

合成桁と PC 桁における Klöppel-Müller の 2元連立微分方程式とその応用

DIE ZWEI GEKOPPELTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON KLÖPPEL-MÜLLER UND IHRE ANWENDUNGEN BEI VORGESPAFFNETEN VERBUNDKONSTRUKTIONEN AUS BETON U. STAHL.

藤野与利夫*
von Yorio Fujino

1. はじめに——コンクリート自体の塑性変形

コンクリート床版が水平に架設された鋼桁と一体化されると、床版自体の自重は鋼桁により分担される。しかし鋼桁を連続桁とした後に、中間支点を上昇せしめて床版を施工し支点を降下せしめるとか、前荷重とかの方法、または PC ケーブルによりプレストレスを与えると、任意の鉛直断面には一定の曲げモーメント M と圧縮力 N とが作用することになる。しかもコンクリートのクリープと乾燥収縮に伴って時間の経過とともに、床版には塑性変形が進行することになるが、鋼桁には弹性変形のみが許されるために、床版の自由な塑性変形が鋼桁により拘束され、床版の図心 G_b に作用する圧縮力 N_{bt} も、図心 G_b を通る水平な中立軸のまわりに作用する曲げモーメント M_{bt} も、鋼桁とコンクリートの中に埋込まれている鉄筋と PC ケーブル、これら鋼材のすべてが分担する圧縮力 N_{st} もモーメント M_{st} も、これらはすべて時間の経過に伴って変化する。一般に鋼桁を備えた合成桁では、 N_{st} と M_{st} とが増大し N_{bt} は減少し、 M_{bt} は乾燥収縮をも考慮したクリープの塑性変形に対して増大し、断面に一定のモーメント M が作用するクリープの塑性変形に対して減少する。

もちろん、活荷重とその衝撃のような短期荷重に対しては、コンクリートの塑性変形を何等も考慮することなく、弾性変形のみを考慮して応力度を解釈できる。

しかし長期荷重ないしプレストレスによりコンクリートの分担する圧縮力 N_{bt} とモーメント M_{bt} , および鋼材すべての分担する圧縮力 N_{st} とモーメント M_{st} との解析には、まず第一にコンクリートの N_{bt} と M_{bt} に対するコンクリートの応力度 $\sigma(t)$ の関係, および応力度 $\sigma(t)$ に対する弾性変形のほかに塑性変形を考慮したひずみ度 $\epsilon(t)$ の関係, 引いてはコンクリートの図心 G_b における微小水平長さ ds あたりの水平軸方向の変

位 ($A ds$) と、同じく微小水平長さ ds あたりのたわみ角一断面の回転角— $(4\psi)_b$ との、コンクリートの N_{bt} と M_{bt} に対する関係を確立しなければならない。そのためにはコンクリート自体の塑性変形について、次の 4 つの前提条件から出発しなければならない。

(1) まず一定の応力度 σ に対するクリープひずみ度 ϵ_t を次のように表現する。

ここに ϕ_t は時刻 $t=0$ より作用する一定の応力度 σ に対するクリープ係数であり、クリープひずみ度 ϵ_t を一定の応力度 σ に関係して表現するのは、1930 年代の初めに提案され Davis-Granville の法則といわれる。

(2) 第2に、コンクリートの乾燥収縮によるひずみ度—収縮ひずみ度 S_t を、クリープ係数 ϕ_t に比例せしめて次のように表現する。

ここに S_n と ϕ_n とは $t \rightarrow \infty$ における S_t の最終値と ϕ_t の最終値である。DIN 4227²⁾によれば室内のような乾燥状態にて $S_n = 30 \times 10^{-5}$, 水面上の湿潤な大気中にて $S_n = 10 \times 10^{-5}$ と規定される。

(3) 第3に時刻 $t=0$ より持続して作用する一定の応力度 σ に対するクリープ係数を ϕ_t とし、その時刻 $t=t_0$ における一定値を ϕ_0 とすると、時刻 $t=t_0$ よりはじまる一定の応力度 σ' に対するクリープ係数 $\phi_{t'}$ を次のように表現する。

$$\phi_t' = \phi_t - \phi_0 \quad \therefore \quad \frac{d}{dt} \phi_t' = \frac{d}{dt} \phi_t \dots \dots \dots \quad (1.3)$$

これは C.S. Whitney³⁾ の指摘したものである。

(4) 最後にかかるクリープ係数 ϕ_t を次のように表現する。

$$\phi_t = \left(\frac{t}{A+t} \right) \phi_n = \left(\frac{t}{C+Bt} \right) B \phi_n \dots \dots \dots \quad (1.4)$$

ここに A, B, C, D は定数にしてかかる表現は Davis-Granville¹⁾ または Lorman-Ross⁴⁾ が提唱した。

* 正会員 鉄建建設技術研究室

$$\begin{aligned} & \cdot [M_{bt} + \int_0^{\phi_t} M_{bt} d\phi_t] + \frac{S_n}{\phi_n} \cdot \phi_t \\ \therefore \epsilon(t) = & \frac{1}{E_b \cdot F_b} [1 + \psi_E \cdot \phi_t] N_{bt} + \frac{y}{E_b \cdot J_b} \\ & \cdot [1 + \psi_J \cdot \phi_t] M_{bt} + \frac{S_n}{\phi_n} \phi_t \quad \dots \dots \dots (2.6) \end{aligned}$$

$$\psi_F \cdot \phi_t = \int_0^{\phi_t} N_{bt} \cdot d\phi_t / N_{bt}, \quad \psi_J \cdot \phi_t = \int_0^{\phi_t} M_{bt} \cdot d\phi_t / M_{bt} \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

かかる $\psi_F \cdot \phi_t$ と $\psi_J \cdot \phi_t$ という係数は、断面に一定のモーメント M が作用して、クリープによる塑性変形を考慮するが、 $N=0, S_n=0$ の場合と、断面全体の図心 G_b に一定の圧縮力 N が作用してクリープの塑性変形を考慮するが、 $M=0, S_n=0$ の場合と、クリープの塑性変形と乾燥収縮の塑性変形とを考慮するが、 $M=0, N=0$ の場合とでは、それぞれ値が異なるが、 M, N, S_n には無関係に断面の鋼材とコンクリートとの剛度、図心間の距離 a およびクリープ係数 ϕ_t により定まる。かかるがゆえに上述の式 (2.6) の右辺は、中立軸よりの距離 y の1次の関数として表現されて、弹性変形に塑性変形を加味した場合にも、 $ds=1.0$ (単位量) だけ離れた2断面は平面を維持していること、いいかえれば式 (1.3) の Whitney の前提条件とは塑性変形をも考慮した場合に、Bernoulli-Euler の平面保持の前提が成立するための、必要条件であることが判明する。

かかる式 (2.6) を応用して図-1 に示すコンクリートの図心 G_b における微小水平長さ ds あたりの変位 $(\Delta ds)_b$ と、図心 G_b を通る水平な中立軸より距離 y における要素部分の、 ds あたりの変位 (Δds) と断面の回転角一たわみ角 $-(4\psi)_b$ とを求めるとき、

$$\begin{aligned} (\Delta ds)_b &= \frac{1}{E_b \cdot F_b} N_{bt} ds + \frac{1}{E_b \cdot F_b} \int_0^{\phi_t} N_{bt} d\phi_t ds + \frac{S_n}{\phi_n} \phi_t ds \\ &= \frac{(1 + \psi_F \cdot \phi_t)}{E_b \cdot F_b} N_{bt} ds + \frac{S_n}{\phi_n} \phi_t ds \quad \dots \dots \dots (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta \psi)_b &= \frac{1}{E_b \cdot J_b} M_{bt} ds + \frac{1}{E_b \cdot J_b} \int_0^{\phi_t} M_{bt} d\phi_t ds \\ &= \frac{(1 + \psi_J \cdot \phi_t)}{E_b \cdot J_b} M_{bt} ds \quad \dots \dots \dots (2.9) \end{aligned}$$

$$(\Delta ds)_y = (\Delta ds)_b + y \cdot (\Delta \psi)_b \quad \dots \dots \dots (2.10)$$

さらにこれらをクリープ係数 ϕ_t で微分すると

$$\frac{d}{d\phi_t} (\Delta ds)_b = \left[\frac{d}{d\phi_t} N_{bt} + N_{bt} \right] \frac{ds}{E_b \cdot F_b} + \frac{S_n}{\phi_n} ds \quad \dots \dots \dots (2.11)$$

$$\frac{d}{d\phi_t} (\Delta \psi)_b = \left[\frac{d}{d\phi_t} M_{bt} + M_{bt} \right] \frac{ds}{E_b \cdot J_b} \quad \dots \dots \dots (2.12)$$

$$\frac{d}{d\phi_t} (\Delta ds)_y = \frac{d}{d\phi_t} (\Delta ds)_b + y \cdot \frac{d}{d\phi_t} (\Delta \psi)_b \quad \dots \dots \dots (2.13)$$

(2) 単純合成桁における K. Klöppel の解析方法

かかる場合の2元連立微分方程式は、西ドイツ Darmstadt 工科大学教授にて、Der Stahlbau 編集主筆の K. Klöppel 博士が、1951年 の同誌¹⁷⁾に発表なされた。そのときのコンクリート床版の図心の変位と断面の回転角一たわみ角一とには、上述の式 (2.11) と式 (2.12) の

右辺の表現が使用された。

すなわち図-2 に示すように両端が単純に支持された、コンクリート床版と鋼桁との合成桁の任意の断面に、時刻 $t=0$ より持続して一定のモーメント M が作用する場合、まず時刻 $t=0$ の弾性変形においてはコンクリートにモーメント M_b と圧縮力 N_b とが作用し、鋼桁にもモーメント M_s と引張力 N_s とが作用すると前提された。しかしながらクリープによる塑性変形に伴い、鋼桁がその自由な塑性変形を拘束するために、コンクリートの M_b と N_b とを減少せしめるよう引張力 N_t とモーメント M_{bt} とが作用して、圧縮力が $(N_b - N_t)$ 、時計と反対方向のモーメントが $(M_b - M_{bt})$ となり、鋼桁の引張力もコンクリートの圧縮力に平衡して $(N_b - N_t)$ となり、断面の回転角一たわみ角一の増大に伴って鋼桁のモーメントは M_{st} だけ増大して、 $(M_s + M_{st})$ となるものと前提された。

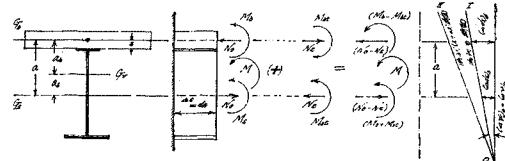


図-2 一定の曲げモーメント M の作用する合成桁の断面と内力

かかる場合の断面の圧縮力とモーメントとに関する力学的平衡条件と、コンクリートと鋼材とが一体化されているための平面保持の幾何学的条件とより、未知数 M_{bt} と M_{st} と N_t に関する連立方程式を求め、消去法により M_{bt} に関する微分方程式を求める。

$$\frac{d^2}{d\phi_t^2} M_{bt} + A \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} + B(M_{bt} - M_b) = 0 \quad \dots \dots \dots (a)$$

断面に時刻 $t=0$ より一定のモーメント M が作用して、クリープの塑性変形は考慮するが、 $S_n=0$ の場合

$$M_{bt} = \left[1 - \frac{K_2 \cdot g(e^{1/\phi_t} - e^{1/\phi_0})}{(K_1 - \lambda_2)(K_2 \cdot g - K_1 \cdot f_1)} \right. \\ \left. - \frac{(\lambda_2 \cdot e^{1/\phi_t} - \lambda_1 \cdot e^{2/\phi_t})}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \right] M_b \quad \dots \dots \dots (2.14)$$

同様に一定のモーメントが作用していないが、クリープによる塑性変形とともに収縮による塑性変形を考慮する場合、

$$M_{bt} = (-) \frac{f(e^{1/\phi_t} - e^{1/\phi_0})(\lambda_1 - \lambda_2)}{(K_2 \cdot g - K_1 \cdot f)} \frac{S_n}{\phi_n} \quad \dots \dots \dots (2.15)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-A + \sqrt{A^2 - 4B}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-A - \sqrt{A^2 - 4B}) \quad \dots \dots \dots (2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(K_2 \cdot g - K_1 \cdot f + K_1 \cdot g)}{(-K_1 \cdot f + K_2 \cdot g)}, \quad B = \frac{K_1 \cdot g}{(-K_1 \cdot f + K_2 \cdot g)} \\ K_1 &= -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{E_b \cdot F_b} + \frac{1}{E_s \cdot F_s} \right) - \frac{a_b}{E_b \cdot J_b}, \quad K_2 = \frac{1}{a} \frac{1}{E_b \cdot F_b} \\ K_2 &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{E_b \cdot F_b} + \frac{1}{E_s \cdot F_s} \right) + \frac{a_s}{E_s \cdot J_s}, \quad f = 1/E_s \cdot F_s \\ K_s &= -\frac{1}{a} \frac{1}{E_b \cdot F_b} - \frac{a_b}{E_b \cdot J_b}, \quad g = 1/E_b \cdot F_b \end{aligned} \right\} (b)$$

と表現された。すなわちこれらの定数はコンクリートの剛度 $E_b F_b$ と $E_b J_b$, 鋼桁の剛度 $E_s F_s$ と $E_s J_s$ および図心間の距離 a および距離 a_b と a_s にて規定される。

かかる K. Klöppel の解析方法は 1951 年に発表されたものの、式 (b) の断面の定数の物理的意義に関しては、解釈に苦しまなければならない。

$$\left. \begin{array}{l} (N_0 - N_t) \rightarrow N_{bt}, (M_{bt} - M_{bt}) \rightarrow M_{bt} \\ -(N_0 - N_t) \rightarrow N_{st}, (M_s + M_{st}) \rightarrow M_{st} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2.17)$$

かかる転換を行なうと断面全体の図心 G_v に一定の圧縮力 N が作用する場合にも、 $\frac{d}{d\phi_t} N_{bt}$ と $\frac{d}{d\phi_t} N_{st}$ に関する力学的平衡条件は、 $M \neq 0, N=0, S_n=0$ と $M=0, N \neq 0, S_n=0$ と $M=0, N=0, S_n \neq 0$ とのいずれの場合も同一となり、K. Klöppel の方法は一定の圧縮力が断面に作用する場合にも成立することになる。

さらにかかる転換による 2 元連立微分方程式は、式 (3.14) と式 (3.15) または式 (3.25) で表現される。コンクリート床版と鋼桁との単純合成桁において、断面に一定のモーメント M ないし圧縮力 N が作用するとか、クリープとともに乾燥収縮の塑性変形を考慮する場合の、かかる微分方程式の一般解は E. Müller 博士が 1955 年の Die Bautechnik⁸⁾ に発表されたので、これらを Klöppel-Müller の微分方程式と称えることとする。

よってかかる微分方程式はコンクリート床版と鋼桁との合成桁に適用されるのみでなく、コンクリートの中に PC ケーブルと鉄筋を使用した合成桁、鋼桁を使用しないが PC ケーブルとともに鉄筋を使用した PC 枠にも適用されること、しかもコンクリート床版がプレキャストブロックより構成され、鋼桁と一体化する時刻にプレストレス N_0^V と M_0^V を負担している場合にも適用されること、断面に時間とともに変化するモーメント $M(t)$ が作用する場合にも拡張されること、 $M(t)=0$ の一般解より Fritz-Wippel の等価換算剛度が規定されること、さらに N_{bt} と M_{bt} および N_{st} と M_{st} を求めると、塑性変形を考慮した応力度が定まること、以上の諸点を以下において検討することにする。

3. Klöppel-Müller の解析方法の拡張

(1) PC ケーブルと鉄筋とを併用した合成桁

Klöppel-Müller の微分方程式には $K_b, K_s, K_o, S_b, S_s, S_v$ という断面の剛度が使用されるために、図-3 に示す合成桁の断面の検討から始めることにする。

各材料の図心 G と図心 G を通る水平な中立軸と桁下縁との距離 η とをコンクリートに対して G_b と η_b 、鉄筋に対して G_e と η_e 、PC ケーブルに対して G_{sp} と η_{sp} 、鋼桁に対して G_{st} と η_{st} とし、これらが前もって確定しているものとする。

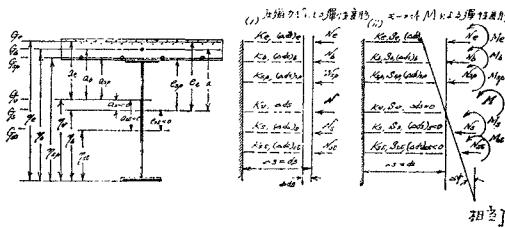


図-3 コンクリート床版と鉄筋と PC ケーブルと鋼桁による合成桁

これに伴って合成桁全体の図心 G_v を通る水平な中立軸と桁下縁との距離 η_v と、鋼材すべての図心 G_s を通る水平な中立軸と桁下縁との距離 η_s とすると、これららの図心を通る水平な中立軸間の距離は、

$$\left. \begin{array}{l} a = \eta_b - \eta_s, \quad a_b = \eta_b - \eta_v, \quad a_s = \eta_s - \eta_v < 0, \\ a_e = \eta_e - \eta_v, \quad a_{sp} = \eta_{sp} - \eta_v, \quad a_{st} = \eta_{st} - \eta_v, \\ e_e = \eta_e - \eta_s = a_e - a_s, \quad e_{sp} = \eta_{sp} - \eta_s = a_{sp} - a_s, \\ e_{st} = \eta_{st} - \eta_s = a_{st} - a_s \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3.1)$$

さらに各材料はヤング係数 E も断面積 F も断面 2 次モーメント J も確定しているため、各材料の軸方向剛度一伸び剛性 $-K = E \cdot F$ 、および曲げ剛度一曲げ剛性 $-S = E \cdot J$ 、これらをコンクリートに対して K_b と S_b 、鉄筋に対して K_e と S_e 、PC ケーブルに対して K_{sp} と S_{sp} 、鋼桁に対して K_{st} と S_{st} とすると、上述の式 (3.1) における距離 η_v と η_s 、鋼材すべての剛度 K_s と S_s 、および合成桁全体の剛度 K_v と $K_o = \frac{K_b \cdot K_s}{K_v}$ と S_v 、これららは時刻 $t=0$ の弾性変形を考慮して以下のように解析される。

a) まず圧縮力 N が合成桁全体の図心 G_v に作用する弾性変形を吟味する。図-3 (i) に示すようにこの場合には曲げ変形が生じないために、各材料の図心における微小水平長さ $\Delta s = ds$ あたりの変位は、全体の図心 G_v の変位 (Δds) に相等しくなければならない。したがって各材料の分担する圧縮力をコンクリートでは N_b 、鉄筋では N_e 、PC ケーブルでは N_{sp} 、鋼桁では N_{st} と表現し、鋼材すべての図心 G_s には圧縮力 N_s が作用しその軸方向剛度を K_s 、断面全体の軸方向剛度を K_v とすると、弾性変形の条件と力学的平衡条件とは、

$$\begin{aligned} \frac{N_b}{K_b} ds &= \frac{N_e}{K_e} ds = \frac{N_{sp}}{K_{sp}} ds = \frac{N_{st}}{K_{st}} ds \\ &= \frac{N_s}{K_s} ds = \frac{N}{K_v} ds = (\Delta ds) \\ N_e + N_{sp} + N_{st} &= N_s, \quad N_s + N_b = N \end{aligned}$$

これより未知数 K_s と K_v を求めると

$$\left. \begin{array}{l} K_s = K_e + K_{sp} + K_{st}, \quad K_v = K_b + K_s \\ \text{さらに } K_o \text{ を規定して,} \\ \frac{1}{K_o} = \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_s}, \quad K_o = \frac{K_b \cdot K_s}{K_v} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3.2)$$

と表現すると各材料の圧縮力と圧縮力 N との関係は、

$$\left. \begin{aligned} N_b &= \frac{K_b}{K_v} N = \frac{K_0}{K_s} N, \quad N_s = \frac{K_s}{K_v} N = \frac{K_0}{K_b} N \\ N_e &= \frac{K_e}{K_v} N, \quad N_{sp} = \frac{K_{sp}}{K_v} N, \quad N_{st} = \frac{K_{st}}{K_v} N \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.3)$$

しかも図心 G_s を通る水平な中立軸のまわりの鋼材の圧縮力のモーメント、または図心 G_v を通る水平な中立軸のまわりの各材料の圧縮力のモーメントが零でなければならぬ力学的平衡条件より、距離 η_s と η_v とは、

$$\left. \begin{aligned} \eta_s &= \frac{1}{K_s} (\eta_e \cdot K_e + \eta_{sp} \cdot K_{sp} + \eta_{st} \cdot K_{st}) \\ \eta_v &= \frac{1}{K_v} (\eta_b \cdot K_b + \eta_s \cdot K_s) \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.4)$$

これらを式 (3.1) の a_b と a_s とに代入すると、

$$a_b = (\eta_b - \eta_s) \frac{K_s}{K_v} = a \frac{K_0}{K_b}, \quad a_s = (\eta_s - \eta_b) \frac{K_b}{K_v} = (-)a \frac{K_0}{K_s} \dots \quad (3.5)$$

b) 全体の図心 G_v を通る水平な中立軸のまわりにモーメント M が作用する弾性変形においては、図-3(ii) に示すように圧縮力 $N=0$ のために図心 G_v は変位しないが、微小水平長さ $\Delta s = ds$ あたり ($\Delta\psi$) に相当するたわみ角一断面の回転角一を生ずる。したがって各材料の分担する圧縮力とモーメントとをコンクリートに対して N_b と M_b 、鉄筋に対して N_e と M_e 、PCケーブルに対して N_{sp} と M_{sp} 、鋼桁に対して N_{st} と M_{st} とし、鋼材すべての図心 G_s には圧縮力 N_s とモーメント M_{st} とが作用し、鋼材すべての曲げ剛度を S_s 、断面全体の曲げ剛度を S_t とすると弾性変形の条件は

$$\begin{aligned} \frac{M_b}{S_b} ds &= \frac{M_e}{S_e} ds = \frac{M_{sp}}{S_{sp}} ds = \frac{M_{st}}{S_{st}} ds \\ &= \frac{M_s}{S_s} ds = \frac{M}{S_s} ds = (\Delta\psi) \\ \frac{N_b}{K_b} ds &= a_b (\Delta\psi) = (\Delta s)_b, \quad \frac{N_s}{K_s} ds = a_s (\Delta\psi) = (\Delta s)_s < 0 \\ \frac{N_e}{K_e} ds &= a_e (\Delta\psi), \quad \frac{N_{sp}}{K_{sp}} ds = a_{sp} (\Delta\psi), \quad \frac{N_{st}}{K_{st}} ds = a_{st} (\Delta\psi) \end{aligned}$$

他方、力学的平衡条件は次のように表現される。

$$\begin{aligned} N_b + N_s &= N, \quad M_b + M_s + a_b N_b - (-a_s) N_s = M \\ N_s &= N_e + N_{sp} + N_{st} \\ M_s &= M_e + M_{sp} + M_{st} + e_e \cdot N_e + e_{sp} \cdot N_{sp} - (-e_{st}) N_{st} \end{aligned} \dots \quad (3.6)$$

これらに弾性変形の関係式を代入すると、

$$S_v = S_b + S_e + S_{sp} + S_{st} + a_b^2 \cdot K_b + a_{sp}^2 K_{sp} + a_e^2 K_e + a_{st}^2 K_{st} = S_b + S_s + a_b^2 K_b + a_s^2 K_s = S_b + S_s + a^2 \cdot K_0 \dots \quad (3.7)$$

$$S_s = S_e + S_{sp} + S_{st} + e_e^2 K_e + e_{sp}^2 K_{sp} + e_{st}^2 K_{st} \dots \quad (3.8)$$

かくして各材料の分担する圧縮力とモーメントとは、

$$\left. \begin{aligned} N_b &= \left(\frac{a_b \cdot K_b}{S_v} \right) M = \left(\frac{a K_0}{S_v} \right) M, \quad M_b = \left(\frac{S_b}{S_v} \right) M \\ N_s &= \left(\frac{a_s \cdot K_s}{S_v} \right) M = - \left(\frac{a K_0}{S_v} \right) M, \quad M_s = \left(\frac{S_s}{S_v} \right) M \\ N_e &= \left(\frac{a_e \cdot K_e}{S_v} \right) M, \quad N_{sp} = \left(\frac{a_{sp} \cdot K_{sp}}{S_v} \right) M, \quad N_{st} = \left(\frac{a_{st} \cdot K_{st}}{S_v} \right) M \\ M_e &= (S_e/S_v) M, \quad M_{sp} = (S_{sp}/S_v) M, \quad M_{st} = (S_{st}/S_v) M \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.9)$$

c) 特に鋼材すべての図心 G_s に圧縮力 N_s とモー

メント M_s とが作用する弾性変形においては、図心 G_s の変位を $(\Delta s)_s$ 、そのたわみ角一断面の回転角一を $(\Delta\psi)_s$ とすると次の関係式が成立する。

$$(\Delta s)_s = \frac{N_s}{K_s} ds, \quad (\Delta\psi)_s = \frac{M_s}{S_s} ds \dots \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} N_e &= K_e \left[\frac{N_s}{K_s} + e_e \frac{M_s}{S_s} \right] & M_e &= S_e \cdot \frac{M_s}{S_s} \\ N_{sp} &= K_{sp} \left[\frac{N_s}{K_s} + e_{sp} \frac{M_s}{S_s} \right] & M_{sp} &= S_{sp} \cdot \frac{M_s}{S_s} \\ N_{st} &= K_{st} \left[\frac{N_s}{K_s} + e_{st} \frac{M_s}{S_s} \right] & M_{st} &= S_{st} \cdot \frac{M_s}{S_s} \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.11)$$

かかる鋼材に関する弾性変形の条件と力学的平衡条件より定まる式 (3.6) と式 (3.10) と式 (3.11) とは、鋼材は弾性変形のみと見做すと時刻 $t > 0$ においても成立するために、K. Klöppel の方法が拡張できる。

(2) K. Klöppel の解析方法の拡張

PCケーブルに引張力 ($V_0 + \Delta V_0$) と時計まわりのモーメント ($M_0 + \Delta M_0$) を与えてこれをコンクリートに定着すると、PC桁においては自重のような長期荷重が同時に作用することになる。しかし合成桁では鋼桁にコンクリート床版をシベルないしスタッズにより一体化する時期と、支保工を撤去してPCケーブルによりプレストレスを与えるか、前荷重または支点移動の方法でプレストレスを与える時期とは、時間的“ずれ”—time lag—Zeit-Zerzögerung—を伴っている。ジベルないしスタッズの周辺のコンクリートの硬化を待たねばならないからである。かかる“ずれ”は後程に補正することとして、理想化された状態—PCケーブルの緊張力によるプレストレスと、支点移動ないし前荷重の方法によるプレストレスとが、鋼桁にコンクリート床版を定着せしめる時刻 $t=0$ において同時に作用する場合を、まず検討する。

かかる場合の時刻 $t=0$ の断面の図心 G_v に作用する圧縮力 N と、図心 G_v を通る水平な中立軸のまわりの曲げモーメント M とは、PC桁においては自重—長期荷重—、鋼桁を使用した合成桁では支点移動、前荷重またはPCケーブルによる中間支点の弾性変形に伴う不静定モーメントを考慮した、断面のプレストレスによる時計と反対方向に作用する曲げモーメント M_D と、PCケーブルの緊張力と時計まわりのモーメントの反作用により、次のように規定される。

$$N = (V_0 + \Delta V_0), \quad M = M_D + a_{sp}(V_0 + \Delta V_0) + (M_0 + \Delta M_0) \dots \quad (3.12)$$

ここに a_{sp} はPC桁において $M_D > 0$ ならば、 $a_{sp} < 0$ とならなければならない。 V_0 と M_0 とは緊張作業終了直後の導入引張応力度—初期導入引張応力度にレラクセーションの補正を加えた値—より算定され、 ΔV_0 と ΔM_0 とは弾性変形以前の緊張力とモーメントとの補正值であり、後程に4.6節にて検討することにする。かかる圧縮力 N とモーメント M とによる時刻 $t=0$ の彈

性変形は、式(3.3)と式(3.9)とで解析される。

しかしながらその後の時刻 $t > 0$ においては、コンクリートのクリープと乾燥収縮による塑性変形が進行して、床版の圧縮力と時計と反対方向のモーメントとは N_{bt} と M_{bt} となり、 $(N_{bt} - N_b)$ だけ圧縮力が減少し $(M_{bt} - M_b)$ だけ時計と反対方向のモーメントが減少したことになる。この時刻 $t > 0$ における鋼材の圧縮力と時計と反対方向のモーメントとを、鉄筋に対して N_{et} と M_{et} 、PCケーブルに対して N_{spt} と M_{spt} 、鋼桁に対して N_{stt} と M_{stt} とすると、PCケーブルの緊張力は $(V_0 + \Delta V_0 - N_{spt})$ に、時計まわりのモーメントは $(M_0 + \Delta M_0 - M_{spt})$ になる。これらの力学的平衡条件を鋼材すべての図心 G_s の位置において検討すると、

$$\left. \begin{aligned} N_{bt} + N_{et} + N_{stt} &= (V_0 + \Delta V_0 - N_{spt}) \\ M_{bt} + M_{et} + M_{stt} + a \cdot N_{bt} + e_{et} \cdot N_{et} + e_{stt} \cdot N_{stt} &= M_D + (M_0 + \Delta M_0 - M_{spt}) + e_{spt} \cdot (V_0 + \Delta V_0 - N_{spt}) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (a)$$

しかるに鋼材すべての図心 G_s に作用する圧縮力を N_{st} 、時計と反対方向のモーメントを M_{st} とすると式(3.6)が時刻 $t > 0$ においても成立するために、

$$\begin{aligned} N_{et} + N_{spt} + N_{stt} &= N_{et}, \\ M_{et} + M_{stt} + M_{spt} + e_{et} \cdot N_{et} + e_{spt} \cdot N_{spt} + e_{stt} \cdot N_{stt} &= M_{st}, \end{aligned}$$

かかる N_{st} と M_{st} および式(3.12)の圧縮力 N とモーメント M とを、上述の力学的平衡条件式(a)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} N_{bt} + N_{st} &= N, \quad M_{bt} + M_{st} + a \cdot N_{bt} = M + (-a_s)N \\ \therefore \frac{d}{d\phi_t} N_{st} &= -\frac{d}{d\phi_t} N_{bt}, \\ \frac{d}{d\phi_t} M_{st} &= -\frac{d}{d\phi_t} M_{bt} - a \cdot \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (b)$$

他方 Bernoulli-Euler の平面保持の幾何学的条件は、コンクリートの図心 G_b の変位 $(ds)_b$ とたわみ角一断面の回転角一 $(\psi)_b$ 、および鋼材のそれら $(ds)_s$ と $(\psi)_s$ とに対して、

$$\left. \begin{aligned} (\psi)_b &= (\psi)_s, \quad (ds)_b = (ds)_s + a(\psi)_s \dots \dots \dots \quad (c) \\ \therefore \frac{d}{d\phi_t} (\psi)_b &= \frac{d}{d\phi_t} (\psi)_s, \\ \frac{d}{d\phi_t} (ds)_b &= \frac{d}{d\phi_t} (ds)_s + a \cdot \frac{d}{d\phi_t} (\psi)_s \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (d)$$

しかもコンクリートの変位 $(ds)_b$ とたわみ角 $(\psi)_b$ とは先の式(2.8)と式(2.9)、ないし式(2.11)と式(2.12)とで表現される。

他方鋼材の $(ds)_s$ と $(\psi)_s$ とは $N_{st} = N_s$ 、 $M_{st} = M_s$ とおくと先の式(3.10)で表現される。したがってこれらを上述の幾何学的条件(d)に代入すると、

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\phi_t} M_{bt} + M_{bt} \right] \frac{ds}{S_b} &= \frac{d}{d\phi_t} M_{st} \frac{ds}{S_s} \\ \left[\frac{d}{d\phi_t} N_{bt} + N_{bt} \right] \frac{ds}{K_b} + \frac{S_n}{\phi_n} ds & \\ = \frac{d}{d\phi_t} N_{st} \frac{ds}{K_s} + a \cdot \frac{d}{d\phi_t} M_{st} \frac{ds}{S_s} & \end{aligned}$$

さらに力学的平衡条件(b)を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_s} \right) \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} + \frac{a}{S_s} \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} &= -\frac{1}{S_b} M_{bt} \\ \frac{a}{S_s} \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} + \left(\frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_s} + \frac{a^2}{S_s} \right) \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} & \\ = -\frac{1}{K_b} N_{bt} - \frac{S_n}{\phi_n} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (e)$$

これが先の式(2.17)の転換を実施した場合の K. Klöppel の2元連立微分方程式である。

さらにこれらの方程式の左辺の $\frac{d}{d\phi_t} N_{bt}$ と $\frac{d}{d\phi_t} M_{bt}$ を右辺の M_{bt} と N_{bt} と S_n/ϕ_n の関数として表現すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} &= -\frac{(S_s + a^2 K_0)}{S_v} M_{bt} + a \frac{K_0}{K_b} \cdot \frac{S_b}{S_v} N_{bt} \\ &\quad + a K_0 \frac{S_b}{S_v} \frac{S_n}{\phi_n} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} &= a \frac{K_0}{S_v} M_{bt} - \frac{K_0}{K_b} \frac{(S_b + S_s)}{S_v} \cdot N_{bt} \\ &\quad - K_0 \frac{(S_b + S_s)}{S_v} \frac{S_n}{\phi_n} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (3.15)$$

これがいわゆる Klöppel-Müller の微分方程式である。この右辺の K_s も K_0 も S_v も S_b も先の式(3.2)、式(3.7)、式(3.8)で規定されるために、鉄筋とPCケーブルとを併用した合成桁、鉄筋を併用するが鋼桁を使用しないPC桁に、この方程式が適用できること、しかもPCケーブルによる $(V_0 + \Delta V_0)$ と $(M_0 + \Delta M_0)$ とは式(3.12)に含まれ、かかるプレストレスは長期荷重による M_D と同様に取り扱わなければならないことが判明する。

(3) プレキャスト床版のプレストレス N_0^V と M_0^V に対する補正

現実の鋼桁を使用した合成桁のコンクリート床版が、プレキャストブロックより構成され、しかも活荷重とその衝撃により大きな引張応力度を生ずる連続桁の中間支承部に近い引張域では、これを打ち消すために前もってPCケーブルにより、プレストレス N_0^V と M_0^V を与えた後に鋼桁と一体化する場合、または一体化した後に前荷重とか支点移動の方法により、プレストレス N_b^N と M_b^N とがコンクリート床版に作用する場合を検討することにする。

時刻 $t=0$ の一體化する直前ににおける、プレキャストの床版の図心 G_b に作用している圧縮力 N_0^V によるクリープの塑性変形のために、式(2.8)の変位 $(ds)_b$ の右辺には $\frac{N_0^V}{K_b} \phi_t ds$ を加算しなければならない。同様にプレストレスのモーメント M_0^V によるクリープの塑性変形のために、式(2.9)の断面の回転角一たわみ角一 $(\psi)_b$ の右辺には $(M_{ba}/S_b)\phi_t ds$ を加算しなければならない。したがって上述の式(e)というK. Klöppelの微分方程式、または式(3.14)、式(3.15)といふ

Klöppel-Müller の微分方程式の右辺では、 N_{bt} と M_{bt} との代りに $(N_{bt}+N_0^V)$ と $(M_{bt}+M_0^V)$ とを使用しなければならなくなる。いいかえれば逆に、

$$(N_{bt} + N_0^V) \rightarrow N_{bt}, \quad (M_{bt} + M_0^V) \rightarrow M_{bt} \dots \dots \dots \quad (3.16)$$

という転換を行なうと、式(3.14)と式(3.15)とはこの場合にも成立するが、式(2.8)と式(2.9)とは N_0^V と M_0^V とによる弾性変形を控除しなければならない。

$$\begin{aligned} \therefore (\Delta ds)_b &= \frac{(N_{bt} - N_0^V)}{K_b} ds + \frac{1}{K_b} \int_0^{\phi_t} N_{bt} d\phi_l ds + \frac{S_n}{\phi_n} \dot{\phi}_l ds \\ (\Delta V)_b &= \frac{(M_{bt} - M_0^V)}{S_b} ds + \frac{1}{S_b} \int_0^{\phi_t} M_{bt} d\phi_l ds \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (3.17)$$

しかも先の式(3.13)の力学的平衡条件式の N_{st} と M_{st} とには、プレストレス N_o^V と M_o^V とに平衡する PC ケーブルのプレストレスが含まれていないため、 N_{bt} と M_{bt} との代りに $(N_{bt} - N_o^V)$ と $(M_{bt} - M_o^V)$ を使用しなければならない。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} N_{bt} + N_{st} &= N + N_0^V, \\ M_{bt} + M_{st} + aN_{bt} &= M + (-a_s)N + M_0^V + aN_0^V \end{aligned} \right\} \dots (3.18)$$

他方、床版と鋼桁とを一体化した後にも P C ケーブルによりプレストレス ($V_0 + 4 V_0$) と ($M_0 + 4 M_0$) とを与えるほかに、前荷重とか支点移動の方法により床版にプレストレス M_b^N と N_b^N とが与えられる。

前者は鋼桁を架設して連続桁となし、床版を圧縮域と中間支承付近の引張域とに分け、圧縮域のコンクリートを施工した後に前荷重を載荷する。かかる状態で引張域のコンクリートを施工して、その硬化後に前荷重を撤去する方法である。このために引張域のプレストレス N_b^N と M_b^N とは当然ながら、圧縮域のコンクリートにも僅少ながらプレストレスが存在する。

後者は鋼桁の中間支点を上昇せしめた後に床版を施工し、その硬化の後に支点を降下せしめるために、全領域にプレストレス N_b^N と M_b^N とが存在する。

これらは時間的“ずれ”を考慮しない理想状態においては、式(3.12)に示すように断面全体にモーメント M_D が作用するとしても解析されるが、別法として次のようにも規定できる。

特に鋼桁とコンクリートとを一体化する時刻 $t=0$ と、前荷重の撤去ないし中間支点の降下の時刻 $t=t_0$ とに、時間的“ずれ”が存在する場合の N_b^N と M_b^N とは、後程**4.5**節で検討することにする。

(4) Klöppel-Müller の微分方程式の物理的意義

先の式 (3.14), 式 (3.15) の右辺の M_{bt} と N_{bt} と S_n/ϕ_n とに加わる係数の物理的意義, および断面に時間的に変化するモーメント $M(t)$ が作用する場合の拡張は, 図-4 に示すような水平距離 $4s = ds = 1.0$ (単位量) だけ離れた鉛直 2 断面が, 時刻 t より微小時間 Δt

だけ経過した前後、クリープ係数 ϕ_t が $4\phi_t$ だけ増大する前後において、Bernoulli-Euler の平面保持の条件が成立するとの前提の下に、以下のように解釈され拡張される。

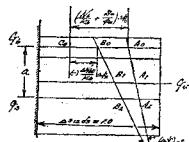


図-4 微小時間 Δt の経過に伴うコンクリートの図心 G_b の変位 (ただしモーメント M_{bt} による塑性変形を除外)

れたるとすると、クリープ係数 ϕ_t が $A\phi_t$ だけ増大する期間中に N_{bt} はなんらの変化をも生じない。したがって図心 G_b の変位 A_0C_0 (図-4) は、 $ds=1.0$ とおいて変位 $(d ds)_b$ に関する式 (2.11) を応用すると、弾性変形に関する右辺の第1項が零となるために、

$$A_0 C_0 = \frac{d}{d\phi_t} (\Delta ds)_0 \cdot \Delta \phi_t = \left(\frac{N_{bt}}{K_b} + \frac{S_n}{\phi_n} \right) \Delta \phi_t$$

しかしながら自由な塑性変形が鋼材により拘束されると、コンクリートの図心 G_b には変位 A_0C_0 を打ち消すための引張力 $4 N$ 、すなわち負の圧縮力 $-4 N$ が作用し、同時にその反作用として全体の図心 G_b に圧縮力 $4 N$ と、時計と反対方向のモーメント $a_b \cdot 4 N$ とが作用し、断面は $A_0A_1A_2$ より $B_0B_1B_2$ に移動して平面保持の条件を満足することになる。

しかも ΔN は、 $\Delta\phi_t$ の 1 次の微小量にして $\Delta N = \frac{d}{d\phi_t} N(t) \Delta\phi_t$ と表現されるため、式 (2.4) の右辺を導いた場合と同様に、すなわち応力度 $\sigma(t)$ の増大量 $\Delta\sigma = \frac{d}{d\phi_t} \sigma(t) \cdot \Delta\phi_t$ に対しては、その弾性変形のみを考慮して、塑性変形は $\Delta\phi_t$ の 2 次の微小量として無視したのと同様に、 ΔN に対して弾性変形のみを考慮すると上記の変位 $A_0 C_0$ より、

$$\Delta N = K_b A_0 C_0 = \left(N_{bt} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right) \Delta \phi_t \dots \dots \dots \quad (f)$$

同様に図心 G_v に作用する圧縮力 $A N$ とモーメント $a_b \cdot A N$ とに対しても、塑性変形を無規して弾性変形のみを考慮すると、式 (3.3) と式 (3.9) とで規定される圧縮力とモーメントがコンクリートに作用する。

したがってこれらより先の引張力 4N を差し引くと、

$$\begin{aligned}
 \Delta N_{bt} &= -\Delta N + \frac{K_b}{K_v} \Delta N + \frac{a K_o}{S_v} a_b \Delta N \\
 &= -\frac{K_o}{K_b} \frac{(S_b + S_s)}{S_v} \left[N_{bt} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right] \Delta \phi_t \\
 \Delta M_{bt} &= \frac{S_b}{S_v} a_b \Delta N = a \frac{K_o}{K_b} \frac{S_b}{S_v} \left[N_{bt} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right] \Delta \phi_t \\
 \therefore \frac{d}{d \phi_t} N_{bt} &= -\frac{K_o}{K_b} \frac{(S_b + S_s)}{S_v} N_{bt} - K_o \frac{(S_b + S_s)}{S_v} \frac{S_n}{\phi_n} \quad \left. \right\} \\
 \frac{d}{d \phi_t} M_{bt} &= a \frac{K_o}{K_b} \frac{S_b}{S_v} N_{bt} + a K_o \frac{S_b}{S_v} \frac{S_n}{\phi_n} \\
 \end{aligned} \qquad \dots \qquad (3.20)$$

すなわちかかる方程式の右辺の N_{bt} と S_n/ϕ_n との係数は、式(3.14)、式(3.15)の右辺の係数に一致し、その物理的意義が解明された。

b) 次いで時刻 t のコンクリートのモーメント M_{bt} によるクリープの塑性変形が、何等も拘束されことなく自由に許される限り、 M_{bt} は一定値にとどまって何等も変化せず、単位水平距離 $ds=1.0$ あたりの断面の回転角—たわみ角—の増大量 $(\Delta\psi)_{st}$ は、式(2.12)の右辺の弾性変形に関する第1項を除くと、

$$(\Delta\psi)_{st} = \frac{d}{d\phi_t} (\Delta\psi)_b \Delta\phi_t = \frac{1}{S_b} M_{bt} \Delta\phi_t$$

しかし鋼材によりかかる塑性変形が拘束されていると、時計と反対方向の回転角 $(\Delta\psi)_{st}$ を打ち消すために、コンクリートには時計まわりのモーメント ΔM が作用し、その反作用として全体の図心 G_v を通る水平な中立軸には、時計と反対方向のモーメント ΔM が作用し、平面保持の条件を満足するよう断面が移動する。

しかもかかるモーメント ΔM は $\Delta\phi_t$ の1次の関数であるために、先の ΔN ないし $a_b \Delta N$ と同様に弾性変形のみを考慮すれば十分となり、先の $(\Delta\psi)_{st}$ に対し、

$$\Delta M = S_b (\Delta\psi)_{st} = M_{bt} \Delta\phi_t \quad \dots \quad (g)$$

その上に断面全体に作用する時計と反対方向のモーメントに対しては、式(3.9)によりコンクリートに圧縮力 $\frac{aK_b}{S_v} \Delta M$ とモーメント $\frac{S_b}{S_v} \Delta M$ とが作用し、時計まわりのモーメント ΔM を差し引くことにより、

$$\begin{aligned} \Delta N_{bt} &= \frac{aK_b}{S_v} \Delta M = a \frac{K_b}{S_v} M_{bt} \Delta\phi_t \\ \Delta M_{bt} &= -\Delta M + \frac{S_b}{S_v} \Delta M = -\frac{(S_s + a^2 K_b)}{S_v} M_{bt} \Delta\phi_t \\ \therefore \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} &= a \frac{K_b}{S_v} M_{bt}, \quad \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} = -\frac{(S_s + a^2 K_b)}{S_v} M_{bt} \end{aligned} \quad \dots \quad (3.21)$$

かかる方程式の右辺の M_{bt} の係数は、式(3.14)と式(3.15)の右辺の M_{bt} の係数に一致し、その物理的意義が解明された。

c) 時間的に変化するモーメント $M(t)$ が断面全体に作用し、微小時間 Δt の経過に伴い、

$$\Delta M(t) = \frac{d}{d\phi_t} M(t) \Delta\phi_t \quad \dots \quad (h)$$

だけ増大した場合には、 $\Delta\phi_t$ の1次の微小量であるために先の ΔN と ΔM と同様にその弾性変形のみを考慮すると式(3.9)により、

$$\frac{d}{d\phi_t} N_{bt} = a \frac{K_b}{S_v} \frac{d}{d\phi_t} M(t), \quad \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} = \frac{S_b}{S_v} \frac{d}{d\phi_t} M(t) \quad \dots \quad (3.22)$$

したがって式(3.20)ないし式(3.22)を加算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} &= -\frac{K_b}{K_b} \frac{(S_b + S_s)}{S_v} N_{bt} - K_b \frac{(S_b + S_s)}{S_v} \frac{S_n}{\phi_n} \\ &\quad + \frac{aK_b}{S_v} M_{bt} + \frac{aK_b}{S_v} \frac{d}{d\phi_t} M(t) \end{aligned} \quad \dots \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} &= a \frac{K_b}{K_b} \frac{S_b}{S_v} N_{bt} + a K_b \frac{S_b}{S_v} \frac{S_n}{\phi_n} - \frac{(S_s + a^2 K_b)}{S_v} \cdot M_{bt} \\ &\quad + \frac{S_b}{S_v} \frac{d}{d\phi_t} M(t) \end{aligned} \quad \dots \quad (3.24)$$

これが拡張された Kölppel-Müller の微分方程式であり、 $M(t)$ の時間的経過が判明するとその特解が求められる。しかも式(3.14)と式(3.15)とは同次微分方程式に転換されこの一般解に特解を加算すると解ける。

これを応用すると連続桁の中間支点における、塑性変形に伴う不静定モーメントも解析されることになる。

d) 特に $S_b = E_b J_b = 0$ 、すなわち S_v にくらべて無視できる場合には、式(3.14)、式(3.15)より、

$$M_{bt} = 0, \quad \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} = -\frac{K_b}{K_b} \frac{S_s}{S_v} \left(N_{bt} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right) \quad \dots \quad (3.25)$$

4. Klöppel-Müller の微分方程式の解析

(1) E. Müller の方法による一般解

先の式(3.14)、式(3.15)の連立微分方程式より、

$$N_{bt} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} = \bar{N}_{bt} \quad \dots \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{K_b}{K_b} \frac{(S_b + S_s)}{S_v}, \quad B = a \frac{K_b}{S_v}, \\ C &= a \frac{K_b}{K_b} \frac{S_b}{S_v}, \quad D = -\frac{(S_s + a^2 K_b)}{S_v} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4.2)$$

とおくと、

$$\frac{d}{d\phi_t} \bar{N}_{bt} = +A \bar{N}_{bt} + B M_{bt}, \quad \frac{d}{d\phi_t} M_{bt} = C \bar{N}_{bt} + D M_{bt} \quad \dots \quad (4.3)$$

特に $S_b = 0$ の式(3.25)より、

$$M_{bt} = 0, \quad \frac{d}{d\phi_t} \bar{N}_{bt} = A \bar{N}_{bt} \quad \dots \quad (4.4)$$

という同次微分方程式が導かれる。

a) したがってまず $S_b \neq 0$ の場合、

$$\bar{N}_{bt} = H_1 e^{r_1 \phi_t} M_{bt} = L e^{r_1 \phi_t} \quad \dots \quad (a)$$

とおいて式(4.3)に代入すると、

$$L/H = (r-A)/B = C/(r-D) \quad \therefore (r_1 - A)(r - D) = BC \quad \dots \quad (b)$$

$$\therefore r_1, r_2 = \frac{1}{2}(A+D) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A-D)^2 + 4BC} \quad \dots \quad (4.5)$$

かかる2根 r_1 と r_2 とは負数であり、

$$S_s = 0 \text{ にて } r_1 = 0, \quad S_b \rightarrow 0 \text{ にて } r_2 \rightarrow -1.0 \quad \dots \quad (c)$$

と計算される。しかも先の式(2.16)の λ_1 と λ_2 とに一致することも容易に証明される。

したがって関係式(a)、(b)における係数 H と L を r_1 に対して H_1 と L_1 、 r_2 に対して H_2 と L_2 とすると、 N_{bt} と M_{bt} とは次のように表現される。

$$\begin{aligned} N_{bt} &= H_1 e^{r_1 \phi_t} + H_2 e^{r_2 \phi_t} - K_b \frac{S_n}{\phi_n} \\ &= \frac{(r_1 - D)}{C} L_1 e^{r_1 \phi_t} + \frac{(r_2 - D)}{C} L_2 e^{r_2 \phi_t} - K_b \frac{S_n}{\phi_n} \end{aligned} \quad \dots \quad (4.6)$$

$$M_{bt} = \frac{(r_1 - A)}{B} H_1 e^{r_1 \phi_t} + \frac{(r_2 - A)}{B} H_2 e^{r_2 \phi_t} \quad \dots$$

$$-(r_2 - A)e^{r_1 \cdot \phi_t} M_0 V + C(e^{r_1 \cdot \phi_t} - e^{r_2 \cdot \phi_t}) \\ \cdot \left(\frac{K_0}{K_s} N + N_0 V + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right) \quad \dots \dots \dots (4.19)$$

ここに 2 根 r_1 と r_2 および係数 A, B, C, D は、断面の定数 α, β, γ と距離 a とにより、式 (4.12)，式 (4.13) にて規定される。これが Klöppel-Müller の一般解である。 N_{st} と M_{st} とは式 (3.18) の力学的平衡条件より定まる。すなわち、

$$\begin{aligned} N_{st} &= N - (N_{bt} - N_0 V), \\ M_{st} &= M + (-a_s)N - (M_{bt} - M_0 V) - a(N_{bt} - N_0 V) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.20)$$

しかも鋼材おののの分担する圧縮力とモーメントとは、 $N_{st} = N_s, M_{st} = M_s$ とおいて式 (3.11) に代入することにより量量化される。

f) 距離 $a=0$ の場合、式 (4.10) ないし式 (4.13) より、

$$\begin{aligned} r &= 0, a_b = a_s = 0, A = -\alpha, B = 0, C = 0, D = -\beta \\ r_1 &= -\beta, r_2 = -\alpha, \text{ または } r_1 = -\alpha, r_2 = -\beta \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.21)$$

これらを式 (4.18)，式 (4.19) の Klöppel-Müller の一般解に代入すると、

$$\begin{aligned} N_{bt} &= e^{-\alpha \phi_t} \left(\frac{K_0}{K_s} N + N_0 V \right) - (1 - e^{-\alpha \phi_t}) K_b \frac{S_n}{\phi_n} \\ M_{bt} &= e^{-\beta \phi_t} [(1 - \beta)M + M_0 V] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.22)$$

これより圧縮力によるクリープの塑性変形と乾燥収縮の塑性変形とは、モーメント M_{bt} に何等の影響を与えないこと、モーメントによるクリープの塑性変形は逆に N_{bt} に何等の影響を与えないこと、 $\beta = S_s/S_v = 0, S_b = S_v$ の場合には $M_{bt} = [M + M_b V]$ が一定値となり、コンクリートのモーメントによるクリープの塑性変形は鋼材にて拘束されぬことが判明する。

g) 距離 $a=0, M=0, M_0 V=0, N \neq 0, N_0 V=0, S_n/\phi_n \neq 0$ の場合、上述の式 (4.22) と式 (4.20) により

$$\begin{aligned} N_{bt} &= e^{-\alpha \phi_t} (1 - \alpha) N - (1 - e^{-\alpha \phi_t}) K_b \frac{S_n}{\phi_n}, n \mu = \alpha/(1 - \alpha) \\ N_{st} &= N - N_{bt} = \left[\frac{1 + n \mu - e^{-\alpha \phi_t}}{n \mu} \right] \alpha N + (1 - e^{-\alpha \phi_t}) \frac{K_0}{n \mu} \frac{S_n}{\phi_n} \\ (1 - \alpha)N/F_b &= \sigma_{bt}, N_{bt}/F_b = \sigma_{bt}, \alpha N/F_s = \sigma_{st}, N_{st}/F_s = \sigma_{st} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \sigma_{bt} &= \sigma_{bt} e^{-\alpha \phi_t} - E_b \frac{S_n}{\phi_n} (1 - e^{-\alpha \phi_t}) \\ \sigma_{st} &= \sigma_{st} \left[\frac{1 + n \mu - e^{-\alpha \phi_t}}{n \mu} \right] + \frac{E_s}{n \mu} \frac{S_n}{\phi_n} (1 - e^{-\alpha \phi_t}) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.23)$$

かかる σ_{bt} と σ_{st} との関係式は 1939 年に F. Dischinger 博士が発表なされた⁹⁾。いいかえれば F. Dischinger の解析方法とは Klöppel-Müller の方法にて、 $a=0, M=0, M_0 V=0, N_0 V=0$ の場合である。

(3) $S_b/S_v = 0$ または $S_s/S_v = 0$ と見做せる場合

a) $S_b/S_v = (1 - \beta - r) = 0$ と見做せる場合、 $M_0 V = 0$ にして式 (4.12)，式 (4.13) より、

$$\begin{aligned} A &= -\alpha \beta, B = (1 - \beta)/\alpha, C = 0, D = -(\beta + r) = -1.0 \\ r_1 &= A = -\alpha \beta, r_2 = D = -1.0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.24)$$

これらを式 (4.18) と式 (4.19) とに代入すると

$$\left. \begin{aligned} M_{bt} &= 0 \\ N_{bt} &= e^{-\alpha \beta \phi_t} \left[\frac{K_0}{K_s} N + N_0 V + \frac{\alpha K_0}{S_v} M \right] \\ &\quad - (1 - e^{-\alpha \beta \phi_t}) K_b \frac{S_n}{\phi_n} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.25)$$

かかる N_{bt} は先の式 (4.9) の N_{bt} に一致する。すなわち、Klöppel-Müller の一般解は $S_b/S_v \neq 0$ を前提として求められたが、 $S_b/S_v = 0$ の場合にも成立する。

特に $S_b/S_v = 0$ にて $\alpha = 0$ の場合、式 (4.24) において $\beta = 1.0$ となり、式 (4.25) の N_{bt} は式 (4.22) の N_{bt} に一致する。

b) $S_s/S_v = \beta = 0$ と見做せる場合、すなわち理想化された PC 柱では式 (4.12)，式 (4.13) より、

$$\begin{aligned} A &= -\alpha(1 - r), B = \gamma/\alpha, C = -\alpha \alpha(17r), D = -r \\ r_1 &= 0, r_2 = A + D = -\alpha - r + \alpha \gamma \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.26)$$

たとえば図-5 の現実の PC 柱では断面の定数値が次のように算定される。

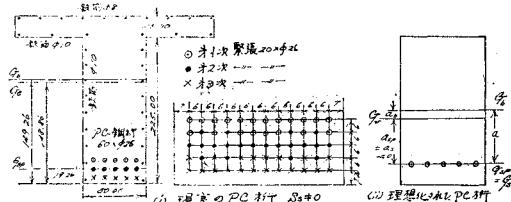


図-5 現実の PC 柱 $S_s \neq 0$ と理想化された PC 柱 $S_s = 0, K_{sp} = K_s$

$$E_b = 350 \text{ t/cm}^2, E_{sp} = E_e = 2100 \text{ t/cm}^2, \eta = E_e/E_b = 6.0$$

$$F_b = 25500.00 \text{ cm}^2, F_{sp} = 318.60 \text{ cm}^2, F_e = 20.00 \text{ cm}^2$$

$$J_b = 159048713.00 \text{ cm}^4, J_{sp} = 22939.00 \text{ cm}^4,$$

$$J_e = 92736.00 \text{ cm}^4$$

$$\eta_b = 149.26 \text{ cm}, \eta_{sp} = 19.26 \text{ cm}, \eta_e = 148.86 \text{ cm}$$

$$\therefore \eta_s = 26.91 \text{ cm}, a = \eta_b - \eta_s = 129.80 \text{ cm},$$

$$\alpha = \frac{K_s}{K_0} = \frac{K_0}{K_b} = \frac{338.6}{4588.6} = 0.07366,$$

$$\beta = S_s/S_v = \frac{431643}{31633992} = 0.01365$$

$$(1 - \beta - r) = S_b/S_v = \frac{26508118}{31633992} = 0.83796$$

$$r = \frac{\alpha^2 K_0}{S_v} = 0.14839$$

すなわち S_b は S_v の 84%， $\alpha^2 K_0$ は 15%， S_s はわずかに 1.4% を占める。これより $\beta = 0$ と見做しても支障のないことが推定される。しかも PC 柱では PC ケーブルを緊張して定着する時刻を $t=0$ とするために、

$$\text{プレストレス } N_0 V = 0, M_0 V = 0 \dots \dots \dots (4.27)$$

かかる場合の式 (4.26) の数値を式 (4.18) と式 (4.19) に代入すると、

$$N_{bt} = -\frac{1}{r_2} \left\{ [1 - (1+r_2)e^{r_2 \cdot \phi_t}] \frac{r}{a} M + [r - (r+r_2)e^{r_2 \cdot \phi_t}] \cdot (1-\alpha) N + (r+r_2)(1-e^{r_2 \cdot \phi_t}) K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.28)$$

$$M_{bt} = -\frac{1}{r_2} \left\{ [\alpha - (\alpha + r_2)e^{r_2 \cdot \phi_t}] (1-r) M - a(r+r_2) \cdot (1-e^{r_2 \cdot \phi_t}) [(1-\alpha) N + K_b \frac{S_n}{\phi_n}] \right\} \quad \dots \dots \dots (4.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore N_{bo} &= [N_{bt}]_{t=0} = (1-\alpha)N + r M/a, \\ M_{bo} &= [M_{bt}]_{t=0} = (1-r)M \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.30)$$

すなわちこの N_{bo} と M_{bo} とは式(3.3)と式(3.9)より求めた値に一致する。しかも逆に N_{bo} と M_{bo} との関数として N と M を求め、これらを式(4.28)の N_{bt} に代入すると次の値となる。

$$\left. \begin{aligned} N_{bt} &= N_{bo} - N_{zt}, \\ N_{zt} &= \frac{(r+r_2)}{r_2} \left[N_{bo} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} + \frac{r}{(r+r_2)} \frac{M_{bo}}{a} \right] (1 - e^{r_2 \cdot \phi_t}) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.31)$$

さらに式(4.10)と式(4.26)とを適用すると、

$$\begin{aligned} (r+r_2)/r_2 &= \frac{K_b}{K_b} \frac{S_b}{S_v} / \left(\frac{K_b}{K_b} \frac{S_b}{S_v} + \frac{a^2 K_b}{S_v} \right) = \frac{S_b}{(S_b + a^2 K_b)} \\ \gamma/(r+r_2) &= -\gamma/\alpha(1-r) = -a^2 \frac{K_b}{S_v} / \frac{K_b}{K_b} \frac{S_b}{S_v} = -\frac{a^2 K_b}{S_v} \\ \therefore N_{zt} &= \frac{S_b}{(S_b + a^2 K_b)} \left[N_{bo} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} - \frac{a^2 K_b}{S_b} \frac{M_{bo}}{a} \right] \cdot (1 - e^{r_2 \cdot \phi_t}) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.32)$$

このように表現された N_{zt} は、Berlin 大学 K. Sattler 教授の 1956 年の論文¹⁰⁾に発表なされた公式である。

(4) $S_s/S_u = \beta = 0$ と見做せる PC 桁の N_{zt} の意義
式(4.31)の N_{bt} を式(4.20)に代入し、

$$M_b V = 0, N_b V = 0, M_{st} = 0 \quad (\because \beta = S_s/S_v = 0)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} N_{st} &= [N_{st}]_{t=0} + N_{zt}, \quad M_{bt} = [M_{bt}]_{t=0} + aN_{zt}, \\ [N_{st}]_{t=0} &= N - N_{bo} = (V_0 + \Delta V_0) - N_{bo} \\ [M_{bt}]_{t=0} &= M - a_s N + aN_{bo} \\ &= M_D + (M_0 + \Delta M_0) + e_{sp}(V_0 + \Delta V_0) - aN_{bo} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.34)$$

この右辺の ΔV_0 と ΔM_0 とは $\beta \neq 0$ の場合を含めて 4.6 節で検討するが、かかる式(4.33)より次の 3 点が明確となる。

a) 第 1 に式(4.33)の M_{bt} は $a = \eta_b - \eta_s > 0$ の場合、すなわち長期荷重により時計と反対方向のモーメント M_D が加わり、これを打ち消して PC ケーブルの緊張力により時計まわりのモーメントが加えられて、これが M_D を打ち消して $M_{bo} = [M_{bt}]_{t=0}$ が時計まわりの負の値のモーメントとなると、式(4.32)の $(-)M_{bo}/a$ は正の値となり、塑性変形に伴って M_{bt} が時計と反対方向に $a \cdot N_{zt}$ だけ増大することになる。

かかる意味において鋼桁を使用した $\beta \neq 0$ の合成桁の時計と反対方向の一定モーメント M が作用したクリープによる塑性変形において、時計と反対方向の M_{bt} が減少していくことと異なって来る。

b) 第 2 に先の図-5 に示す PC 桁では $K_e/K_s = K_e/(K_{sp} + K_e) = 5.9\%$ と算定されるが、 $K_e/K_s = 0$ の場合すなわち鉄筋の存在を無視した場合には、 $e_{sp} = a_{sp} - a_s = 0$ にして、 N_{st} は PC ケーブルに加わる圧縮力 N_{sp} に相等しくなる。すなわち N_{st} は塑性変形に伴う PC ケーブルの緊張力の減少量に相当する。しかも式(4.34)において 4.6 節で解説するように、

$$[N_{sp}]_{t=0} = [N_{st}]_{t=0} = \Delta V_0 \quad \dots \dots \dots (4.35)$$

と ΔV_0 を算定すると、時刻 $t=0$ の弾性変形後の緊張力 V_0 は、コンクリートの圧縮力 N_{bo} に相等しく、この場合の PC ケーブルの引張応力度を σ_{zV_0} 、PC ケーブルの因心 G_{sp} の位置におけるその緊張力 V_0 による、コンクリートの曲げ圧縮応力度を σ_{bV_0} 、長期荷重によるこの位置の曲げ圧縮応力度を σ_{bg} と規定すると、式(4.32)の K. Sattler 公式は次のように転換される。

$$\left. \begin{aligned} N_{zt} &= V_0 \left(1 + \sigma_{bg} / \sigma_{bV_0} + \frac{S_n}{\phi_n} \frac{E_b}{\sigma_{bV_0}} \right) (1 - e^{-\alpha \phi_t}) \\ \alpha &= n \sigma_{bV_0} / (n \sigma_{bV_0} + \sigma_{zV_0}), \quad n = E_{sp}/E_b \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.36)$$

$$\begin{aligned} \text{なぜならば, } K_e &= 0, \quad K_s = K_{sp}, \quad 1/K_0 = 1/K_s + 1/K_b, \\ \sigma_{zV_0} &= \frac{n E_b}{K_s} N_{bo}, \quad \sigma_{bV_0} = E_b \left(\frac{1}{K_b} + \frac{a^2}{S_b} \right) N_{bo}, \\ (\sigma_{bV_0} + \sigma_{bg}) &= E_b \left(\frac{N_{bo}}{K_b} - a \frac{M_{bo}}{S_b} \right) \\ \therefore \alpha &= \left(\frac{1}{K_b} + \frac{a^2}{S_b} \right) / \left(\frac{1}{K_b} + \frac{a^2}{S_b} \right) \\ &= \frac{K_b}{K_b} \frac{(S_b + a^2 K_b)}{S_b} = -(r_2) \\ V_0 \left(1 + \frac{\sigma_{bg}}{\sigma_{bV_0}} + \frac{S_n}{\phi_n} \frac{E_b}{\sigma_{bV_0}} \right) &= \frac{S_b}{(S_b + a^2 K_b)} \left[N_{bo} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} - \frac{a^2 K_b}{S_b} \frac{M_{bo}}{a} \right] \end{aligned}$$

と計算できるからである。これは Stuttgart 工科大学 F. Leonhardt 教授の書物¹¹⁾に使用された公式である。

c) したがって Klöppel-Müller の一般解式(4.18)、(4.19)と、K. Sattler の公式(4.32)と F. Leonhardt の公式(4.36)を比較すると $S_s/S_v = \beta = 0$ にして $K_e/K_s = 0$ の場合に限り F. Leonhardt 公式を使用すべきであること、 $\beta \neq 0$ と見做せるが $K_e/K_s \neq 0$ の場合には K. Sattler 公式により N_{zt} を定め、式(4.31)、(4.33)、(4.34)により N_{bt} と M_{bt} と N_{st} を定め、 $N_{st} = N_s$ とおいて式(3.11)より $N_{sp} = N_{sp}$ を求め、緊張力の減少量とすべきであること、 $\beta \neq 0$ の場合には Klöppel-Müller の一般解より N_{bt} と M_{bt} を定め、これを式(4.20)に代入して N_{st} と M_{st} を定め、これらより式(3.11)を応用して鋼材のおののおのの分担する圧縮力とモーメントとを定めなければならないことが判明する。

(5) 時間的“ずれ”を考慮した連続合成桁のプレス トレス N_b^N と M_b^N

a) 鋼桁をまず中間支点を越えて施工して連続桁とな

らしめ、次いで圧縮領域のコンクリート床版を施工して、時刻 $t=0$ において前荷重を載荷せしめ、この領域のコンクリートにプレストレス N_b^V と M_b^V を与え、次いで引張領域のコンクリートを施工して、その硬化の後に時刻 $t=t_0$ において前荷重を撤去し、全区間にプレストレス N_b^N と M_b^N を与えるか、中間支点を上昇せしめた後に、時刻 $t=0$ においてコンクリート床版を施工しその硬化の後に、時刻 $t=t_0$ において中間支点を降下せしめて全区間にプレストレス N_b^N と M_b^N を与えるか、さらにこの時刻 $t=t_0$ にて PC ケーブルにより断面全体にプレストレスを与える、コンクリートの分担するプレストレスを N_b^N と M_b^N とすると、時刻 $t=t_0$ よりはじまるクリープ係数 ϕ_t' の、時刻 $t=0$ よりはじまるクリープ係数 ϕ_t に対する関係は式(1.3)で規定せられ、その時刻 $t=t_0$ の値 ϕ_t は式(1.4)より求められるため、

$$\phi_t' = \phi_t - \phi_0 \dots \quad (4.42)$$

しかも鋼桁を架設した後にコンクリート床版を施工するため、この重量も鋼桁の自重も鋼桁が負担することになり、式(3.12)のモーメント M の右辺の M_D には自重によるモーメントが含まれないことになる。

① したがって ϕ_t の最終値 ϕ_n に対して ϕ_t が無視できる程に小さければ、すでに式(3.19)において明示したように、

$$N_0^V = N_b^V + N_b^N, M_0^V = M_b^V + M_b^N, M_D = 0 \dots \quad (4.43)$$

とおいて先の式(4.15)、式(4.16)と式(4.20)とより、 N_{bt} と M_{bt} と N_{st} と M_{st} とが定まる。この場合にはプレストレス N_b^N と M_b^N とは全区間に作用して、圧縮領域の N_b^V と M_b^V とを打ち消す役割することになる。

しかも N_{st} と M_{st} とには鋼桁の分担している自重と床版の重量、前荷重の載荷と撤去、中間支点の上昇と降下、これらに伴う圧縮力とモーメントとが含まれていない。いいかえれば鋼材の分担するかかる後者の圧縮力とモーメントとは、コンクリートの塑性変形に無関係な一定値として取り扱うことができる。しかし N_b^N と M_b^N とは相互に無関係でないために次のようにも取り扱う方法がある。

② すなわち前荷重の撤去、または支点の降下ないし PC ケーブルの緊張力による、塑性変形に基づく中間支点の不静定モーメントをまず定量化すると、これより任意の断面に作用するモーメント $[M]^N$ と圧縮力 N とが確定するために

$$N_b^N = (1-\alpha)N + (r/a)[M]^N, M_b^N = (1-\beta-r)[M]^N$$

かかる初期値を有するクリープの塑性変形においては、先の式(4.14)においてモーメント $M=[M]^N$ と転換すれば十分なことになる。すなわち、プレストレス N_b^N と M_b^N とは Klöppel-Müller の一般解式(3.18)、(3.19)のモーメント M と圧縮力 N の中に含まれることになる。

したがって式(4.20)より定まる N_{st} と M_{st} とには、鋼桁と床版の重量、前荷重の載荷、および支点の上昇による、モーメントと圧縮領域の引張力とが含まれず、これらはコンクリートの塑性変形に無関係に一定値として取り扱うことができる。

b) ϕ_0 が最終値 ϕ_t に対して無視できない場合にも、中間支点における塑性変形に伴う不静定モーメント M_t を、別途に取り扱うものとするとクリープ係数 $\phi_t' = (\phi_t -$

$-\phi_0)$ を使用するのみで、a) ① ないし a) ② と同様な取り扱いができる。すなわち中間支点の役割とは両端単純支持の単純桁の、中間支点の位置におけるたわみを拘束する支保工であり、中間支点の塑性変形に伴う不静定反力ないし不静定モーメントを別途に考慮とするため、中間支点は弾性変形に対してはたわみを拘束するが、塑性変形に対しては何等の拘束のない状態と見做せる。

① かかる場合に時刻 $t=0$ の前荷重の載荷時期における、圧縮領域におけるプレストレス N_b^V と M_b^V とは、圧縮域のみ先の式(3.7)の剛度 S_b を使用して、まず中間支点の弾性変形に伴う不静定モーメントを定め、これらと前荷重によるモーメントとより断面のモーメントを定めると、 N_b^V と M_b^V とを先の式(3.9)により算定することができる。これは圧縮域にのみ存在するために式(4.43)と同様な方法で処理できる。

② 他方、時刻 $t=t_0$ の前荷重の撤去、中間支点の降下ないし PC ケーブルの緊張力に対しては、断面全体の剛度 S_0 、厳密には圧縮域に対し後述する式(5.2)の S_{vt} 、残りの区間には S_s を適用して、まず中間支点の弾性変形に伴う不静定モーメントを求めれば、前荷重の撤去と PC ケーブルの緊張力による断面の静定モーメントと不静定モーメントとより、断面のモーメント $M=[M]^N$ が定められる。

したがって式(4.18)と式(4.19)との Klöppel-Müller の一般解と、式(4.20)の力学的平衡条件式を適用するにあたり、

$$\left. \begin{aligned} N_0^V &\rightarrow N_b^V, M_{er^t \cdot \phi_t} \rightarrow [M]^N e^{r_t \cdot \phi_t}, N_{er^t \cdot \phi_t} \rightarrow N_{er^t \cdot \phi_t'} \\ M_0^V &\rightarrow M_b^V, M_{er^t \cdot \phi_t} \rightarrow [M]^N e^{r_t \cdot \phi_t}, N_{er^t \cdot \phi_t} \rightarrow N_{er^t \cdot \phi_t'} \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.44)$$

という転換を実施すれば十分であることが判明する。

しかもこのように中間支点の塑性変形に伴う不静定モーメントは、別途に解析するものとして Klöppel-Müller の一般解を合成桁に適用すると、まずコンクリートの塑性変形の影響を過少にならしめるためには、クリープ係数 ϕ_t と収縮ひずみ度 S_t との最終値を最小ならしめるように、プレキャスト ブロックの床版を採用し、スタッドまたはジベルに接する部分の空間は、早強ボルトランドセメントを使用して場所打ちコンクリートで施工しなければならないことが判明する。

c) 参考のために時刻 $t=0$ の弾性変形はもちろん、時刻 $t=t_0$ までの塑性変形に基づくたわみが完全に拘束された場合には、式(3.23)、(3.24)の拡張された Klöppel-Müller の微分方程式を応用することができる。

すなわち式(2.9)と式(3.10)により、

$$\left. \begin{aligned} (A\psi)_b &= \left[M_{bt} + \int_0^{\phi_t} M_{bt} d\phi_t \right] \frac{ds}{E_b J_b} = 0, \\ (A\psi)_s &= M_{st} \frac{ds}{E_s J_s} = 0, \quad \therefore M_{bt} = M_0 e^{-\phi_t}, M_{st} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.45)$$

これらを式(3.23)、(3.24)と式(4.20)の力学的平衡条件に代入すると次の4個の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi_t} N_{bt} &= -\alpha \left(N_{bt} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right), \\ \frac{d}{d\phi_t} M(t) &= -\alpha \left(N_{bt} + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right) - M_0^V e^{-\phi_t}, \\ N_{st} + N_{bt} &= N_0^V, \\ M(t) - aN_{bt} &= M_0^V e^{-\phi_t} - M_0^V - aN^V, \end{aligned}$$

これより N_{bt} と M_{st} 、および $M(t)$ とその初期値

$[M(t)]_{t=0}$ が定まり、

$$\begin{aligned} N_{bt} &= N_0 V e^{-\beta \phi_t} - K_b \frac{S_n}{\phi_n} (1 - e^{-\alpha \phi_t}), \quad N_{st} = N_0 V - N_{bt} \\ M(t) &= - \left[M_0 V (1 - e^{-\alpha \phi_t}) + a \left(N_0 V + K_b \frac{S_n}{\phi_n} \right) \right] (1 - e^{-\alpha \phi_t}) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.46)$$

したがって N_{bt} と M_{bt} と N_{st} との $\phi_t = \phi_0$ における値を N_b^N , M_b^N , N_s^N とすると、時刻 $t=t_0$ における中間支点の降下ないし PC ケーブルの緊張力による、圧縮力 N とモーメント $M=[M]^N$ の弾性変形に伴う初期値を加算すれば、

$$[N_{bt}]_{t=t_0} = N_b^N + \left(\frac{K_0}{K_s} \right) N + \left(\frac{a K_0}{S_v} \right) [M]^N,$$

$$[M_{bt}]_{t=t_0} = M_b^N + (S_b/S_v) [M]^N$$

$$[N_{st}]_{t=t_0} = N_s^N + \left(\frac{K_0}{K_b} \right) N - \left(\frac{a K_0}{S_v} \right) [M]^N,$$

$$[M_{st}]_{t=t_0} = (S_s/S_v) [M]^N$$

かかる時刻 $t=t_0$ の初期値に対しては式 (4.18), (4.19) の一般解において、

$$\begin{aligned} \phi_t \rightarrow \phi'_t (= \phi_t - \phi_0), \quad M \rightarrow [M]^N, \quad M_0 V \rightarrow M_b^N (= M_0 V e^{-\phi_0}), \\ N_0 V \rightarrow N_b^N \left[= N_0 V e^{-\alpha \phi_0} - K_b \frac{S_n}{\phi_n} (1 - e^{-\alpha \phi_0}) \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.47)$$

という転換をなせば十分であることが判明する。ここに $N_0 V$ と $M_0 V$ とはプレキャストの床版に、鋼桁と一緒に化する直前に与えられているプレストレスである。

鋼材の N_{st} と M_{st} とは、時刻 $t=t_0$ 以降の圧縮力とモーメントの増大量の力学的平衡条件より定まり、

$$\begin{aligned} M_{st} &= [M]^N + (-a_s) N + M_0 V e^{-\phi_0} + a N_0 V e^{-\alpha \phi_0} \\ &\quad - a K_b \frac{S_n}{\phi_n} (1 - e^{-\alpha \phi_0}) - M_{bt} - a N_{bt} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.48)$$

$$N_{st} = N + N_b^N - N_{bt}$$

しかしながら式 (4.47), (4.48) はコンクリートの塑性変形の、時刻 $t=t_0$ までの影響を過少に評価するため、先の式 (4.44) の転換を使用することが望ましい。

(6) PC ケーブルの補正值 ΔV_0 と ΔM_0 の算定

ポストラシヨン方式のプレストレス V_0 と M_0 とは、PC ケーブルの初期導入引張応力度か、レラクセーションの補正を加えた導入引張応力度より算定することができる。いいかえれば時刻 $t=0$ の弾性変形を終了した直後か、その後のかなり早い時期におけるレラクセーションを終了した時期の緊張力によるものである。 ΔN_0 と ΔM_0 というプレストレスの補正值は時刻 $t=0$ の弾性変形終了直後の N_0 と M_0 とより算定できる。

すなわち鉄筋の存在を無視している式 (4.35) でも判明するように、 ΔV_0 は時刻 $t=0$ の弾性変形に伴う式 (3.3), (3.9) の N_{sp} という、PC ケーブルのプレストレス（緊張力）の減少量に相等しいとして算定される。同様に ΔM も式 (3.9) の M_{sp} という PC ケーブルの分担する、時計と反対方向のモーメントにその大きさが相等しいとして算定される。

この場合に PC ケーブルの緊張力の反作用として、圧縮力 ($V_0 + \Delta V_0$) と時計と反対方向のモーメント ($M_0 + \Delta M_0$)、同じく時計と反対方向のモーメント M_D が断面全体に作用するために式 (3.4) と式 (3.9) により、

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= N_{sp} = \frac{K_{sp}}{K_v} (V_0 + \Delta V_0) + \frac{\alpha_{sp} K_{sp}}{S_v} \\ &\quad \cdot [M_D + (M_0 + \Delta M_0) + a_{sp} (V_0 + \Delta V_0)] \end{aligned}$$

$$\Delta M_0 = M_{sp} = \frac{S_{sp}}{S_v} [M_D + (M_0 + \Delta M_0) + a_{sp} (V_0 + \Delta V_0)]$$

$$\therefore \Delta V_0 = \left[\frac{K_v}{K_v'} \frac{(S_v - S_{sp})}{S_v'} - 1 \right] V_0 + \frac{(S_v - S_{sp} - S_v')}{(\eta_{sp} - \eta_v) S_v'} [M_0 + M_D] \quad \dots \dots \dots (4.49)$$

$$\Delta M_0 = \frac{S_{sp}}{S_v'} [(\eta_{sp} - \eta_v) V_0 + M_0 + M_D] \quad \dots \dots \dots (4.50)$$

ここに η_v' は、PC ケーブルを除いた断面の図心 G_v' を通る水平な中立軸と桁下縁との距離であり、 K_v' と S_v' とはその断面の剛度にして次のように規定される。

$$\begin{aligned} K_v' &= K_v - K_{sp}, \\ S_v' &= S_v - S_{sp} - (\eta_v' - \eta_v)^2 K_v' - (\eta_{sp} - \eta_v)^2 K_{sp} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.51)$$

鋼桁を使用した連続合成桁においては、中間支点付近の引張域に PC ケーブルを使用する。まず $M_D = 0$, $M_0 = 0$ として ΔV_0 と ΔM_0 を定め、中間支点の弾性変形に伴う不静定モーメントを定めて断面の M_D を決定し、負の値の M_D による補正を加える。 $S_{sp} = 0$ にて $\Delta M = 0$ となるが、 ΔV_0 は V_0 の 5 % 程度になる。

鉄筋の存在を無視した PC 桁では、

$$\begin{aligned} K_{sp} &= K_s, \quad K_v' = K_b, \quad S_v' = S_b, \quad \eta_v' = \eta_b, \quad \eta_{sp} = \eta_s, \\ a_s &= (\eta_{sp} - \eta_s) = (-a K_0 / K_{sp}) \quad \text{のため} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= \left[\frac{K_{sp}}{K_b} + \frac{a^2 K_0}{S_b} + \frac{K_{sp}}{K_b} \frac{a^2 K_0}{S_b} \right] V_0 - a \frac{K_{sp}}{S_b} (M_0 + M_D) \\ \Delta M_0 &= \frac{S_{sp}}{S_b} [M_0 + M_D - a V_0], \quad S_{sp} = 0 \quad \text{ならば} \quad \Delta M_0 = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.52)$$

$$\alpha = K_{sp} / (K_b + K_{sp}) = 0.07, \quad \gamma = a^2 K_0 / S_b = 0.14$$

$[M_D + M_0] / a V_0 = (0.4 \sim 1.0) \quad \therefore \Delta V_0 / V_0 = (7 \sim 18) \%$ と計算され、無視できない大きさとなる。

5. Klöppel-Müller の一般解の応用

(1) Fritz-Wippel の等価換算剛度の規定

$$\psi_F \cdot \phi_t = \int_0^{\phi_t} N_{bt} d \phi_t / N_{bt}, \quad \psi_J \cdot \phi_t = \int_0^{\phi_t} M_{bt} d \phi_t / M_{bt} \quad \dots \dots \dots (a)$$

という先の式 (2.6) の右辺の N_{bt} と M_{bt} の値に、先の Klöppel-Müller の一般解の $M \neq 0$ に対応した式 (4.14), $N \neq 0$, $N_0 V = 0$ の式 (4.16), $S_n / \phi_n \neq 0$ の式 (4.17) を適用して積分を実施すると、 $\psi_F \phi_t$ も $\psi_J \phi_t$ も $M \neq 0$ と $N \neq 0$ と $S_n / \phi_n \neq 0$ とに無関係に確定する。コンクリートの時刻 $t > 0$ の等価換算剛度を、

$$K_{bt} = \frac{K_b}{(1 + \psi_F \cdot \phi_t)}, \quad S_{bt} = \frac{S_b}{(1 + \psi_J \cdot \phi_t)} \quad \dots \dots \dots (5.1)$$

と規定して、鋼材の剛度 K_s と S_s とともに断面全体の剛度 K_{vt} , K_{ot} , S_{vt} と距離 a_{bt} , a_{st} とを、先の 3.1 節

の K_v , K_o , S_v , a_b , a_s と同様な方法で定めると, コンクリートが塑性変形をなした場合にも, 弹性変形に伴う式 (3.3) と式 (3.9) と同様な関係式が成立する。

いいかえれば断面にモーメント M と圧縮力 N とモーメント $e_t \cdot N$ と圧縮力 N_{sch} とモーメント $a_{bt}N_{sch}$ が作用するものとして, N_{bt} と M_{bt} と N_{st} と M_{st} とが求められ, O. Mohr 面積モーメント法の弹性荷重に使用するたわみ角—断面の回転角—($\Delta\psi$) も定まる。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} K_{vt} &= K_{bt} + K_s = \frac{(1+\alpha\psi_F\phi_t)K_o}{(1+\psi_F\phi_t)\alpha(1-\alpha)}, \\ K_{ot} &= \frac{K_{bt}K_s}{K_{vt}} = \frac{K_o}{(1+\alpha\psi_F\phi_t)}, \\ S_{vt} &= S_{bt} + S_s + a^2K_{ot} = \left[\frac{(1-\beta-r)}{(1+\psi_F\phi_t)} + \beta + \frac{r}{(1+\alpha\psi_F\phi_t)} \right] S_v, \\ a_{bt} &= a \frac{K_{ot}}{K_{bt}} = a \alpha \left(\frac{1+\psi_F\phi_t}{1+\alpha\psi_F\phi_t} \right), \\ a_s &= -a \frac{K_{ot}}{K_s} = -\frac{a(1-\alpha)}{(1+\alpha\psi_F\phi_t)}, \\ e_t &= a_{bt} - a_b = a \frac{\alpha(1-\alpha)\psi_F\phi_t}{(1+\alpha\psi_F\phi_t)}, \\ N_{sch} &= K_{bt} \frac{S_n}{\phi_n} \phi_t = \frac{K_b}{(1+\psi_F\phi_t)} \frac{S_n}{\phi_n} \phi_t \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

と表現され, e_t は時刻 $t=0$ の全体の図心 G_v と時刻 $t>0$ の全体の図心 G_{vt} との距離である。 N_{sch} はコンクリートの図心 G_b に引張力として作用し, その反作用として断面全体に圧縮力とモーメントを生ずることになる。以下に $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ を具体的に求める。

a) 断面に一定のモーメント M が作用している場合は式 (4.14) により,

$$\left. \begin{aligned} \psi_F\phi_t &= \psi_{FM}\phi_t = [(E-1)/r_1 - (F-1)/r_2]/(E-F) \\ \psi_J\phi_t &= \psi_{JM}\phi_t = \left[\frac{(r_1-A)(E-1)}{r_1} - \frac{(r_2-A)(F-1)}{r_2} - r_1 + r_2 \right] / \\ &\quad \cdot [r_1-A)E - (r_2-A)F] \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$$E = (1+r_1)e^{r_1 \cdot \phi_t}, F = (1+r^2)e^{r_2 \cdot \phi_t} \quad \dots \quad (5.4)$$

これを式 (5.1) と式 (5.2) とに代入すると,

$$\left. \begin{aligned} N_{bt} &= \left(\frac{a_{bt}K_{bt}}{S_{vt}} \right) M = \left(\frac{aK_{ot}}{S_{vt}} \right) M, \quad M_{bt} = \left(\frac{S_{bt}}{S_{vt}} \right) M \\ N_{st} &= \left(\frac{a_{st}K_s}{S_{vt}} \right) M = -\left(\frac{aK_{ot}}{S_{vt}} \right) M, \quad M_{st} = \left(\frac{S_s}{S_{vt}} \right) M \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

これらが式 (4.14) の N_{bt} と M_{bt} , 式 (4.20) の N_{st} と M_{st} に一致することは, 式 (4.10)～式 (4.13) を用いて証明される。

b) 断面の時刻 $t=0$ の図心 G_v に圧縮力 N が作用する場合は $N_0^V=0$ とおいた式 (4.16) により,

$$\left. \begin{aligned} \psi_F\phi_t &= \psi_{FN}\phi_t = [-H+J+D(H/r_1-J/r_2)]/ \\ &\quad \cdot [r_1+r_2-(r_1-D)H+(r_2-D)J] \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

$$\psi_J\phi_t = \psi_{JN}\phi_t = [-H/r_1+J/r_2]/(-H+J) \quad (5.7)$$

$H = (1-e^{r_1 \cdot \phi_t})$, $J = (1-e^{r_2 \cdot \phi_t})$ (5.7)

これらを式 (5.1), (5.2) に代入して剛度と距離 e_t を

求めると,

$$\left. \begin{aligned} N_{bt} &= \frac{K_{bt}}{K_{vt}} N + \frac{aK_{ot} \cdot e_t N}{S_{vt}} = K_{ot} \left(\frac{1}{K_s} + \frac{a \cdot e_t}{S_{vt}} \right) N, \\ M_{bt} &= \frac{S_{bt}}{S_{vt}} e_t N \\ N_{st} &= \frac{K_s}{K_{vt}} N - \frac{aK_{ot} \cdot e_t N}{S_{vt}} = K_{ot} \left(\frac{1}{K_{bt}} - \frac{a \cdot e_t}{S_{vt}} \right) N, \\ M_{st} &= \frac{S_s}{S_{vt}} e_t N \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5.8)$$

これらが Klöppel-Müller の方法による値に一致することも, 式 (4.10)～式 (4.13) の関係を使用して証明される。

c) クリープの塑性変形とともに乾燥収縮の塑性変形を考慮する場合には式 (4.17) により,

$$\left. \begin{aligned} \psi_F\phi_t &= \psi_{FS}\phi_t = [-H+J+D(H/r_1-J/r_2) \\ &\quad -(r_1-r_2)\phi_t]/[-(r_1-D)H+(r_2-D)J] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5.9)$$

$$\psi_J\phi_t = \psi_{JS}\phi_t = [-H/r_1+J/r_2]/(-H+J)$$

これらを式 (5.1) と式 (5.2) とに代入して, 刚度と N_{sch} とを規定すると, N_{sch} はコンクリートに引張力として作用するために,

$$\left. \begin{aligned} N_{bt} &= \left[-1 + \frac{K_{ot}}{K_s} + \frac{a_{bt} \cdot aK_{ot}}{S_{vt}} \right] N_{sch}, \quad M_{bt} = \frac{S_{bt}}{S_{vt}} a_{bt} N_{sch} \\ N_{st} &= \left[1 - \frac{a^2 K_{ot}}{S_{vt}} \right] \frac{K_{ot}}{K_{bt}} N_{sch} = -N_{bt}, \quad M_{st} = \frac{S_s}{S_{vt}} a_{bt} N_{sch} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5.10)$$

これらが Klöpple-Müller の方法による値に一致することの証明は, 同じく式 (4.10)～式 (4.13) によらねばならぬ。

d) 特に $S_b/S_v = (1-\beta-r) \approx 0$ と見做される場合は, 式 (4.25) の $N_0^V=0$, $S_n/\phi_n=0$ とおいた値と, $M=0$, $N=N_0^V=0$ とおいた値とを式 (a) に代入して,

$$\left. \begin{aligned} \psi_F\phi_t &= [e^{\alpha\beta\phi_t} - 1]/\alpha\beta, \\ \psi_J\phi_t &= \psi_{FS}\phi_t = \frac{\phi_t}{(1-e^{-\alpha\beta\phi_t})} - \frac{1}{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5.11)$$

これより式 (5.1), (5.2) の剛度を定めると, $S_{bt}=0$, $M_{bt}=0$ にして, 式 (5.5), (5.8), (5.10) が成立する。

e) $S_s/S_v = \beta \neq 0$ と目的せる PC 柄では式 (4.26) により $r_1=0$ となるために, 式 (4.28), (4.29) の N_{bt} と M_{bt} との M , N , S_n/ϕ_n のいずれか 1 つが零でない場合を式 (2.6) に代入すると,

$$\psi_{FM}\phi_t = \frac{1}{r_2} + \frac{(1+\phi_t)}{[1-(1+r_2)e^{r_2 \cdot \phi_t}]}, \quad \dots \quad (5.12)$$

$$\psi_{JM}\phi_t = \frac{1}{r_2} + \frac{(1+\alpha\phi_t)}{[\alpha - (\alpha+r_2)e^{r_2 \cdot \phi_t}]}$$

$$\psi_{FN}\phi_t = \frac{1}{r_2} + \frac{(1+r_2\phi_t)}{[r_2 + (r+r_2)e^{r_2 \cdot \phi_t}]}, \quad \dots \quad (5.13)$$

$$\psi_{JN}\phi_t = \frac{1}{r_2} + \frac{\phi_t}{(1-e^{r_2 \cdot \phi_t})}$$

$$\psi_S\phi_t = \psi_{FS}\phi_t = \psi_{JS}\phi_t = \psi_{JN}\phi_t = \frac{1}{r_2} + \frac{\phi_t}{(1-e^{r_2 \cdot \phi_t})} \quad \dots \quad (5.14)$$

かかる $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ を使用すると式 (5.1), (5.2) により剛度が定まり, 式 (5.5), (5.8), (5.10) が成立す

る。その値が Klöppel-Müller の一般解の N_{bt} と M_{bt} とに一致することは、式(4.26)の関係を使用して証明される。式(5.11)ないし式(5.14)の $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ による時刻 $t > 0$ の剛度、および距離 e_t と $a_{bt} \cdot N_{sch}$ は図表にまとめると便利である。

ともあれかかる係数 $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ を使用して式(5.1)のように、コンクリートの等価換算剛度 K_{bt} と S_{bt} を規定する提案は、西ドイツ Karlsruhe 工科大学の B. Fritz 教授が 1951 年に提案なされ¹²⁾、その後 10 年を経過した 1961 年の著書¹³⁾では、式(5.11)の $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ を応用なされた。 $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ をモーメント M によるクリープの塑性変形、圧縮力 N によるクリープの塑性変形、クリープの塑性変形と乾燥収縮の塑性変形、このように分割して求められたのは、B. Fritz 教授の弟子である H. Wippel 博士である¹⁴⁾。しかし式(2.6)によって $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ を規定する代りに、式(4.18), (4.19), (4.20) の N_{bt} , M_{bt} , N_{st} , M_{st} の値に対する断面の幾何学的条件より、まず式(5.1)の K_{bt} と S_{bt} を求められ、逆に $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ を算定なされた。

(2) 各材料の応力度の算定

コンクリートの圧縮力 N_{bt} とモーメント M_{bt} とが定まるとき、これを先の式(2.2)に代入すれば、上縁応力度 σ_t^0 と下縁応力度 σ_t^u が定まる。この式(2.2)は各材料にも応用されるもので、各材料のヤング係数を E 、剛度を $K = EF$, $S = EJ$ 、上縁への距離を y^0 、下縁への距離を $(-)y^u$ とすると応力度 σ_t^0 と σ_t^u とは、圧縮力 N_t と時計と反対方向のモーメント M_t とに対して次のように規定される。

$$\sigma_t^0 = E \left(\frac{N_t}{K} + \frac{M_t}{S} y^0 \right), \quad \sigma_t^u = E \left(\frac{N_t}{K} - \frac{M_t}{S} y^u \right) \dots (5.15)$$

さらに活荷重とその衝撃のような短期荷重による圧縮力 N_L とモーメント M_L に対して、その応力度 σ_L^0 と σ_L^u とは同様に、

$$\sigma_L^0 = E \left(\frac{N_L}{K} + \frac{M_L}{S} y^0 \right), \quad \sigma_L^u = E \left(\frac{N_L}{K} - \frac{M_L}{S} y^u \right) \dots (5.16)$$

かくて応力度 σ_t^0 と σ_t^u との時刻 $t=0$ の値を σ_0^0 と σ_0^u とすると、 $(\sigma_t^0 - \sigma_0^0) = (\sigma_t - \sigma_0)^0$ と $(\sigma_t^u - \sigma_0^u) = (\sigma_t - \sigma_0)^u$ とが塑性変形の影響を示すことになる。したがって σ_0^0 と σ_0^u 、 $\sigma_0^0 + \sigma_L^0 = (\sigma_0 + \sigma_L)^0$ と $\sigma_0^u + \sigma_L^u = (\sigma_0 + \sigma_L)^u$ ばかりでなく、 σ_t^0 と σ_t^u 、 $\sigma_t^0 + \sigma_L^0 = (\sigma_t + \sigma_L)^0$ と $\sigma_t^u + \sigma_L^u = (\sigma_t + \sigma_L)^u$ とが、許容応力度の範囲内に収まるかどうかが問題となる。たとえば図-2 の合成桁の断面の $(\sigma_t - \sigma_0)^0$ と $(\sigma_t - \sigma_0)^u$ とを検討することにする。まず断面の定数の算定から始めることにする。

- ① $E_{st} = E_s = 2100 \text{ t/cm}^2$, $E_b = 350 \text{ t/cm}^2$, $n = E_s/E_b = 6.0$
 $F_{st} = 60 + 240 + 300 = 600.00 \text{ cm}^2$,
 $F_b = 300 \times 20 = 6000.00 \text{ cm}^2$, $\eta_b = 218.00 \text{ cm}$,

$$\eta_{st} = \frac{3 \times 300 + 106 \times 240 + 207 \times 60}{600} = 64.60 \text{ cm}$$

$$J_b = 200000 \text{ cm}^4, \quad J_{st} = 3567300 \text{ cm}^4,$$

$$W_b^0 = -W_b^u = 20000 \text{ cm}, \quad W_{st}^0 = J_{st}/\eta_{st}^0 = 24876 \text{ cm}^3$$

$$W_{st}^u = J_{st}/\eta_{st}^u = -55.22 \text{ cm}^3$$

$$\therefore a = 153.40 \text{ cm}, \quad K_v/E_s = 1600 \text{ cm}^2/E_s,$$

$$a^2 K_v/E_s = 8824335 \text{ cm}^4/E_s, \quad S_b/E_s = 33333 \text{ cm}^4/E_s,$$

$$S_v/E_s = 12429965 \text{ cm}^4/E_s$$

$$\therefore \alpha = 0.375, \beta = 0.2871, \gamma = 0.7102, (1-\beta-\gamma) = 0.0027$$

- ② 時刻 $t=0$ に支点降下により $M = 1000 \text{ t}\cdot\text{m}$ が作用するとき、
 $N_{bo} = -N_{st0} = rM/a = 462.97 \text{ t}$, $M_{bo} = 270 \text{ t}\cdot\text{cm}$,
 $M_{st0} = BM = 28710 \text{ t}\cdot\text{cm}$

$$\therefore \sigma_{bo} = 77.16 + 13.50 = 90.7 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{bo}^u = 63.7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{st0}^0 = -\frac{462.97}{600} + \frac{28710}{24876} = 0.387 \text{ t/cm}^2 = 387 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{st0}^u = -\frac{462.97}{600} - \frac{28710}{55221} = -1154 \text{ t/cm}^2$$

- ③ 時刻 $t \rightarrow \infty$, $\phi_t = \phi_n = 20$ の場合、まず条件(b)と式(4.13)より r_1 と r_2 を定めて式(5.3)に代入すると、

$$r_1 + r_2 = -1.1060, \quad r_1 \cdot r_2 = 0.1077,$$

$$\therefore r_1 = -0.1079, \quad r_2 = -0.998/$$

$$\therefore e^{-r_1 \phi_n} = 0.80590, \quad e^{-r_2 \phi_n} = 0.13585,$$

$$E = 0.71894, \quad F = 0.00026$$

$$\therefore \psi_F\phi_n = 2.2307 \approx 2.23, \quad \psi_J\phi_n = 3.4007 \approx 3.40$$

$$\therefore a^2 K_{st}/E_s = \frac{8824335/E_s}{(1+0.375 \times 2.23)} = 4805628 \text{ cm}^4/E_s$$

$$S_{bt}/E_s = \frac{33333/E_s}{(1+3.40)} = 7576 \text{ cm}^4/E_s,$$

$$S_{vt}/E_s = 8380500 \text{ cm}^4/E_s$$

$$\therefore N_{bt} = -N_{st} = 373.9 \text{ t}, \quad M_{bt} = 90 \text{ t}\cdot\text{cm}, \quad M_{st} = 42570 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$\therefore \sigma_{bt} = 62.30 + 4.50 = 66.80 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{bt}^u = 57.8 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{st}^0 = -\frac{373.79}{600} + \frac{42570}{24876} = 1.088 \text{ t/cm}^2,$$

$$\sigma_{st}^u = -1.394 \text{ t/cm}^2$$

すなわち、

$$(\sigma_{bt} - \sigma_{bo})^0 = -23.9 \text{ kg/cm}^2, \quad (\sigma_{bt} - \sigma_{bo})^u = -5.9 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_{st} - \sigma_{st0})^0 = 0.705 \text{ t/cm}^2 = 705 \text{ kg/cm}^2,$$

$$(\sigma_{st} - \sigma_{st0})^u = -240 \text{ kg/cm}^2$$

これよりクリープの塑性変形を考慮した場合にはコンクリートの圧縮応力度が減少するが、鋼桁の上縁応力度は 705 kg/cm^2 も増大し、下縁の引張応力度も 240 kg/cm^2 ほど増大する。

④ 乾燥収縮によるひずみ度の最終値 S_n を $S_n = 20 \times 10^{-5}$ とすると、式(5.9)に基づく $\psi_F\phi_t$ と $\psi_J\phi_t$ とは、 $D = 0.9973$, $r_1 = -0.1079$, $r_2 = -0.9981$, $\phi_n = 2.0$, $H = 0.18410$, $J = 0.86415$ に対して、 $\psi_F\phi_n = 1.0372 \approx 1.04$, $\psi_J\phi_n = 1.3926 \approx 1.39$

$$\therefore a^2 K_{st}/E_s = \frac{8824335/E_s}{(1+0.375 \times 1.04)} = 6348442 \text{ cm}^4/E_s,$$

$$S_{bt}/E_s = \frac{33333/E_s}{(1+1.39)} = 13947 \text{ cm}^4/E_s,$$

$$S_{vt}/E_s = 9929690 \text{ cm}^4/E_s,$$

$$a_{bt} = a \times \frac{0.375(1+1.04)}{(1+0.375 \times 1.04)} = 84.43 \text{ cm},$$

$$K_{st}/K_{bt} = a_{bt}/a = 0.5504,$$

$$N_{sch} = \frac{6000 \times 0.35 \times 10^8}{(1+1.04)} S_n = 205.88 \text{ t}$$

$$\therefore N_{bt} = -N_{st} = -0.5504[1 - 0.6393] \times N_{sch} = -40.87 \text{ t}$$

$$M_{bt} = 0.0014 \times a_{bt} \cdot N_{sch} = 24.34 \text{ t}\cdot\text{cm},$$

$$\begin{aligned}
 M_{st} &= 0.3593 \times a_{st} N_{sch} = 6245.51 \text{ t} \cdot \text{cm} \\
 \sigma_{bs}^0 &= \sigma_{bt}^0 = -6.81 + 1.22 = -5.59 \text{ kg/cm}^2, \\
 \sigma_{bs}^u &= \sigma_{bt}^u = -8.03 \text{ kg/cm}^2, \\
 \sigma_{sts}^0 &= \sigma_{stt}^0 = \frac{40.87}{600} + \frac{6245.51}{24876} = 0.319 \text{ t/cm}^2, \\
 \sigma_{sts}^u &= \sigma_{stt}^u = -0.045 \text{ t/cm}^2
 \end{aligned}$$

すなわち断面にモーメント M が作用しないが乾燥収縮の塑性変形をも考慮した場合、コンクリートには引張応力度を生じて鋼桁上縁の圧縮応力度が著しくなる。したがって、

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{bt} - \sigma_{bs} + \sigma_{bs})^0 &= -29.5 \text{ kg/cm}^2, \\
 (\sigma_{bt} - \sigma_{bs} + \sigma_{bs})^u &= -13.9 \text{ kg/cm}^2, \\
 (\sigma_{stt} - \sigma_{sts} + \sigma_{sts})^0 &= 1024 \text{ kg/cm}^2, \\
 (\sigma_{stt} - \sigma_{sts} + \sigma_{sts})^u &= -285 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

すなわち一定モーメント $M = 1000 \text{ t} \cdot \text{m}$ によるクリープと、乾燥収縮との塑性変形の影響が算定されるために、さらに活荷重とその衝撃による応力度を加算すると、鋼桁上縁の圧縮応力度に問題が生ずるであろうことが判明する。

同様に Klöppel-Müller の方法より求めた M_{bt} と M_{st} を応用して、これらを式(2.9), (3.10) または式(3.17) に代入して、微小水平長さ ds あたりの断面の回転角—たわみ角— $(\Delta\psi)_b = (\Delta\psi)_s = (\Delta\psi)$ を求め、 $(\Delta\psi)/ds$ の値を弹性荷重として面積モーメント法により、単純桁のたわみまたは両端のたわみ角を求める応用例は、先の拡張された Klöppel-Müller の微分方程式の応用例とともに、別稿「コンクリートの塑性変形に伴う不静定モーメントの解析」にゆづることにする。

6. 結 び

以上にて Klöppel-Müller の微分方程式は、コンクリート床版と鋼桁とのみの単純な合成桁に適用されるのみならず、鉄筋とPCケーブルとを併用した合成桁、鋼桁を使用しないが鉄筋を併用したPC桁に拡張して適用され、プレキャストの床版がプレストレス N_b^V と M_b^V とを有する場合とか、断面に時間的に変化するモーメント $M(t)$ が作用する場合に拡張され、さらに連続合成桁のプレストレス N_b^N と M_b^N との解析に応用され、しかもその一般解から Fritz-Wippel の等価換算剛度が規定され、塑性変形に伴う応力度の変化が解析されること、以上を証明した。

かかる原稿を作成するための下準備として、外国文献

の収集と調査とのために、長期間にわたり自由な時間を筆者に与えて下さった鉄建建設の大石重成社長、宇都宮清副社長、飯吉精一専務、堀松和夫室長をはじめ社員の皆々様に謹んで感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Granville, W.H. : The Creep on the Flow of Concrete under Load : Building Research Technical Paper No. 12, 1930, London. R.E. Davis : Flow of Concrete under Sustained Compressive Stress : J. of ACI, Vol. 24 (1928), p. 303; Vol. 27 (1931), p. 837.
- 2) Ehlers, G. : Beton-Kalender, I. Teil, 1963, S. 703 : Berlin-München, Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn.
- 3) Whitney, C.S. : Plain and Reinforced Concrete Arch : J. of ACI, Vol. 28, March 1932 : Beton u. Eisen, 31 (1932), S. 320.
- 4) Lorman, W.R. : The Theory of Concrete Creep : Proc. ASTM, 1940. A.D. Ross : Concrete Data : The Structural Engineer, London, Aug. 1946, May 1947.
- 5) Daniel Bernoulli (1700~82) : Leonhardt Euler (1707~83) : スイスが生んだ 18 世紀の有名な数学学者たち.
- 6) Schleicher, F. : Taschenbuch für Bauingenieur, 1948, S. 1329 : Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag.
- 7) Klöppel, K. : Die Theorie der Stahlverbundbauweise in statisch unbestimmten System unter Berücksichtigung des Kriecheinflusses : Der Stahlbau, 20 (1951), H. 2, S. 17.
- 8) Müller, E. : Beitrag zur Ermittlung der Kriechabhängigen Spannungen von Verbundträgern : Die Bautechnik, 32 (1455), H. 5, S. 145.
- 9) Dischinger, F. : Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken : Der Bauingenieur, 1939, S. 54.
- 10) Sattler, K. : Beitrag zur Berechnung von Spannbeton-Konstruktionen : Der Bauingenieur, 31 (1956), H. 12, S. 444.
- 11) Leonhardt, F. : Spannbeton für die Praxis, 1. Aufl. 1955, 2. Aufl. 1861 : Berlin, Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn.
- 12) Fritz, B. : Verbundträger mit durch Spannstahl vorgespannter Betonplatte : Der Stahlbau, 20 (1951), H. 8, S. 97.
- 13) Fritz, B. : Verbundträger. Berechnungsverfahren für die Brückenpraxis, 1961 : Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag.
- 14) Wippel, H. : Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, 1963 : Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag.

(1971.3.17・受付)