xn} \eta_i + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{xi}^{x1} \eta_i \\
 & + \left(\sum_{j=1}^9 \rho_{xn}^{xn} + \rho_{x1}^{x1} \right) \rho_n + C_n \dot{\eta}_n \\
 & = -M \ddot{u}_0 \cos \bar{\theta} + \varphi_x \left\{ \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{xi}^{xn} \rho_i + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{xi}^{x1} \rho_i \right. \\
 & \left. + \left(\sum_{j=1}^9 \rho_{xn}^{xn} + \rho_{x1}^{x1} \right) \rho_n \right\} \dots \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & M \ddot{\zeta}_n + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{yi}^{yn} \zeta_i + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{yi}^{y1} \zeta_i \\
 & + \left(\sum_{j=1}^9 \rho_{yn}^{yn} + \rho_{y1}^{y1} \right) \zeta_n + C_n' \dot{\zeta}_n \\
 & = -M \ddot{u}_0 \sin \bar{\theta} + \varphi_y \left\{ \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{yi}^{yn} \rho_i' \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2}^{n'} \rho_{yi}^{y1} \rho_i' + \left(\sum_{j=1}^9 \rho_{yn}^{yn} + \rho_{y1}^{y1} \right) \rho_n' \right\} \dots \dots \dots (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I \ddot{\omega} + \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{xi}^{xn} y_{(j)} \eta_i - \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{xi}^{x1} x_{(j)} \zeta_i \\
 & + \rho_{\theta n}^{\theta n} \omega + \sum_{i=2}^9 \rho_{\theta i}^{\theta 1} \omega_i + \bar{C} \dot{\omega} \\
 & = \varphi_x \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{xi}^{xn} y_{(j)} \eta_i - \varphi_y \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{xi}^{x1} x_{(j)} \zeta_i \\
 & \dots \dots \dots (30)
 \end{aligned}$$

以上式 (23)~(30) は、多柱式基礎と吊橋塔柱が結合した構造系の、弾性振動を表わす連立微分方程式となる。これらの連立微分方程式の解法は、モーダルアナリシスの手法による。

式 (23)~(30) をマトリックス表示すれば、

$$M \ddot{Z} + C \dot{Z} + \rho Z = -M \ddot{X} + \rho \varphi \bar{p} \dots \dots \dots (31)$$

上式中 M, C, ρ, φ は行列、 $\ddot{Z}, \dot{Z}, Z, \ddot{X}, \bar{p}$ は列ベクトルである。これら各マトリックスの要素の表示は付録に示す。式 (31) の非減衰自由振動の場合を考え、そのとき解をもつ条件から次の特性方程式が得られる。

$$|\rho - p^2 M| = 0 \dots \dots \dots (32)$$

これより固有値 $p_i^2 (i=1, 2, 3, \dots, 3\{6(n-1)+n'\})$, および、モーダルマトリックス $\Phi = [e_{ij}] (i, j=1, 2, 3, \dots, 3\{6(n-1)+n'\})$ が求まる。

いま、 $Z = \Phi Z'$ (33)

なる置換を行なう。ここに Z' は、新たな座標系による列ベクトルで、 $Z' = \{Z'_i\}$, ($i=1, 2, 3, \dots, 3\{6(n-1) + n'\}$) で示す。

式 (33) を式 (31) に代入し、 Φ の転置行列 Φ^T を左から乗じて関数の直交性を利用すれば、各項の係数は次式のように整理される。

$$\left. \begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= I \quad I: \text{単位マトリックス} \\ \Phi^T C \Phi &= \mu \Phi^T M \Phi = \mu: \text{定数} \\ &\text{ただし } C = \mu M, \mu = 2\nu p_{(i=1)} \text{ と} \\ &\text{仮定している。} \\ \nu &= \text{減衰定数} \\ \Phi^T \rho \Phi &= A = [p_i^2] \\ &\text{ただし } A \text{ は } p_i^2 \text{ を対角要素とする} \\ &\text{対角行列である。} \end{aligned} \right\} \dots\dots (34)$$

式 (34) の関係より式 (31) は、右辺の φ の関数項を外力項と考えれば、結局次の 1 自由度の微分方程式群に分離される。

$$\ddot{Z}' + \mu \dot{Z}' + A Z' = -\Phi^T M \ddot{X} + \Phi^T \rho \varphi \bar{p} \dots\dots (35)$$

上式を j 次の基準座標について書き表わすと次式となる。

$$\begin{aligned} \ddot{Z}'_j + \mu \dot{Z}'_j + p_j^2 Z'_j &= -\ddot{u}_0 \cos \theta \sum_{i=1}^{9(n-1)+n'} e_{ij} m_i \\ &- \ddot{u}_0 \sin \theta \sum_{i=9(n-1)+n'+1}^{18(n-1)+2n'} e_{ij} m_i + \varphi_x \bar{r}_j + \varphi_y \bar{r}_j \\ &\dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

($j=1, 2, 3, \dots, 3\{6(n-1) + n'\}$)

ここに、

$$\left. \begin{aligned} r_j &= \sum_{i=1}^{9(n-1)+n'} e_{ij} \beta_i + e_{nj} \cdot \beta_{\bar{n}} \\ \bar{r}_j &= \sum_{i=9(n-1)+n'+1}^{18(n-1)+2n'} e_{ij} \beta_i + e_{nj} \cdot \beta_{\bar{n}} \\ \beta_i &= \sum_{k=1}^{3\{6(n-1)+n'\}} \rho_{xi} \rho_k \\ &\text{ただし } i \leq 18(n-1) + 2n' \\ \beta_{\bar{n}} &= \sum_{k=1}^{9(n-1)+n'} \rho_{xk} \rho_k \\ \bar{\beta}_{\bar{n}} &= \sum_{k=9(n-1)+n'+1}^{18(n-1)+2n'} \rho_{xk} \rho_k \\ \bar{n} &= 3\{6(n-1) + n'\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (37)$$

しかし、式 (36) は完全な独立でなく右辺に φ_x, φ_y なる変数を含んでいる。このため式 (36) と式 (16), (17) を連立で解かなければならない。

5. 数値計算法

本例題のごとく、きわめて多自由度となる応答計算においては、計算機の容量、計算所要時間の制約をうける。一方計算の精度を上げるためには、質点個数の増加、計

算時間間隔の細分化が必要となり、計算誤差、所要時間の累積が大きくなる。これらの相反する条件を同時に満足するには、通常の変分法は不適當であることがわかった。

以上の諸条件を考慮した結果、Adnan Çakiroğlu & Günay Özmen の数値積分法³⁾を用い、差分法に比し、計算誤差の少ない安定した解を得ることができた。

$t = t_m$ 時刻の値には添字 m を付して表わすことにすると、その時刻の第 j 次の基準振動は式 (36) により次のごとく書ける。

$$\ddot{Z}'_j + \mu \dot{Z}'_j + p_j^2 Z'_j = -\ddot{u}_0 \alpha_j + \varphi_x \bar{r}_j + \varphi_y \bar{r}_j \dots\dots (38)$$

ここに

$$\alpha_j = \cos \theta \sum_{i=1}^{9(n-1)+n'} e_{ij} m_i + \sin \theta \sum_{i=9(n-1)+n'+1}^{18(n-1)+2n'} e_{ij} m_i$$

いま、計算時間間隔を Δt とし、次のような補助関数を考える (図-4)。

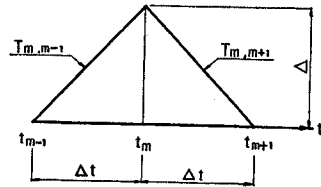


図-4 補助関数

$$\left. \begin{aligned} T_{m,m-1} &= t - t_{m-1} \quad (t_{m-1} < t < t_m) \\ T_{m,m+1} &= t_{m+1} - t \quad (t_m < t < t_{m+1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (39)$$

式 (38) の両辺に $T_{m, m-1}$ を乗じて区間 $t_{m-1} \sim t_m$ で積分する。このとき、 \ddot{Z}'_j の項は部分積分を行ない、ほかの項の積分に際しては、各変数はおのおの $t = t_{m-1}$ 時刻の近傍で Taylor 級数の近似展開式、すなわち

$$\begin{aligned} Z'_m &= Z'_{m-1} + \dot{Z}'_{m-1}(t_m - t_{m-1}) + \ddot{Z}'_{m-1} \times \frac{1}{2}(t - t_{m-1})^2 \\ \dot{Z}'_m &= \dot{Z}'_{m-1} + \ddot{Z}'_{m-1}(t - t_{m-1}) \end{aligned}$$

で表わしておく。

積分の結果、次式を得る。

$$\begin{aligned} (\Delta t) \ddot{Z}'_j - Z'_j + Z'_j &= -\alpha_j A_{m,m-1} \\ &+ \left[\frac{(\Delta t)^2}{2}, \frac{(\Delta t)^3}{3}, \frac{(\Delta t)^4}{8} \right] \\ &\times \left\{ -p_j^2 \begin{pmatrix} Z'_{m-1} \\ \dot{Z}'_{m-1} \\ \ddot{Z}'_{m-1} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \dot{Z}'_{m-1} \\ \ddot{Z}'_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} + r_j \begin{pmatrix} \varphi_{m-1} \\ \dot{\varphi}_{m-1} \\ \ddot{\varphi}_{m-1} \end{pmatrix} + \bar{r}_j \begin{pmatrix} \varphi_{m-1} \\ \dot{\varphi}_{m-1} \\ \ddot{\varphi}_{m-1} \end{pmatrix} \right\} \\ &\dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

ここに

$$A_{m,m-1} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \ddot{u}_0 T_{m,m-1} dt = \frac{\Delta t^2}{6} (2\ddot{u}_0 \dots + \ddot{u}_0)$$

さらに、式 (38) の両辺に $T_{m,m+1}$ を乗じて区間 t_m

~ t_{m+1} で積分し、また $t=t_m$ の近傍で変数を展開し、 $T_{m,m-1}$ を乗じて区間 $t_{m-1} \sim t_m$ で積分すれば、式 (40) と同様の式が得られる。それらの式を整理すれば、結局 Z'_j, \ddot{Z}'_j について、次の漸化式をうる。

$$\begin{aligned} Z'_{j'} &= 2Z'_{j'} - Z'_{j'} - \alpha_j A_m \\ &+ \left[(\Delta t)^2, \frac{(\Delta t)^4}{12} \right] \\ &\times \left\{ -p_j^2 \begin{pmatrix} Z'_m \\ \ddot{Z}'_m \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} \dot{Z}'_m \\ 0 \end{pmatrix} + r_j \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \dot{\varphi}_x \end{pmatrix} + \bar{r}_j \begin{pmatrix} \varphi_y \\ \dot{\varphi}_y \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} (\Delta t) \dot{Z}'_{j'} &= Z'_{j'} - Z'_{j'} - \alpha_j A_{m+1,m} \\ &+ \left[\frac{(\Delta t)^2}{2}, \frac{(\Delta t)^3}{3}, \frac{(\Delta t)^4}{8} \right] \\ &\times \left\{ -p_j^2 \begin{pmatrix} Z'_m \\ \dot{Z}'_m \\ \ddot{Z}'_m \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \dot{Z}'_m \\ \ddot{Z}'_m \\ 0 \end{pmatrix} + r_j \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \dot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_x \end{pmatrix} + \bar{r}_j \begin{pmatrix} \varphi_y \\ \dot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_y \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

ここに

$$\begin{aligned} A_m &= A_{m,m-1} + A_{m,m+1} = \frac{(\Delta t)^2}{3} \{ \ddot{u}_0 + \ddot{u}_0 + \ddot{u}_0 \} \\ A_{m,m+1} &= \int_{t_m}^{t_{m+1}} \ddot{u}_0 T_{m,m+1} dt = \frac{(\Delta t)^2}{6} (\ddot{u}_0 + 2\ddot{u}_0) \\ A_{m+1,m} &= \frac{(\Delta t)^2}{6} \{ 2\ddot{u}_0 + \ddot{u}_0 \} \end{aligned} \quad (43)$$

$Z'_j, \dot{Z}'_j, \ddot{Z}'_j$ は計算上の基準座標であり、実弾性変位 $\eta_j, \zeta_j, \omega_j, \omega$ および、これらの微分量との関係は式 (33) で与えられる。すなわち、 Φ の要素を e_{sr} とし、列ベクトル Z の要素を記述の便宜上、通し順位番号を示す添字 s を付けて表示すると、

$$\eta_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} Z_r', \quad \dot{\eta}_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} \dot{Z}_r', \quad \ddot{\eta}_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} \ddot{Z}_r'$$

ここに

$$\begin{cases} \eta_s = \eta_i & \text{ただし } s = (j-1)(n-1) + i \leq 9(n-1) \\ \eta_s = \eta_i & \text{ " } s = 9(n-1) + (i-1) \leq 9(n-1) \\ & + (n'-1) \\ \eta_s = \eta_n & \text{ " } s = 9(n-1) + n' = \bar{s} \\ \zeta_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} Z_r', & \dot{\zeta}_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} \dot{Z}_r', & \ddot{\zeta}_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} \ddot{Z}_r' \end{cases}$$

ここに

$$\begin{cases} \zeta_s = \zeta_i & \text{ただし } s = \bar{s} + (j-1)(n-1) + i \leq \bar{s} \\ & + 9(n-1) \\ \zeta_s = \zeta_i & \text{ " } s = \bar{s} + 9(n-1) + (i-1) \leq \bar{s} \\ & + 9(n-1) + (n'-1) \\ \zeta_s = \zeta_n & \text{ " } s = \bar{s} + 9(n-1) + n' = 2\bar{s} \end{cases}$$

$$\omega_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} Z_r', \quad \dot{\omega}_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} \dot{Z}_r', \quad \ddot{\omega}_s = \sum_{r=1}^{s'} e_{sr} \ddot{Z}_r'$$

ここに

$$\begin{cases} \omega_s = \omega_i & \text{ただし } s = 2\bar{s} + (i-1) \leq 2\bar{s} + (n'-1) \\ \omega_s = \omega & \text{ " } s = 3\{6(n-1) + n'\} \end{cases} \quad (44)$$

上式中、総和記号の上限 s' は、 $s' \leq 3\{6(n-1) + n'\}$ なる適当な数であって計算に用いる基準振動の個数である。次に φ_x, φ_y の計算式を導く。そのため $t=t_{m+1}$ 時刻における式 (16), (17) に式 (18)~(22) の関係を代入し、さらに減衰項を差分して整理すれば、 φ_x, φ_y について次式を得る。

$$\begin{aligned} \varphi_{x,m+1} &= \frac{\Delta t}{C_x} \left[\left\{ \frac{C_x}{\Delta t} - Q \right\} \varphi_x \right. \\ &+ \sum_{j=1}^9 \left\{ Q_{(j)}(\eta_m) - \sum_{i=1}^{r(j)} k_i(i-1) \lambda \eta_{i(j)} \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{\theta n}^{xk} (k-1) \lambda \omega_m \right\} \\ &+ Q_{(10)}(\eta_m) - \bar{k}_{n'} \{ (n-1) \lambda + \bar{H} \} \\ &\left. - \bar{k}_s \{ (n-1) \lambda + \bar{H}' \} \right] \\ &= F(\varphi_x, \eta_i, \dot{\eta}_i, \omega_m) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{y,m+1} &= \frac{\Delta t}{C_y} \left[\left\{ \frac{C_y}{\Delta t} - \bar{Q} \right\} \varphi_y + \sum_{j=1}^9 \left\{ \bar{Q}_{(j)}(\zeta_m) \right. \right. \\ &- \sum_{i=1}^{r(j)} k_i(i-1) \lambda \zeta_{i(j)} \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{\theta n}^{yk} (k-1) \lambda \omega_m \right\} + \bar{Q}_{(10)}(\zeta_m) \left. \right] \\ &= \bar{F}(\varphi_y, \zeta_i, \dot{\zeta}_i, \omega_m) \end{aligned} \quad (46)$$

ここに

$$\begin{cases} Q = \sum_{j=1}^9 Q_{(j)}(\rho) + Q_{(10)}(\rho) + 6kh^2 \\ \bar{Q} = \sum_{j=1}^9 \bar{Q}_{(j)}(\rho') + \bar{Q}_{(10)}(\rho') + 6kh'^2 \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} Q_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \rho_{xi}^{xk} (k-1) \lambda \eta_{i(j)} \\ Q_{(j)}(\rho) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \rho_{xi}^{xk} (k-1) \lambda \rho_{i(j)} \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} Q_{(10)}(\eta) = \sum_{k=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \rho_{xi}^{xk} \{ (n-1) \lambda + (k-1) \lambda' \} \eta_{i(10)} \\ Q_{(10)}(\rho) = \sum_{k=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \rho_{xi}^{xk} \{ (n-1) \lambda + (k-1) \lambda' \} \rho_{i(10)} \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \bar{Q}_{(j)}(\zeta) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \rho_{yi}^{yk} (k-1) \lambda \zeta_{i(j)} \\ \bar{Q}_{(j)}(\rho') = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \rho_{yi}^{yk} (k-1) \lambda \rho'_{i(j)} \end{cases} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{(10)}(\zeta) &= \sum_{k=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \rho_{yi}^{yk} \{ (n-1)\lambda + (k-1)\lambda' \} \zeta_i \\ \bar{Q}_{(10)}(\rho') &= \sum_{k=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \rho_{yi}^{yk} \{ (n-1)\lambda + (k-1)\lambda' \} \rho_i' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_{m+1} &= F(\dot{\phi}_m, \dot{\eta}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\omega}_m) \\ \ddot{\phi}_{m+1} &= F(\ddot{\phi}_m, \ddot{\eta}_i, \ddot{\eta}_i, \ddot{\omega}_m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_y &= \bar{F}(\dot{\phi}_y, \dot{\zeta}_i, \dot{\zeta}_i, \dot{\omega}_m) \\ \ddot{\phi}_y &= \bar{F}(\ddot{\phi}_y, \ddot{\zeta}_i, \ddot{\zeta}_i, \ddot{\omega}_m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

以上の各漸化式の計算を、 $4t$ 時間ごとに逐次繰返すわけであるが、図-5 にその計算過程を示す。太線で囲

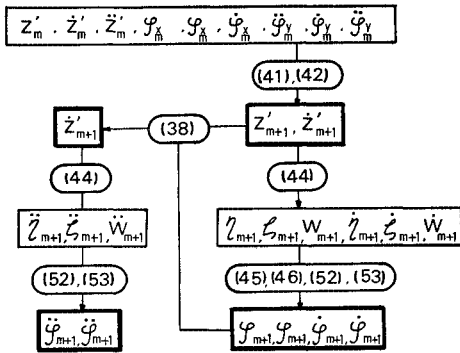


図-8 計算過程の流れ図

んだ各値が、新たに $4t$ 時刻後の計算を行なうときの初期値となる。また、長円内に示す数字は、計算に使用する式番号を示す。

6. 各種影響係数

前節までにおいて、応答追跡に必要な計算式の誘導はおわったが、応答計算にさきだち、各種の影響係数 ρ_{xi}^{xk} , ρ_{yi}^{yk} , ρ_{xi}^{xk} , ρ_{yi}^{yk} , ρ_i , ρ_i' , ρ_i , ρ_i' , $\rho_{\theta i}$, $\rho_{\theta n}$ を求めておく必要がある。以下にその計算の概略を述べる。

(1) 脚柱、塔柱の水平せん断力影響係数 ρ_{xi}^{xk} , ρ_{yi}^{yk} ,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{xi}^{xk} \\ \rho_{yi}^{yk} \end{aligned} \right\}_{(10)}$$

j 番柱において各質点の位置に支点を設けた連続ばりを考え、 i 番支点のみを x , または、 y 方向に $A_i=1$ だけ沈下させるための x , または、 y 方向の外力 ρ_{xi}^{xi} , ρ_{yi}^{yi} , および、その時の k 番支点に発生する x , および y 方向反力 ρ_{xi}^{xk} , ρ_{yi}^{yk} を求めれば、これらは水平せん断力影響係数にはかならない。この時、 i 支点が地中部にあつ

て、ばね定数 k_i なる弾性ばね抵抗が存在するものとすれば、その支点を $A_i=1$ だけ沈下させるための力 ρ_{xi}^{xi} はばねがない場合の力 $\bar{\rho}_{xi}^{xi}$ にばね反力 $k_i A_i = k_i$ を加算したものである。すなわち

$$\rho_{xi}^{xi} = \bar{\rho}_{xi}^{xi} + k_i$$

上式の $\bar{\rho}_{xi}^{xi}$ は、種々の計算法があるが、J.W. Gillespie & B.D. Liaw の方法⁷⁾ により変位影響係数を求め、その逆マトリックスとして本係数を求めるのが有効である。塔柱についての係数 ρ_{xi}^{xk} , ρ_{yi}^{yk} も同様に求める。

(2) 頂板の回転による水平変位影響係数 ρ_{xi}^{xi} , ρ_{yi}^{yi} ,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{xi}^{xi} \\ \rho_{yi}^{yi} \end{aligned} \right\}_{(10)}$$

頂板が、 x, y 方向におおの角、 φ_x, φ_y なる剛体回転をおこせば、各脚柱、および塔柱はその曲げ的作用により水平変位を生ずる。この変位を傾斜角 φ_x, φ_y の関数として ρ_{xi}^{xi} , ρ_{yi}^{yi} と書けるものとし、 ρ_{xi}^{xi} , ρ_{yi}^{yi} を水平変位影響係数とよぶことにする。いま、図-6 に j 番柱の力学系を示す。図中の $P_{(j)}$, $M_{(j)}$ は頂板点に働く水平力、曲げモーメントである。この系は、図-7 (a), (b), (c) に示す3つの系の重ね合わせと考えれば、 i 番質点位置における水平変位 η_i は、次式のようにかける。

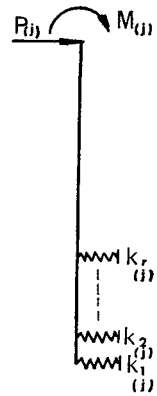


図-6 j 番柱の外力系

$$\eta_i = \sum_{s=2}^{r(j)-1} \alpha_{is} p_s + \alpha_i P_{(j)} + \beta_i M_{(j)} \dots\dots\dots (54)$$

$p_s = j$ 番柱地中部質点のうち $2 \sim r(j)-1$ の位置に作用しているばね反力

α_{is} , α_i , $\beta_i =$ 図-7 (a), (b), (c) に示す3つの系から誘導される数値係数

一方、 i 番支点は p_i なる反力が生じていることより η_i は次式でも表わされる。

$$\eta_i = -p_i \frac{1}{k_i} \dots\dots\dots (55)$$

式 (54), (55) より

$$\sum_{s=2}^{r(j)-1} p_s \alpha_{is} + \delta_{is} \frac{1}{k_i} = -\alpha_i P_{(j)} - \beta_i M_{(j)}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \delta_{is} &= \begin{cases} 1 & (i=s) \\ 0 & (i \neq s) \end{cases} \\ & (i=2, 3, \dots, r(j)-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

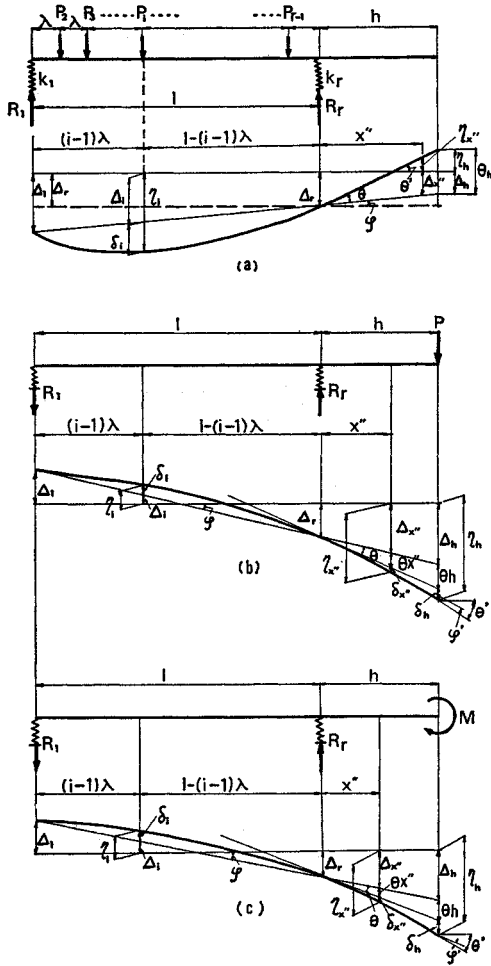


図-7

また、 j 番柱頂板点での水平変位 η 、回転角 φ も式 (54) と同様な式形で表わされる。式 (56) で表わされる連立方程式より $(r(j)-2)$ の $p_{(j)}$ を $P_{(j)}$ 、 $M_{(j)}$ の 1 次式として求め、上記 η 、 φ の関係式に代入すれば、 η 、 φ もまた $P_{(j)}$ 、 $M_{(j)}$ の 1 次式として次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta(P_{(j)}, M_{(j)}) \\ \varphi &= \varphi(P_{(j)}, M_{(j)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

式 (57) を解けば、 $P_{(j)}$ 、 $M_{(j)}$ は η 、 φ について 1 次式となる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} P_{(j)} &= P_{(j)}(\eta, \varphi) \\ M_{(j)} &= M_{(j)}(\eta, \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

次に塔柱と頂板の間に働くせん断力 $P_{(10)}$ を求める。図-8 に頂板が角 φ 傾いたときの塔柱の変形状態、および、ばね配置を示す。図より塔頂、橋面位置における水平変位 $Y_{n'}$ 、 Y_s は

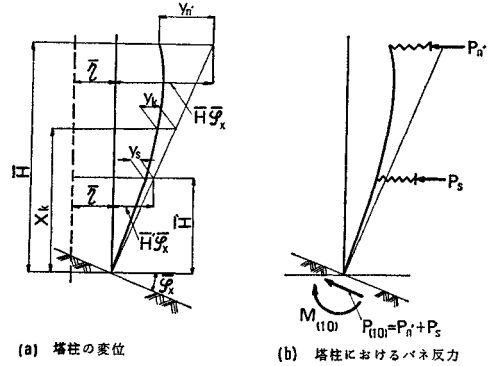


図-8 塔柱の変位、および、外力系

$$\left. \begin{aligned} Y_{n'} &= \bar{\eta} + \bar{H} \bar{\varphi} - y_{n'} \\ Y_s &= \bar{\eta} + \bar{H}' \bar{\varphi} - y_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

いま、これらの点のばね定数を $\bar{k}_{n'}$ 、 \bar{k}_s 、反力を $P_{n'}$ 、 P_s と表わせば、次の関係がなりたつ。

$$\left. \begin{aligned} P_{n'} &= (\bar{\eta} + \bar{H} \bar{\varphi} - y_{n'}) \bar{k}_{n'} \\ P_s &= (\bar{\eta} + \bar{H}' \bar{\varphi} - y_s) \bar{k}_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

$y_{n'}$ 、 y_s は、片持ばりが $P_{n'}$ 、 P_s なる力を受けたときの弾性変形にほかならない。よって、塔柱を図-9 に示す

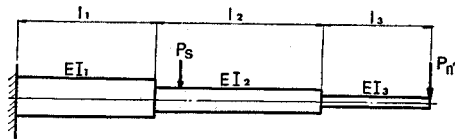


図-9 変断面片持りとしての塔柱

ような変断面ばりと仮定すれば、結局 $P_{n'}$ 、 P_s の 1 次式として表わせる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} y_{n'} &= y_{n'}(P_{n'}, P_s) \\ y_s &= y_s(P_{n'}, P_s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

式 (61) を式 (60) に代入し、 $P_{n'}$ 、 P_s について解けば η 、 φ についての 1 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} P_{n'} &= P_{n'}(\eta, \varphi) \\ P_s &= P_s(\eta, \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

よって、塔柱基部の水平せん断力 $P_{(10)}$ は、

$$P_{(10)} = P_{n'} + P_s = P_{(10)}(\eta, \varphi) \dots\dots\dots (63)$$

頂板には、水平力が作用していないので脚柱、塔柱のせん断力の和はゼロでなければならない。

すなわち

$$\sum_{j=1}^{10} P_{(j)} = 0 \dots\dots\dots (64)$$

式 (58)、(63) を式 (64) に代入することにより

$$\eta = \eta(\varphi) = \rho_n \bar{\varphi} \dots\dots\dots (65)$$

と表わせる。

式 (65) を式 (58) に代入し、さきに $P_{(j)}$ 、 $M_{(j)}$ の 1 次式として求めた $p_{(j)}$ とともに式 (54) に代入すれば、

表-1 構造の数値諸元

基礎部	m_1 ($\text{kg sec}^2/\text{cm}$) (1),(4),(7)	m_2 (1),(4),(7)	m_1 (2),(5),(8)	m_2 (2),(5),(8)	m_1 (3),(6),(9)	m_2 (3),(6),(9)
	1.256×10^4	1.076×10^4	1.256×10^4	1.331×10^4	1.256×10^4	1.586×10^4
	$M = m_3$	k_1 (kg/cm) (1),(4),(7)	k_2 (1),(4),(7)	k_1 (2),(5),(8)	k_2 (2),(5),(8)	k_1 (3),(6),(9)
	1.045×10^5	2.376×10^7	3.984×10^6	2.376×10^7	1.102×10^7	2.376×10^7
	k_2 (3),(6),(9)	k (kg/cm)	λ (cm)	EI ($\text{kg}\cdot\text{cm}^2$)		
	1.805×10^7	3.927×10^6	4.65×10^3	1.292×10^{16}		
塔柱部	$M = m_1$ ($\text{kg sec}^2/\text{cm}$) (10)	m_2 (10)	m_3 (10)	m_4 (10)	m_5 (10)	m_6 (10)
	1.045×10^5	2.465×10^3	2.029×10^3	1.963×10^3	1.858×10^3	8.015×10^3
	I_1 (cm^4)	I_2	I_3	I_{X1} (cm^4)	I_{X2}	I_{X3}
	8.92×10^3	8.92×10^3	4.46×10^3	7.184×10^9	4.643×10^9	2.490×10^9
	I_{Y1} (cm^4)	I_{Y2}	I_{Y3}	a_1 (cm)	a_2	a_3
	1.912×10^{11}	1.592×10^{11}	1.315×10^{11}	1.112×10^3	9.788×10^2	7.500×10^2
	b_1 (cm)	b_2	b_3	t_1 (cm)	t_2	t_3
	4.8×10^2	4.8×10^2	4.8×10^2	9.194	8.350	8.185
	\bar{k}_3 (kg/cm)	\bar{k}_6	λ' (cm)	E (kg/cm^2)		
	0	5.036×10^5	4.46×10^3	2.1×10^6		

注) (1)脚柱部 m, k の()で示した添字は柱番号を示す。

(2)塔柱部の $I_{X_i}, I_{Y_i}, (i=1,2,3)$ は i 番目変断面位置の Y, X 軸まわりの断面2次モーメントを示す。

の強度,および,作用位置が変化するためと考えられる。

今回は,塔柱を含めた連成系において,変位,傾斜角,ねじれ角などの応答挙動,および,その最大値を知ることが主な目的であるので,脚柱部は柱1本当たり2個の質点を仮定している。次に,塔柱の質点数については,塔柱部と基礎部では,剛性に大きな差があるので,質点の分布形を適当にとり構造各部の剛性を平均化する必要がある。計算上でも塔柱3質点の場合は応答計算は発散している。塔柱の質点分布の妥当性を検討するため,質点数を3,4,5,6,7,8と変化させ,各次数モードの固有振動数の一定化していく状態を調べたものが図-12である。図は,1~45次の各モードの固有振動数の変化状態を示している。塔柱質点数が3,または,4の場合は,各モードの固有振動数に大きな差異があり,6,7,8の場合では,値がほとんど一定化していることがわかる。すなわち,塔質点数は6以上でないと,精度が確保されないことがわかる。よって,質点数は6を採用する。これより,構造全体の自由度は $36+18=54$ 自由度

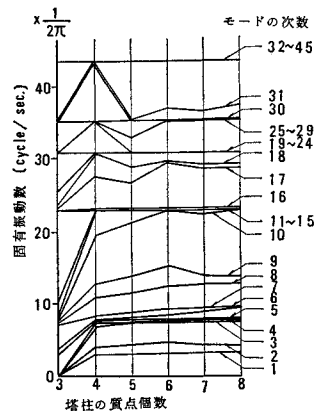
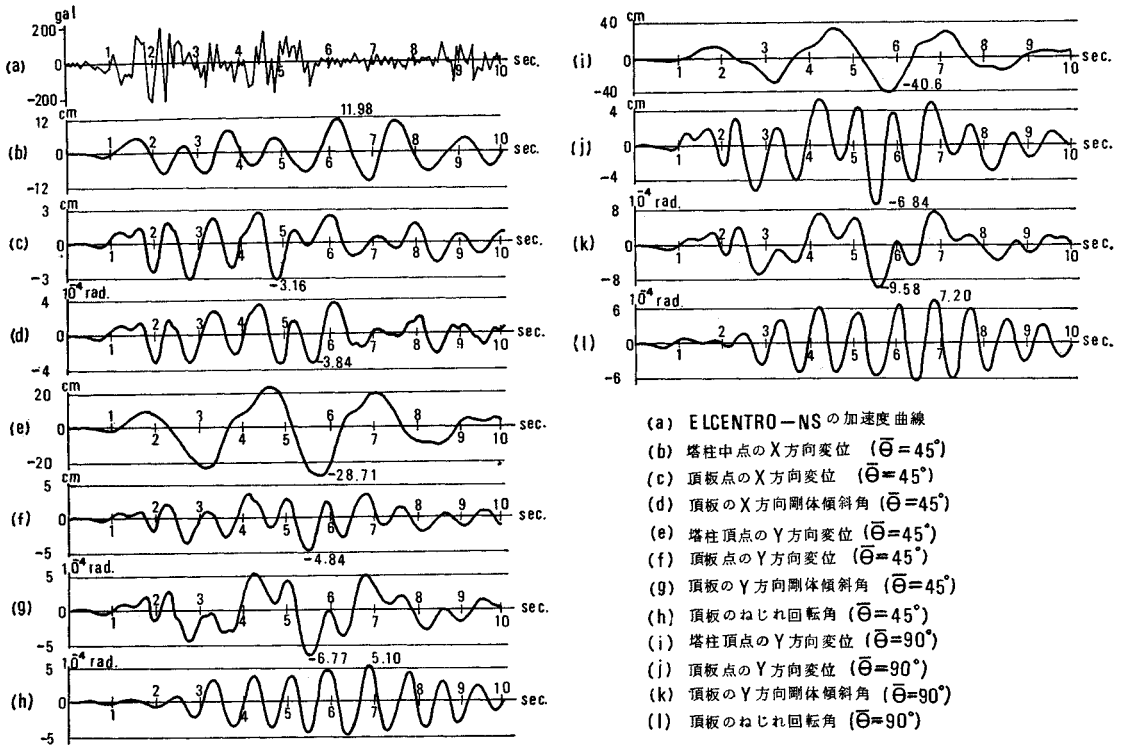


図-12 塔柱の質点個数による構造の固有振動数の変化

となる。また,計算時間間隔 Δt と精度の検討のため $\Delta t=1/100, 1/200, 1/400$ sec. の3ケースにつき,結果の比較を行なった。塔を含む連成系(54自由度),および2基礎のみの質点系(39自由度)では,上記 Δt の3



- (a) ELCENTRO-NS の加速度曲線
- (b) 塔柱中点のX方向変位 ($\bar{\Theta}=45^\circ$)
- (c) 頂板点のX方向変位 ($\bar{\Theta}=45^\circ$)
- (d) 頂板のX方向剛体傾斜角 ($\bar{\Theta}=45^\circ$)
- (e) 塔柱頂点のY方向変位 ($\bar{\Theta}=45^\circ$)
- (f) 頂板点のY方向変位 ($\bar{\Theta}=45^\circ$)
- (g) 頂板のY方向剛体傾斜角 ($\bar{\Theta}=45^\circ$)
- (h) 頂板のねじれ回転角 ($\bar{\Theta}=45^\circ$)
- (i) 塔柱頂点のY方向変位 ($\bar{\Theta}=90^\circ$)
- (j) 頂板点のY方向変位 ($\bar{\Theta}=90^\circ$)
- (k) 頂板のY方向剛体傾斜角 ($\bar{\Theta}=90^\circ$)
- (l) 頂板のねじれ回転角 ($\bar{\Theta}=90^\circ$)

図-13 ELCENTRO-NS 成分による応答変位図

ケースにつき収束したが、基礎のみの5質点系(93自由度)では、 $\Delta t=1/100$ の場合のみ発散した。また通常の差分法による場合は Δt にかかわらず収束値が得られなかった。収束した結果は変位において約4~5%程度の差異であったので、計算はすべて $\Delta t=1/200$ sec.とし10 sec.間にわたって行なっている。演算はBurrough's B 5500を用い、その所用時間は1ケース当り約60分である。計算結果のうち、代表的質点における変位、剛体傾斜角、ねじれ回転角についての応答曲線を図-13に、また、塔柱を含めた構造系の変形状態を図-14に示す。図-13(b)より塔柱の周期はx方向(ばね作用あり)で約1秒、(e)、(i)よりy方向で2秒、また、頂板点では(c)、(f)、(j)よりx,y方向ほぼ同一で1秒程度である。頂板の剛体傾斜角の周期は(d)、(g)、(k)より、x方向では、ほぼ頂板点水平変位の周期と同じである。y方向では塔柱、頂板両方の応答変位の周期、波形を合成した形となっている。(h)、(l)よりねじれ振動は、地震の入射方向にかかわらず一定した応答性状を示し、変位、傾斜角などの周期とよく一致している。最大ねじれ角は本例題では 7.20×10^{-4} radとなり、これによる柱頭部の変形量は1.4 cmとなる。これは水平弾性変形量のほぼ30%にあたる。また図-14よりケーブルの影響の大きいことがわかる。

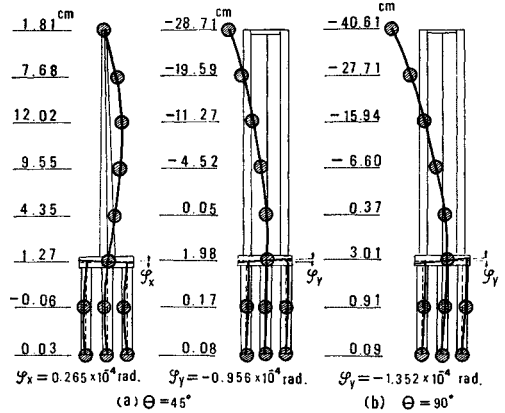


図-14 塔柱の最大変位図

8. あとがき

ここでは、主として、塔と多柱基礎の連成立体振動の理論式を導き、解析上の諸問題について検討を加えた。数値計算例の結果から、ねじり振動を含めた複雑な振動性状をある程度明らかにする見通しをつけることができた。実際の構造物についてこれらの解析法を適用するには、解析に用いる諸数値、たとえば、地震入力、地盤、および、上部構造によるばね係数、各種構造の減衰係数

$$(M_{10}) = \begin{pmatrix} m_{(10)} & & & \\ & m_{(10)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{(10)}' \end{pmatrix}$$

(I_{10}) = 塔柱の各質点位置における、回転慣性モーメントによる $n'-1$ 次の正方対角行列

$$(I_{10}) = \begin{pmatrix} I_{2(10)} & & & \\ & I_{3(10)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{n'(10)} \end{pmatrix}$$

I = 頂板の回転慣性モーメント

(5) C = 減衰係数, $C_k, C_k', C_k, C_k', \bar{C}_k, \bar{C}$ による正方対角行列

ただし、本文中式 (34) でも示したように次式のように仮定している。

$$C = \mu M$$

μ = 一定

(6) ρ = 影響係数, $\rho_{xi}^{xk}, \rho_{yi}^{yk}, \rho_{xi}^{xk}, \rho_{yi}^{yk}, \rho_{xi}^{\theta n} = \rho_{xi}^{xy} y_i$, $\rho_{yi}^{\theta n} = -\rho_{xi}^{xn} x_j, \rho_{\theta i}^{\theta k}, \rho_{\theta n}^{\theta n}$ による $3\{6(n-1) + n'\}$ 次の正方対称行列

$$\rho = \begin{pmatrix} (A) & (0) & & & \\ & & & & \\ & & \{0\} & \{B\} & \\ & (0) & (A)' & & \\ & & & & \\ [0] & & (\rho_\theta) & \{\rho_\theta\} & \\ [B] & & [\rho_\theta] & \rho_{\theta n}^{\theta n} & \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} 2\{9(n-1) + n'\} \text{こ} \\ n' \text{こ} \end{array} \right\}$$

上記行列中の各要素 $(0), [0], \{0\}, (A), (A)', [B], \{B\}, (\rho_\theta), [\rho_\theta], \{\rho_\theta\}, \rho_{\theta n}^{\theta n}$ を次に示す。

$(0), [0], \{0\} = 0$ の正方行列, 行ベクトル, および, 列ベクトル

$(A), (A)' =$ 水平せん断力影響係数 $\rho_{xi}^{xi}, \rho_{yi}^{xk}, \rho_{xi}^{xk}$, ρ_{yi}^{yk} による $\{9(n-1) + n'\}$ 次の正方対称行列

$$(A) = \begin{pmatrix} (\rho_{(1)}) & & & & \{\rho_{(1)}\} \\ (\rho_{(2)}) & & & & \{\rho_{(2)}\} \\ & (\rho_{(3)}) & & & \{\rho_{(3)}\} \\ & & (\rho_{(4)}) & & \{\rho_{(4)}\} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & (\rho_{(9)}) & \{\rho_{(9)}\} \\ & & & & & (\rho_x) & \{\rho_x\} \\ & & & & & & (\rho_x) & \{\rho_x\} \\ [\rho_{(1)}] [\rho_{(2)}] [\rho_{(3)}] [\rho_{(4)}] \cdots [\rho_{(9)}] & & & & & & [\rho_x] & \{\rho_x\} \end{pmatrix}$$

$\left(\sum_{j=1}^9 \rho_{xn}^{xn} + \rho_{x1}^{x1} \right)$

$(A)' = (A)$ 行列の \square 内の4つの要素の x を y で置換したもの。

ここに

$$(\rho_{(j)}) = \begin{pmatrix} \rho_{x1}^{x1} & \rho_{x2}^{x1} & \rho_{x3}^{x1} & \cdots & \rho_{x1}^{xk} & \cdots & \rho_{xn-1}^{x1} \\ \rho_{x1}^{x2} & \rho_{x2}^{x2} & \rho_{x3}^{x2} & \cdots & \vdots & \cdots & \rho_{xn-1}^{x2} \\ \rho_{x1}^{x3} & \rho_{x2}^{x3} & \rho_{x3}^{x3} & \cdots & \vdots & \cdots & \rho_{xn-1}^{x3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{x1}^{xi} & \rho_{x2}^{xi} & \rho_{x3}^{xi} & \cdots & \rho_{xk}^{xi} & \cdots & \rho_{xn-1}^{xi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{x1}^{xn-1} & \rho_{x2}^{xn-1} & \rho_{x3}^{xn-1} & \cdots & \rho_{xk}^{xn-1} & \cdots & \rho_{xn-1}^{xn-1} \end{pmatrix}$$

$(j=1, 2, 3, \dots, 9)$

$$(\rho_x) = \begin{pmatrix} \rho_{x2}^{x2} & \rho_{x3}^{x2} & \cdots & \rho_{xn'}^{x2} \\ \rho_{x3}^{x3} & \rho_{x4}^{x3} & \cdots & \rho_{xn'}^{x3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{xn'}^{xn'} & \rho_{xn'}^{xn'} & \cdots & \rho_{xn'}^{xn'} \end{pmatrix}$$

$$[\rho_{(j)}] = [\rho_{x1}^{xn}, \rho_{x2}^{xn}, \rho_{x3}^{xn}, \dots, \rho_{xn-1}^{xn}]$$

$(j=1, 2, 3, \dots, 9)$

$\{\rho_{(j)}\} = [\rho_{(j)}]$ の転置列ベクトル

$$[\rho_x] = [\rho_{x1}^{x1}, \rho_{x2}^{x1}, \dots, \rho_{xn'}^{x1}]$$

$\{\rho_x\} = [\rho_x]$ の転置列ベクトル

$[B] =$ ねじれ影響係数 $\rho_{xi}^{\theta n}, \rho_{yi}^{\theta n}$ による $2\{9(n-1) + n'\}$ 次のベクトル

$$[B] = [\rho_{y1}, \dots, \rho_{y9}, 0, \dots, 0]$$

$n' \text{こ}$

$$[\rho_x] = [\rho_{x1}, \dots, \rho_{x9}, 0, \dots, 0]$$

$n' \text{こ}$

ここに

$$[\rho_y], [\rho_x] = \text{ねじれ影響係数 } \rho_{xi}^{\theta n} = \rho_{xi}^{xn} y_j, \rho_{yi}^{\theta n}$$

$= -\rho_{xi}^{xn} x_j$ による $(n-1)$ 次の行ベクトル

