

二方向連続直交異方性矩形板の解法

ANALYSIS OF TWO-WAY CONTINUOUS RECTANGULAR
ORTHOTROPIC PLATES

橋木 武*・横田 漢**・高橋 和雄***

By Takeshi Chishiki, Hiroshi Yokota and Kazuo Takahashi

1. 緒 言

矩形板が周辺の他に中間で弾性ばりや剛支承で支持される二方向連続矩形板の解法に関しては、以前からその数学的取扱いが可能とされていた。しかしながら、演算上の困難から既往の研究の大部分は、等分布満載荷重など特定荷重の作用を受ける二方向連続等方性板の解法の報告にとどまっている。すなわち、Marcus¹⁾は剛支承で支えられ、主として等分布荷重を受ける二方向連続矩形板を対象に単級数を用いて厳密に解析しているが、ここでは積分定数を未知数とする多元連立方程式を解析の基盤としている。また、東²⁾は等分布荷重を受け、かつボアソン比を無視した連続板の近似解法を提案している。藤井³⁾は境界条件を満足する板のたわみを仮定のうえ、式中に含まれる定数を、基礎微分方程式から決定する方法およびエネルギー法により決定する方法の2法を報告している。さらに、演算の簡略化を目的とする実用解法としてモーメント分配法を提案したものの、Engelbreth⁴⁾、Siess and Newmark⁵⁾、成岡⁶⁾、Ang⁷⁾などの研究があり、それぞれに、固定端モーメントや分配係数の算定のうえで工夫がなされている。そのほか、対称荷重を受ける二方向連続板を対象に、固定端モーメントを正弦曲線で近似し、かつ支承の中点のみで連続条件を満足させる簡易解法を提案した Maugh and Pan⁸⁾ の研究や、十字型の中間剛支承を有する矩形板の解法を述べた Bittner⁹⁾ の研究などもあるが、いずれも等方性でかつ特定の荷重状態を主たる課題対象とするものである。

しかしに、現実に見受けられる二方向連続板の多くは、直角二方向の剛度が異なる鉄筋コンクリートスラブやリブ付き板、コルゲートシートなど、厳密には二

方向連続直交異方性板とみなされるものであるが、このような連続板に関する研究は、有限要素法や差分法などの近似解法は別として、著者らの知る限り未だ見受けられないようである。

以上の所論から、本論文は任意垂直荷重を受ける二方向連続直交異方性板の厳密解法として、連続板の各パネルを解析の基本単位とする方法と、連続板全体を基本単位とする方法の二つを提案し、本構造のたわみや曲げモーメントなどの厳密値について吟味検討を行なうものである。すなわち、第1法は、すでに一方向連続板に関して提案された板たわみ角法¹⁰⁾を二方向連続直交異方性板の問題に拡張応用するもので、パネル端辺の端モーメントとたわみ角との関係を表わすたわみ角一端モーメント関係式を誘導のうえ、これを解析の基盤とする方法である。また、第2法は、著者の1人が先に無梁板構造の解法として確立した基本系法¹¹⁾を、本題の連続板に拡張応用するものであり、第1法とともに本構造の解法に資することはむろんのこと、以後の課題対象である板・骨組複合構造解析の基礎理論に資せんとするものである。

2. 板たわみ角法

(1) たわみ角一端モーメント関係式の誘導

二方向連続直交異方性板から任意のパネルを取り出し、その直交2辺を x 、 y 軸、板面に対して垂直方向を z 軸とする直交座標系 (x , y , z) を導入すれば（図-1 参照）、パネルのたわみ w を求めるための基礎微分方程式は、周知のように、次式で与えられる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad \dots \quad (1)$$

ただし、 $D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy}\nu_{yy})$ 、 $D_y = E_y h^3 / 12(1 - \nu_{xx}\nu_{yy})$ 、 $H = \nu_{xy}D_y + 2D_{xy}$ 、 $D_{xy} = Gh^3 / 12$ 、

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 九州大学助手 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 長崎大学講師 工学部構造工学教室

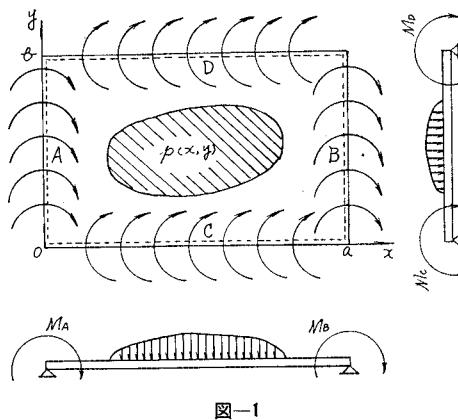


図-1

E_x, E_y : x, y 方向のヤング率, ν_x, ν_y : x, y 方向のポアソン比, h : 板厚, G : せん断弾性係数, w : 板の垂直たわみ, $p(x, y)$: 板に作用する任意垂直荷重強度

式(1)の一般解は、数学的に $H^2 \equiv D_x \cdot D_y$ なる 3 つの場合についてそれぞれえられるが、ここでは実用的観点から、鉄筋コンクリートスラブに関して Huber が提案した剛度 H に関する式 $H = \sqrt{D_x \cdot D_y}$ を用うることにする。しかるとき、 $\lambda = \sqrt{D_y/D_x}$ とおき、また、 $\xi = x/a$ (a : 辺 C, D の辺長), $\eta = y/b$ (b : 辺 A, B の辺長) および $\mu = b/a$ のように無次元化して式(1)を変形すれば次式がえられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{a^4}{D_x} p(\xi, \eta) \quad (2)$$

式(2)の特殊解 w_0 を二重正弦フーリエ級数を用いて次のように仮定する。

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \quad (3)$$

ここに、 f_{mn} は任意定数

また、任意垂直荷重 $p(\xi, \eta)$ を二重正弦フーリエ級数に展開すれば

$$p(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \quad (4)$$

ただし、 $R_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 p(\xi, \eta) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta$

式(3)および式(4)を式(2)に代入すれば任意定数 f_{mn} が次のように求まり、したがって特殊解 w_0 が決定される。

$$f_{mn} = \frac{a^4 R_{mn}}{D_x \left\{ (m\pi)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu} n \pi\right)^2 \right\}^2} \quad (5)$$

他方、式(2)の余関数 w_1 として次のような変数分離式を仮定する。

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \sin n \pi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin m \pi \xi \quad (6)$$

なお、上式および式(3)を仮定したことはパネル隅部のたわみが必然的に零となり、したがって、その適用範囲がおのずから制限されることになる。

式(6)を式(2)の齊次方程式に代入してえられる微分方程式の解を求めれば、式(6)に含まれる関数 $X_n(\xi)$, $Y_m(\eta)$ が次のようにえられる。

$$\begin{aligned} X_n(\xi) &= (A_n^X + B_n^X \cdot \xi) \sinh \beta_n \xi \\ &\quad + (C_n^X + D_n^X \cdot \xi) \cosh \beta_n \xi \\ Y_m(\eta) &= (A_m^Y + B_m^Y \cdot \eta) \sinh \alpha_m \eta \\ &\quad + (C_m^Y + D_m^Y \cdot \eta) \cosh \alpha_m \eta \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots (7)$$

ただし、 $\alpha_m = (\mu/\lambda)m\pi$, $\beta_n = (\lambda/\mu)n\pi$,

$A_n^X \sim D_n^X$, $A_m^Y \sim D_m^Y$: 積分定数

式(3), (5) および式(6), (7) より結局、パネルのたわみ w が次のように算定される。

$$\begin{aligned} w = & \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n^X + B_n^X \cdot \xi) \sinh \beta_n \xi \\ & + (C_n^X + D_n^X \cdot \xi) \cosh \beta_n \xi\} \sin n \pi \eta \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \{(A_m^Y + B_m^Y \cdot \eta) \sinh \alpha_m \eta \\ & + (C_m^Y + D_m^Y \cdot \eta) \cosh \alpha_m \eta\} \sin m \pi \xi \\ & + \frac{a^4}{D_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{\{(m\pi)^2 + \beta_n^2\}^2} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \end{aligned} \quad \dots (8)$$

図-1 に示すように、辺 A, B, C, D に端モーメント M_A, M_B, M_C, M_D が作用し、支承沈下 $\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D$ が起こるものとする。しかるとき、 M_A, M_B および δ_A, δ_B は y のみの関数であり、また M_C, M_D および δ_C, δ_D は x のみの関数であるゆえ、これらを正弦フーリエ級数にて表わしうるものと仮定すれば、図-1 に示す矩形板の境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \xi = 0 : w = \delta_A &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin n \pi \eta, \\ &- D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= M_A = \sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin n \pi \eta \\ \xi = 1 : w = \delta_B &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin n \pi \eta, \\ &- D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= M_B = - \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin n \pi \eta \\ \eta = 0 : w = \delta_C &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Cm} \sin m \pi \xi, \\ &- D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= M_C = \sum_{m=1}^{\infty} M_{Cm} \sin m \pi \xi \end{aligned} \quad \dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta=1 : w &= \delta_D = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Dm} \sin m \pi \xi, \\ &- D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= M_D = - \sum_{m=1}^{\infty} M_{Dm} \sin m \pi \xi \end{aligned} \right\}$$

式 (8), (9) より積分定数 $A_n^X \sim D_n^X$, $A_m^Y \sim D_m^Y$ を求めれば、次の結果をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_n^X &= - \frac{a^2}{2 D_x} \cdot \frac{M_{An} + M_{Bn} \cosh \beta_n}{\beta_n \sinh^2 \beta_n} \\ &- \frac{\delta_{An}}{\sinh \beta_n} \left\{ \cosh \beta_n + \frac{(1-\nu_y/\lambda^2) \beta_n}{2 \sinh \beta_n} \right\} \\ &+ \frac{\delta_{Bn}}{\sinh \beta_n} \left\{ 1 + \frac{(1-\nu_y/\lambda^2) \beta_n \cosh \beta_n}{2 \sinh \beta_n} \right\} \\ B_n^X &= - \frac{a^2}{2 D_x} \cdot \frac{M_{An}}{\beta_n} - \frac{(1-\nu_y/\lambda^2) \beta_n}{2} \delta_{An}, \\ C_n^X &= \delta_{An} \\ D_n^X &= \frac{a^2}{2 D_x} \cdot \frac{M_{An} \cosh \beta_n + M_{Bn}}{\beta_n \sinh \beta_n} \\ &+ \frac{(1-\nu_y/\lambda^2) \beta_n}{2 \sinh \beta_n} (\delta_{An} \cosh \beta_n - \delta_{Bn}) \\ A_m^Y &= - \frac{b^2}{2 D_y} \cdot \frac{M_{Cm} + M_{Dm} \cosh \alpha_m}{\alpha_m \sinh^2 \alpha_m} \\ &- \frac{\delta_{Cm}}{\sinh \alpha_m} \left\{ \cosh \alpha_m + \frac{(1-\nu_x/\lambda^2) \alpha_m}{2 \sinh \alpha_m} \right\} \\ &+ \frac{\delta_{Dm}}{\sinh \alpha_m} \left\{ 1 + \frac{(1-\nu_x/\lambda^2) \alpha_m \cosh \alpha_m}{2 \sinh \alpha_m} \right\} \\ B_m^Y &= - \frac{b^2}{2 D_y} \cdot \frac{M_{Cm}}{\alpha_m} - \frac{(1-\nu_x/\lambda^2) \alpha_m}{2} \delta_{Cm}, \\ C_m^Y &= \delta_{Cm} \\ D_m^Y &= \frac{b^2}{2 D_y} \cdot \frac{M_{Cm} \cosh \alpha_m + M_{Dm}}{\alpha_m \sinh \alpha_m} \\ &+ \frac{(1-\nu_x/\lambda^2) \alpha_m}{2 \sinh \alpha_m} (\delta_{Cm} \cosh \alpha_m - \delta_{Dm}) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (10)$$

式 (10) を式 (8) に代入すれば、図-1 に示す矩形板のたわみ w がえられることになる。

図-1 に示すパネルにおいて、辺 A, B のたわみ角は端モーメントおよび支承沈下と同じく、 y のみの関数であり、辺 C, D においては x のみの関数であるが、これらのたわみ角を代数関数で表現することは困難であるゆえ、再び正弦フーリエ級数を用いて次のように表わされるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{\xi=0} &= \theta_A = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{An} \sin n \pi \eta \\ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{\xi=1} &= \theta_B = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{Bn} \sin n \pi \eta \\ \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{\eta=0} &= \theta_C = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{Cm} \sin m \pi \xi \\ \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{\eta=1} &= \theta_D = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{Dm} \sin m \pi \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (11)$$

一方、式 (8) に関して x, y の第一次微係数を求め、その結果に各辺 A, B, C, D の座標値および式 (10) を

代入すれば、それぞれの辺に関するたわみ角が算出されるから、これらを式 (11) の左辺に代入し、演算のうえ整理すれば $\theta_{An}, \theta_{Bn}, \theta_{Cm}, \theta_{Dm}$ が次のように誘導される。

$$\begin{aligned} \theta_{An} &= \frac{a}{D_x} \{ A_{(\beta_n)} M_{An} + B_{(\beta_n)} M_{Bn} \} \\ &+ \frac{a}{D_y} \sum_{m=1}^{\infty} E_{(n,m)} \{ M_{Cm} + (-1)^m M_{Dm} \} \\ &+ \frac{1}{a} \{ C_{(\beta_n)} \delta_{An} + D_{(\beta_n)} \delta_{Bn} \} \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} F_{(n,m)} \{ \delta_{Cm} - (-1)^m \delta_{Dm} \} \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} m \pi f_{mn} \\ \theta_{Bn} &= \frac{a}{D_x} \{ B_{(\beta_n)} M_{An} + A_{(\beta_n)} M_{Bn} \} \\ &+ \frac{a}{D_y} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m E_{(n,m)} \{ M_{Cm} + (-1)^m M_{Dm} \} \\ &- \frac{1}{a} \{ D_{(\beta_n)} \delta_{An} + C_{(\beta_n)} \delta_{Bn} \} \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m F_{(n,m)} \{ \delta_{Cm} - (-1)^m \delta_{Dm} \} \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m \pi f_{mn} \\ \theta_{Cm} &= \frac{b}{D_x} \sum_{n=1}^{\infty} E'_{(m,n)} \{ M_{An} + (-1)^m M_{Bn} \} \\ &+ \frac{b}{D_y} \{ A'_{(\alpha_m)} M_{Cm} + B'_{(\alpha_m)} M_{Dm} \} \\ &+ \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} F'_{(m,n)} \{ \delta_{An} - (-1)^m \delta_{Bn} \} \\ &+ \frac{1}{b} \{ C'_{(\alpha_m)} \delta_{Cm} + D'_{(\alpha_m)} \delta_{Dm} \} \\ &+ \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n \pi f_{mn} \\ \theta_{Dm} &= \frac{b}{D_x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n E'_{(m,n)} \{ M_{An} + (-1)^m M_{Bn} \} \\ &+ \frac{b}{D_y} \{ B'_{(\alpha_m)} M_{Cm} + A'_{(\alpha_m)} M_{Dm} \} \\ &+ \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F'_{(m,n)} \{ \delta_{An} - (-1)^m \delta_{Bn} \} \\ &- \frac{1}{b} \{ D'_{(\alpha_m)} \delta_{Cm} + C'_{(\alpha_m)} \delta_{Dm} \} \\ &+ \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \pi f_{mn} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (12)$$

ただし、

$$A_{(\beta_n)} = \frac{-\beta_n + \sinh \beta_n \cosh \beta_n}{2 \beta_n \sinh^2 \beta_n}$$

$$B_{(\beta_n)} = \frac{-\beta_n \cosh \beta_n + \sinh \beta_n}{2 \beta_n \sinh^2 \beta_n}$$

$$E_{(n,m)} = \frac{2 \mu^2 n \pi m \pi}{\{(n \pi)^2 + \alpha_m^2\}^2}$$

$$C_{(\beta_n)} = \frac{-\beta_n}{2 \sinh \beta_n} \left\{ (1+\nu_y/\lambda^2) \cosh \beta_n + \frac{(1-\nu_y/\lambda^2) \beta_n}{\sinh \beta_n} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 D_{(n)} &= \frac{\beta_n}{2 \sinh \beta_n} \left\{ 1 + \nu_y / \lambda^2 + (1 - \nu_y / \lambda^2) \beta_n \frac{\cosh \beta_n}{\sinh \beta_n} \right\} \\
 F_{(n,m)} &= \frac{2 n \pi m \pi}{(n \pi)^2 + \alpha_m^2} \left\{ 1 + \frac{(1 - \nu_x \lambda^2) \alpha_m^2}{(n \pi)^2 + \alpha_m^2} \right\} \\
 E'_{(m,n)} &= \frac{2 m \pi n \pi}{\mu^2 \{(m \pi)^2 + \beta_n^2\}^2} \\
 A'_{(\alpha_m)} &= \frac{-\alpha_m + \sinh \alpha_m \cosh \alpha_m}{2 \alpha_m \sinh^2 \alpha_m} \\
 B'_{(\alpha_m)} &= \frac{-\alpha_m \cosh \alpha_m + \sinh \alpha_m}{2 \alpha_m \sinh^2 \alpha_m} \\
 F'_{(m,n)} &= \frac{2 m \pi n \pi}{(m \pi)^2 + \beta_n^2} \left\{ 1 + \frac{(1 - \nu_x \lambda^2) \beta_n^2}{(m \pi)^2 + \beta_n^2} \right\} \\
 C'_{(\alpha_m)} &= \frac{-\alpha_m}{2 \sinh \alpha_m} \left\{ (1 + \nu_x \lambda^2) \cosh \alpha_m + \frac{(1 - \nu_x \lambda^2) \alpha_m}{\sinh \alpha_m} \right\} \\
 D'_{(\alpha_m)} &= \frac{\alpha_m}{2 \sinh \alpha_m} \left\{ 1 + \nu_x \lambda^2 + \frac{(1 - \nu_x \lambda^2) \alpha_m \cosh \alpha_m}{\sinh \alpha_m} \right\}
 \end{aligned}$$

式 (12) はその式形から明らかなように、図-1 に示すパネルの周辺 A, B, C, D におけるたわみ角の級数展開式における展開係数と、端モーメントのそれとの関係を示すものであり、既往のはり理論におけるたわみ角式のように、たわみ角と端モーメントとの関係を直接表わすものではない。この意味において、式 (12) を板のたわみ角端モーメント関係式と“関係”の二字を挿入して称することにする。

なお、式 (12)において $\lambda^4 = 1$ すなわち $D_x = D_y = D$, $\nu_x = \nu_y = \nu$ とすれば、等方性板に関するたわみ角一端モーメント関係式がえられるが、このことは、式 (1) の一般解を算定するに際して Huber の式 $H = \sqrt{D_x \cdot D_y}$ (したがって $H^2 = D_x \cdot D_y$) を用いたことに基づく当然の帰結である。

(2) 連続板の解法

本題の連続板では中間がいずれも剛支承で支持されるものとする。しかるとき、たとえば図-2(a) に示すような連続板において、任意の相隣り合う二つのパネル ①, ④ に着目し、モーメントのつり合いおよびたわみ角の連続条件を考えれば次の通りである。すなわち、節線 i (骨組の節点に該当し、パネルの接続線をさす) 上の任意点 x (or y) におけるモーメントのつり合い条件は (図-2(b) 参照)。

$$\sum_{m=1}^{\infty} M_{ihm} \sin \frac{m \pi}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} M_{ijm} \sin \frac{m \pi}{a} x = 0 \quad \dots \dots \dots (13)$$

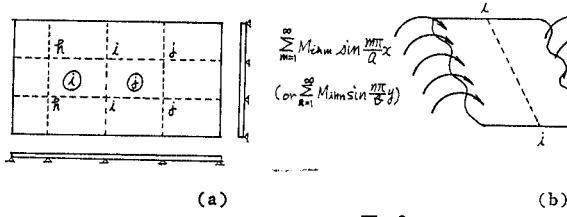


図-2

$$\left(\text{or } \sum_{n=1}^{\infty} M_{ihn} \sin \frac{n \pi}{b} y + \sum_{n=1}^{\infty} M_{ijn} \sin \frac{n \pi}{b} y = 0 \right)$$

式 (13) は x (or y) のいかんにかかわらず成立せねばならないから、結局次のように書き改められる。

$$M_{ihm} + M_{ijm} = 0 \quad (\text{or } M_{ihn} + M_{ijn} = 0) \dots \dots \dots (14)$$

同様にして、節線 i 上におけるたわみ角の連続条件から次式をうる。

$$\theta_{ihm} = \theta_{ijm} \quad (\text{or } \theta_{ihn} = \theta_{ijn}) \dots \dots \dots (15)$$

式 (14) および式 (15) は連続ばりにおける節点方程式およびたわみ角の連続条件式に対応するものであり、前者を連続板の節線方程式、後者を連続条件式と名づける。

連続板の各節線上で式 (12) のたわみ角一端モーメント関係式を求め、その結果を式 (15) の連続条件式に代入し、かつ式 (14) の節線方程式および端辺の境界条件式をたてれば、未知数 M_{ihm} , M_{ijm} と同数の方程式がえられ、これらを連立に解けば本題の連続板の解が求まることになる。

(3) 十字型支承を有する 4 パネル連続板

図-3 に示す周辺単純支持の 2×2 等スパン二方向連続板すなわち十字型支承を有する 4 パネル連続板において、等分布荷重 p_0 がパネル ①, ④ に作用する場合の解法を示せば次のとおりである。

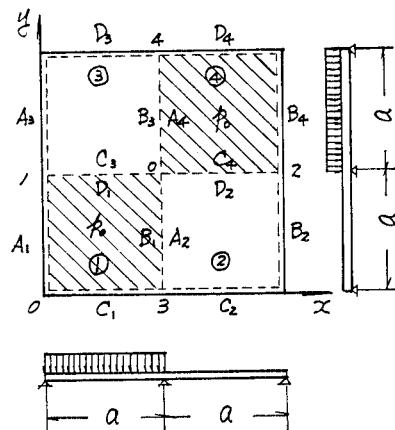


図-3

いま、いずれの支承も沈下しないものとすれば

$$\delta_{A1n} = \delta_{B1n} = \delta_{C1m} = \delta_{D1m} = 0$$

$$\delta_{A2n} = \delta_{B2n} = \delta_{C2m} = \delta_{D2m} = 0$$

$$\delta_{A3n} = \delta_{B3n} = \delta_{C3m} = \delta_{D3m} = 0$$

$$\delta_{A4n} = \delta_{B4n} = \delta_{C4m} = \delta_{D4m} = 0$$

であり、また、端辺の境界条件が次のようにえられる。

$$M_{A1n} = M_{C1m} = 0$$

$$M_{B2n} = M_{C2m} = 0$$

二方向連続直交異方性矩形板の解法

$$M_{A_{3n}} = M_{D_{3m}} = 0, \quad M_{B_{4n}} = M_{D_{4m}} = 0$$

したがって、パネル①, ②, ③, ④に関する式(12)のたわみ角一端モーメント関係式は、本例では次の内容となる。

$$\begin{aligned}
\theta_{B1n} &= \frac{a}{D_x} A_{(\beta_n)} M_{B1n} + \frac{a}{D_y} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \\
&\quad \cdot E_{(n,m)} M_{D1m} + \frac{p_0 a^3}{D_x} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m \pi f'_{mn} \\
\theta_{D1m} &= \frac{b}{D_x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} E'_{(m,n)} M_{B1n} + \frac{b}{D_y} \\
&\quad \cdot A'_{(a_m)} M_{D1m} + \frac{p_0 a^4}{b D_x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \pi f'_{mn} \\
\theta_{A2n} &= \frac{a}{D_x} A_{(\beta_n)} M_{A2n} + \frac{a}{D_y} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n E_{(n,m)} M_{D2m} \\
\theta_{D2m} &= \frac{b}{D_y} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n E'_{(m,n)} M_{A2n} \\
&\quad + \frac{b}{D_y} A'_{(a_m)} M_{D2m} \\
\theta_{B3n} &= \frac{a}{D_x} A_{(\beta_n)} M_{B3n} \\
&\quad + \frac{a}{D_y} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m E_{(n,m)} M_{C3m} \\
\theta_{C3m} &= \frac{b}{D_x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m E'_{(m,n)} M_{B3n} \\
&\quad + \frac{b}{D_y} A'_{(a_m)} M_{C3m} \\
\theta_{A4n} &= \frac{a}{D_x} A_{(\beta_n)} M_{A4n} + \frac{a}{D_y} \sum_{m=1}^{\infty} E_{(n,m)} M_{C4m} \\
&\quad + \frac{p_0 a^3}{D_x} \sum_{m=1}^{\infty} m \pi f'_{mn} \\
\theta_{C4m} &= \frac{b}{D_x} \sum_{n=1}^{\infty} E'_{(m,n)} M_{A4n} + \frac{b}{D_y} A'_{(a_m)} M_{C4m} \\
&\quad + \frac{p_0 a^4}{b D_x} \sum_{n=1}^{\infty} n \pi f'_{mn}
\end{aligned}$$

.....(16)

$$\text{ただし } f'_{mn} = \frac{4\{(-1)^m - 1\}\{(-1)^n - 1\}}{m\pi n\pi \{(m\pi)^2 + \beta n^2\}^2}$$

次に、節線 0-1, 0-2, 0-3, 0-4 において節線方程式および連続条件式をたてれば次の通りである。

$$\left. \begin{array}{l} M_{B1n} = -M_{A2n} (=M_{Bn}) \\ M_{D1m} = -M_{C3m} (=M_{Dm}) \\ M_{A4n} = -M_{B3n} (=M_{An}) \\ M_{C4m} = -M_{D2m} (=M_{Cm}) \\ \theta_{B1n} = \theta_{A2n}, \quad \theta_{D1m} = \theta_{C3m} \\ \theta_{A4n} = \theta_{B3n}, \quad \theta_{C4m} = \theta_{D2m} \end{array} \right\} \dots \quad (17)$$

式(16), (17)より次の連立方程式をうる。

$$2 A_{(\beta_n)} M_{A,m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{(n,m)}}{\lambda^4} \{ M_{C,m} + (-1)^m M_{D,m} \} \\ + p_0 a^2 \sum_{m=1}^{\infty} m \pi f'_{mn} = 0 \\ 2 A_{(\beta_n)} M_{B,m} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{(n,m)}}{\lambda^4} \{ M_{C,m} \\ + (-1)^m M_{D,m} \} + p_0 a^2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m \pi f'_{mn} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^4 E'_{(m,n)} \{ M_{An} + (-1)^n M_{Bn} \} \\
& + 2 A'_{(cm)} M_{Cm} + p_0 \alpha^2 \lambda^4 \sum_{n=1}^{\infty} n \pi f'_{mn} = 0 \\
& \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m \lambda^4 E'_{(m,n)} \{ M_{An} + (-1)^n M_{Bn} \} \\
& + 2 A'_{(dm)} M_{Dm} + p_0 \alpha^2 \lambda^4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \pi f'_{mn} = 0
\end{aligned}$$

..... (18)

式(18)は未知数 M_{An} , M_{Bn} , M_{Cm} , M_{Dm} の単独項と級数和の項で与えられているため、これらの未知数を直接算出することは不可能であり、したがって試算による収束計算を行なわなければならない。いま、収束判定値を 10^{-5} とし、 $\lambda^4 = D_y/D_x = 1.0$ (等方性)、1.5 の二つのケースについて式(18)を解けばそれぞれ表-I(a), (b)に示す結果をうる。

表-1 の諸値より連続板の変位および断面力を算出することができるが板構造および荷重の対称性を考慮すればパネル①, ②に関する計算のみで十分である。すなわち、パネル①のたわみを w_1 , x および y 方向の曲げモーメントをそれぞれ M_{x1} , M_{y1} とすれば、これらは式(8)から次のように求められる。

$$w_1 = \frac{p_0 \alpha^4}{D_x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \{(A_{n1}X + B_{n1}Y) \sinh \beta_n \xi + D_{n1}X \cdot \xi \cosh \beta_n \xi\} \sin n \pi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \{(A_{m1}Y + B_{m1}X) \sinh \alpha_m \eta + D_{m1}Y \cdot \eta \cosh \alpha_m \eta\} \sin m \pi \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f'_{mn} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right] \dots (19)$$

表-1(a) $D_u/D_r=1.0$

表-1(b) $D_y/D_x=1,5$

未知数 n, m	$M_{An},$ M_{Dm}	$M_{Bn},$ M_{Cm}	未知数 n, m				
	M_{An}	M_{Bn}	M_{Cm}	M_{Dm}			
1	-33.66	33.66	1	-28.9	28.9	-38.6	38.6
2	5.9	5.9	2	5.2	5.2	6.3	6.3
3	0.5	-0.5	3	0.5	-0.5	0.3	-0.3
4	1.5	1.5	4	1.3	1.3	1.8	1.8
5	0.4	-0.4	5	0.4	-0.4	0.5	-0.5
6	0.6	0.6	6	0.5	0.5	0.7	0.7
7	0.2	-0.2	7	0.2	-0.2	0.2	-0.2
8	0.3	0.3	8	0.2	0.2	0.3	0.3
9	0.1	-0.1	9	0.1	-0.1	0.1	-0.1
10	0.2	0.1	10	0.1	0.1	0.2	0.2
11	0.1	-0.1	11	0.1	-0.1	0.1	-0.1
12	0.1	-0.1	12	0.1	0.1	0.1	0.1
13	0.1	-0.1	13	0.1	-0.1	0.1	-0.1
14	0.1	0.1	14	0.1	0.1	0.1	0.1

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{(m\pi)^2 + \nu_x \lambda^4 (n\pi)^2\} \\ * f'_{mn1} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

$$M_{y1} = -D_y \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \\ = -p_0 a^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} (m\pi)^2 (\mathbf{M}_{yA} + \mathbf{M}_{yB}) \sin m\pi\xi \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 \lambda^4 (\mathbf{M}_{yC} + \mathbf{M}_{yD}) \sin n\pi\eta \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^4 \{(n\pi)^2 + \nu_x (m\pi)^2\} \right. \\ \left. * f'_{mn1} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \right] \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

ただし、

$$A_{n1}^X = -\frac{\bar{M}_{Bn} \cosh \beta_n}{2 \beta_n \sinh^2 \beta_n}, \quad B_{n1}^X = 0, \\ D_{n1}^X = \frac{\bar{M}_{Bn}}{2 \beta_n \sinh \beta_n} \\ A_{m1}^Y = -\frac{\bar{M}_{Dm} \cosh \alpha_m}{2 \lambda^4 \alpha_m \sinh^2 \alpha_m}, \quad B_{m1}^Y = 0, \\ D_{m1}^Y = \frac{\bar{M}_{Dm}}{2 \lambda^4 \alpha_m \sinh \alpha_m}$$

$$\mathbf{M}_{xA} = \{\lambda^2 (1 - \nu_x \lambda^2) (A_{n1}^X + B_{n1}^X \xi) \\ + (2 \lambda^2 / \beta_n) D_{n1}^X\} \sinh \beta_n \xi$$

$$\mathbf{M}_{xB} = \{\lambda^2 (1 - \nu_x \lambda^2) D_{n1}^X \xi \\ + (2 \lambda^2 / \beta_n) B_{n1}^X\} \cosh \beta_n \xi$$

$$\mathbf{M}_{xC} = \{(1 - \nu_x \lambda^2) (A_{m1}^Y + B_{m1}^Y \eta) \\ - \nu_x (2 \lambda^2 / \alpha_m) D_{m1}^Y\} \sinh \alpha_m \eta$$

$$\mathbf{M}_{xD} = \{(1 - \nu_x \lambda^2) D_{m1}^Y \eta \\ - \nu_x (2 \lambda^2 / \alpha_m) B_{m1}^Y\} \cosh \alpha_m \eta$$

$$\mathbf{M}_{yA} = \{\lambda^2 (1 - \nu_x \lambda^2) (A_{m1}^Y + B_{m1}^Y \eta) \\ + (2 \lambda^2 / \alpha_m) D_{m1}^Y\} \sinh \alpha_m \eta$$

$$\mathbf{M}_{yB} = \{\lambda^2 (1 - \nu_x \lambda^2) D_{m1}^Y \eta \\ + (2 \lambda^2 / \alpha_m) B_{m1}^Y\} \cosh \alpha_m \eta$$

$$\mathbf{M}_{yC} = \{(1 - \nu_x \lambda^2) (A_{n1}^X + B_{n1}^X \xi) \\ - \nu_x (2 \lambda^2 / \beta_n) D_{n1}^X\} \sinh \beta_n \xi$$

$$\mathbf{M}_{yD} = \{(1 - \nu_x \lambda^2) D_{n1}^X \xi \\ - \nu_x (2 \lambda^2 / \beta_n) B_{n1}^X\} \cosh \beta_n \xi$$

$$f'_{mn1} = f'_{mn}, \quad \bar{M}_{Bn} = M_{Bn} / p_0 a^2, \\ \bar{M}_{Dm} = M_{Dm} / p_0 a^2$$

また、パネル②に関するたわみ w_2 および x, y 方向の曲げモーメント M_{x2}, M_{y2} は、式 (19), (20), (21) の各式において、 $A_{n1}^X, B_{n1}^X, D_{n1}^X, A_{m1}^Y, B_{m1}^Y, D_{m1}^Y, f'_{mn1}$ の代わりに次式で与えられる $A_{n2}^X, B_{n2}^X, D_{n2}^X, A_{m2}^Y, B_{m2}^Y, D_{m2}^Y, f'_{mn2}$ を用うことによりただちに求められる。

$$A_{n2}^X = -\frac{\bar{M}_{An}}{2 \beta_n \sinh^2 \beta_n}, \quad B_{n2}^X = -\frac{\bar{M}_{An}}{2 \beta_n},$$

$$D_{n2}^X = \frac{\bar{M}_{An} \cosh \beta_n}{2 \beta_n \sinh \beta_n}$$

$$A_{m2}^Y = -\frac{\bar{M}_{Cm}}{2 \lambda^4 \alpha_m \sinh^2 \alpha_m}, \quad B_{m2}^Y = -\frac{\bar{M}_{Cm}}{2 \lambda^4 \alpha_m},$$

$$D_{m2}^Y = \frac{\bar{M}_{Cm} \cosh \alpha_m}{2 \lambda^4 \alpha_m \sinh \alpha_m}$$

$f'_{mn2} = 0, \quad \bar{M}_{An} = M_{An} / p_0 a^2, \quad \bar{M}_{Cm} = M_{Cm} / p_0 a^2$
 $\nu_x = 0.15$ として上記諸式を計算し、プロットすれば図-4～8 の結果をうる。すなわち、図-4 は $D_y/D_x = 1.0$ の場合のたわみを、図-6 は $D_y/D_x = 1.5$ の場合のたわみをそれぞれ算出し、その等高線図を表わしたものであり、また図-8 はパネル①, ②の中央点のたわみ

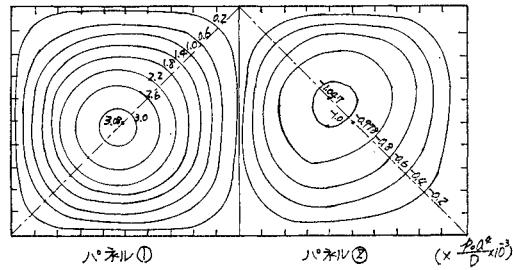


図-4 w -等高線図 ($D_y/D_x = 1.0$)

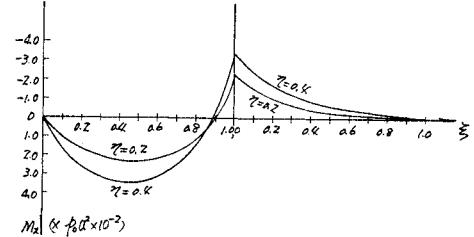


図-5(a) M_x -図

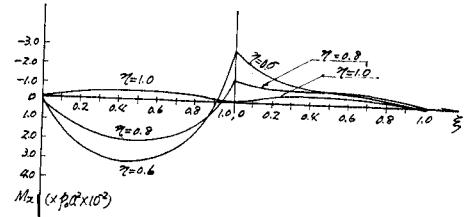


図-5(b) M_y -図

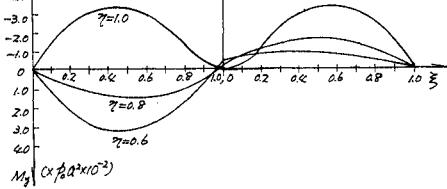
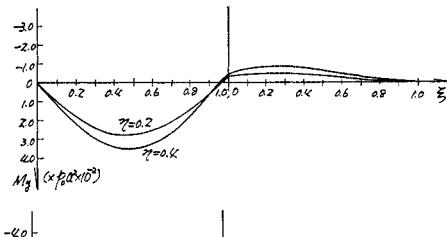
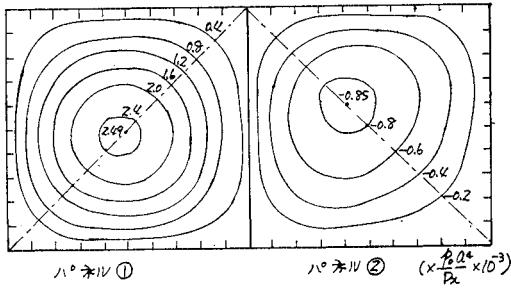


図-5(d) M_x -図

図-6 w -等高線図 ($D_y/D_x=1.5$)

と D_y/D_x との関係を示したものである。図より明らかなように、パネル①および②の中央点におけるたわみを D_y/D_x が 1.0 と 1.5 の両ケースについて比較すれば、それぞれ約 19% および 18% の差異が認められ、当然ながら $D_y/D_x=1.5$ なる直交異方性板を等方性板とみなして解析するにはかなり無理があるといえ、厳密解法の必要性が確認される。

図-5 は $D_y/D_x=1.0$ の場合の x および y 方向のモーメント M_x および M_y を x 軸に平行な各断面に関して求め、図示したものである。 $D_y/D_x=1.5$ の場合のモーメント図はその様相が等方性の場合に類似していることは明らかであるから詳細は省略し、パネル①の節線上の断面 ($\xi=1.0, \eta=1.0$) および中央断面 ($\xi=0.5, \eta=0.5$)、パネル②の $\xi=0.1, 0.2, 0.3$ 線上の断面に関して

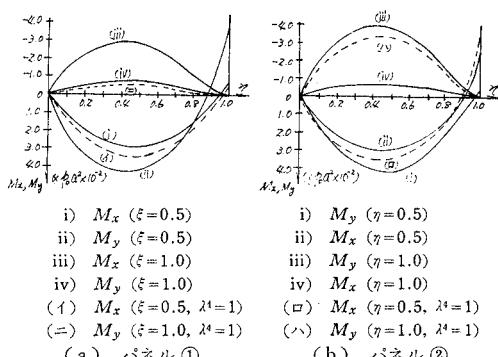


図-7

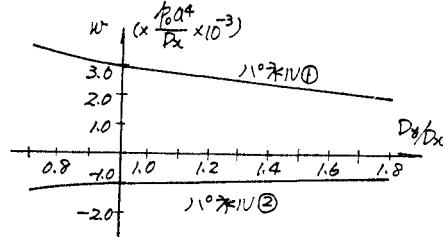


図-8

てのみ示せば図-7 のとおりである。なお、図中の破線は等方性の場合の値を付記し比較対照したものである。

図-7(a) の (i), (ii), (iii), (iv) と 図-7(b) の (i), (ii), (iii), (iv) は等方性の場合には当然それぞれ等しい値となり、(i) は (イ) に、(ii) は (ロ) に、また (iii), (iv) はそれぞれ (ハ), (ニ) に一致するが、この場合異方性 ($D_y/D_x=1.5$) の影響を受けていずれも $M_y/M_x=1.3\sim1.4$ の差異を生じていることがわかる。また、パネル①の中央点における M_x および M_y の値に関して $D_y/D_x=1.0$ の場合に対する $D_y/D_x=1.5$ の場合の結果を比較すれば、 M_x は約 15% ほど小さく、 M_y は約 21% ほど大きい値となることが認められる。

3. 基本系法

(1) 板の弾性曲面

緒言にも述べるように、本法は連続板全体を一つのパネルと考えて処理する。すなわち、連続板から中間支承を除いてえられる 1 径間矩形板（これを基本板と称する）に外力および中間の支承反力が荷重として作用するものとみなすものである（この力学系を以下基本系と称する）。したがって、本法は構造として最も簡単な 1 径間矩形板を基盤として連続板の解法を確立することを企図したものといえ、この意味から、本法を基本系法と名づける。なお、上述の内容から基本板はそれ自体安定でなければならない。安定構造としての 1 径間矩形板には種々の形式があるが、それらのうち、全周辺が単純支持とみなされる矩形板が実用上多数あり、また、演算の上からも好都合である。したがって、本文では周辺単純支持矩形板を基本板とする二方向連続直交異方性板の解法を提示するにとどめ、他の場合については以後の研究にまちたい。

さて、図-9 に示すように、矩形板が辺 A, B, C, D で単純支持されるほかに、 y 軸に平行に r 個、 x 軸に平行に s 個の中間支承で支えられるものとし、それぞれに対して支承番号 $1, 2, \dots, i, \dots, r; 1, 2, \dots, j, \dots, s$ を付す。また、任意垂直荷重 $p(x, y)$ が作用するとき、板から y および x 軸に平行な各中間支承に伝えられる線

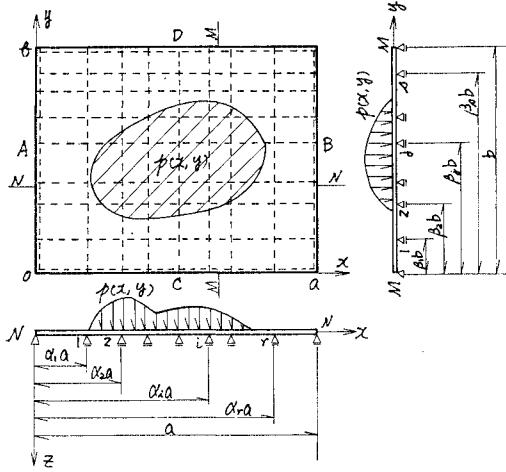


図-9

状の垂直反力をそれぞれ $V_1^x, V_2^x, \dots, V_r^x, \dots, V_r^x$ および $V_1^y, V_2^y, \dots, V_j^y, \dots, V_s^y$ とする。

中間支承 i の垂直反力 V_i^x は一般に y の関数であるから、無限級数を用いて次のように仮定する。

$$V_i^x = \sum_{n=1}^{\infty} V_{in}^x \sin n\pi\eta \quad \text{次元 } [FL^{-1}] \cdots \cdots (22)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots, r$; V_{in}^x : 任意定数

式 (22) を領域 $[0, a]$ にて定義される正弦フーリエ級数に展開すれば次式をうる。

$$\{V_i^x\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}^{xi} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \cdots \cdots (23)$$

ここに、 $R_{mn}^{xi} = \frac{2}{a} V_{in}^x \sin m\pi\alpha_i$, $\{V_i^x\}$ は V_i^x の級数展開を意味し、 $[FL^{-2}]$ なる次元をもつ。

同様にして x のみの関数である V_j^y に関して次式がえられる。

$$V_j^y = \sum_{m=1}^{\infty} V_{jm}^y \sin m\pi\xi \cdots \cdots (24)$$

$$\{V_j^y\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}^{yj} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \cdots \cdots (25)$$

ここに、 $j=1, 2, \dots, s$; $R_{mn}^{yj} = \frac{2}{b} V_{jm}^y \sin n\pi\beta_j$

各中間支承に生ずる垂直反力 V_i^x, V_j^y を荷重とみなし、外力 $p(x, y)$ の級数展開式と加え合わせれば、基本板に作用する全荷重 $q(x, y)$ が次のように求められる。

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \cdots \cdots (26)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } T_{mn} &= R_{mn} - \sum_{i=1}^r R_{mn}^{xi} - \sum_{j=1}^s R_{mn}^{yj} \\ &= R_{mn} - \frac{2}{a} \sum_{i=1}^r V_{in}^x \sin m\pi\alpha_i \\ &\quad - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^s V_{jm}^y \sin n\pi\beta_j \end{aligned}$$

直交異方性板に式 (26) の垂直荷重 $q(x, y)$ が作用す

る場合の基礎微分方程式の一般解は、前節 2. に述べるような余関数 w_1 と特殊解 w_0 の和で与えられるが、本題の基本板は全周辺で単純支持されるゆえ、余関数の項に含まれる積分定数 $A_m^Y \sim D_m^Y, A_n^X \sim D_n^X$ がいずれも 0 となり、したがってたわみ w は特殊解 w_0 のみで与えられる。すなわち、基本系における板の弾性曲面は次のような簡単な式形で表わされることになる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \cdots \cdots (27)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } G_{mn} &= T_{mn} / \left\{ D_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2H \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right\} \end{aligned}$$

上式に含まれる不静定力の展開係数 V_{in}^x および V_{jm}^y が何らかの方法により明らかとなれば、本題の二方向連続直交異方性板のたわみ w がえられ、またたわみ w と他の断面諸量に関する既知の関係より、連続板の任意断面におけるたわみ角や曲げモーメント、ねじりモーメントなどの諸量が解明せられ、本題の連続板が解けたことになる。

(2) 基本連立方程式の誘導

二方向連続板において y 軸に平行な中間支承 k の座標値を $x=\alpha_k a$ とし、 x 軸に平行な中間支承 l の座標値を $y=\beta_l b$ とすれば(図-9 参照)，これらの位置における基本系の板のたわみ $w(\alpha_k a, y)$ および $w(x, \beta_l b)$ が、各中間支承の垂直変位 $\delta_k(y)$ および $\delta_l(x)$ と相等しくなければならないことより次の 2 条件式をうる。

$$w(\alpha_k a, y) = \delta_k(y), w(x, \beta_l b) = \delta_l(x) \cdots \cdots (28)$$

ここに、 $k=1, 2, \dots, r$; $l=1, 2, \dots, s$

中間支承の変位 $\delta_k(y)$ および $\delta_l(x)$ は次の正弦フーリエ級数にて表わしうるものと仮定する¹²⁾。

$$\delta_k(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{kn} \sin n\pi\eta, \delta_l(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{lm} \sin m\pi\xi \cdots \cdots (29)$$

ここに、 δ_{kn}, δ_{lm} : 任意定数

式 (27) および式 (29) を式 (28) に代入のうえ、演算整理すれば次の二連の方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{i=1}^r V_{in}^x G_{in}^{xk} + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^s \sum_{m=1}^{\infty} V_{jm}^y G_{jm}^{yk} \\ &\quad = \frac{a}{2} (G_{kn} - D_x \delta_{kn}) \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} V_{in}^x H_{imn}^{xk} + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^s V_{jm}^y H_{jm}^{yk} \\ &\quad = \frac{a}{2} (H_{lm} - D_x \delta_{lm}) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (30)$$

$$\text{ここに, } G_{in}^{xk} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \sin m\pi\alpha_k$$

$$G_{jm}^{yk} = \frac{1}{K_{mn}} \sin n\pi\beta_j \sin m\pi\alpha_k$$

$$G_{kn} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_k$$

$$H_{imn}^{x1} = \frac{1}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \sin n \pi \beta_l$$

$$H_{jm}^{y1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin n \pi \beta_j \sin n \pi \beta_l$$

$$H_{lm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{K_{mn}} \sin n \pi \beta_l$$

$$K_{mn} = \frac{\pi^4}{a^4} \left(m^4 + \frac{2H}{D_x} - \frac{m^2 n^2}{\mu^2} + \frac{D_y}{D_x} \frac{n^4}{\mu^4} \right),$$

$$\mu = \frac{b}{a}$$

$$k=1, 2, \dots, r; l=1, 2, \dots, s; m, n=1, 2, \dots$$

式(30)は、二方向連続板の不静定反力の展開係数 V_{in}^x, V_{jm}^y を未知数とするもので、これを連立に解くことにより V_{in}^x, V_{jm}^y を求めることができる本法の基礎式であり、これを特に基本連立方程式と名づけることにする。基本連立方程式はその式形から明らかのように、未知数の単独項と級数和の項で表わされるゆえ、先に述べた板たわみ角法と同じく試算による収束計算を行なわねばならない。

特例として、 y 軸に平行な中間支承がないものとすれば、いわゆる一方向連続直交異方性板に関する基本連立方程式がえられ次の簡単な内容となる。

$$\sum_{i=1}^r V_{in}^x G_{in}^{xk} = \frac{a}{2} (G_{kn} - D_x \delta_{kn}) \dots \dots \dots (31)$$

(3) 板たわみ角法との比較

すでに述べたように板たわみ角法では、各パネル周辺の変位および端モーメントのすべてを正弦フーリエ級数展開式で表わしたことによつて、中間支承の交点では必然的に変位および端モーメントが0となる。これに対し、本法では端モーメントや変位に関する仮定がなんら含まれるものではないから、支承交点でこれらが必ずしも0でないより一般的な連続板の解法にも適用可能であるが、ここでは2.の(3)に示す十字型支承を有する4パネル連続板を再度用いて基本系法適用の具体例を示すとともに、板たわみ角法における仮定の妥当性や両解法の比較対照を行なうものである。

中間支承の沈下がないゆえ、本題の基本連立方程式は式(30)より次の内容で与えられる。

$$V_{in}^x G_{in}^{x1} + \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}^y G_{imn}^{y1} = \frac{a}{2} G_{in} \quad \dots \dots \dots (32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_{in}^x H_{imn}^{x1} + \frac{1}{\mu} V_{im}^y H_{imn}^{y1} = \frac{a}{2} H_{im}$$

$$\text{ここに, } G_{in}^{x1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin^2 \frac{m \pi}{2}$$

$$G_{im}^{y1} = \frac{1}{K_{mn}} \sin \frac{m \pi}{2} \sin \frac{n \pi}{2}$$

$$G_{in} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{K_{mn}} \sin \frac{m \pi}{2}$$

$$H_{imn}^{x1} = \frac{1}{K_{mn}} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{m \pi}{2}$$

$$H_{im}^{y1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin^2 \frac{n \pi}{2}$$

$$H_{im} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{K_{mn}} \sin \frac{n \pi}{2}$$

$$K_{mn} = \frac{\pi^4}{a^4} (m^2 + n^2 / \mu^2)^2, \mu = 1, \nu = 0.3,$$

$$H = \sqrt{D_x D_y}, \frac{D_y}{D_x} = 1$$

$$R_{mn} = \frac{16 p_0}{mn \pi^2} \sin \frac{m \pi}{4} \sin \frac{n \pi}{4}$$

$$\cdot \left(\sin \frac{m \pi}{4} \sin \frac{n \pi}{4} + \sin \frac{3m \pi}{4} \sin \frac{3n \pi}{4} \right)$$

試算により式(32)を解けば、 n, m の奇数項に対して表-2に示すとき V_{in}^x および V_{im}^y の各値が算出され、これら諸値を式(22), (24)に代入のうえ中間支承反力 V_{i1}^x, V_{i1}^y を求めれば、図-10に示す結果がえられる。図より明らかなように、 x, y 両方向の中間支承が交差する近傍でわざながら負の支承反力を生ずる傾向が存在する。

表-2

n, m	V_{in}^x, V_{im}^y	n, m	V_{in}^x, V_{im}^y	n, m	V_{in}^x, V_{im}^y
1	397.967	31	-1.126	61	1.586
3	363.880	33	4.183	63	-0.668
5	-16.414	35	-1.202	65	1.409
7	68.565	37	3.597	67	-0.598
9	4.114	39	-1.179	69	1.258
11	20.000	41	3.070	71	-0.536
13	7.735	43	-1.095	73	1.126
15	6.568	45	2.661	75	-0.480
17	7.597	47	-1.008	77	1.012
19	1.818	49	2.320	79	-0.429
21	6.699	51	-0.916	81	0.912
23	-0.065	53	2.034	83	-0.384
25	5.743	55	-0.827	85	0.825
27	-0.834	57	1.792	87	-0.344
29	4.895	59	-0.744	89	0.747

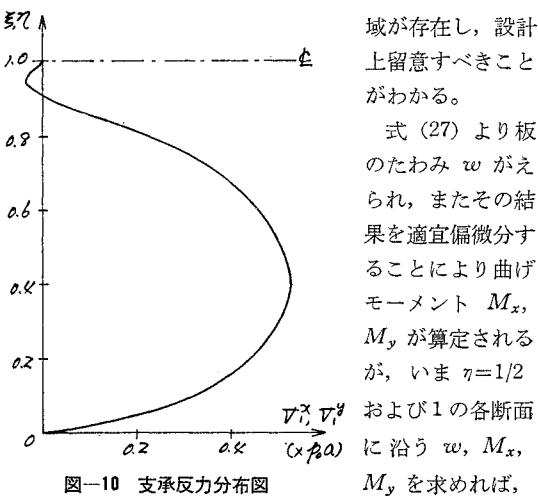
(単位: $10^{-3} \times p_0 a$)

図-10 支承反力分布図

域が存在し、設計上留意すべきことがわかる。

式(27)より板のたわみ w がえられ、またその結果を適宜偏微分することにより曲げモーメント M_x, M_y が算定されるが、いま $\eta = 1/2$

および1の各断面に沿う w, M_x, M_y を求めれば、

表-3 のようにえられる。表より明らかのように、モーメント M_x, M_y は連続板の支承の交点 ($\xi=1, \eta=1$) でともに 0 となり、当然のことではあるがたわみ角一端モーメント関係式の誘導にあたって仮定した事項に矛盾がないことがわかる。

表-3

η	ξ	$w \times 10^{-2} pa^4/D_x$		$M_x \times 10^{-1} pa^2$		$M_y \times 10^{-1} pa^2$	
		(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
1/2	0.2	0.1965	0.1966	0.3026	0.3022	0.2638	0.2634
	0.4	0.3008	0.3010	0.3930	0.3928	0.3859	0.3880
	0.6	0.2858	0.2860	0.3614	0.3616	0.3605	0.3604
	0.8	0.1634	0.1636	0.1740	0.1739	0.1910	0.1908
	1.0	0.0	0.0	-0.3334	-0.3360	-0.1001	-0.1008
	1.2	-0.0828	-0.0827	-0.1692	-0.1690	-0.1119	-0.1116
	1.4	-0.1020	-0.1018	-0.1044	-0.1042	-0.0987	-0.0985
	1.6	-0.0871	-0.0869	-0.0728	-0.0727	-0.0733	-0.0731
	1.8	-0.0498	-0.0501	-0.0407	-0.0407	-0.0391	-0.0389
1	0.2	0.0	0.0	-0.0749	-0.0768	-0.2497	-0.2559
	0.4	0.0	0.0	-0.1021	-0.1038	-0.3404	-0.3460
	0.6	0.0	0.0	-0.0883	-0.0898	-0.2942	-0.2992
	0.8	0.0	0.0	-0.0402	-0.0413	-0.1340	-0.1376
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

(a) 基本系法 (b) 板たわみ角法

ただし、辺長 a, b は図-3 に示すことく与えられるものとする。

同じ収束判定値に対して本法と前出の板たわみ角法による結果とを比較すれば表-3 に併記するようになり、たわみ w は合致するが、モーメント M_x, M_y は支承上の点で両解法による結果との間に 1.6~2.6% の差異が認められる。このことは支承上の点のモーメントが板たわみ角法では端モーメントで与えられその収束がきわめて早いのに対し、基本系法では中間支承上の点における弾性曲面式に基づいて算出するため、その収束性が劣ることに起因するもので、解法の違いによるものではなく、より多くの項数をとって計算すれば両解法の結果は合致する。なお、級数演算に関して、たとえばパネル①の中央点のモーメントの演算を比較すれば板たわみ角法ではわずか 10 項で十分収束した結果がえられるのに対し、基本系法では約 50 項を要し、当然ながら演算労力の点で板たわみ角法がすぐれているといえる。

4. 結 語

有限要素法や差分法をも含め、これまで提案された二方向連続板に関する近似解法を直交異方性連続板に適用することは、近似に伴う誤差のため、異方性の影響を十分正確に評価するうえで難点がある。そこで、本論文では任意垂直荷重の作用を受ける二方向連続直交異方性板のより厳密な解法として考えられる 2 通りの方法、すなわち板たわみ角法と基本系法をあわせ報告したものである。

算例より明らかのように、板たわみ角法は演算労力の

点で基本系法にまさり、実用上きわめて好都合である。しかし、パネル端のたわみや端モーメント、たわみ角を正弦フーリエ級数で仮定することより、パネル隅部におけるそれらの値が必然的に 0 となり、特定の二方向連続板にその適用が制限される欠点を免れえない。これに対し、基本系法は基本連立方程式が簡単かつ直観的に求められる点で、たわみ角一端モーメント関係式、節線方程式および連続条件式の諸式を逐一考察を加えながら求めなければならない板たわみ角法にまさるといえる。また、中間支承のたわみやたわみ角等に関する仮定がないことは、板中間が格子桁やラーメンなどの骨組構造で支えられる複雑な複合構造の解析に拡張応用することが可能になり、きわめて好都合である。結局、板たわみ角法と基本系法は一概に優劣をつけがたく、対象課題に応じて使いわけたり、あるいは併用することが必要であるといえる。

最後に本研究に当り有益なご助言と終始変わらぬ励ましをいただいた前九州大学教授 山崎徳也博士に対し心から謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) Marcus H., : Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Springer, 1924
- 2) 東 洋一：連続板に関する研究、第 1, 2 報、建築学会研究報告第 20, 22 号、昭和 27 年 10 月、昭和 28 年 5 月、pp. 93~94, pp. 117~118
- 3) 藤井忠二：矩形平面板と梁、昭和 19 年、山海堂
- 4) Engelbreth K., : En Metode for Tilnærmet Beregning av Kontinuerlige Toveisplater, Betong, Vol. 30, No. 2, 1945, pp. 99~115
- 5) Siers C.P. and Newmark N.M.: Rational Analysis and Design of Two-Way Concrete Slabs, J. ACI, Vol. 20, No. 4, (1948), pp. 273~315
- 6) 成岡昌夫：モーメント分配法の二方向板の解法への応用について、土木学会誌、第 35 卷、第 8 号、(昭和 25 年 8 月), pp. 340~346
- 7) Ang A., : The Development of a Distribution Procedure for the Analysis of Continuous Rectangular Plates, Civil Engineering Studies Structural Research Series Report No. 176, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1959
- 8) Maugh L.C. and Pan C.W.; Moments in Continuous Rectangular Slabs on Rigid Supports, Trans. ASCE, Vol. 107 (1942), pp. 1118~1142
- 9) Bittner E.: Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten, Julius Springer, Vienna, 1938
- 10) 成岡昌夫：挠角挠度法による一方向連続版の解法、土木学会論文集、第 4 号 (昭和 24 年 6 月), pp. 1~18
- 11) 橋木：無梁板構造の解法に関する研究 (学位論文)
- 12) 山崎・橋木：フーリエ級数による連続ばかりおよびラーメンの解法、九州大学工学集報、第 39 卷、第 3 号、昭和 41 年 10 月

(1970.12.18・受付)