土木学会論文報告集
第 193 号・1971 年 9 月

たわみ性支圧板載荷によるコンクリート支圧強度の理論的研究

A THEORETICAL STUDY ON THE BEARING CAPACITY OF CONCRETE LOADED THROUGH FLEXIBLE PLATES

藤　井　　学*
By Manabu Fujii

1. まえがき

支圧板の全面に載荷したときのコンクリートの支圧強度に関しては，従来，多くの研究成果が報告されている[1]。しかし，支圧板にナット等によって局部載荷する場合，支圧板の剛性によって支圧強度は大きく影響されるが，この点に関しては，理論的にはもちろんのこと，実験的研究も非常に少ない[2)~5)]。

本文では，既報の剛体支圧板の場合に用いた解法[6]を支圧板が剛体でない場合に拡張し，より一般性のある支圧強度理論式を誘導した。本式と国内外の既存の実験結果と比較検討し，その妥当性を確かめた。また，この理論式に基づき，日本建築学会ＰＣ規準[7]で提案されている支圧板の有効幅に関して若干の考察を加え，有効幅のもつ種々の特性を明らかにした。

理論解析に用いたモデルおよび載荷状態としては，コンクリートシリンダーに同心円状の局部載荷を行ない，コンクリートの破壊条件として最大せん断応力説を用いた。支圧板が剛体でない場合の理論解における基本仮定として，コンクリート破壊と同時に支圧板も降伏するという仮定を用いた。

2. 支圧板が剛体の場合の理論解概要

Fig. 1 に示すように，解析モデルとして，コンクリートシリンダーを，剛体支圧板の大きさ（半径 r_1）と等しい円柱と，その外側をとり巻くコンクリート円筒とに分割し，円柱の最大軸圧，すなわち支圧強度 σ_u を，側圧 σ_h が作用する三軸状態と仮定して求めた。

コンクリートの三軸試験結果によると，Mohr の破壊包絡線は Cycloid 曲線に類似した曲線となるが，ここでは簡単のため，**Fig. 2** に示すように二つの直線ⅠおよびⅡで近似できるものと仮定する。引張強度が関係する場合，すなわち，側圧 σ_h を求める場合は直線Ⅰを，また支圧強度を求める場合は直線Ⅱを用いる。直線Ⅰはコンクリートの圧縮強度 σ_c と引張強度 σ_{t0} を直径とする２つの円に接する直線であり，直線Ⅱは，その勾配が ϕ_2 で σ_c を直径とする円に接する直線である。ϕ_2 の値は，支圧板直下にできる円すい形のコーンの傾斜角 θ_2（**Fig. 3**）より決定される。**Fig. 3** は θ_2 の実験結果の一例で，普通コンクリート（N）および軽量コンクリート（L）に対し，平均値は，それぞれ $\tan\theta_2=2.96$ および 2.82 である。

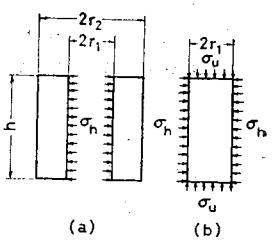

Fig. 1 Simplified model used in the analysis

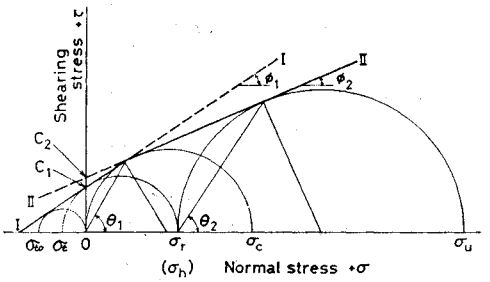

Fig. 2 Mohr's rupture diagram assumed in the analysis

Fig. 1 (a) に示す円筒（内径 $2r_1$，外径 $2r_2$）に内圧が作用する場合を考えると，半径方向の力のつりあい方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_t}{r}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，σ_r および σ_t は極座標の r 位置における半径

* 正会員　工修　神戸大学助教授　工学部土木工学科

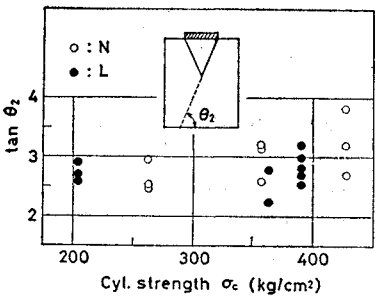

Fig. 3 Observed angles of inclination of the sliding surface

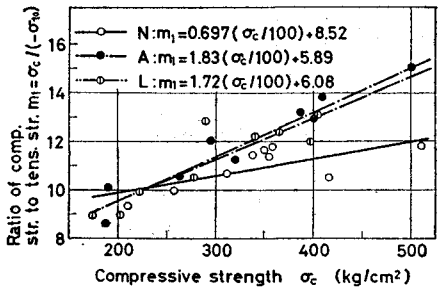

Fig. 4 Test results on the relationship between compressive strength and tensile strength of concrete (N : Normal concrete, A, L : Lightweight concrete)

方向および円周方向応力である。以後，圧縮を正，引張を負とする。

この場合の破壊は主としてコンクリートの引張強度付近で生ずるため，**Fig. 2** の直線Ⅰを用いると，この場合の破壊条件式は次式で与えられる。

$$m_1\sigma_t-\sigma_r=m_1\sigma_{t0} \cdots\cdots (2)$$

ここに，$m_1=\sigma_c/(-\sigma_{t0})$

式（1）と（2）より，σ_t を消去すると式（3）となり，その解は式（4）で与えられる。

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{m_1-1}{m_1}\sigma_r-\sigma_{t0}=0 \cdots\cdots (3)$$

$$\sigma_r=\frac{m_1}{m_1-1}\left(Cr^{m_1-1/m_1}+\sigma_{t0}\right) \cdots\cdots (4)$$

ここに，Cは積分定数で，境界条件 $r=r_2$ のとき $\sigma_r=0$ より定まり，$r=r_1$ のとき，$\sigma_r=\sigma_h$ であるから，σ_h は次式となる。

$$\sigma_h=-\frac{m_1\sigma_{t0}}{m_1-1}\left\{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{m_1-1/m_1}-1\right\} \cdots\cdots (5)$$

側圧 σ_h を受ける円柱（**Fig. 1 (b)**）の抵抗可能の最大軸圧 σ_u は，**Fig. 2** の幾何学的関係より次式で与えられる。

$$\sigma_u=\sigma_h\tan^2\theta_2+2C_2\tan\theta_2 \cdots\cdots (6)$$

$\sigma_h=0$，すなわち，単軸応力状態のときは，$\sigma_u=\sigma_c=2C_2\tan\theta_2$ となり，式（5）を式（6）に用いると，

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_c}=\frac{m_2}{m_1-1}\left\{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{m_1-1/m_1}-1\right\}+1 \cdots\cdots (7)$$

ここに，

$$m_2=\tan^2\theta_2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_2}{2}\right) \cdots\cdots (8)$$

いま，$\phi_1=\phi_2$ とすると，$m_1=m_2$ となり，また，通常のコンクリートでは $m_1=\sigma_c/(-\sigma_{t0})=8\sim14$ であるので $(m_1-1)/m_1\fallingdotseq1$ となり，これらを式（7）に用いると

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_c}=\frac{r_2}{r_1}=\sqrt{\frac{A_c}{A_1}} \cdots\cdots (9)$$

ここに，$A_c=\pi r_2^2$，$A_1=\pi r_1^2$

式（9）は建築学会ＰＣ規準[7]で採用されている許容支圧応力度式と式の形体は全く一致している。

以上求めた式（2）で表わされる支圧強度式は，次の性質を有している。(1) m_1 が大きくなれば σ_u/σ_c は減少する。**Fig. 4** に示す著者が以前行なった m_1 と σ_c との関係の実験結果を参照すると，高強度コンクリートでは人工軽量コンクリートの支圧強度は普通コンクリートよりも小さくなることを示している。(2) 式（7）は，たて軸に σ_u/σ_c，よこ軸に $A_c/A_1(=r_2/r_1)$ をとり，両対数グラフ上では下に凸となる曲線を与え，実験値の曲線と同一傾向を示す。なお，本式と他の研究者による支圧強度式および実験値との比較等については文献6）に記述した。

3. 支圧板が剛体でない場合の理論解析

平板とナットとによる定着具は，すべてこの場合に属するが，この関係の研究では，実験結果も非常に少なく，支圧強度式としては，Hawkins[5]の簡易式が報告されているに止まる。

ここでは，**2.**でのべた解法を支圧板が剛体でない場合に拡張した理論解についてのべる。

（1） 支圧板とコンクリートとの間の接触圧分布の仮定

コンクリート供試体破壊時のコンクリートと支圧板との間の接触圧分布を **Fig. 5** のように仮定する。すなわち，座金（半径 r_0，座金がない場合はナット）と等しい面積の部分では等分布とし，そのほかの部分では直線的に変化するものと仮定する。第一の仮定は，コンクリートの塑性を考慮すれば充分容認される。第二の直線変化の仮定は，計算の簡単化のためのもので，実際の分布は放物線的と考えられる。

Fig. 5 (a) は支圧板の厚さ (t) が薄い場合で，支圧板の全面が有効に働かず，一部が浮き上った状態になると考えられる。コンクリートと支圧板とが接している限

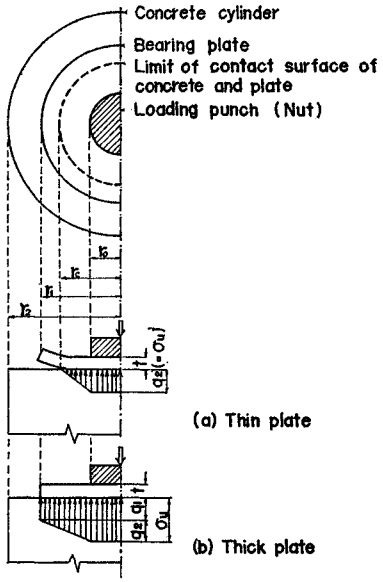

Fig. 5 Assumed distribution of contact pressure

界の半径（r_c）は，支圧板の t が大きくなるにつれて大きくなり，$r_c=r_1$ となると，t の増大につれ，(**b**) 図のような接触圧分布になるものと想定される。t がある程度大きくなると，コンクリート供試体の破壊耐力は剛体支圧板（$t=\infty$）の場合と変わらなくなるであろう。そのときの接触圧は支圧板全面で等分布になっていると仮定されよう。

（2） 支圧板降伏時の荷重条件

「コンクリート供試体の破壊と同時に支圧板の応力も降伏点に達している」のが合理的と考えられるので，この仮定で理論解を求める。そこでまず，**Fig. 5** に示した荷重分布を受けた場合の支圧板の応力を求める。

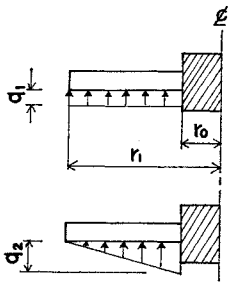

Fig. 6

座金と支圧板とは剛結されており，座金部分は剛体であると仮定すると，円板中央部が固定された円板の曲げの問題で，これは弾性理論より容易に解きうる。**Fig. 5** に示す荷重分布は，等分布と三角形分布とを重ね合わせることによって得られるため，**Fig. 6** に示すように2つに分けて考える。いずれの場合も，座金の外周位置下縁での曲げ応力が最大となり，文献8）に示されているのと同様の方法によって求めると次のようになる。

（a）の状態：

$$\sigma_{max_1}=k_1\frac{q_1 r_1^2}{t^2} \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに，

$$k_1=\frac{3}{4\xi_1^2}\left[\frac{1}{(1+\mu)+(1-\mu)\frac{1}{\xi_1^2}}\{(1-\mu)\xi_1^2 +4(1+\mu)\xi_1^2\log_e\xi_1+(1+\mu)\}+1-2\xi_1^2\right] \quad \cdots\cdots(11)$$

（b）の状態：

$$\sigma_{max_2}=k_2\frac{q_2 r_1^2}{t^2} \quad \cdots\cdots(12)$$

ここに，

$$k_2=\frac{1}{4\xi_1^2(\xi_1-1)}\left[\left(3\xi_1-2\xi_1^3-\frac{8}{5}\right) -\frac{1}{(1+\mu)+(1-\mu)\frac{1}{\xi_1^2}}\left\{\left(\frac{11}{15}+\frac{29}{15}\mu\right)\xi_1^3 -4\xi_1^3(1+\mu)\log_e\xi_1-\left(3\xi_1-\frac{16}{15}\right)(1+\mu)\right\}\right] \quad \cdots\cdots(13)$$

$\xi_1=r_1/r_0$，μ＝支圧板のポアソン比

k_1 および k_2 の値は，鋼製支圧板を考え，$\mu=0.3$ とすると，**Table 1** のようになる。これらをプロットすると，**Fig. 7** のようになる。実際によく用いられる ξ_1 の値は 2.5～2.8[9] の範囲であるため，以後の解析に便利なように次の一次式で近似して用いることにする。

Table 1 Values of k_1 and k_2

ξ_1	1.25	1.5	2	3	4	5
k_1	0.135	0.410	1.04	2.15	2.99	3.69
k_2	0.055	0.131	0.324	0.654	0.926	1.10

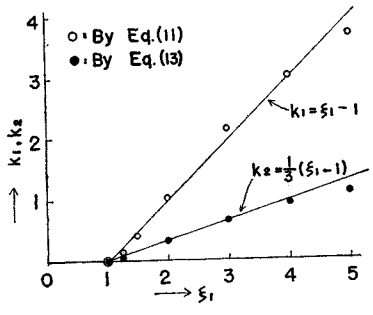

Fig. 7 Values of k_1 and k_2

$$k_1=\xi_1-1$$
$$k_2=\frac{1}{3}(\xi_1-1)=\frac{1}{3}k_1 \quad \cdots\cdots(14)$$

以上より，座金円周部での支圧板曲げ応力が降伏点に達するときの条件は，支圧板の降伏点応力を σ_{sy} とすると，次のように表わされる。

Fig. 5 の (**a**) の状態に対して，

$$q_2=\frac{3\sigma_{sy}}{(\xi_c-1)}\left(\frac{t}{r_c}\right)^2 \quad \cdots\cdots(15)$$

Fig. 5 の (**b**) の状態に対して，

$$q_1+\frac{1}{3}q_2=\frac{\sigma_{sy}}{(\xi_1-1)}\left(\frac{t}{r_1}\right)^2 \quad \cdots\cdots(16)$$

ここに，$\xi_c=r_c/r_0$ (σ_{sy} の値は絶対値を，数値計算では採用する)。

(3) コンクリート供試体破壊時の荷重条件

Fig. 5 に示すような荷重が支圧板に作用するとき，接触面でのコンクリートには反力として方向逆の荷重が作用する。いま，**Fig. 5** の (**a**) および (**b**) のうち，より一般性のある (**b**) の荷重状態についてまず考える。

Fig. 5 (**b**) で，等変部分 (r_1-r_0) の荷重（台形分布）がない場合，供試体破壊時の $r=r_0$ 面での側圧 σ_{r_0} は，式 (5) を参照すれば，次式で表わされる。

$$\sigma_{r_0}=-\frac{m_1\sigma_{t0}}{m_1-1}\left\{\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{m_1-1/m_1}-1\right\}$$

しかし，等変部分の荷重も作用する場合，σ_{r_0} の値は異なってくるものと考えられるが，その影響を次に求めよう。

Fig. 8 のように，半径 r_0 のシリンダーとこれをとり巻く多くの円筒とに分割し，分割面には相互に摩擦力は作用しないものと仮定する。$r_0\leqq r\leqq r_1$ の部分のコンクリートおよび荷重を n 等分する。

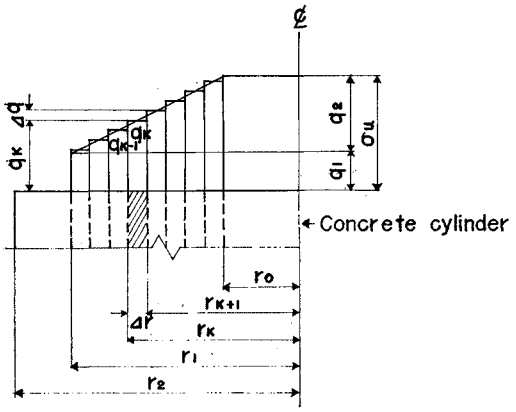

Fig. 8 Analytical model for flexible plates

いま，**Fig. 8** において，$r=r_k$ に着目し，この面での側圧を σ_{r_k} とする。分割荷重のうち，$r_{k-1}\leqq r\leqq r_k$ の部分に作用する荷重を q_{k-1} と定義し，いま，$q_{k-1}<\sigma_{r_k}$ とすると，q_{k-1} は中間主応力となり，q_{k-1} 以下の荷重（$r_k\leqq r\leqq r_1$ の範囲の荷重）は，σ_{r_k} に影響しないものと仮定することができる。すなわち，

$$\sigma_{r_k}=-\frac{m_1\sigma_{t0}}{m_1-1}\left\{\left(\frac{r_2}{r_k}\right)^{m_1-1/m_1}-1\right\} \quad \cdots\cdots(17)$$

$q_k=q_{k-1}+\Delta q$ (**Fig. 8** 参照) が $\sigma_{r_{k+1}}$ より大きい場合は，$\sigma_{r_{k+1}}$ が中間主応力となり，$\sigma_{r_{k+1}}$ は q_k の影響を受けるものと考えられる。したがって，この場合の破壊条件式としては，式 (2) に $\sigma_r=q_k$ を代入して得られる式 (18) を用いる必要がある。

$$m_1\sigma_t=m_1\sigma_{t0}+q_k \quad \cdots\cdots(18)$$

式 (18) を式 (1) に用いると，その解は次式で与えられる。

$$\sigma_r=\frac{m_1\sigma_{t0}+q_k}{m_1}-Cr^{-1} \quad \cdots\cdots(19)$$

式 (19) の積分定数 C は，$(\sigma_r)_{r=r_k}=\sigma_{r_k}$ (式 (17)) より定まり，式 (19) は結局次式のようになる。

$$\sigma_r=\frac{m_1\sigma_{t0}+q_k}{m_1}-\left\{\frac{m_1\sigma_{t0}+q_k}{m_1}-\sigma_{r_k}\right\}r_k\cdot r^{-1} \quad \cdots\cdots(20)$$

したがって，$r=r_{k+1}$ における側圧 $\sigma_{r_{k+1}}$ は次式で与えられる。

$$\sigma_{r_{k+1}}=\frac{m_1\sigma_{t0}+q_k}{m_1}\left(1-\frac{r_k}{r_{k+1}}\right)+\sigma_{r_k}\frac{r_k}{r_{k+1}} \quad \cdots\cdots(21)$$

同様にして，$r=r_{k+2}$，$r=r_{k+3}$，……における側圧は，

$$\sigma_{r_{k+2}}=\frac{m_1\sigma_{t0}+q_k+\Delta q}{m_1}\left(1-\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}\right)+\sigma_{r_{k+1}}\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}$$

$$\sigma_{r_{k+3}}=\frac{m_1\sigma_{t0}+q_k+2\Delta q}{m_1}\left(1-\frac{r_{k+2}}{r_{k+3}}\right)+\sigma_{r_{k+2}}\frac{r_{k+2}}{r_{k+3}}$$

……

……

これら漸化式を用いると，$r=r_0$ における側圧 σ_{r_0} は次式のようになる。

$$\sigma_{r_0}=-\frac{m_1\sigma_{t0}}{m_1-1}\left\{\left(\frac{r_2}{r_k}\right)^{m_1-1/m_1}-1\right\}\frac{r_k}{r_0}-\frac{r_k-r_0}{r_0}\left\{\sigma_{t0}+\frac{1}{m_1}\cdot\frac{(q_k+q_1+q_2)}{2}\right\} \quad \cdots\cdots(22)$$

式 (22) で与えられる側圧 σ_{r_0} が半径 r_0 のシリンダーに作用する場合の支圧強度は式 (7) を参照すれば次のようになる。

$$\frac{q_1+q_2}{\sigma_c}=\frac{m_2}{m_1-1}\left\{\left(\frac{r_2}{r_k}\right)^{m_1-1/m_1}-1\right\}\frac{r_k}{r_0}-\frac{r_k-r_0}{r_0}\left\{-\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{(q_k+q_1+q_2)}{2\sigma_c}\right\}+1 \quad \cdots\cdots(23)$$

いずれが中間主応力になるかという条件，すなわち，q_{k-1} と σ_{r_k} との大小関係を定める条件式として，近似的に $q_k=\sigma_{r_k}$ とおけば，式 (17) より

$$q_k=-\frac{m_1\sigma_{t0}}{m_1-1}\left\{\left(\frac{r_2}{r_k}\right)^{m_1-1/m_1}-1\right\} \quad \cdots\cdots(24)$$

また，$r_0\leqq r\leqq r_1$ の範囲で q_k の直線分布の仮定より，

$$q_k=q_1+q_2\frac{r_1-r_k}{r_1-r_0} \quad \cdots\cdots(25)$$

以上，コンクリート供試体破壊時の荷重条件式として，式 (23) (24) および (25) を得た。この3式中に含まれる未知量は，r_k, q_k, q_1 および q_2 の4つである。したがって，支圧板降伏時の荷重条件式である式 (16) と上記3式とを連立に解くことにより，4つの未知量が決定される。これら未知量が決まれば，最終的に決定すべきコンクリート供試体の破壊荷重 P_u は次式で求めることができる。

$$P_u=q_1\pi r_1^2+q_2\cdot\frac{\pi}{3}(r_1^2+r_1r_0+r_0^2)\cdots\cdots\cdots(26)$$

以上は **Fig. 5** (**b**) の状態の解であるが，**Fig. 5** (**a**) の状態に対しては，以上の4つの条件式において $r_1=r_c$ とおき，$q_1=0$ とおけばよい。すなわち，未知量 r_c が1つ増したが，条件式も1つ ($q_1=0$) 増したので全未知量は理論上決定される。

また，支圧板が剛体の場合は，$r_k=r_1=r_0$ であるから，これを式 (23) に用いると，**2.** で求めた剛体支圧板の場合の支圧強度式 (7) と全く一致する。

以上より，前述の解は，支圧板の厚さ t が非常に小さい場合から剛体支圧板 ($t=\infty$) の場合までを含めた支圧強度を求める一般式であることがわかった。

4. 支圧強度の簡略式とその特性

以上，支圧強度理論式を誘導したが，破壊荷重を求めるのに若干の労力を要すし，また，これら関係式の特性は一見しただけでは十分明瞭でないため，これら関係式の簡略化を行ない，破壊荷重におよぼす各種要因の影響について検討を行なう。

(1) 第1近似式

Fig. 5 (**b**) の状態に対する支圧強度関係式 (16), (23), (24) および (25) に対し，**2.** でのべたと同様の近似化，すなわち，$m_1=m_2$, $(m_1-1)/m_1=1$ と仮定すると，

$$q_1+\frac{1}{3}q_2=\frac{\sigma_{sy}}{(\xi_1-1)}\cdot\frac{\phi_t^2}{\xi_1^2}\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$\frac{q_1+q_2}{\sigma_c}=\xi_2-(\xi_k-1)\cdot\frac{q_k+q_1+q_2}{2\sigma_c}\cdots\cdots\cdots(23)'$$

$$q_k=-\sigma_{t0}\left(\frac{\xi_2}{\xi_k}-1\right)\cdots\cdots\cdots(24)'$$

$$q_k=q_1+q_2\frac{\xi_1-\xi_k}{\xi_1-1}\cdots\cdots\cdots(25)$$

ここに，$\xi_1=r_1/r_0$, $\xi_2=r_2/r_0$, $\xi_k=r_k/r_0$, $\phi_t=t/r_0$ である。これら式はかなり簡単化されたが，各未知量を求めるにはいまだ面倒である。さらに近似化を行なうと次のようである。

(2) 第2近似式

$q_1\geqq\sigma_{r_1}$，すなわち，軸方向応力がつねに最大主応力であると仮定する。$q_1<\sigma_{r_1}$ の場合も実際には存在するが，その場合，上の仮定は安全側となる。なぜなら，$q_1<\sigma_{r_1}$ の場合は q_1 が中間主応力となるが，側圧 σ_{r_0} への q_1 の影響を考慮しているためである。

上記仮定 ($q_1\geqq\sigma_{r_1}$) より，$q_k=q_1$, $r_k=r_1$ となるため，第1近似の関係式の4式は，式 (16) および (23)′ の2つの式に減少し，これら2式より q_1 および q_2 を求めると，

$$q_1=\frac{\sigma_c}{\xi_1+3}\left\{\frac{3(\xi_1+1)\delta\phi_t^2}{(\xi_1-1)\xi_1^2}-2\xi_2\right\}\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$q_2=\frac{6\sigma_c}{\xi_1+3}\left\{-\frac{\xi_1\delta\phi_t^2}{(\xi_1-1)\xi_1^2}+\xi_2\right\}\cdots\cdots\cdots(28)$$

ここに，$\delta=\sigma_{sy}/\sigma_c$ (σ_{sy} の値は絶対値とする)。

式 (27) および (28) を式 (26) に代入すると，

$$P_u=\frac{\pi r_0^2\sigma_c}{\xi_1^2(\xi_1+3)}\{\xi_1(\xi_1+2)\delta\phi_t^2+2\xi_1^2(\xi_1+1)\xi_2\}\cdots\cdots\cdots(29)$$

Fig. 5 (**b**) の荷重状態であるためには $q_1\geqq0$, $q_2\geqq0$ でなければならない。すなわち，式 (27) および (28) より，

$$\frac{2\xi_1^2(\xi_1-1)\xi_2}{3(\xi_1+1)\delta}\leqq\phi_t^2\leqq\frac{\xi_1(\xi_1-1)\xi_2}{\delta}\cdots\cdots\cdots(30)$$

式 (30) の上限値，すなわち，$\phi_t^2=\xi_1(\xi_1-1)\xi_2/\delta$ を式 (29) に用いると，

$$P_u=\pi r_0^2\sigma_c\cdot\xi_1\xi_2\cdots\cdots\cdots(31)$$

となり，これを変形すると，$\sigma_u=\dfrac{P_u}{A_1}=\sigma_c\sqrt{\dfrac{A_c}{A_1}}$ となり，これは，剛体支圧板の場合の簡略式である式 (9) と全く一致する。実際の計算において，式 (30) での ϕ_t の上限値以上の値が算出される場合（この場合は $q_2<0$ となり，**Fig. 5** (**b**) の荷重分布は中央部が凹となる分布形となる）は，P_u の値として式 (29) ではなく式 (31) より求めた値を用いなければならない。

式 (30) での ϕ_t の下限値以下，すなわち，支圧板厚さ t が小さい場合は，**Fig. (5)** の (a) の状態となり，支圧板の一部がコンクリート面と接触しなくなり，この場合の第1近似式も同様にして求めることができるが，第2近似式のみを示せば次のようである。

式 (16) に相当する式は式 (15) であり，$\phi_t=t/r_0$ で示せば，

$$q_2=\frac{\sigma_{sy}\phi_t^2}{\xi_c^2(\xi_c-1)}\cdots\cdots\cdots(15)'$$

式 (23)′ において，$q_k=0$ とおくと，$\xi_k=\xi_c$ となり，また，もちろん $q_1=0$ であるから，式 (23)′ に相当する式は，

$$q_2=\frac{2\xi_2\sigma_c}{\xi_c+1} \quad \cdots\cdots(32)$$

式 (15)′ および (32) において未知量は q_2 および ξ_c だけであるから，完全に解けるわけで，ξ_c を決定するための式は両式を等置して，

$$\frac{\xi_c^2(\xi_c-1)}{\xi_c+1}=\frac{3\delta\phi_t^2}{2\xi_2} \quad \cdots\cdots(33)$$

また，破壊荷重は次式で求めることができる。

$$P_u=(\pi r_0^2\sigma_c)\frac{2\xi_2(\xi_c^2+\xi_c+1)}{3(\xi_c+1)} \quad \cdots\cdots(34)$$

(3) 第2近似式の総括とその特性

以上の理論解においては，シース孔の支圧強度への影響を無視（孔なし）したが，これを考慮する場合は，シース孔の部分では荷重を受けもたないので，以上求めた破壊荷重からこれを差し引けばよいと考えられる。すなわち，**Fig. 5** (a) の場合は，式 (32) で与えられる q_2 にシース孔断面積 πr_s^2（シース孔の内径を $2r_s$ とする）を乗じたもの ($q_2\pi r_s^2$) を式 (34) の P_u から差し引く。また，**Fig. 5** (b) の場合は，$(q_1+q_2)\pi r_s^2$ を式 (29) の P_u から差し引く。以上は，シース孔径が座金またはナット径より小さい場合であり，その逆の場合には適用されない。しかし，支圧板が剛体と考えられる場合は適用される。

$\xi_s=r_s/r_0$ と表わし，以上求めた第2次簡略解をまとめて示せば，次のようである。

a) **Fig. 5** (a) の場合 $\left[0\leqq\phi_t^2\leqq\frac{2\xi_1^2(\xi_1-1)\xi_2}{3(\xi_1+1)\delta}\right]$

$$\frac{\xi_c^2(\xi_c-1)}{(\xi_c+1)}=\frac{3\delta\phi_t^2}{2\xi_2}\left(\begin{matrix}\xi_c\text{を決定する}\\\text{ための条件式}\end{matrix}\right)\cdots(33)$$

$$\frac{P_u}{\pi r_0^2\sigma_c}=\frac{2\xi_2}{3(\xi_c+1)}\{(\xi_c^2+\xi_c+1)-3\xi_s^2\} \quad \cdots\cdots(35)$$

b) **Fig. 5** (b) の場合

$$\left[\frac{2\xi_1^2(\xi_1-1)\xi_2}{3(\xi_1+1)\delta}\leqq\phi_t^2\leqq\frac{\xi_1(\xi_1-1)\xi_2}{\delta}\right]$$

$$\frac{P_u}{\pi r_0^2\sigma_c}=\frac{1}{\xi_1+3}\left[\frac{(\xi_1+2)\delta\phi_t^2}{\xi_1}+2(\xi_1+1)\xi_2-\xi_s^2\left(4\xi_2-\frac{3\delta\phi_t^2}{\xi_1^2}\right)\right] \quad \cdots\cdots(36)$$

c) 剛体支圧板の場合 $\left[\phi_t^2>\frac{\xi_1(\xi_1-1)\xi_2}{\delta}\right]$

$$\frac{P_u}{\pi r_0^2\sigma_c}=\xi_1\xi_2\left(1-\frac{\xi_s^2}{\xi_1^2}\right) \quad \cdots\cdots(37)$$

ここに，$\xi_1=r_1/r_0$, $\xi_2=r_2/r_0$, $\xi_c=r_c/r_0$, $\xi_s=r_s/r_0$, $\delta=\sigma_{sy}/\sigma_c$, $\phi_t=t/r_0$.

シース孔の影響を考慮しない場合は，上式において $\xi_s=0$ とおけばよく，その場合は，式 (35), (36), (37) はそれぞれ，式 (34), (29), (31) に一致する。

以上の簡略式をみると，破壊荷重におよぼす各種要因の影響がかなり明確にわかる。すなわち，r_0, r_1, r_2, σ_c, σ_{sy}, t が大となれば P_u も大となり，r_s が大のとき，P_u は小となる。これらの傾向は，実験的事実[3)~5)]と一致する。

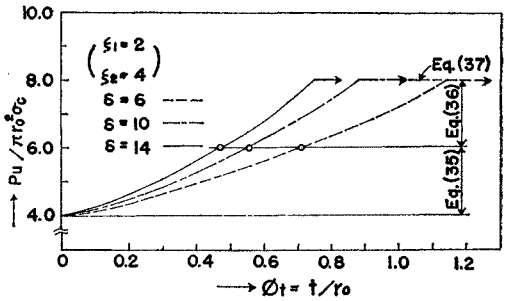

Fig. 9 Effect of thickness of plate

いま，支圧板厚さ t の影響の一例を図示すると，**Fig. 9** のようである。たて軸に $P_u/\pi r_0^2\sigma_c$ を，よこ軸に $\phi_t=t/r_0$ をとり，$\xi_s=0$, $\xi_1=2$, $\xi_2=4$ が共通で，$\delta=\sigma_{sy}/\sigma_c$ を 6, 10, 14 の場合について示したものである。いま，t, δ 以外の要因を固定すれば，**Fig. 9** より次のことがいえよう。t の増大に対し，P_u は放物線的に増加する。また，δ の大きいほど，P_u の増加率は大きく，また，剛体支圧板と同等の P_u の値を与えるときの t は小さくなる。また，支圧板全面がコンクリート面に接触するときの支圧板厚さも，δ が大きいほど小さくなる（図中○印で示す）。

5. 実験値と理論値との比較

以上の理論簡略解の精度を客観的に調べるため，他の研究者による実験結果との比較検討を行なう。支圧板厚さの影響を調べた実験結果は非常に少なく，また，コンクリート断面形状も正方形がほとんどで，ここで用いた解析モデルは円形であるので，数値計算では正方形を面積の等しい円形に換算して用いた。

Table 2 は，国分・青柳の実験結果[3)]と比較したものである。コンクリート供試体は，24×24×60 cm で中央にシース孔が設けられている。シース孔の大きさは明らかでないが，φ22 mm 鋼棒用シース内径 $2r_s=2.8$ cm[7)]，ナット径として，対辺距離 4.1 cm[7)] を計算には用いた。また $\sigma_{sy}=28$ kg/mm² とした。なお，**Table 2** の A シリーズは円形支圧板（φ14 cm），B シリーズは正方形支圧板が用いられている。また，**Table 2** に示す破壊荷重実験値 P_{test} は文献[3)]の3図から読みとったものである。

Table 2 Comparison of test results by Kokubu and Aoyagi[3] and present solutions

Specimen	Concrete strength (kg/cm^2)	Size of Specimen (cm)	Size of plate (cm)	ξ_1 (r_1/r_0)	ξ_c (r_c/r_0)	Ultimate load (t) test (P_{test})	Ultimate load (t) theory (P_{theo})	$\frac{P_{theo}}{P_{test}}$	Applied equation
A-1	281	24×24×60	π 7.0²×2.0	3.41	2.33	39.0	36.0	0.92	(35)
2			π 7.0²×2.7	3.41	2.86	49.0	45.0	0.92	(35)
3			π 7.0²×3.7	3.41	$>\xi_1$	58.0	58.6	1.01	(36)
B-1	256		12.7²×1.0	3.49	1.60	27.5	21.5	0.78	(35)
2			12.7²×2.0	3.49	2.40	36.0	33.9	0.94	(35)
3			12.8²×2.7	3.51	2.95	45.0	42.2	0.94	(35)

Following values were taken in the numerical calculation : (1) external diameter of a nut $2r_0=4.1$ cm
(2) internal diameter of a sheath $2r_s=2.8$ cm
(3) yield stress for a bearing plate $\sigma_{sy}=28\ kg/mm^2$

Table 3 Hawkins' test[5]

Specimen	Concrete strength (lb/in^2)	Length of side of sequare punch (in)	Length of side of squre plate (in)	Thickness of plate (in)	Yield stress of steel ($lb/in^2\times10^3$)	Size of specimen	Ultimate load ($lb\times10^3$) test (P_{test})	Ultimate load ($lb\times10^3$) theory (P_{theo})	$\frac{P_{theo}}{P_{test}}$	Applied equation
A-1	2.750	2.13	4.00	0.06	49	6 in.cube	40.0	36.1	0.90	(35)
2				0.12	40		41.6	38.0	0.91	(35)
3				0.25	38		57.9	43.9	0.76	(35)
4				0.35	41		62.1	49.8	0.80	(35)
B-1	4.490	2.25	4.00	0.03	50	6 in.cube	60.1	60.8	1.01	(35)
2				0.06	49		64.2	61.6	0.96	(35)
3				0.12	40		68.1	63.7	0.94	(35)
4				0.25	38		87.3	70.5	0.81	(35)
5				0.35	41		94.7	77.9	0.82	(35)
6				1.00	40		127.8	107.8	0.84	(37)
C-1	6.020	2.25	4.00	0.03	50	6 in.cube	68.0	81.2	1.19	(35)
2				0.06	49		68.8	82.2	1.19	(35)
3				0.12	40		81.5	84.3	1.03	(35)
4				0.25	38		103.3	91.8	0.89	(35)
5				0.35	41		119.0	100.1	0.84	(35)
6				1.00	40		153.5	144.5	0.94	(37)
D-1	4.190	2.00	3.90	0.350	46	6 in.cube	77.7	68.0	0.88	(35)
2		2.28		0.350	46		79.4	75.8	0.95	(35)
3		2.00		0.487	40		86.1	75.4	0.88	(35)
4		2.28		0.487	40		95.7	83.6	0.87	(35)
5		2.28		0.618	38		96.0	92.7	0.97	(36)
E-1	4.190	2.28	5.90	0.498	75	10 in.cube	155.6	144.2	0.93	(35)
2				0.727	38		158.0	146.7	0.92	(35)
F-1	3.020	2.28	6.00	0.250	90	8×8×12 in.	79.0	73.4	0.93	(35)
2			5.90	0.350	40		84.4	71.7	0.85	(35)
3			5.90	0.498	75		105.2	94.9	0.90	(35)
4			5.90	0.618	42		107.4	91.4	0.85	(35)
5			5.90	0.727	38		119.1	96.9	0.81	(35)
6			5.90	rigid			158.0	142.6	0.90	(37)
G-1	4.190	2.28	6.00	0.250	90	8×8×12 in.	97.0	96.6	1.00	(35)
2			5.90	0.350	40		99.0	94.7	0.96	(35)
3			5.90	0.618	42		120.4	117.4	0.98	(35)
4			5.90	rigid			198.0	197.9	1.00	(37)

Table 4 Summary of comparisons

Name of researcher	Number of tests (N)	Mean value of P_{theo}/P_{test} (m)	Standard deviation (σ)
Kokubu and Aoyagi*	6	0.92	0.067
Hawkins	33	0.92	0.094
Shelson*	9	1.04	0.029
Total	48	0.94	0.094

* The yield stresses for the bearing plates were taken as $28\ kg/mm^2$ in the calculation.

Table 2 の最右欄に示すように，適用式は，A-3(t=37 mm) 供試体以外はすべて式 (35) である。すなわち支圧板の一部が浮き上がった状態 [**Fig. 5** (a)] であることが理論上からいえる。接触限界半径の程度は，**Table 2** の ξ_1 と ξ_c との比較から明瞭にわかる。A-3 供試体では，計算上 $\xi_c>\xi_1$ となり，全面がタッチしているわけで，適用式は式 (36) である。なお，この供試体で，t=47 mm とすれば，剛体支圧板と同等の耐力が得られることが理論上からわかり，そのとき P_u=80.4 t と算定される。理論値 P_{theo} と，実験値 P_{test} との比 P_{theo}/P_{test} は 0.78～1.01 で平均 0.92，標準偏差 σ=0.067 (**Table 4**) であり，比較的よい一致がみられる。

種々の要因を考慮したこの種の本格的な実験としては Hawkins のものがあるが，これとの比較を **Table 3** に示す。この実験においては，シース孔は設けられていない (ξ_s=0)。支圧板厚さは t=0.06 in(1.5 mm) から t=1 in まで 10 種および剛体支圧板が用いられている。**Table 3** の最右欄から明らかなように，適用式として式 (35) が大多数であり，すなわち，PC支圧板としては薄すぎるものが多くテストされている。

33 種の実験結果と比較すると，P_{theo}/P_{test} の平均値は 0.92 で，σ=0.094 である。

なお，Shelson の実験結果[4] とも比較したが，この実験では，供試体は 8 in 立方体で，支圧板厚さは t=0.25 in に固定し，支圧板の大きさを 2～9 in^2 に変化させている。同論文[4] **Table 2** に示されている供試体 No. 4～6, No. 10～12, No. 19～21 の 9 種の実験結果と比較した。なお，σ_{sy}=28 kg/mm^2 と仮定した。その結果，P_{theo}/P_{test} の平均値は 1.04 で，σ=0.029 となった。

以上，コンクリート供試体の圧縮強度，形状寸法，支圧板の降伏点応力，形状寸法，ナットの形状寸法，シース孔等，各種要因を考慮した 3 つの論文に示されている実験結果と理論簡略解とを比較したが，そのまとめを **Table 4** に示す。計 48 種の実験値との比較結果は，P_{theo}/P_{test}=0.94，標準偏差 σ=0.094 である。理論解は，実験値より若干小さ目の値を与えるようである。σ は約 10% であるが，バラツキに対するコンクリート自体の特性を考えれば，本簡略式は十分の精度を有しているといいうる。

6. 支圧板有効幅に関する考察

以上求めた簡略解は，円形供試体に同心円の支圧板で載荷した状態に対する式であるが，角形のものに対しても十分の有用性のあることが実証された。そこで，建築PC規準で提案されている支圧板の有効幅[7] がどのような意味を有するか考察してみたい。

同規準解説によれば，ナットの対辺距離 d に支圧板厚さ t (座金の厚さも含む) の 3 倍を加えたものを支圧板の有効幅 D (正方形支圧板の一辺) とされている (いま，支圧板の一辺を D としたときの関係図を **Fig. 10** に示す)。したがって，D は次式で表わされる。

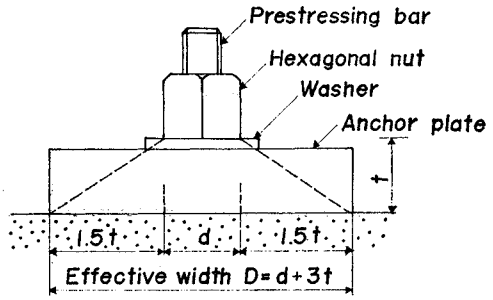

Fig. 10 Effective width of anchor plate given by PC standard of AIJ

$$D=d+3t \quad \cdots\cdots(38)$$

ナットの有効径を d にとれば，$2r_0=d$，正方形板を面積の等しい円形板に換算したときの半径は $r_1=D/\sqrt{\pi}$ であり，これらを式 (38) に用いれば，

$$\phi_t=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\xi_1-1\right) \quad \cdots\cdots(39)$$

さて，支圧板全面が有効に働くためには，**Fig. 5** (b) の状態である必要があるが，その条件は式 (30) で与えられた。すなわち，式 (30) の上限値および下限値は式 (40) および (41) である。

$$\phi_t=\sqrt{\frac{\xi_2}{\delta}\cdot\xi_1(\xi_1-1)} \quad \cdots\cdots(40)$$

$$\phi_t=\sqrt{\frac{2\xi_2}{3\delta}\cdot\frac{\xi_1^2(\xi_1-1)}{(\xi_1+1)}} \quad \cdots\cdots(41)$$

式 (40) は剛体支圧板と同等の破壊荷重が得られるための条件式であり，すなわち，等分布な接触圧 (q_2=0) が作用する場合である。式 (41) は，台形分布の接触圧 (q_1=0) が作用する場合である。建築学会式 (39) と式 (40) および (41) とを比較することにより，同規準での有効幅を有する支圧板の種々の特性が明らかとなる。

Fig. 11 は式 (39) と (40) を比較したものである。たて軸は，ナット半径 r_0 に対する支圧板厚さ t の比 $\phi_t=t/r_0$，よこ軸は，r_0 に対する支圧板半径 r_1 の比 $\xi_1=r_1/r_0$ で，ξ_1 の値は一般に 2.5～2.8[9] であるため，ξ_1=2.0～3.0 の範囲で示した。コンクリート供試体の半径 r_2 は r_0 の 4 倍 (ξ_2=4) に固定し，$\delta=\sigma_{sy}/\sigma_c$ の値として，6 (たとえば，σ_{sy}=2 400 kg/cm^2，σ_c=400 kg/cm^2)，10 および 14 (たとえば，σ_{sy}=2 800 kg/cm^2，σ_c=200 kg/cm^2) の 3 種 (実際のほとんどの場合は δ=6～14 の範囲に入るものと考えられる) についてプロットし

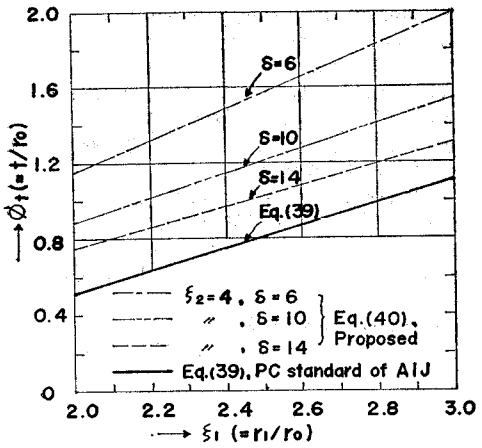

Fig. 11 Comparison of ϕ_t-value given by PC standard of AIJ and ϕ_t-value for $q_2=0$ in proposed solution

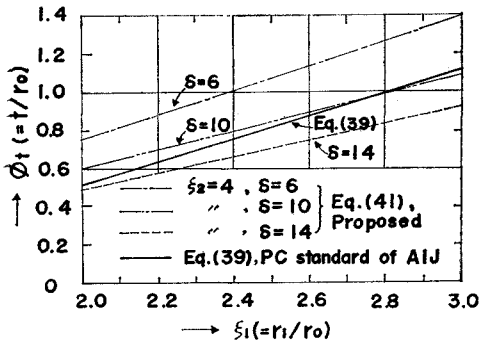

Fig. 12 Comparison of ϕ_t-value given by PC standard of AIJ and ϕ_t-value for $q_1=0$

た。**Fig. 11** から明らかなように，式 (39) および (40) は，$\xi_1=2\sim3$ の範囲では，ξ_1 の増加に対して ϕ_t は直線的に増加することを現わしている。すなわち，支圧板の大きい断面寸法が要求されるとき，厚さも大きくしなければならないことを意味しており，これは経験的事実と全く一致している。このように，両式でその傾向は一致しているが，$\delta=6\sim14$ に対し，式 (39) は式 (40) よりすべて小さい ϕ_t の値を与えている。このことは，式 (39) で設計された支圧板による破壊荷重は剛体支圧板によるそれよりもかなり小さいことを意味している。いま，仮りに支圧板有効幅の定義として，「その支圧板と等しい破壊荷重を与える剛体支圧板幅を有効幅という」とすれば，式 (38) で与えられる D の値はかなり小さくとられなければならないことになる。

次に，式 (39) と (41) との比較を **Fig. 12** に示す。同図より，$\delta<10$ の場合は，式 (39) の ϕ_t の値の方が小さくなっている。すなわち，式 (39) で設計された支圧板では，コンクリート破壊時に，支圧板の一部はコンクリート面とタッチしておらず浮き上った状態となることを示す。$\delta=14$ の場合は，式 (39) の ϕ_t 値が大きくなっており，式 (39) による支圧板は，その外周部も荷重を分担していると考えられる。しかし，$\delta=14$ の場合でも，式 (41) から明らかなように，ξ_2 が大きい場合（両図では $\xi_2=4$ の場合のみ示したが）は，式 (39) の ϕ_t の値の方が小さくなることもありうる。

以上，建築学会式 (39) で設計された支圧板の特性についてのべたが，これは供試体破壊時に対する特性であって，設計荷重作用時には支圧板全面が有効に働いていると考えられる。

なお，本文で定義した支圧板有効幅は，その支圧板の破壊荷重が式 (35) あるいは (36) で与えられる場合，これらと

$$P_u=\pi r_0^2\sigma_c\cdot\xi_e\xi_2\left(1-\frac{\xi_s^2}{\xi_e}\right)$$

（$\xi_e=r_e/r_0$: r_e＝支圧板有効径）

とを等置して簡単に得られる。その支圧板の破壊荷重が式 (37) で与えられる場合は，その支圧板の一辺の大きさがそのまま有効幅であることはいうまでもない。

7. あとがき

既報の剛体支圧板の場合に用いた解法を，支圧板が剛体でない場合に拡張し，より一般性のある支圧強度理論式を誘導し，国内外の実験結果と比較し，その妥当性を確かめた。すなわち，コンクリート供試体，支圧板およびナットの形状方法，コンクリート強度，支圧板の降伏点応力，シース孔等各種要因を考慮した計 48 種の実験結果と比較した結果，破壊荷重の実験値に対する理論値の比は平均 94%，標準偏差 9 %で，実用的には十分の精度であることが実証された。この比較に用いた式は第 2 近似式であり，本文で用いた解析モデルに対する厳密解および第 1 近似解との比較については，コンクリートの引張強度等のデータ欠如のため比較検討できなかったのは残念である。また，日本建築学会で提案されている支圧板有効幅につき考察を加え，コンクリート供試体破壊時には，学会式で設計された支圧板は，その全面が十分有効に働かない場合があること等を明らかにした。

以上は，無補強コンクリートに対するものであるが，支圧強度は適当な補強を行なえば相当量増大することが実験的に明らかにされている[1]が，定性的にも十分の結論は得られていない。実際のＰＣ定着部は必ず補強が施されており，補強効果をも含めた支圧強度の研究が重要である。この点に関する理論的，実験的研究を次回に報告したい。

ＰＣ定着部に関する一連の研究を実施しているが，本研究に対しても，終始適切なご指導をいただいた京都大

学岡田　清教授ならびに神戸大学西村　昭教授に深甚の謝意を表する次第である。

参考文献

1) たとえば，藤井　学：土木学会関西支部，プレストレストコンクリート最近の進歩，pp. 37～56 (1966. 11)
2) 坂　静雄・六車　熙・寺沢輝夫・小垣喜一：鋼棒使用ポストテンション型PCの定着部応力に関する研究（第2報），日本建築学会論文報告集，57，pp. 577～580 (1957. 7)
3) 国分正胤・青柳征夫：PC鋼棒定着部の設計に関する基礎的研究，セメント技術年報，XVIII，pp. 409～415 (1964. 12)
4) Shelson, W. : Bearing capacity of concrete, J. of ACI, 54-5, pp. 405～414 (1957. 11)
5) Hawkins, N.M. : The bearing strength of concrete loaded through flexible plates, Magazine of Concrete Research, 20-63, pp. 95～102 (1968. 6)
6) 藤井　学：軽量コンクリートの支圧強度，材料，18-185，pp. 136～143 (1969. 2)
7) 日本建築学会：プレストレストコンクリート設計施工規準・同解説，p. 88, p. 173, 1961 制定
8) Timoshenko, S. : Strengh of Materials, Part II, 2nd edi., D. Van Nostrand Comp., Inc., pp. 119～177 (1947. 2)
9) 7) の付 9. pp. 354～356

(1971. 1. 16・受付)