

# 格子桁の最小重量設計\*

## MINIMUM WEIGHT DESIGN OF GRILLAGE GIRDER

倉田宗章\*\*・園田恵一郎\*\*\*  
By Muneaki Kurata and Keiichiro Sonoda

## 1. 緒論

塑性解析に基づいた骨組構造物の最小重量設計問題の研究は 1953 年の J. Foulkes の論文<sup>1), 2)</sup>によって注目され、初期の頃は主として試算によりこの問題の解を見い出すよう努力されたが、1957 年頃より H.J. Greenberg, W. Prager の極限強度解析に関する下界定理を応用して極値問題として取り扱う方法が研究され、トラス、連続桁、ラーメンに対し線形計画法の手法を利用して数値解析する方法が発表された<sup>3), 4), 5)</sup>。この方法は計算自体は非常に繁雑であるが、組織的、かつ機械的であるため電子計算機の発達している今日、非常に有効な方法といえる。一方、格子桁の最小重量設計に関しては、J. Heymann<sup>6)</sup>、米沢<sup>7)</sup>の研究があるが、これらはやはり試算による解析法であり、簡単な構造とか特殊の形状のものには有力であるが一般性に乏しいうらみがある。

本研究は集中荷重および分布荷重、またはそれらの組み合わせ荷重が変動する格子桁の最小重量設計問題を数理計画法の問題に置き換えて解析したものである。一般に分布荷重が作用すれば、曲げモーメントの極値をとることが可能な点は無数に存在し、降伏条件式を犯さないことを意味する制約条件式は考えている骨組みの有限個の位置に作用する曲げモーメントの線型不等式として表わすことができない。また一方、格子桁のように曲げモーメント以外にねじりモーメントも関係すれば、降伏条件式は応力の非線型な式となり、それゆえ制約条件式は非線型となる。したがって、分布荷重を受ける格子桁の問題は従来よく行なわれているように重量関数を線型化したとしても線型問題にはならず、数理計画の問題として、解析するには非線型計画法の手法を用いなければな

らない。本研究においては非線型制約条件式の凸性を考慮し、格子桁の問題を凸計画の問題として取り扱い、J.E. Kelley の Cutting Plane Method<sup>8)</sup> を利用した計算方法を提示した。また計算例として橋梁構造に多く見られる格子桁をとり上げ、集中荷重、等分布荷重、移動線荷重に対する最小重量設計を試みた。

## 2. 問題の設定

格子点間の部材は等断面を持つものと仮定し、 $n$  個の部材のそれぞれの全塑性曲げモーメントを求むべき設計変数として  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  で定義し、各部材における全塑性ねじりモーメントの全塑性曲げモーメントに対する比を  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n)$  とし、格子点上に作用する曲げモーメントおよびねじりモーメントを  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{3n})$  とする。一般に重量関数  $W$  は各部材の長さと断面積との積和によって、また断面積はその部材の塑性断面係数の関数として表わすことができるから、ここで考えている問題は、

の下で重量関数  $W(l, x)$  を最小にする  $x$  を求めるこ  
とに帰着する。ここに  $l = (l_1, l_2, l_3, \dots, l_n)$  であり部材長  
を表わし、 $P_i$  は設計荷重、 $\mu$  は荷重係数 (load factor),  
 $k$  は独立なつりあい条件式の数、 $r$  はモーメントの極値  
をとることの可能な位置の数を示す。また式 (2) は降伏  
条件式と荷重の分布状態により定まる関係式で、考  
えている格子析のいかなる場所においても降伏条件式を犯さ  
ないことを意味している。

### (1) 重量関数

I型断面と箱型断面を対象とし、日本溶接協会塑性設計研究委員会編鋼構造物塑性設計規準（案）にて許される最大幅厚比と最大ウェブ高さを持つ断面に対して、同

\* 第25回土木学会年次学術講演会(1970-10)にて一部発表

\*\* 正会員 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 正金昌 大阪市立大学教授 工学部土木工学科  
正雲貴 大阪市立大学講師 工学部土木工学科

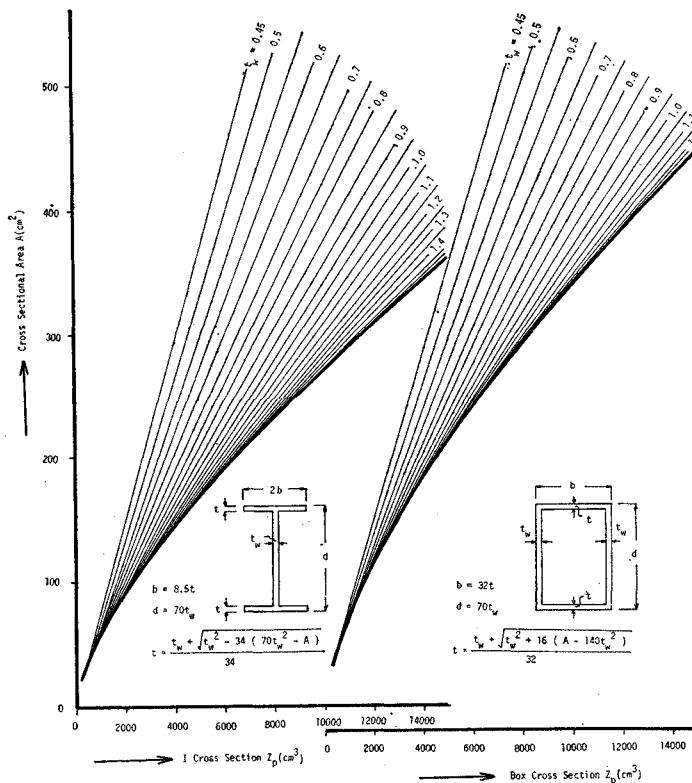


Fig. 1

じ塑性断面係数を持つ断面の中で面積を最小にするものを選び出し、断面積  $A(\text{cm}^2)$  と塑性断面係数  $Z_p(\text{cm}^3)$ との間の関係を示せば、Fig. 1 の太線のようになる。この曲線は三次曲線で精度良く表わすことができるが、実際の計算に際しては次のように折線近似を用いる方が都合が良い。

I 型断面に対しては

$$\begin{aligned} A &= 0.0428 Z_p + 15.7 \quad 100 \leq Z_p \leq 1500, \\ A &= 0.0273 Z_p + 39.0 \quad 1500 \leq Z_p \leq 4500, \\ A &= 0.0203 Z_p + 71.1 \quad 4500 \leq Z_p \leq 9500. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

箱型断面に対しては

$$\begin{aligned} A &= 0.0462 Z_p + 28.5 \quad 400 \leq Z_p \leq 2000, \\ A &= 0.0317 Z_p + 57.6 \quad 2000 \leq Z_p \leq 5500, \\ A &= 0.0242 Z_p + 99.0 \quad 5500 \leq Z_p \leq 10000, \\ A &= 0.0214 Z_p + 127.0 \quad 10000 \leq Z_p \leq 15000. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

次に上記の最小断面積を与える断面形において全塑性曲げモーメントに対する全塑性ねじりモーメントの比  $\beta$ を計算すれば、I 型断面では 0.0126~0.0138、箱型断面では 0.467~0.549 であり、いずれもほぼ一定値を示している（付録 1 参照）。それゆえ特に  $\beta$  を設計変数として扱うほどの必要性はないものと思われる。

## (2) 応力つりあい条件式

格子桁の応力つりあい条件式は格子点の断面に作用する曲げモーメントおよびねじりモーメントと荷重との間の関係式として表わすことができる。すなわち、Fig. 2 に示す任意の格子点  $i$  に関してつりあい条件式をつくれば、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_{ih}}(M_{ih} - M_{hi}) \\ &+ \frac{1}{A_{im}}(M_{im} - M_{mi}) \\ &+ \frac{1}{A_{ij}}(M_{ij} - M_{ji}) \\ &+ \frac{1}{A_{in}}(M_{in} - M_{ni}) \\ &= p_i + \frac{1}{2}(q_{ih}A_{ih} + q_{im}A_{im} \\ &+ q_{ij}A_{ij} + q_{in}A_{in}) \dots\dots\dots(4.1) \end{aligned}$$

$$M_{ih} - M_{ij} + T_{im} - T_{in} = 0 \dots\dots\dots(4.2)$$

$$M_{im} - M_{in} + T_{ih} - T_{ij} = 0 \dots\dots\dots(4.3)$$

ここに、 $M$  は格子点に作用する曲げモーメント、 $T$  はねじりモーメント、 $A$  は部材長、 $q$  は等分布荷重強度、 $p$  は集中荷重強度を表わし、二重添字は着目する部材を表わす。後に示す凸計画法の計算手法を適用するに際して、変数は非負であるとして取り扱う方が都合がよいので、モーメント変数は次のように変換する。

$$\begin{aligned} M_{ih}' &= M_{ih} + X_{ih}, \quad M_{im}' = M_{im} + X_{im} \\ T_{ih}' &= T_{ih} + \beta_{ih}X_{ih}, \quad T_{im}' = T_{im} + \beta_{im}X_{im} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $X_{ih}$ ,  $X_{im}$ , … は部材  $ih$ ,  $im$ , … の全塑性曲げモーメント、 $\beta_{ih}$ ,  $\beta_{im}$ , … は部材  $ih$ ,  $im$ , … における全塑性ねじりモーメントの全塑性曲げモーメントに対する比を表わす。

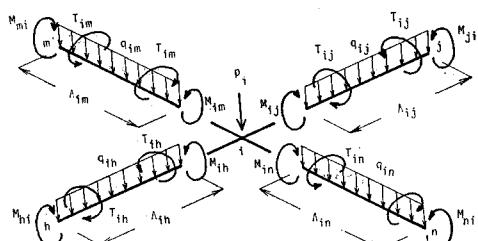


Fig. 2

次に支持端における条件を考える。端横桁のない単純支持端に対しては曲げモーメントをゼロ、さらにこの支持端がねじりにも自由であるならばねじりモーメントをゼロにおけばよく、剛に結合された端横桁をもった場

場合は単純支持端に対して式(4.2)および式(4.3)に相当する条件式を用いればよい。したがって、すべての格子点および支持端に対して式をつければ、つりあい条件式全体は次のようなマトリックス形式で表わすことができる。

ここに、 $[A]$ は構造の幾何学的形状により定まるマトリックス、 $\{y\}$ はモーメント変数  $M_{ih}', T_{ih}' M_{im}', T_{im}, \dots$  よりなる列マトリックス、 $[T]$ は式(5)の非負なるモーメント変数の導入によって必要となる変換するマトリックス、 $\{x\}$ は各部材の全塑性曲げモーメント  $X_{ih}, X_{im}, \dots$  を表わす列マトリックスで問題の求むべき設計変数であり、 $\{P\}$ は荷重項を表わす列マトリックスである。

上述のつりあい条件式は固定荷重に対して誘導されたが、変動荷重が作用する場合にも同様に導くことができ、式(6)は次のように変わる。

$$[\mathbf{A}] [[\mathbf{y}] - [\mathbf{T}] \{\mathbf{x}\} \{\mathbf{I}\}'] = [\mathbf{P}] \dots \dots \dots \quad (7)$$

ここに、 $[A]$ ,  $[T]$ ,  $\{x\}$  は式(6)のそれらと同一であり、 $l$  は荷重の変動する回数を示し、 $[y]$  はそれぞれの変動荷重群に対応するモーメント変数、 $[P]$  は荷重項、 $\{I\}$  はすべての要素が 1 なる列マトリックスで右肩に付したダッシュはその転置行マトリックスなることを意味する。

### (3) 降伏条件式

集中荷重のみが格子点上に作用した場合は、曲げモーメントの極値は必ず格子点において起こるから、降伏条件式を犯さない条件は格子点上においてのみつくれば十分である。いま曲げとねじりを同時に受ける桁の降伏条件式を次のように仮定すれば、

ここに  $M_0$ ,  $T_0$  は全塑性曲げおよびねじりモーメントを示す, Fig. 2 の格子点において降伏条件式を犯さない条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & (M_{ih'} - X_{ih})^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2} (T_{ih'} - \beta_{ih} X_{ih})^2 \leq X_{ih}^2 \\
 & (M_{ij'} - X_{ij})^2 + \frac{1}{\beta_{ij}^2} (T_{ij'} - \beta_{ij} X_{ij})^2 \leq X_{ij}^2 \\
 & (M_{im'} - X_{im})^2 + \frac{1}{\beta_{im}^2} (T_{im'} - \beta_{im} X_{im})^2 \leq X_{im}^2 \\
 & (M_{in'} - X_{in})^2 + \frac{1}{\beta_{in}^2} (T_{in'} - \beta_{in} X_{in})^2 \leq X_{in}^2
 \end{aligned}
 \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

ここで考えている最小重量設計の問題においては、変数は格子点に働く曲げおよびねじりモーメントと各部材の全塑性曲げモーメントであり、全塑性曲げモーメント

に対する全塑性ねじりモーメントの比  $\beta$  はあらかじめ与えられた定数と考える。次に式(9)の不等式を満足する領域は  $M_{ih}', T_{ih}', X_{ih}$  座標空間内の点  $(0, 0, 0)$  においていわゆる凸性を失うので、 $X_{ih} \geq 0, X_{ij} \geq 0, \dots$  を考慮して式(9)を次のように書き変える。

式 (10) を満足する領域は凸性を有するので、この種の制約条件式をもつ問題は J.E. Kelley の Cutting Plane Method<sup>8)</sup> を用いて解くことができる。この方法は非線型制約条件式を Cutting Planes を用いて線型化し、線型計画の問題を繰り返し計算することによって最適解を求める方法である。この方法を用いて式 (10) の第 1 式を満足しない任意の点  $(t_1, t_2, t_3)$  に対する Cutting Plane を求め、これによる線型制約条件式を求むれば(付録 2 参照)、

$$(t_1 - t_3) M_{ih'} + \frac{t_2 - \beta_{ih} t_3}{\beta_{ih}^2} T_{ih'} \\ - \left\{ \sqrt{(t_1 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2} (t_2 - \beta_{ih} t_3)^2} + t_1 - t_3 \right. \\ \left. + \frac{t_2 - \beta_{ih} t_3}{\beta_{ih}} \right\} X_{ih} \leq 0 \dots \dots \dots \quad (11)$$

格子点  $i$  に対しては同様な他の三つの不等式が得られ、格子桁全体では  $2nl$  個の不等式ができる。

次に、格子点間に等分布荷重が作用した場合には、格間で降伏条件を犯さない条件を附加しなければならない。このためには、格間ではねじりモーメントは一定であるので、曲げモーメントの正の最大値をとる点において式(10)と同等な不等式を満足させねば十分である。

いま Fig. 2 の部材  $ih$  を例にとって考えるならば、

$$M_{ih'} - M_{hi'} \geq \frac{a_{ih} A_{ih^2}}{2}, \text{ または}$$

$$M_{ih'} - M_{hi'} \leq -\frac{q_{ih} A_{ih}}{2}$$

なら、曲げモーメントの極値は端点  $i$  または  $h$  におこり、式(10)以外の新たな制約条件式は必要でない、しかし

$$-\frac{q_{ih}A_{ih}^2}{2} < M_{ih'} - M_{hi'} < \frac{q_{ih}A_{ih}^2}{2}$$

なら、曲げモーメントの正の極値は格間内で起こり、次の新しい条件式を付加しなければならない。

ここに

$$\begin{aligned} M'_{\max} &= \frac{q_{ih} A_{ih}^2}{8} + \frac{1}{2}(M_{ih'} + M_{hi'}) \\ &+ \frac{1}{2 q_{ih} A_{ih}^2} (M_{ih'} - M_{hi'})^2 \end{aligned}$$

ただし上式は  $M'_{\max} \geq X_{ih}$  の時のみ適用される式である。

前と同様、 $M_{ih'}$ ,  $M_{hi'}$ ,  $T_{ih'}$ ,  $X_{ih}$  座標空間内で式(12)を満足しない任意の点  $(t_1, t_1', t_2, t_3)$  に対して Cutting Plane による制約条件式をつくれば、次のようになる(付録2参照)。

$$\begin{aligned} &\left\{1 + \frac{2}{q_{ih} A_{ih}^2} (t_1 - t_1')\right\} M_{ih'} + \left\{1 - \frac{2}{q_{ih} A_{ih}^2}\right. \\ &\cdot (t_1 - t_1')\left.\right\} M_{hi'} + \frac{2(t_2 - \beta_{ih} t_3)}{\beta_{ih}^2 (t_0 - t_3)} T_{ih'} - \frac{2}{t_0 - t_3} \\ &\cdot \left\{t_0 + \frac{t_2}{\beta_{ih}} - 2t_3 + \sqrt{(t_0 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2} (t_2 - \beta_{ih} t_3)^2}\right\} \\ &\cdot X_{ih} \leq -\frac{q_{ih} A_{ih}^2}{4} + \frac{1}{q_{ih} A_{ih}^2} (t_1 - t_1')^2 \dots (13) \end{aligned}$$

ここに

$$t_0 = \frac{q_{ih} A_{ih}^2}{8} + \frac{1}{2} (t_1 + t_1') + \frac{1}{2 q_{ih} A_{ih}^2} (t_1 - t_1')^2 \geq t_3.$$

### 3. 凸計画の問題としての計算方法

前節で示したように部材の断面積と塑性断面係数の間の関係式を線型化すれば、重量関数は次のように表わすことができる。

$$W(\mathbf{x}) = c_0 + \{\mathbf{c}\}' \{\mathbf{x}\}$$

ここに  $c_0$  は正の定数,  $\{\mathbf{c}\}$  は式(3.1), (3.2)の係数と部材長の積からなる列マトリックスである。次に式(10), 式(12)の制約条件式は線型でないので、Cutting Plane Method により線型化し、解が十分収束するまで繰り返し計算する。すなわち、最初の計算は式(10), 式(12)を満足する領域を含むような近似許容領域を次のように考え,

$$[\mathbf{0}] \leq [\mathbf{y}] \leq 2[\mathbf{T}] \{\mathbf{x}\} \{\mathbf{I}\}' \dots (14)$$

ここに  $[\mathbf{T}], \{\mathbf{I}\}'$  は式(7)のものと同一である。この制約条件式と応力つりあい条件式(7)および  $\{\mathbf{x}\} \geq \{\mathbf{0}\}$  を満足する中で  $W(\mathbf{x}) = c_0 + \{\mathbf{c}\}' \{\mathbf{x}\}$  を最小にするような  $[\mathbf{y}], \{\mathbf{x}\}$  を求める。これは線型計画の問題であり、シンプレックス法<sup>9), 10)</sup>によって解くことが可能であるが、このままでは制約条件式が多く、しかも以後の繰り返し計算によってますますその数が増加するから、実際の計算に便利なように問題を書き変える。すなわち、式(7)の係数行列を次のように分割する。

$$[A_1, A_2] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \right\} - \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \{\mathbf{x}\} \{\mathbf{I}\}' \right] = [\mathbf{P}]$$

ここに  $A_1$  は  $k \times k$ ,  $A_2$  は  $k \times (3n-k)$ ,  $\mathbf{y}_1$  は  $k \times l$ ,  $\mathbf{y}_2$  は  $(3n-k) \times l$ ,  $\mathbf{T}_1$  は  $k \times n$ ,  $\mathbf{T}_2$  は  $(3n-k) \times n$  の各マトリックスである。よって,

$$\mathbf{y}_1 = A_1^{-1} \mathbf{P} - A_1^{-1} A_2 \mathbf{y}_2 + \{\mathbf{T}_1 + A_1^{-1} A_2 \mathbf{T}_2\} \{\mathbf{x}\} \{\mathbf{I}\}',$$

ただし  $|A_1| \neq 0$ , となり,

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{P}] + \begin{bmatrix} -A_1^{-1} A_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} [\mathbf{y}_2] \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 + A_1^{-1} A_2 \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\mathbf{x}\} \{\mathbf{I}\}' \dots (15) \end{aligned}$$

となる。したがって前述の線型計画の問題は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimum } (c_0 + \{\mathbf{c}\}' \{\mathbf{x}\}), \\ \left[ \begin{array}{c|c} -A_b & \mathbf{D}_1 \\ \hline \mathbf{A}_b & \mathbf{D}_2 \\ \hline -\mathbf{I} & 2\mathbf{I}_2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}_2 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \right\} \dots (16)$$

ここで  $A_b = A_1^{-1} A_2$ ,  $\mathbf{P}_a = A_1^{-1} \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}\} \{\mathbf{I}\}'$ ,  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{T}_1 + A_b \mathbf{T}_2$ ,  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{T}_1 - A_b \mathbf{T}_2$ ,  $\mathbf{I}$  は単位マトリックス,  $\mathbf{0}$  はゼロマトリックスである。

式(16)の問題は線型計画法の標準形の裏の問題になっているので、双対法<sup>9), 10)</sup>により表の問題に変換すれば、

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximum } (c_0 + [-\mathbf{P}_1', \mathbf{P}_1', \{\mathbf{0}\}', -\mathbf{P}_2', \mathbf{P}_2', \\ \{\mathbf{0}\}', \dots, -\mathbf{P}_l', \mathbf{P}_l', \{\mathbf{0}\}'] \cdot \{\mathbf{v}\}), \\ \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_0 & & \\ \hline & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \hline & & \mathbf{A}_0 \\ \hline & \mathbf{0} & & \\ \hline \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0 & \dots \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \vdots \\ \mathbf{c} \end{array} \right] \geq \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{c} \end{array} \right], \\ \{\mathbf{v}\} \geq \{\mathbf{0}\}, \end{array} \right\} \dots (17)$$

ここに  $\mathbf{A}_0 = [-A_b'; A_b'[-\mathbf{I}]]$ ,  $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{D}_1'; \mathbf{D}_2'; 2\mathbf{T}_2']$ ,  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, l$ ) は  $\mathbf{P}_a$  の第  $i$  列を示し、各行列の右肩に付したダッシュは転置マトリックスなることを意味する。

式(17)の線型計画の問題は普通のシンプレックス法にて解けるが、後の繰り返し計算の関係上改訂シンプレックス法<sup>9), 10)</sup>を用いる方が都合が良い。こうしてこの問題の最適解、すなわち、式(14)の近似許容領域に対する解  $\mathbf{y}_1^1$ ,  $\{\mathbf{x}\}^1$  が得られ、その結果式(15)より  $\mathbf{y}_1^1$  も求まる。これらの結果を式(10)および式(12)の左辺に代入し、0より大なる値を与えるものについて式(11)および式(13)の Cutting Plane による新しい制約条件

式をつくる。

新しい制約条件式を追加すれば、その数だけ式(17)の $\{v\}$ の係数行列の列の数が増加するが行の数は変化しないので、改訂シンプソン法にて容易に第二近似解 $y_2^*$ ,  $\{x\}^*$ そして $y_1^*$ が求められる。以下同様な繰り返し計算を式(10), 式(12)の不等式すべて許容誤差の範囲内で満足するまで続ける。なお電子計算機を用いた実際の計算においては、第2回目以後の繰り返し計算によって追加される $\{v\}$ の係数行列は第2回目の際の相当する場所に代入することができ、繰り返し数が増加しても電子計算機の記憶場所を増加させる必要がない。

以上の計算手順をフローチャートによって説明すればFig. 3のごとくなる。

#### 4. 計算例

##### (1) 正方形格子桁

Fig. 4に示す単純支持端(ただしねじりには抵抗する)を持つ正方形格子桁が等分布荷重を受けた場合を例にとり、最小重量を与えるときの各部材の大きさを計算した。部材数は全部で24であるが、対称性を考慮して

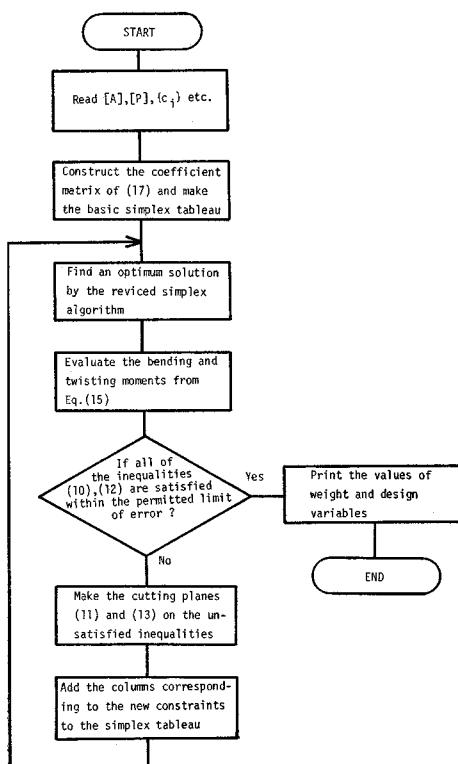


Fig. 3

独立な設計変数を図に示すように4個とした。ここでは正方形格子桁の一般的な性質を調べることを目的とするため重量関数を簡略化して、 $W(\mathbf{x}) = c_0 + 4a(X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4)$ 、ここに $c_0$ は任意の正の定数とした。数値計算結果はTable 1に示す。当然のことながら部材のねじり抵抗が増加すればするほど重量は減少し、しかも最適部材の大きさがその比においてかなり変化していることがわかる。

次に、繰り返し計算における解の収束の様子をTable 2に示す。ここにおける結果はTable 1の $\beta=0.7$ の場合に対するものであり、 $\delta_1$ は各繰り返し段階において得られた解を式(11)の不等式群の左辺に代入することにより得られた値の最大値を示し、 $\delta_2$ は式(13)の不等式群に対する最大値を示す。これらの値は解の収束の状態を表わす量であり、完全にゼロになれば求むべき解に到達したことを意味する。ここでは $\delta_1$ および $\delta_2$ がともに5/100 000以下になったとき計算を止めており、14回の計算で終っている。この結果が示すようにこの程度の繰り返し回数で重量の値は十分収束しているが、設計変数の値はまだかなり変動している。理論的には繰り返し回数をもっと増加すれば設計変数の値も十分に収束するはずであるが、実際の計算においては数値計算上の誤

Table 1 Minimum weight design for the square grillage girder shown in Fig. 4

$\beta = T_0/M_0$	Design Variables ( $\times qa^2/2$ )				Weight $W - c_0$ ( $\times 2qa^3$ )
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
0.1	7.97346	1.00204	6.97464	1.01881	18.98980
0.2	7.92819	0.99233	6.92964	1.05804	18.95857
0.3	7.79246	1.00157	6.79581	1.15600	18.90341
0.4	7.68577	0.96471	6.68316	1.26026	18.81888
0.5	7.47023	0.91332	6.46452	1.46724	18.69587
0.6	7.17328	0.81470	6.17837	1.76938	18.51980
0.7	6.85346	0.58030	5.85107	2.19965	18.26443
0.8	6.32930	0.17047	5.33536	2.93877	17.88313
0.9	5.75191	0.15414	4.78910	3.29118	17.43164
1.0	5.13839	0.24237	4.25962	3.56682	17.01639
1.15	4.04372	0.43134	3.46342	4.03057	16.43095

Table 2 Convergency of solution

Number of iteration	Design Variables				Weight $W - c_0$ ( $\times 2qa^3$ )	$\delta_1$	$\delta_2$
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$			
0	6.4941	0.3529	5.0000	2.0000	16.2000	0.828425	0.345704
1	5.9506	1.4448	5.0000	2.0000	17.84020	0.164784	0.250367
2	7.2330	0.6783	5.9846	1.7784	18.1311	0.034842	0.085322
3	6.7806	0.7518	6.0132	1.9226	18.1426	0.018137	0.077669
4	6.6450	0.7008	5.6326	2.2696	18.2184	0.002737	0.025401
5	7.1031	0.5175	6.0900	2.0084	18.2449	0.000607	0.013080
6	6.7997	0.6063	5.8669	2.1886	18.2564	0.000000	0.005946
7	6.8842	0.5638	5.8605	2.1931	18.2584	0.000000	0.003333
8	6.7425	0.6179	5.7645	2.2601	18.2629	0.000000	0.001526
9	6.8635	0.5810	5.8831	2.1773	18.2632	0.000000	0.000879
10	6.8213	0.5905	5.8225	2.2196	18.2639	0.000000	0.000382
11	6.8841	0.5708	5.8811	2.1787	18.2642	0.000000	0.000223
12	6.8481	0.5841	5.8567	2.1957	18.2644	0.000000	0.000096
13	6.8535	0.5803	5.8511	2.1997	18.2644	0.000000	0.000000

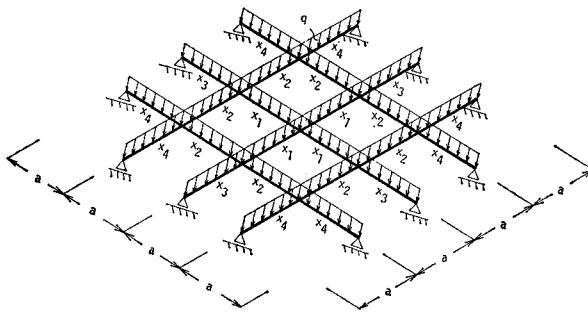


Fig. 4

差のため完全に収束させることは困難である。しかしながら、実用的見地からすれば重量の値においてほとんど差がないことから考えて、この程度の繰り返し回数で得られた結果を最適解としても十分差しつかえないものと思われる。

### (2) 3 または 4 主桁、3 横行をもつ単純格子桁

最初に Fig. 5 に示す単純支持端（ねじりには抵抗する）をもつ 3 主桁、3 横行の格子桁が等分布荷重  $q$  と偏心集中荷重  $P$  を受ける場合を取り扱った。部材は全部で 18 あるが、対称性を考慮して独立な設計変数を 10 とした。主桁は箱型断面、横行は I 型断面を持つものとし、横行のねじり抵抗は無視した。ここではこの種の格子桁の一般的性質を知ることを目的とするため、重量関数は簡略化して次のように表わした。

$$W(\mathbf{x}) = c_0 + \alpha(2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 2X_6 + \alpha X_7 + \alpha X_8 + 2\alpha X_9 + 2\alpha X_{10})$$

ここに  $c_0$  は任意の正の定数である。計算結果は Table 3, 4, 5 に示す。Table 3 は  $P=10 \times qa/2$  の場

合について主桁のねじり抵抗の大小が設計変数の値にどのように影響を与えるかを調べたものである。この結果から主桁のねじり抵抗は横行の端部の固定作用のみに寄与するに過ぎなく、全体におよぼす影響は非常に小さいことがわかり、これは前述した正方形格子桁の結果と大きく相違するところである。したがって同じ全塑性曲げモーメントを与える断面では箱型断面より I 型断面の方が断面積が少ないので、この種の格子桁では主桁も I 形断面にする方がより経済的であると推測される。

次に、Table 4 は主桁の全塑性ねじりモーメントの全塑性曲げモーメントに対する比  $\beta$  が 0.55 の場合について偏心集中荷重の大きさを変化させた時に最適設計断面がどのように変化するかを調べたものであり、Table 5 は  $P=10 \times qa/2$  の場合について横行間隔に対する主桁間隔の比を変化させた時の影響を調べたものである。これらの結果より、最小重量設計においては偏心集中荷重はそれが作用する主桁のみによって支持され、他の桁は分布荷重のみに抵抗するに過ぎないことがわかる。したがってこの種の格子桁の最小重量設計においては高次

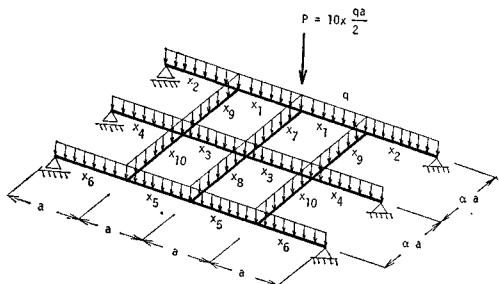


Fig. 5

Table 3 Minimum weight design for the grillage girder shown in Fig. 5 where  $\alpha=1.0$  and  $P=10 \times qa/2$ 

$\beta = T_0/M_0$	Design Variables ( $\times qa^2/2$ )										Weight $W - c_0$ ( $\times qa^3/2$ )
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$	
0.05	15.667	9.5340	8.6694	6.5033	5.6640	4.2463	0.16991	0.17149	0.17038	0.16956	101.0228
0.1	15.727	9.2963	8.5913	6.4443	5.6862	4.2677	0.16277	0.16708	0.16143	0.16751	101.0051
0.3	16.001	9.5205	8.1228	6.0614	5.8772	4.4638	0.12500	0.12500	0.12500	0.15758	100.8751
0.5	16.000	9.5070	8.0000	6.0000	6.0010	4.5156	0.12500	0.12500	0.12500	0.12500	100.7969
0.8	16.000	9.5029	8.0000	6.0000	6.0005	4.5061	0.12500	0.12500	0.12500	0.12500	100.7689
1.0	16.000	9.5017	8.0000	6.0000	6.0002	4.5038	0.12500	0.12500	0.12500	0.12500	100.7615
1.15	16.000	9.5012	8.0000	6.0000	6.0000	4.5026	0.12500	0.12500	0.12500	0.12500	100.7577

Table 4 Minimum weight design for the grillage girder shown in Fig. 5 where  $\alpha=1.0$  and  $\beta=0.55$ 

$qa/2 : P$	Design Variables ( $\times qa^2/2$ )										Weight $W - c_0$ ( $\times qa^3/2$ )
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$	
1 : 0	6.0000	4.5129	8.0000	6.0000	6.0000	4.5129	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	70.802
1 : 1	7.0000	5.0116	8.0000	6.0000	6.0000	4.5129	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	73.799
1 : 3	9.0000	6.0097	8.0000	6.0000	6.0000	4.5129	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	79.795
1 : 10	16.0000	9.5000	8.0000	6.0000	6.0000	4.5129	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	100.776
1 : 50	56.0000	29.5000	8.0000	6.0000	6.0000	4.5129	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	220.776
1 : $\infty$	1.0 $\times$ Pa	0.5 $\times$ Pa	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.0 $\times$ Pa

Table 5 Minimum weight design for the grillage girder shown in Fig. 5 where  $P=10 \times qa/2$  and  $\beta=0.55$ 

$\alpha$	Design Variables ( $\times qa^2/2$ )										Weight $W-c_0$ ( $\times qa^3/2$ )
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$	
0.4	14.800	8.6000	5.8463	4.3820	4.5537	3.4256	0.1250	0.1381	0.1250	0.1370	88.5301
0.6	15.200	8.9000	6.4000	4.8000	5.2000	3.9149	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	89.2797
0.8	15.600	9.2000	7.2000	5.4000	5.6000	4.2138	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	95.0276
1.0	16.000	9.5000	8.0000	6.0000	6.0000	4.5129	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	100.7758
1.2	16.400	9.8000	8.8000	6.6000	6.4000	4.8121	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	106.5242
1.4	16.800	10.100	9.6000	7.2000	6.8000	5.1114	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	112.2728
2.0	18.000	11.000	12.000	9.0000	8.0000	6.0097	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	129.5194

Table 6 Minimum weight design for the grillage girder shown in Fig. 6 where  $P=10 \times qa/2$  and  $\beta=0.55$ 

$\alpha$	Design Variables ( $\times qa^2/2$ )													Weight $W-c_0$ ( $\times qa^3/2$ )	
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	
0.4	14.800	8.6000	5.6000	4.2000	5.8493	4.3818	4.5507	3.4258	0.1250	0.1250	0.1388	0.1250	0.1250	0.1367	103.280
0.6	15.200	8.9000	6.4000	4.8000	6.4000	4.8000	5.2000	3.9149	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	111.905
0.8	15.600	9.2000	7.2000	5.4000	7.2000	5.4000	5.6000	4.2138	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	120.528
1.0	16.000	9.5000	8.0000	6.0000	8.0000	6.0000	6.0000	4.5129	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	129.151
1.2	16.400	9.8000	8.8000	6.6000	8.8000	6.6000	6.4000	4.8121	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	137.774
1.4	16.800	10.100	9.6000	7.2000	9.6000	7.2000	6.8000	5.1114	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	146.398
2.0	18.000	11.000	12.000	9.0000	12.000	9.0000	8.0000	6.0097	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	172.269

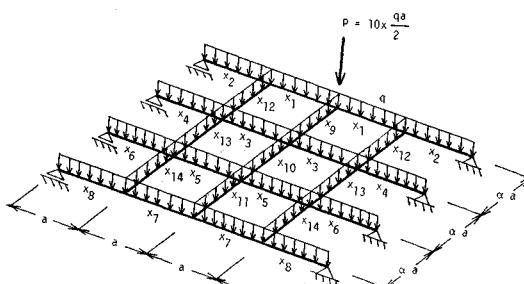


Fig. 6

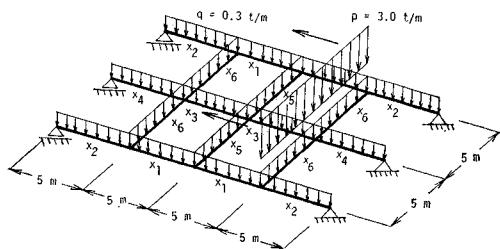


Fig. 7

の不静定構造としての複雑な荷重分配作用を考える必要はなく、主桁はスパン  $4a$  の単純桁、横桁はスパン  $\alpha a$  の2径間連続桁として設計すれば十分であるものと推測できる。

次に、Table 6 は Fig. 6 に示した 4 主桁、3 横桁の格子桁に対して、重量関数は  $W(\mathbf{x})=c_0+a(2X_1+2X_2+2X_3+2X_4+2X_5+2X_6+2X_7+2X_8+\alpha X_9+\alpha X_{10}+\alpha X_{11}+2\alpha X_{12}+2\alpha X_{13}+2\alpha X_{14})$  と仮定し、3 主桁の場合と同じ条件の下に計算した結果を示したものである。この結果は 3 主桁の場合と全く類似した傾向を示していることがわかる。

最後の計算例はもっとも実際的な問題として Fig. 7 に示す等分布荷重  $q=0.3 \text{ t/m}$  と移動線荷重  $p=3.0 \text{ t/m}$  を受ける単純格子桁をとり上げた。主桁は  $\beta=0.55$  なる箱形断面とし、横桁は I 形断面とし  $\beta=0$  と仮定した。各部材の断面積と塑性断面係数との間の関係は、式 (3.1) および式 (3.2) の折線近似を用い、断面積と部材長の積和によって重量関数を表わした。計算に当っては、最初に重量関数を適宜に仮定して最適解を求め、これを初期値として式 (3.1) および式 (3.2) により重量関数を修正して繰り返した。こうして求めた最適解は

$$\begin{aligned} X_1 &= 58.362 \text{ tm}, \quad X_2 = 52.736 \text{ tm}, \quad X_3 = 108.282 \text{ tm}, \\ X_4 &= 63.281 \text{ tm}, \quad X_5 = 5.156 \text{ tm}, \quad X_6 = 5.156 \text{ tm} \end{aligned}$$

となり\*、この場合も前述した一般的傾向と一致した結果を示している。なお、移動線荷重の取り扱いについては、横桁上に載っていない場合は挺子の法則によって隣接する横桁に分配されるものと仮定した。すると本問題に対しては対称条件により、線荷重が中央横桁上にある場合と他の一つの横桁上にある場合の二つ荷重状態を考慮した問題としての取り扱いで十分となる。なぜならば、こうして得られた設計はこの両荷重状態に対してそれぞれ静的許容かつ安全な応力場を持つことができ、いまこれらの応力場を  $\{\mathbf{y}_1\} + \{\mathbf{y}_2\}$ ,  $\{\mathbf{y}_2\} + \{\mathbf{y}_0\}$ , ここに  $\{\mathbf{y}_0\}$  は固定分布荷重に対する応力場、と定義すれば、線荷重が一つの横桁から  $\lambda a$  なる距離にある場合に対して応力場  $(1-\lambda)\{\mathbf{y}_1\} + \lambda\{\mathbf{y}_2\} + \{\mathbf{y}_0\}$ , ただし  $0 \leq \lambda \leq 1$ , は静的許容であり、一方降伏条件式を犯さない領域は凸領域であるから、これはまた安全でもある。したがって

\* この問題の計算時間は倍精度演算にて約 24 分であった。なお使用計算機は大阪市立大学計算センター所有の FACOM 270-30 である。

極限強度解析法の下界定理よりここで得られた設計は横桁上にない線荷重に対しても安全であり、よって求むべき最小重量設計である。

## 5. 結 論

本論文において集中荷重、等分布荷重およびそれらの変動荷重を受ける格子桁の最小重量設計問題の一つの解析法を示した。すなわち最小重量設計問題を極限強度解析法の下界定理に基づく極値問題として取り扱い、数値計算には凸計画の問題の計算法である J.E. Kelley の Cutting Plane Method を利用した。

本文で示した解析法を用いて橋梁などに見られる単純格子桁の最小重量設計を行なった結果、最適部材断面を有する格子桁では主桁のねじり抵抗は横桁の端部の固定作用に影響するのみであり、全体に与える影響は非常に少ない。したがって実用的には横桁は主桁で支えられた連続桁として設計し、主桁は直接に受ける荷重と横桁の反力が作用する単純桁として設計すれば十分であることが推測できた。

最後に、本論文の図表の作成にあたっては大阪市立大学院川村修一君の援助を受けたことを付記します。

## 参 考 文 献

- 1) Foulkes, J. : Minimum Weight Design and the Theory of Plastic Collapse, Quart. Appl. Math., 10, 347~358 (1953)
- 2) Foulkes, J. : Minimum Weight Design of Structural Frames, Proc. Roy. Soc. (London), A 223, 482~494 (1954)
- 3) Livesley, R. : The Automatic Design of Structural Frames, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 9, 257~278 (1956)
- 4) Tanaka, H. : Automatic Analysis and Design of Plastic Frames, Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 12, No. 3, Sep. (1962)
- 5) Toakley, A.R. : Some Computational Aspects of Optimum Rigid-Plastic Design, Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 531~537 (1968)
- 6) Heymann, J. : The Limit Design of a Transversely Loaded Square Grid, J. Appl. Mech. 19, 153~158 (1952)
- 7) 米沢 博：格子構造の極限荷重および最小重量設計に関する一研究、土木学会論文集第 67 号、11~18、昭和 35 年 3 月
- 8) Kelley, J.E., Jr. : The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs, J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 8, No. 4, 703~712 (1960)
- 9) 森口繁一・宮下藤太郎：線型計画法、岩波講座 現在応用数学、B. 12-6、岩波書店
- 10) Gass, S.I. (小山訳)：線型計画法、好学社
- 11) Nadai, A. : Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. 1, McGRAW-HILL, 490~526 (1950)

## 付録—I 型および箱型断面における全塑性曲げモーメントに対する全塑性ねじりモーメントの比

Fig. 1 に示す I 型断面の全塑性曲げモーメント  $M_0$  は

$$M_0 = \sigma_0 \{17 t^2 (70 t_w - t) + 0.25 t_w (70 t_w - 2t)^2\} \quad \dots\dots\dots(A-1)$$

ここに  $\sigma_0$  は一軸引張(圧縮)降伏応力である。一方、全塑性ねじりモーメントは A. Nadai の Sand heap Analogy<sup>11)</sup> を利用することによって計算できる。すなわち I 型断面に対する Sand heap を描けば Fig. 8 のようになり、この Sand heap の体積の 2 倍が全塑性ねじりモーメント  $T_0$  に等しいことより、

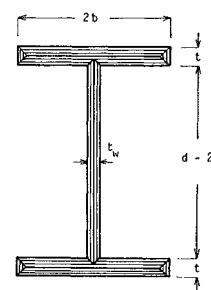
$$T_0 = \tau_0 \{17 t^3 + 0.5 t_w^2 (70 t_w - 2t)\} \dots\dots\dots(A-2)$$

ここに  $\tau_0$  はせん断降伏応力であり、Von Mises の降伏条件式にしたがえば、 $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$  である。

次に、箱型断面の全塑性曲げモーメントは

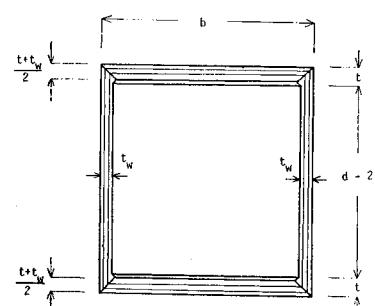
$$M_0 = \sigma_0 \{2t(16t - t_w)(70t_w - t) + 2450t_w^3\} \quad \dots\dots\dots(A-3)$$

全塑性ねじりモーメントは Fig. 9 の Sand heap から計算することができ、 $t \geq t_w$  に対しては、



Sand heap for I cross section

Fig. 8



Sand heap for box cross section

Fig. 9

$$T_0 = 2 \tau_0 \{ t_w^2 (2208 t - 68 t_w) + (t - t_w)^2 (16 t - t_w) \} \quad \dots \dots \dots \text{(A-4')}$$

$t_w > t$  に対しては,

$$T_0 = 2 \tau_0 \{ t^2 (2170 t_w - 30 t) + (t_w - t)^2 (35 t_w - t) \} \quad \dots \dots \dots \text{(A-4'')}$$

したがって、Fig. 1 の太線で示した曲線上のいくつかの断面について全塑性曲げモーメントに対する全塑性ねじりモーメントの比  $\beta$  を式 (A-1)～式 (A-4'') を用いて計算すれば Table 7 のようになり、I型断面では  $\beta = 0.0126 \sim 0.0138$ 、箱型断面では  $\beta = 0.467 \sim 0.549$  であり、二、三の断面を除けばほとんど一定値を示している。

Table 7 Values of  $\beta$  of the I cross section shown in Fig. 1

$t_w$ (cm)	$t$ (cm)	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$M_0/\sigma_0$ (cm <sup>3</sup> )	$T_0/\tau_0$ (cm <sup>3</sup> )	$\beta = T_0/M_0$
0.45	0.424	19.9	203	4.4	0.0126
0.50	0.518	26.1	306	6.7	0.0126
0.60	0.458	31.8	407	9.1	0.0129
0.65	0.606	41.3	608	13.3	0.0126
0.70	0.700	50.0	811	17.7	0.0126
0.75	0.762	58.0	1013	22.1	0.0126
0.85	0.891	76.1	1522	33.2	0.0126
0.95	0.950	92.1	2027	44.2	0.0126
1.00	1.073	107.0	2536	55.4	0.0126
1.10	1.063	120.8	3044	66.4	0.0126
1.20	1.192	146.3	4058	88.4	0.0126
1.25	1.235	158.2	4563	99.4	0.0126
1.30	1.269	169.8	5073	110.6	0.0126
1.35	1.292	180.9	5577	121.6	0.0126
1.40	1.424	202.2	6593	143.7	0.0126
1.50	1.427	222.5	7607	165.9	0.0126
1.55	1.517	241.8	8621	187.9	0.0126
1.60	1.593	260.4	9636	210.0	0.0126
1.60	1.834	287.8	11155	245.9	0.0127
1.60	2.048	315.3	12674	286.7	0.0131
1.60	2.361	361.3	15201	364.2	0.0138

Table 8 Values of  $\beta$  of the box cross section shown in Fig. 1

$t_w$ (cm)	$t$ (cm)	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$M_0/\sigma_0$ (cm <sup>3</sup> )	$T_0/\tau_0$ (cm <sup>3</sup> )	$\beta = T_0/M_0$
0.50	0.434	46.2	500	233	0.467
0.50	0.539	52.5	608	334	0.549
0.55	0.509	57.8	701	353	0.503
0.60	0.548	68.3	900	446	0.495
0.70	0.675	95.9	1499	789	0.526
0.75	0.788	116.1	2000	1097	0.548
0.80	0.866	134.8	2501	1373	0.549
0.85	0.920	152.2	3000	1647	0.549
0.90	0.958	168.7	3501	1921	0.549
0.95	0.982	184.3	4000	2192	0.548
1.00	0.995	199.4	4499	2447	0.544
1.05	1.105	227.9	5497	3015	0.549
1.10	1.097	241.6	6000	3271	0.545
1.15	1.172	267.7	7000	3832	0.548
1.20	1.231	292.6	8003	4384	0.548
1.25	1.276	316.5	9003	4930	0.548
1.30	1.310	339.6	10003	5472	0.547
1.35	1.459	383.5	11999	6587	0.549
1.40	1.470	404.5	13000	7130	0.548
1.45	1.528	435.0	14495	7952	0.549

る。

## 付録—2 Cutting Plane Method for Convex Programming<sup>8)</sup>

J.E. Kelley 氏は非線型拘束  $G(\mathbf{x}) \leq 0$  の下で線型関数

$$f = \sum_{i=1}^n c_i x_i \dots \dots \dots \text{(A-5)}$$

を最小にする問題を考えた。ここに  $G(\mathbf{x})$  は次の条件を満足するものとする。(1)  $G(\mathbf{x})$  は連続な凸関数である、(2)  $G(\mathbf{x})$  は  $n$  次元多面体の内部  $S = \{\mathbf{x} | A \cdot \mathbf{x} \geq b\}$ 、ただし  $A$  は  $m \times n$  のマトリックス、 $\mathbf{x}$  は  $n \times 1$  の変数ベクトル、において定義されている、(3)  $S$  における任意の点  $\mathbf{t}$  において、 $G(\mathbf{x})$  のグラフに対する支持超平面\*  $y = p(\mathbf{x}; \mathbf{t})$  が存在し、 $\|\nabla p(\mathbf{x}; \mathbf{t})\|$  は有限値をとる。

いま、 $R = \{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) \leq 0\}$ 、 $R \subset S$  とすれば、 $S - R$  にある任意の点  $\mathbf{t}$  において  $G(\mathbf{x})$  に対する支持超平面は

$$p(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = G(\mathbf{t}) + \nabla p(\mathbf{x}; \mathbf{t})(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \dots \dots \text{(A-6)}$$

と表わされる。 $G(\mathbf{x})$  は凸関数であるから、 $\mathbf{x} \in S$  において  $p(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \leq G(\mathbf{x})$  であり、 $\mathbf{x} \in R$  において  $p(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \leq 0$  となる。したがって点  $\mathbf{t}$  と  $R$  は超平面  $p(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = 0$  に対して互いに反対側に位置する。さて、 $S_0 = S$  とし、 $S_0$  において式 (A-5) の目的関数  $f$  の最小にする解を  $\mathbf{t}_0$  (一般に  $\mathbf{t}_0$  は  $S_0 - R$  に存在する、もしそうでなければ  $\mathbf{t}_0$  は求める解となる) とする。さらに、

$$S_1 = S_0 \cap \{\mathbf{x} | p(\mathbf{x}; \mathbf{t}_0) \leq 0\}$$

$$S_2 = S_1 \cap \{\mathbf{x} | p(\mathbf{x}; \mathbf{t}_1) \leq 0\}$$

$$S_k = S_{k-1} \cap \{\mathbf{x} | p(\mathbf{x}; \mathbf{t}_{k-1}) \leq 0\}$$

と置き、 $\mathbf{t}_k$  を  $S_k$  内で目的関数  $f = c\mathbf{x}$  を最小にする点とし、 $f_k = c\mathbf{t}_k$  とすれば、

$$S_k \subset S_{k-1} \subset \dots \subset S_1 \subset S_0,$$

そして、

$$f_k \geq f_{k-1} \geq \dots \geq f_1 \geq f_0$$

となり、列  $\{\mathbf{t}_k\}$ ,  $\{f_k\}$  が求まる。それゆえ  $\{\mathbf{t}_k\}$  が  $R$  の内部の一点  $\mathbf{r}$  に収束する部分列を含むかどうか調べなければならない。もしこのような収束する部分列が存在するならば、ここで示した計算方法によって得られた単調に増加する列  $\{f_k\}$  は  $f (= \min_{\mathbf{x} \in R} \{c\mathbf{x}\})$  に収束し、 $\mathbf{r}$  は求めるべき最適解となる。 $\{\mathbf{t}_k\}$  が  $\mathbf{r}$  に収束する部分列を含むことは次のように証明できる。もし  $\mathbf{t}_k$  が  $S_k$  において  $c\mathbf{x}$  を最小にする点であるならば、

$$G(\mathbf{t}_i) + \nabla p(\mathbf{t}_k; \mathbf{t}_i)(\mathbf{t}_k - \mathbf{t}_i) \leq 0 \quad (0 \leq i \leq k-1)$$

\*  $n$  次元空間における凸体  $Q$  に対して、 $Q$  の境界とは共通点をもつが、 $Q$  の内部とは共通点をもたない平面を支持超平面 (Supporting hyperplane) という。

を満足しなければならない。もし  $\{t_k\}$  が  $R$  の内部の一点に収束する部分列を持つならば、 $\{G(t_k)\}$  はゼロに収束する部分列を持たねばならない。もし求めるべき収束が起こらないとするならば、 $k$  に関係なく

$$r \leq G(t_i) \leq \nabla p(t_k; t_i)(t_i - t_k) \leq K \|t_i - t_k\|$$

なる  $r (> 0)$  が存在する。ここに  $K$  はある有限な正の定数である。それゆえ任意の指數 (index) の列  $\{k_p\}$  に対して

$$\|t_{kq} - t_{kp}\| \geq r/K \quad (q < p)$$

となり、したがって列  $\{t_k\}$  はコーシーの部分列をもたない。しかしながら  $S$  は、連続する実数からなる集合であることより、これは不可能である。よって、 $\{t_k\}$  は  $S$  内の一点  $\tau$  に収束する部分列を持ち、 $\{G(t_k)\}$  はゼロに収束するから  $\tau$  は  $R$  内になければならない。

次に、実際の計算に際しては、もし  $G(\mathbf{x})$  がいたるところで微分可能であるならば、 $\nabla p(\mathbf{x}; t_k) = \nabla G(t_k)$  となり、 $t_j (0 \leq j \leq k-1)$  は次の線型計画の問題を解くことによって求められる。

$$A \cdot x \geq b,$$

$$-\nabla p(\mathbf{x}; \mathbf{t}_j) \cdot \mathbf{x} \geq G(\mathbf{t}_j) - \nabla p(\mathbf{x}; \mathbf{t}_j) \cdot \mathbf{t}_j \quad (0 \leq j \leq k-1),$$

さて、上述の議論にしたがって本論文式(10)に対する Cutting Plane を求めれば、

$$G(\mathbf{x}) = \sqrt{(M_{ih'} - X_{ih})^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2} (T_{ih'} - \beta_{ih} X_{ih})^2} - X_{ih'}$$

$t_i = (t_1, t_2, t_3)$  とすれば

$$P(x; t_j) = \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2} (t_2 - \beta_{ih} t_3)^2}}$$

$$\cdot \left[ (t_1 - t_3), \frac{1}{\beta_{ih}^2} (t_2 - \beta_{ih} t_3), \left\{ -t_1 - \frac{t_2}{\beta_{ih}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2t_3 - \sqrt{(t_1 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2} (t_2 - \beta_{ih} t_3)^2} \right\} \right]$$

式 (A-7) より,  $G(t_j) + p(x; t_j)(x - t_j) \leq 0$ , よって

$$(t_1 - t_3) M_{ih'} + \frac{t_2 - \beta_{ih} t_3}{\beta_{ih}^2} T_{ih'}$$

$$-\left\{ \sqrt{(t_1-t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2} (t_2 - \beta_{ih} t_3)^2} + t_1 - t_3 + \frac{t_2 - \beta_{ih} t_3}{\beta_{ih}} \right\} X_{ih} \leq 0 \dots \dots \dots (11)$$

また、式(12)に対しては

$$G(\mathbf{x}) = \sqrt{(M'_{\max} - X_{ih})^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^{-2}}(T_{ih'} - \beta_{ih}X_{ih})^2} - X_{ih},$$

二四

$$M'_{\max} = \frac{q_{ih}}{8} A_{ih}^2 + \frac{1}{2}(M_{ih'} + M_{hi'}) \\ + \frac{1}{2q_{ih}A_{ih}^2}(M_{ih'} - M_{hi'})^2 \geq X_{ih}.$$

$t_j = (t_1, t_1', t_2, t_3)$  とすれば

$$\begin{aligned} \nabla p(\mathbf{x}; t_j) = & \frac{1}{\sqrt{(t_0 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2}(t_2 - \beta_{ih}t_3)^2}} \\ & \cdot \left[ \frac{1}{2}(t_0 - t_3) \left\{ 1 + \frac{2}{q_{ih}A_{ih}^2}(t_1 - t_1') \right\}, \right. \\ & \frac{1}{2}(t_0 - t_3) \left\{ 1 - \frac{2}{q_{ih}A_{ih}^2}(t_1 - t_1') \right\}, \\ & \frac{1}{\beta_{ih}^2}(t_2 - \beta_{ih}t_3), -t_0 + 2t_3 - \frac{t_2}{\beta_{ih}} \right. \\ & \left. - \sqrt{(t_0 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ih}^2}(t_2 - \beta_{ih}t_3)^2} \right]. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{2}{q_{ih} A_{ih}^{-2}} (t_1 - t_1') \right\} M_{ih'} + \left\{ 1 - \frac{2}{q_{ih} A_{ih}^{-2}} \right. \\ & \left. \cdot (t_1 - t_1') \right\} M_{hi'} + \frac{2(t_2 - \beta_{ih} t_3)}{\beta_{ih}^{-2} (t_0 - t_3)} T_{ih'} \\ & - 2 \left\{ 1 + \frac{t_2 - \beta_{ih} t_3}{\beta_{ih} (t_0 - t_3)} + \sqrt{1 + \frac{1}{\beta_{ih}^{-2}} \left( \frac{t_2 - \beta_{ih} t_3}{t_0 - t_3} \right)^2} \right\} \\ & \cdot X_{ih} + \frac{q_{ih} A_{ih}^{-2}}{4} - \frac{1}{q_{ih} A_{ih}^{-2}} (t_1 - t_1')^2 \leq 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (13)$$

三

$$t_0 = \frac{q_{ih} A_{ih}^2}{8} + \frac{1}{2}(t_1 + t_1') + \frac{1}{2 q_{ih} A_{ih}^2} \cdot (t_1 - t_1')^2 \geq t_3.$$

(1971.3.24・受付)