

# 壁面に衝突する球の仮想質量\*

## ADDED-MASS OF A SPHERE COLLIDING AGAINST THE WALL

沢本正樹\*\*

By Masaki Sawamoto

### 1. はじめに

原子力の利用の増大に伴い、放射性廃棄物の処理が重要な問題となっており種々の方法が考えられている。中で海中投棄は有効な手段として着目され、容器に関する研究も二、三行なわれている<sup>1)</sup>。投棄された容器が海底に衝突する場合、容器に加わる荷重は次のような力積で与えられる。

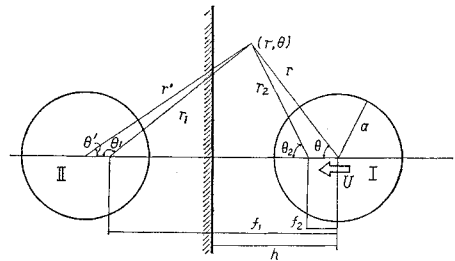
$$\int_{dt} f dt = (M+m)U(1+e) \dots \dots \dots (1)$$

ここで  $M$  は容器の質量、 $e$  は反発係数で容器の材料と海底の性質とから決まる。 $U$  は衝突直前の速度、 $m$  は容器の仮想質量で、ごく雑に見積るならば  $U$  は最終落下速度、 $m$  は球の場合排除した流体の質量の 0.5 倍を用いればよいだろう。しかし海底のような固体壁面の存在を考えると、このような値を用いることは流体力学的に見て必ずしも妥当とはいえない。

この研究では、海底の存在が球形の物体にどのような影響を与えるかを速度ポテンシャルより調べ、特に仮想質量に対する影響が無視しえないことを示し、かつ実験で確かめた。無限流体中での球の仮想質量に関しては、いくつかの実験が報告されており、排除し流体の 0.5 倍強という値が大体の目安である<sup>2)</sup>。球のまわりの流れの解析に速度ポテンシャルを用いることは、流線のはく離があり必ずしも適当とはいえない。しかし、問題を仮想質量に限るなら、波動や地下水の問題と同様にポテンシャルが有効であることがいくつか報告されており、今回もその一例である。

### 2. 壁面に垂直な方向に動く球のまわりの流れ

無限流体中を速度  $U$  で動く球のまわりの流れが、球の進行方向と同じ方向に軸を持つ三次元二重吹き出しの速度ポテンシャルで表わされることはよく知られている。また、強さ  $\mu$  の二重吹き出しと半径  $a$  の球の組合せは、球に関する二重吹き出しの inverse point に強さ  $-\frac{a^3}{(2h)^2}\mu$  の二重吹き出しをおけばよい。以上二つの知識を用い、互いに同じ速度で向いあって進む二つの球のまわりの流れを解けば、それは鏡像の原理より、壁に向かって動く球のまわりの流れとなる。



図一

Lamb<sup>3)</sup> にならって解けば、まず求める速度ポテンシャル  $\phi$  を、(i) 球 I が  $U$  で動いて、球 II が静止しているときの速度ポテンシャル  $\phi_I$  と、(ii) 球 I が静止して、球 II が逆向きに速度  $U$  で動いているときのポテンシャル  $\phi_{II}$  とにわける。 $\phi_I, \phi_{II}$  はそれぞれ次のような境界条件を満たさなければならない。

球面 I 上で

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial r} = -U \cos \theta, \quad \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} = 0$$

球面 II 上で

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial r'} = 0, \quad \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r'} = -U \cos \theta'$$

.....(2)

$\phi_I$  は前述の二つのことを利用して次のように求まる。

$$\frac{\phi_I}{U} = \mu_0 \frac{\cos \theta}{r^2} + \mu_1 \frac{\cos \theta_1}{r_1^2} + \mu_2 \frac{\cos \theta_2}{r_2^2}$$

\* 昭和 45 年度第 25 回土木学会年次学術講演会において概要発表  
\*\* 正会員 東京工業大学助手工学部土木工学科

$$+ \mu_3 \frac{\cos \theta_3}{r_3^2} + \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $r, r_1, r_2, \dots, \theta, \theta_1, \theta_2, \dots$  は 図-1 のとおり、 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, f_1, f_2, f_3, \dots$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{2} a^3, \quad \mu_1 = \mu_0 \left\{ -\frac{a^3}{(2h)^3} \right\}, \\ \mu_2 &= \mu_1 \left\{ -\frac{a^3}{f_1^3} \right\}, \quad \mu_3 = \mu_2 \left\{ -\frac{a^3}{(2h-f_2)^3} \right\}, \\ f_1 &= 2h - \frac{a^2}{2h}, \quad f_2 = \frac{a^2}{f_1}, \quad f_3 = 2h - \frac{a^2}{2h-f_2}, \dots \end{aligned}$$

これは、球面 I 上での境界条件を満たすためにまず球 I の中心に強さ  $\mu_0$  の二重吹き出しをおく、次に球面 II 上での境界条件を満たすために、球 II に対する  $\mu_0$  の inverse point に強さ  $\mu_1$  の二重吹き出しをおく、 $\mu_1$  をおいたことによる球面 I 上の境界条件のずれを補正するために、さらに球 I に対する  $\mu_1$  の inverse point に強さ  $\mu_2$  の二重吹き出しをおく。以下同様に、交互に球面 I, II 上の境界条件を修正していくものである。同じ方法で

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{II}}{U} &= \mu_0 \frac{\cos \theta'}{r'^2} + \mu_1 \frac{\cos \theta_1'}{r_1'^2} + \mu_2 \frac{\cos \theta_2'}{r_2'^2} \\ &+ \mu_3 \frac{\cos \theta_3'}{r_3'^2} + \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

として求まる。式 (3), (4) の  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, r_1, r_2, r_3, \dots, \theta_1', \theta_2', \theta_3', \dots, r_1', r_2', r_3', \dots$  を、すべて  $\theta, r$  を用いて書き直すと最終的に速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{U} &= \frac{1}{U} (\phi_I + \phi_{II}) = \left( \frac{A}{r^2} + Br \right) \cos \theta \\ &+ \left( Cr^3 + \frac{D}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) + E \dots \dots (5) \end{aligned}$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} A &= \mu_0 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 \dots \\ B &= 2 \left\{ \frac{\mu_0}{(2h)^3} - \frac{\mu_1}{f_1^3} + \frac{\mu_2}{(2h-f_2)^3} - \frac{\mu_3}{f_3^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_4}{(2h-f_4)^3} - \dots \right\} \\ C &= \frac{3}{2} \left\{ \frac{\mu_0}{(2h)^4} - \frac{\mu_1}{f_1^4} + \frac{\mu_2}{(2h-f_2)^4} - \frac{\mu_3}{f_3^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_4}{(2h-f_4)^4} - \dots \right\} \\ D &= -(2h-f_1)\mu_1 + f_2\mu_2 - (2h-f_3)\mu_3 + f_4\mu_4 - \dots \\ E &= \frac{\mu_0}{(2h)^2} - \frac{\mu_1}{f_1^2} + \frac{\mu_2}{(2h-f_2)^2} - \frac{\mu_3}{f_3^2} \\ &\quad + \frac{\mu_4}{(2h-f_4)^2} - \dots \end{aligned}$$

この式の変形の途中で球面調和関数を用いた展開を行なうが、一般の流体力学の参考書<sup>4)</sup>では、その第2項までしかとっていない。このことは式 (5) でいうと、第1, 3項のみをとったことに相当する。式の形からわかるように、その場合、球のまわりの流れは、球の前、後面で

対称になり、固体壁の存在により、流れが非対称にゆがめられる効果は無視したことになる。壁面の流体力に与える影響を調べる場合には、流れの非対称性が当然問題となるだろう。球面調和関数による展開で、流れの非対称性は、第3項以下の奇数番目の項によって表わされるので、非対称性を調べるには少なくとも第3項までとる必要がある。ここでは展開の第3項までとっており、式 (5) 第2項の  $C, D$  を含む項がそれに相当している。

このようにして壁面近くでの球のまわりの速度ポテンシャルがまとまった。次にこれを用いて球に働く流体力を求める。

流体の圧力は

$$p = \rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} - g - \frac{1}{2} q^2 \right\}$$

で表わされる。よって次の積分を行なえば、球に働く圧力の壁向きの合力が得られる。

$$\begin{aligned} F &= - \int_{r=a} p \cos \theta dS \\ &= -2\pi a^2 \rho \int_0^\pi \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=a} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta \\ &\quad + 2\pi a^2 \rho \int_0^\pi g \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta \\ &\quad + 2\pi a^2 \rho \int_0^\pi \frac{1}{2} q^2 \cdot \cos \theta \sin \theta d\theta \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ここで第1の積分は球が非定常運動することによる流体力で、式 (5) を代入すると、

$$\begin{aligned} &- \frac{d}{dt} \left[ \rho \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \left( \frac{A}{a^3} + B \right) \cdot U \right] \\ &= -\rho \frac{4}{3} \pi a^3 \left( \frac{A}{a^3} + B \right) \frac{dU}{dt} \\ &\quad + U^2 \rho \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{d}{dh} \left( \frac{A}{a^3} + B \right) \dots \dots (7) \end{aligned}$$

となる。仮想質量は流体力のうち加速度  $\frac{dU}{dt}$  の係数と定義されるから、式 (7) の後半の第1項より

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 \left( \frac{A}{a^3} + B \right)$$

となる。ところでいまの場合、式 (7) の前半をみると次のようなみかけの運動量を考え

$$- \frac{d}{dt} [\text{みかけの運動量}] = [\text{加速度運動に}][\text{よる流体力}]$$

仮想質量は

$$[\text{仮想質量}] = [\text{みかけの運動量}] / [\text{速度}]$$

として定義したことになり、一般に行なわれている定義と多少異なる。 $m$  の値は、壁からの距離  $h$  の関数であり、図-2 に示してある。それによると、壁面からの距離が半径の3倍以上ではほとんど壁面の影響はなく、無限流体中での値、排除した流体の質量の0.5倍に近づいてゆく。逆に壁面に近づくと壁面の影響は大きくなり、衝突時には排除した流体の質量の0.8倍にまで増

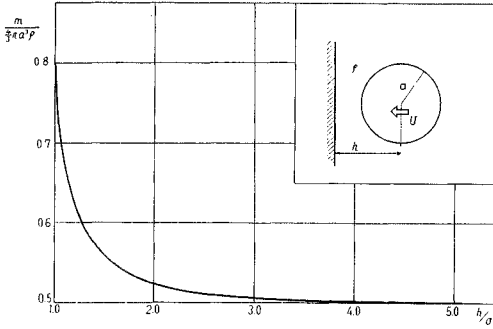


図-2 仮想質量

加している。

式 (7) の後半第 2 項は速度の 2 乗に比例する力である。いわゆる抵抗係数におよぼす壁面の影響と考えることができる。しかしこの力は一般の形状抵抗と異なり球の進行方向にかかわらず、 $\frac{dm}{dh} < 0$  であるから常に壁とは逆向きに働く。

第 2 の積分は球に働く浮力にほかならず、壁面の影響は表われない。

第 3 の積分は

$$q^2 = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial r} - U \cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + U \sin\theta\right)^2$$

を代入して、

$$2\pi a^2 \rho \int_0^\pi \frac{1}{2} q^2 \cos\theta \sin\theta d\theta = 3.2 \rho \pi a^2 \left(\frac{A}{a^3} + B + 1\right) \left(Ca + \frac{D}{a^4}\right) U^2$$

となる。これは壁面の存在により球の前、後面で流れが非対称になることによって生じる力で常に壁向きに働く。この力も抵抗係数の形をしており、壁面が抵抗係数におよぼす影響と考えられる。第 1 の積分の第 2 項と第 3 の積分をあわせると、壁面が抵抗係数におよぼす影響は、

$$C_{D'} = -\frac{8}{3} a \frac{d}{dh} \left(\frac{A}{a^3} + B\right) - 6.4 \left(\frac{A}{a^3} + B + 1\right) \left(Ca + \frac{D}{a^4}\right) \dots (8)$$

と書くことができる。第 1 項は正、第 2 項は負であるが、第 1 項のほうが絶対値が大きく、これは常に壁とは逆向きに力が働くことになる。その大きさは、図-3 に示してある。

以上のように壁面の影響を調べることができたが、これらが顕著に効いてくるのは壁面のごく近傍だけである。いま、例として最終落下速度で落ちてきた球体が壁面の近くまで来たときのことを考えてみよう。

運動方程式は、落下速度を  $U$  とすると、

$$M \frac{dU}{dt} = F + Mg - \frac{1}{2} \rho \pi a^2 C_D U^2$$

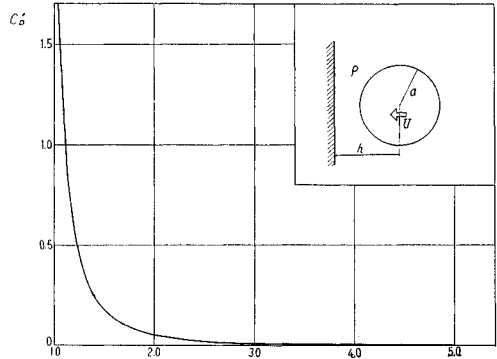


図-3 抵抗係数の変化量 (力は常に壁と逆向きに働く)

$F$  は前述の結果より、

$$F = -m \frac{dU}{dt} - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g - \frac{1}{2} \rho \pi a^2 C_{D'} U^2$$

であるから、結局

$$(M+m) \frac{dU}{dt} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\sigma - \rho) g - \frac{1}{2} \rho \pi a^2 (C_D + C_{D'}) U^2 \dots (9)$$

の形となる。ここに  $\sigma$  は球の密度である。これを  $h \rightarrow \infty$  で  $U \rightarrow$  最終落下速度、となるように解けばよいのであるが、左辺の  $m$  は図-2、右辺の  $C_{D'}$  は図-3 のような  $h$  に関する関数なので解析的に解くことは困難である。それで式 (9) をいくつかの  $\sigma/\rho$  について数値積分を行なった。そのうちの 3 つを図-4 に示す。図中  $U_0$  は最終速度、縦軸は、最終速度に対する減速量の比である。これによれば壁面の影響で減速される程度は  $h/a = 1.1$  まで近づいても高々最終速度の数パーセン

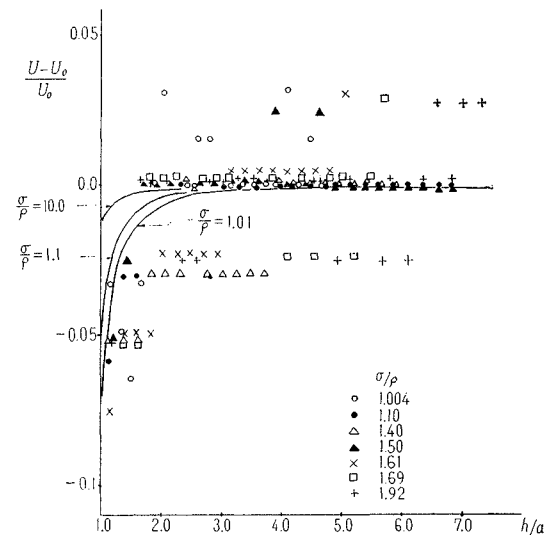


図-4 壁面による減速

トにすぎない。衝突直前  $h/a=1.0$  での速度は計算からはまともでないが、実験などからみても大差ないだろう。この程度の減速量は、実際上の問題を考える場合、他からひろってくる誤差などとくらべほとんど無視しうるものである。

3. 実験および考察

速度ポテンシャルから求められた壁面の影響をチェックするために2種類の実験を行なった。

(1) 重力と浮力と形状抵抗とがつりあって最終落下速度で落下する球が水底近くまでくると、上向きの力をうけて減速されることは前に述べた通りである。そこで次のような簡単な実験でそのような現象が実際に起こるか否かを確かめた。

33×33×100 cm の透明プラスチック製水槽に、水、砂などの重りをいれた各種の比重のピンポン球を落し、その運動を写真撮影した。写真は暗闇の中でストロボを等周期で発光させシャッター開放のまま撮影した。ストロボ発光数は球の最終落下速度を概算し、像間隔が実尺で3~5 mm 程度になるように定めた。このようにして得られた写真から各時刻での球の壁からの距離を読みとりその差から各地点での落下速度を求めた。結果を図-4 に計算結果とあわせて示す。写真からは実尺で0.1 mm 程度まで読みとれるが、その差をとって速度を計算するには多少精度が落ち、定量的にははっきりしたことはいえない。しかし、壁面のごく近傍で減速されるということ、およびその大きさは計算で得られたものと同じ程度のオーダーであるということはいえるだろう。

(2) 壁面が球を減速させることは今までのべたが、一方、仮想質量の増加は式(1)からわかるように衝突時には直接荷重の増加となり、軽々しく見落せないものである。そこで、衝突時の仮想質量を実測し、前に得られた結果と比較した。概要は次のとおりである。外径5 cm の中空黄銅製の球に長さ約2.5 m の釣糸をつけて振子とし壁面に埋込んだ力計に衝突させた。力計は内径70 mm の鋼製パイプの切口に0.2 mm の燐青銅板

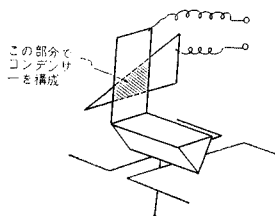


図-5 振子の基部

をダイヤフラムとしたものである。球の衝突位置が少々ずれた場合の誤差を打ち消すためダイヤフラムの周辺部に表裏それぞれ2枚ずつのストレーンゲージを張り、4ゲージのブリッジを組んだ。

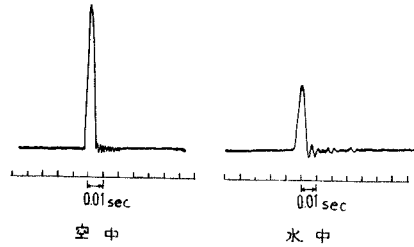


図-6

振子の基部はナイフエッジとしそこに電極をつけ 図-5 のように可変コンデンサーとし対向面積の変化より振子の変位を測った。記録は力計はブラウン管オシロスコープおよび電磁オシログラフ、振子の変位は電磁オシログラフを用いた。衝突時の力計の記録例を図-6 に示す。この波形の面積が衝突時の力積を与える。あらかじめブラウン管オシロスコープで調べて衝突速度により、力の最大値は変化するが時間分布は変化せず、

$$\int_{dt} f dt = f_{max} \times constant$$

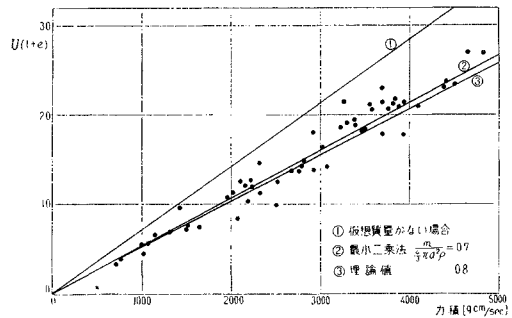


図-7

となることが確かめられた。ただ、この constant は空中の場合と水中の場合とは異なった。それは、衝突時間  $dt$  が空中で0.0085秒、水中で0.0105秒と差が出たためである。よって実際のデータは電磁オシログラフを用いて  $f_{max}$  を測定して得た。以上より衝突時の力積、および衝突前後の速度をはかり、その比から「球の質量」+「球の仮想質量」を求めた。実験を行なった範囲はレイノルズ数  $1.5 \sim 7.0 \times 10^3$  である。結果は図-7 に示す。縦軸は衝突前後の速度の和  $U(1+e)$ 、横軸は衝突時の力積である。図中データの傾きが  $M+m$  の逆数を示す。図には  $M$  および、速度ポテンシャルより求めた  $M+m$ 、最小二乗法で求めた  $M+m$  に相当する傾きもあわせて示してある。最小二乗法で求めた値は排除した流体の質量の0.7倍であるが、今回の実験では力計の特性上多少小さめに定めているので実際にはもう少し理論値に近い値をとるものと思われる。

#### 4. 結 論

以上をまとめると、

(1) 壁面の影響のうち抵抗係数の形をしたものは、実質上ほとんど効果がなく無視しうる。

(2) 球の仮想質量は無限流体中では排除した流体の質量の 0.5 倍であるが、壁面に衝突する時には、理論的には 0.8 倍、実験的には 0.7 倍まで増加する。これは荷重計算などの場合、軽々しく無視しえないものである。

なお、本研究の一部は、昭和 45 年東京工大土木工学科卒業の石谷邦治氏（新日本製鉄株）の卒業研究として

行なわれたものである。また、この研究は昭和 44 年度文部省科学研究費試験研究「海中への液体廃棄物の拡散に関する研究」（代表者 本間 仁）の一部である。ここに謝意を表す。

#### 参 考 文 献

- 1) 土木学会：「放射性廃棄物の海中投棄用容器に関する試験研究」, 1965 など
- 2) Iversen, H.W. 外: "A correlating modulus for fluid resistance in accelerated motion", Jour. Applied Physics, Vol. 22, No. 3, 1951
- 3) Lamb, H.: "Hydrodynamics", 6th ed. Cambridge, p. 131
- 4) 前出 3) または Milne-Thomson, "Theoretical Hydrodynamics" 5th ed. Macmilan など.

(1970.12.7・受付)