

曲線桁橋の Shear lag と有効幅に関する研究*

STUDY ON SHEAR LAG AND EFFECTIVE WIDTH OF CURVED GIRDER BRIDGES.

小松定夫**・中井 博***・北田俊行****

By Sadao Komatsu, Hiroshi Nakai and Toshiyuki Kitada

1. ま え が き

曲線桁橋では、スパンに比し幅員が広くなると、直線桁橋と同様に Shear lag 現象が生ずるために、デッキならびにボトムプレート内の垂直応力分布は、棒理論によって得られるものと著しく相違する。この Shear lag 現象は、二次元応力問題として弾性学によって解析することができるが、理論式がかなり繁雑となるために、設計計算に利用するのは実用的でない。したがって Shear lag を考慮し、しかも従来の棒理論によって合理的な設計を可能ならしめるには、有効幅を定めておけばよい。

これまでの研究によると、直線桁橋の Shear lag 現象を解析し、その有効幅を求めた研究は、数多く行なわれてきている^{1)~6)}。しかし、曲線桁橋の Shear lag に関しては、あまり解析は行なわれていず、その有効幅についても不明確な点が多い⁷⁾。

この研究は、文献 2) の理論的・実験的研究をもとにして、それを曲線桁橋に拡張し、まず Shear lag 現象の解析を行ない、次にこの結果を利用して有効幅を求めたものである。解析は桁各部の変位を仮定し、Galerkin 法を用いた近似解析法によって行なったが、桁を構成する材料の特性や、断面の形状・寸法などの力学的諸因子、ならびに種々な荷重状態に対する考慮が払われている。また、本文の解析結果は級数解ではないので、数値計算も容易であり、Shear lag の項を省略すると、従来の曲線桁の理論とも一致する。

最後に、数値計算例として、実際に建設された曲線桁橋をモデルとして、Shear lag により曲線桁橋各部の垂直応力がどのような分布をするかを明らかにする。ま

た、曲線桁橋の Shear lag による応力分布や変形量が、荷重状態、曲率半径、スパン長などによってどのように変化するかを調べる。そして、曲線桁橋の有効幅を求め、直線桁橋とも比較して、種々な考察を行なったものである。

2. 仮定および記号

Shear lag を解析するにあたり、以下の仮定を設ける^{1), 2)}。

(1) 適切なダイヤフラムが十分に配置してあるために、横断面形状は変形後も変化しない。(2) 桁の半径方向には、横リブ、隔板が入れてあるために、桁を構成する各板の半径方向のひずみは、無視できるほど小さい。(3) また、これら各板は、その接合線にそってずれないものとする。(4) Shear lag は、対称曲げのみによって発生するものとする。(5) デッキプレート内の軸方向変位は、Reisner の仮定にしたがい、2 次放物線で近似する。ただし、ウエッププレートでは、直線分布とする。(6) ブラケット部分は、全断面有効として断面隅角部に集中させる。

さて、図-1 は本文で取り扱う鋼床板を有する曲線桁橋断面を示す。一般に、曲線桁橋は、箱桁断面がよく使用されるが、文献 2) より類推して断面形状による Shear lag の変化は小さいものと思われる。したがって、曲率中心に対して、内側も外側も等高な腹板を持つ Π 型断面に置換して解析するが、箱桁であればねじりに関する諸量は閉断面としての取り扱いをする。

ここに、

F_j : デッキとウエップとの隅角部 $j=1\sim 4$ に集中する断面積

A_R, S_R, I_R : 縦リブ材 1 つあたりの、それぞれ、断面積、断面 1 次モーメント、断面 2 次モーメント

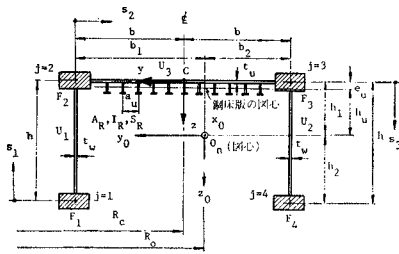
t_u, t_w : デッキプレートおよびウエッププレートの板

* 第 25 回土木学会年次学術講演会で発表、I-3、(昭 45.11)

** 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 大阪市立大学助教授 工学部土木工学教室

**** 学生会員 工修 大阪大学大学院工学研究科 博士課程在学中



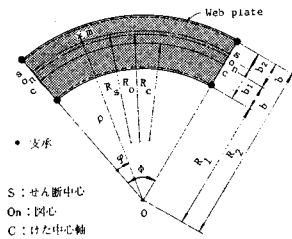
図一 曲線桁橋断面形状

厚

a_u : 縦リブ間隔, h : 桁高, $2b$: ウエップ プレートの間隔

とする。

次に, 図一2 は曲線桁橋の平面形状を示す。



図二 平面形状

ここに,

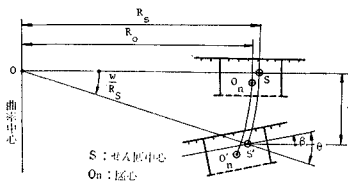
R_1, R_2 : 内側 および 外側 ウエップ プレートの曲率半径

R_s : セン断中心における曲率半径

R_0 : 図心における曲率半径

R_c : 桁中心軸における曲率半径

とする。なお, 図中の任意点 m は, 極座標 (ρ, φ) で表わすが, このほかに 図一1 に示したように, 桁中心軸 C において (y, z) , および, 図心 O_n において (y_0, z_0) なる水平・鉛直な直交座標系を考える。



図三 変形状態

一方, 桁の変形状態を 図一3 に示すが, 記号は以下のとおりとする。

w : セン断中心における鉛直たわみ

β : 断面回転角

θ : ねじり角

u_i : 面外変形に伴う軸方向変位で, u_1, u_2 を内側および外側のウエップ プレートの軸方向変位, u_3 をデッキプレートの軸方向変位とし, 圧縮に伴う変位をいずれも

正と定義する。

最後に, 桁を構成する材料の機械的性質は,

E : ヤング率

G : セン断弾性係数

ν : ポアソン比

によって表わす。

3. 各板要素に関するつり合い式

(1) 応力

デッキプレート内の軸方向ひずみを ϵ_ρ , 半径方向のひずみを ϵ_ρ , セン断ひずみを τ_{xy} とすると,

$$\text{軸方向垂直応力: } \sigma_u = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\rho + \nu\epsilon_\rho)$$

$$\text{せん断応力: } \tau_{xy,a} = G r_{xy}$$

で表わされる。ここに,

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u_3}{\rho \partial \varphi} = \frac{R_0}{\rho} \frac{\partial u_3}{R_0 \partial \varphi}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u_3}{\partial \rho}$$

となる。しかし, 半径方向のひずみを $\epsilon_\rho = 0$ と仮定し, また板の中央 ($x=0$) における垂直応力に着目すれば,

$$\sigma_u = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R_0}{\rho} \frac{\partial u_3}{R_0 \partial \varphi}, \quad \tau_{xy,u} = G \frac{\partial u_3}{\partial \rho} \quad \dots(1)$$

が得られる。

同様に腹板に対しては,

$$\sigma_{w,i} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R_0}{R_i} \frac{\partial u_i}{R_0 \partial \varphi}, \quad \tau_{xy,i} = G \frac{\partial u_i}{\partial z} \quad \dots(2)$$

$(i=1, 2)$

となる。また, デッキプレートとウエッププレートとの結合点 j においては, 次式が与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j &= E \frac{R_0}{R_i} \left[\frac{\partial u_i}{R_0 \partial \varphi} \right]_j, \quad \tau_{xz,j} = G \left[\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right]_j \\ &\quad (\text{隅角部 } j=1, 4 \text{ に対して, } i=1, 2 \\ &\quad \text{とおく}) \\ \sigma_j &= E \frac{R_0}{R_i} \left[\frac{\partial u_i}{R_0 \partial \varphi} \right]_j, \quad \tau_{xy,j} = G \left[\frac{\partial u_i}{\partial \rho} \right]_j \\ \tau_{xy,j} &= G \left[\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right]_j \\ &\quad (\text{隅角部 } j=2, 3 \text{ に対して, } i=3 \text{ と} \\ &\quad \text{おく}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

(2) 力のつり合い

図一4 に示すように, 桁断面の各部より微小要素 $\rho d\varphi \cdot d\rho$, および, $\rho d\varphi \cdot dz$ を切り出し, これら要素に作用する断面力のつり合いを考えよう。いま, N, T をそれぞれ単位長さあたりに作用する軸方向力, および, セン断力と定義し, 図示のようにサフィックスをつければ, 力のつり合いは次のようになる。

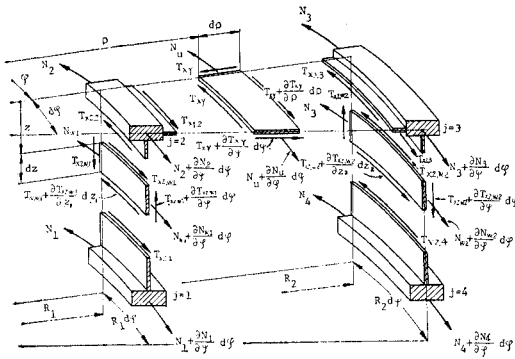


図-4 各板要素の力のつり合い

デッキプレート:

$$\frac{R_0}{\rho} \frac{\partial N_u}{R_0 \partial \varphi} + \frac{\partial T_{xy,u}}{\partial \rho} + 2 \frac{T_{xy,u}}{\rho} = 0 \quad \dots\dots (4)$$

ウェブプレート:

$$\mp \frac{\partial T_{xy,w,i}}{\partial z_i} + \frac{R_0}{R_i} \frac{\rho N_{w,i}}{R_0 \rho \varphi} = 0 \quad \dots\dots (5)$$

($i=1, 2$, 複号同順)

デッキとウェブとの隅角部:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_0}{R_i} \frac{\partial N_j}{R_0 \partial \varphi} \pm T_{xz,j} &= 0 \\ (\text{隅角部 } j=1, 4 \text{ に対して, } i=1, 2, \\ &\text{複号同順}) \\ \frac{R_0}{R_i} \frac{\partial N_j}{R_0 \partial \varphi} \pm T_{xy,j} \mp T_{xz,j} &= 0 \\ (\text{隅角部 } j=2, 3, \text{ に対して } i=1, 2, \\ &\text{複号同順}) \end{aligned} \right\}$$

.....(6)

さて、式 (1)~(3) で求めた垂直応力 σ 、および、せん断応力 τ を単位長さあたりに関して積分すれば、図-4 中の軸力 N 、および、せん断力 T が得られる。たとえば、デッキプレートに関しては、直交異方性板であることを考慮すれば、

$$N_u = E \frac{R_0}{\rho} \bar{t}_u \frac{\partial u_3}{R_0 \partial \varphi}$$

となる。ここに、 \bar{t}_u はデッキプレートの換算厚みとする。

$$\bar{t}_u = \frac{t_u}{1-\nu^2} + \frac{A_R}{a_u} \quad \dots\dots (7)$$

また、

$$T_{xy} = G t_u \frac{\partial u_3}{\partial \rho}$$

であるので、式 (4) よりデッキプレートに関するつり合い方程式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} E \frac{\bar{t}_u}{t_u} \frac{R_0}{\rho} \frac{\partial^2 u_3}{R_0^2 \partial \varphi^2} + G \frac{\rho}{R_0} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \rho^2} \\ + 2 \frac{G}{R_0} \frac{\partial u_3}{\partial \rho} = 0 \quad \dots\dots (8) \end{aligned}$$

同様に、ウェブプレートに対しては、

$$E \frac{1}{1-\nu^2} \frac{R_0}{R_i} \frac{\partial^2 u_i}{R_0^2 \partial \varphi^2} + G \frac{R_i}{R_n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (9)$$

($i=1, 2$)

となる。また、隅角部では、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E \frac{R_0}{R_i} \left[\frac{\partial^2 u_i}{R_0^2 \partial \varphi^2} \right]_j - \frac{G t_w}{F_j} \frac{R_i}{R_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \right]_j &= 0 \\ (j=1, 4 \text{ に対して, } i=1, 2 \text{ とおく}) \\ E \frac{R_0}{R_{j-1}} \left[\frac{\partial^2 u_3}{R_0^2 \partial \varphi^2} \right]_j \pm \frac{G t_u}{F_j} \frac{R_{j-1}}{R_0} \left[\frac{\partial u_3}{\partial \rho} \right]_j \\ + \frac{G t_w}{F_j} \frac{R_{j-1}}{R_0} \left[\frac{\partial u_{j-1}}{\partial z} \right]_j &= 0 \\ (j=2, 3 \text{ に対して, 複号同順}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

4. 軸方向変位 u_i の近似

曲線桁橋の Shear lag の問題は、各板要素に関するつり合い方程式 (8)~(10) を、定められた荷重状態、ならびに、与えられた境界条件のもとに解くことに帰着するが、その厳密解は級数解となり、数学的な取扱いがかなり複雑なので実用的ではないように思われる。そこで、文献 2) を参照にして、軸方向変位 u_i を仮定して近似解を求める。

さて、図-1 に示す断面の水平軸 y_0 まわりに、曲げモーメント M_y が作用する場合の任意点における垂直応力を考えよう。図-1 の断面は、非対称であるために主軸は (y_0, z_0) 軸と一致しない。したがって、任意点の垂直応力は、座標 z_0 のみならず座標 y_0 の関数として与えられることは周知のとおりである。すなわち、曲線桁橋の軸方向変位 u_i は、一般に水平軸 y_0 まわりのたわみ角 ψ_y と鉛直軸 z_0 まわりのたわみ角 ψ_z とに起因することを意味している。これら 2 つの変形状態を図-5 に示す。

したがって、曲線桁橋の軸方向変位は、図-5(a) と (b) とを合成したものになるが、一般に次のように表わして近似する。

$$u_i = \bar{u}_{0,i} + f_i(\varphi) \bar{u}_i(s_i), \quad (i=1 \sim 3) \quad \dots\dots (11)_1$$

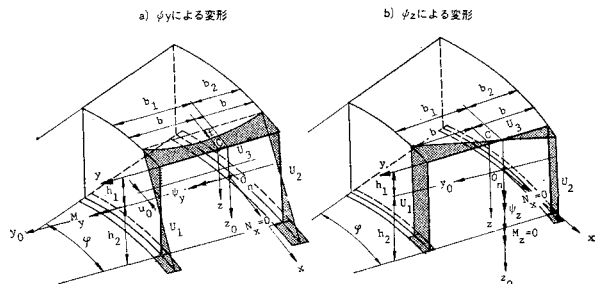


図-5 軸方向変位

ここに,

$\bar{a}_{0,i}$: 棒理論による軸方向変位

$f_i(\varphi)$: Shear lag によって生ずる軸方向変位

$a_i(s_i)$: 図-1 に示す曲線座標 s_i によって表わされる座標関数

式 (11)₁ は, 幾何学的境界条件はもちろんのこと, 力学的境界条件も満足することが望ましいが, 本文ではおもに垂直応力分布に着目するので, 次の境界条件を満足させ, 近似解を求めることにした。

$$\left. \begin{aligned} [u_1]_{j=2} &= [u_3]_{j=2} \\ [u_2]_{j=3} &= [u_3]_{j=3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)_2$$

すなわち, 各板要素について具体的に書くと以下のようになる。

(1) 水平軸まわりのたわみ角 ψ_y による軸方向変位

図-5(a) に示すように, デッキプレート内の軸方向変位には, Shear lag による軸方向変位 $f(\varphi)$ を考慮して,

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= u_0(\varphi) + (h_1 - z)\psi_y(\varphi) + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)f(\varphi) \\ u_1 &= u_2 = u_0(\varphi) - z_0\psi_y(\varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

とおく。ここで, $u_0(\varphi)$ は Shear lag 現象により, 図心 O_n に生ずる軸方向変位とする。

(2) 鉛直軸 y_0 まわりのたわみ角 ψ_z による軸方向

水平荷重が作用しないときには, ψ_z による変位は一般にきわめて微小なものである。したがって, 図-5(b) に示すように, この場合の軸方向変位は棒理論に準じて直線分布とする。

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= y_0\psi_z(\varphi) \\ u_i &= \pm b_i\psi_z(\varphi), \quad (i=1, 2, \text{複号同順}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

(3) 全軸方向変位

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= u_0(\varphi) + (h_1 - z)\psi_y(\varphi) \\ &\quad + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)f(\varphi) + y_0\psi_z(\varphi) \\ u_i &= u_0(\varphi) - z_0\psi_y(\varphi) \pm b_i\psi_z(\varphi) \\ &\quad (i=1, 2, \text{複号同順}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

5. 基礎微分方程式

式 (12)~(14) によって軸方向変位 u_i が近似できたので, ここで再び各板要素に対する垂直応力を求めると, 次のようになる。

デッキプレート:

$$\sigma_u = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R_0}{\rho} \left\{ \frac{du_0(\varphi)}{R_0 d\varphi} + (h_1 - z) \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi} \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{df(\varphi)}{R_0 d\varphi} + y_0 \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} \right\} \dots\dots(15)$$

ウエッププレート:

$$\sigma_w = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R_0}{R_i} \left\{ \frac{du_0(\varphi)}{R_0 d\varphi} - z_0 \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi} \pm b_i \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} \right\}, \quad (i=1, 2, \text{複号同順}) \dots\dots\dots(16)$$

フランジとウエップの結合点:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j &= E \frac{R_0}{R_i} \left\{ \frac{du_0(\varphi)}{R_0 d\varphi} - h_2 \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi} \pm b_i \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} \right\} \\ &\quad (j=1, 4, \text{に対し } i=1, 2, \text{複号同順}) \\ \sigma_j &= E \frac{R_0}{R_i} \left\{ \frac{du_0(\varphi)}{R_0 d\varphi} + h_1 \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi} \pm b_i \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} \right\} \\ &\quad (j=2, 3, \text{に対し } i=1, 2, \text{複号同順}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

以上の式 (15)~(17) より明らかなように, 未知量は $u_0(\varphi), f(\varphi), \psi_y(\varphi), \psi_z(\varphi)$ の 4 つである。図-5 に示すように, 軸力 N_x , 曲げモーメント M_y, M_z の 3 つの断面力に対しては, 次の条件式が成立しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_x dF &= N_x = 0, \quad \int_F \sigma_x z_0 dF = -M_y, \\ \int_F \sigma_x y_0 \cdot dF &= -M_z = 0 \dots\dots\dots(18)_{1-3} \end{aligned} \right\}$$

残るもう 1 つの条件としては, 仮定した軸方向変位の誤差を最小ならしめる最も適切な $f(\varphi)$ を定める必要がある。この条件として, Galerkin 法によって次式を得る。

$$\sum_i \int_0^{s_i} \varepsilon_i(\varphi, s_i) a_i(s_i) t_i ds_i = 0 \dots\dots\dots(19)$$

ここに, $\varepsilon_i(\varphi, s_i)$ は式 (12) を式 (8)~(10) に代入したときの誤差関数とする。

(1) $\int_F \sigma_x dF = 0$ より求められる基礎式

式 (15)~(17) と式 (18)₁ より

$$\left. \begin{aligned} F \frac{du_0(\varphi)}{R_0 d\varphi} + G_y \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi} - G_z \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} \\ + A_u \frac{df(\varphi)}{R_0 d\varphi} &= 0 \dots\dots\dots(20), \end{aligned} \right\}$$

が得られる。ここに,

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{R_0}{R_1} (F_1 + F_w + F_2) + \frac{R_0}{R_2} (F_3 + F_w + F_4) \\ &\quad + F_u \\ F_w &= \int_0^h \frac{t_w}{1-\nu^2} dz = \frac{t_w}{1-\nu^2} h \\ F_u &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_0}{\rho} \bar{t}_u d\rho \end{aligned} \right\}$$

$$A_u = F_u - \frac{I_{yu}}{b^2} = F_u - \frac{1}{b^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_0}{\rho} y^2 \bar{t}_u d\rho \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} G_y &= \frac{R_0}{R_1} (F_2 h_1 + G_w - F_1 h_2) \\ &\quad + \frac{R_0}{R_2} (F_3 h_1 + G_w - F_4 h_2) + F_u h_u \\ G_z &= -\frac{R_0}{R_1} b_1 (F_1 + F_w + F_2) \\ &\quad + \frac{R_0}{R_2} b_2 (F_3 + F_w + F_4) + G_{yu,0} \\ G_w &= -\int_{-h_1}^{h_2} \frac{t_w}{1-\nu^2} z_0 dz_0 = \frac{1}{2} F_w (h_1 - h_2) \\ G_{yu,0} &= -\int_{R_1}^{R_2} \frac{R_0}{\rho} y_0 \bar{t}_u d\rho = R_0 (2 b \bar{t}_u - F_u) \\ h_u &= h_1 - e_u = h_i - \frac{S_R}{\bar{t}_u a_u} \end{aligned} \right\} \quad (S_R, a_u, h_u \text{ は 図-1 参照}) \quad (22)$$

とする。

ここで、 $G_y = G_z = 0 \dots \dots \dots (23)$

なるようにすると、 h_1, h_2 , および、 b_1, b_2 は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{F} \left\{ F_u e_u + \frac{h}{2} F_w \left(\frac{R_0}{R_1} + \frac{R_0}{R_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + h \left(F_1 \frac{R_0}{R_1} + F_4 \frac{R_0}{R_2} \right) \right\} \\ h_2 &= h - h_1 \\ b_1 &= \frac{2 \frac{R_0}{R_2} b (F_3 + F_w + F_4) + 2 R_0 b \bar{t}_u - R_1 F_u}{F} \\ b_2 &= 2 b - b_1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

したがって、式 (20) は次のように簡単化される。

$$F \frac{du_0(\varphi)}{R_0 d\varphi} + A_u \frac{df(\varphi)}{R_0 d\varphi} = 0 \dots \dots \dots (25)$$

さて、式 (25) を φ で 1 回積分し、積分定数は剛体変位を表わすので無視すれば、 $u_0(\varphi)$ と $f(\varphi)$ との関係は次のようになる。

$$u_0(\varphi) = -\chi f(\varphi) \dots \dots \dots (26)$$

ただし、

$$\chi = \frac{A_u}{F} \dots \dots \dots (27)$$

いま、式 (26) より Shear lag が起こらない $f(\varphi) = 0$ のときを考えると、 $u_0(\varphi) = 0$ であり、図心における変位が生じない曲線桁の理論の場合と一致する⁸⁾。しかし、

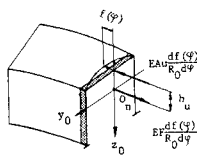


図-6

Shear lag がある場合には、図-6 に示すようにデッキプレート内の応力分布が一様でないために、デッキには軸力 $EA u_0 df(\varphi)/d\varphi$ が作用する。これとつり合うために、図心 O_n には $EF du_0(\varphi)/d\varphi$ が作用し、したがって、図-5(a) に示したように断面全体が $u_0(\varphi)$ だけ変位することを意味している。

$$(2) \int_F \sigma_x z_0 dF = -M_y \text{ より求められる基礎式}$$

式 (15)~(17), および、式 (18)₂ より

$$I_y \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi} - I_{yz} \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} + A_u h_u \frac{df(\varphi)}{R_0 d\varphi} + \frac{M_y}{E} = 0 \dots \dots \dots (28)$$

が得られる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} I_y &= \frac{R_0}{R_1} (F_1 h_2^2 + I_w + F_2 h_1^2) \\ &\quad + \frac{R_0}{R_2} (F_3 h_1^2 + I_w + F_4 h_1^2) \\ &\quad + F_u \left(h_u^2 + \frac{I_u}{a_u \bar{t}_u} \right) \\ I_{yz} &= \frac{R_0}{R_1} b_1 (F_1 h_2 - G_w - F_2 h_1) \\ &\quad + \frac{R_0}{R_2} (F_3 h_1 + G_w - F_4 h_2) + G_{yu,0} h_u \\ I_w &= \int_{-h_1}^{h_2} \frac{t_w}{1-\nu^2} z_0^2 dz_0 = \frac{t_w}{3(1-\nu^2)} (h_1^3 + h_2^3) \\ I_u &= I_R + A_R e_u^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Shear lag のない場合には、式 (28) において $f(\varphi) = 0$ とおき、さらに、 y, z 軸まわりの曲率の変化を、それぞれ、

$$\kappa_y(\varphi) = \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi}, \quad \kappa_z(\varphi) = \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} \dots \dots (30)$$

と定義すれば、

$$I_y \kappa_y(\varphi) - I_{yz} \kappa_z(\varphi) = -\frac{M_y}{E} \dots \dots \dots (31)$$

が得られる。これは、曲線桁の理論による基本式と全く一致する⁸⁾。そして、Shear lag を考えた場合には、式 (28) の左辺第 1 項が 図-6 に示すように、軸力の偏心モーメントとして付加されるのである。

$$(3) \int_F \sigma_x y_0 dF = -M_z = 0 \text{ より求められる基礎式}$$

同様に、式 (15)~(17), および式 (18)₃ より

$$I_{yz} \frac{d\psi_y(\varphi)}{R_0 d\varphi} - I_z \frac{d\psi_z(\varphi)}{R_0 d\varphi} + b_u A_u \frac{df(\varphi)}{R_0 d\varphi} = 0 \dots \dots \dots (32)$$

が得られる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \frac{R_0}{R_1} b_1^2 (F_1 + F_w + F_2) \\ &\quad + \frac{R_0}{R_2} b_2^2 (F_3 + F_w + F_4) + I_{yu,0} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

また、 b_u は 図-7 に示すように、Shear lag によってデッキプレート内に生ずる軸力 $EA_u df(\varphi)/R_0 d\varphi$ の作用点と図心 O_n との水平偏心距離とする。

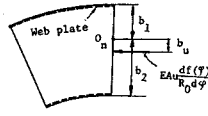


図-7

$$b_u = \frac{G_{yu,0} - \frac{1}{b^2} \{C_{y,u} + (b-b_1)I_{yu,0}\}}{A_u} \dots\dots(34)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C_{y,u} &= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_0}{\rho} y^3 \bar{t}_u d\rho \\ I_{yu,0} &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_0}{\rho} y_0^2 \bar{t}_u d\rho \end{aligned} \right\} \dots\dots(35)$$

再び、Shear lag の生じない $f(\varphi)=0$ の場合を考えると、式 (32) は、

$$I_{yz} \kappa_y(\varphi) - I_{xz} \kappa_z(\varphi) = - \frac{M_x}{E} = 0 \dots\dots(36)$$

となり、曲線桁の理論による結果と全く一致する⁸⁾。Shear lag を考えた場合には、式 (32) に示すように、軸力 $EA_u df(\varphi)/R_0 d\varphi$ の偏心 b_u によるモーメントが加わる。

(4) Galerkin 法の適用

Shear lag 現象は、図-5(a) に示すように、水平軸まわりのたわみ角 ψ_y のみによって生ずるものとする。そこで、式 (26) を式 (12) に代入すると軸方向変位は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= (h_1 - z) \psi_y(\varphi) + \left(1 - \chi - \frac{y^2}{b^2}\right) f(\varphi) \\ u_i &= -z_0 \psi_y(\varphi) - \chi f(\varphi), \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} (37)$$

次に、式 (37) を各板要素のつり合い方程式 (8)~(10) に代入し、誤差関数 ϵ_i を求める。たとえば、

デッキプレートに対して；

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_u &= E \frac{\bar{t}_u}{t_u} \frac{R_0}{\rho} \left(1 - \chi - \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{d^2 f(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} \\ &+ E \frac{\bar{t}_u}{t_u} \frac{R_0}{\rho} (h_1 - z) \frac{d^2 \psi_y(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} \\ &- \frac{2G}{R_0 b^2} (\rho + 2y) f(\varphi) \end{aligned} \right\}$$

ウエッププレート $i=1$ に対して；

$$\epsilon_{w,1} = - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R_0}{R_1} \left\{ \chi \frac{d^2 f(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} + z_0 \frac{d^2 \psi_y(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} \right\}$$

隅角点 $j=1$ に対して；

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= -E \frac{R_0}{R_1} \left\{ \chi \frac{d^2 f(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} + h_2 \frac{d^2 \psi_y(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} \right\} \\ &+ \frac{G t_w}{F_1} \frac{R_1}{R_0} \psi_y(\varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(38)$$

となる。また、座標関数 $\bar{a}_i(s_i)$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{フランジプレート； } \bar{a}_u(s_2) &= 1 - \chi - \frac{y^2}{b^2} \\ \text{ウエッププレート； } \bar{a}_{w,i}(s_i) &= -\chi, \quad (i=1, 2) \\ \text{隅角部； } \bar{a}_j(s_j) &= -\chi, \quad (j=1 \sim 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots(39)$$

さて、式 (37)~(38) を式 (19) に代入して、積分を実行する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \int_0^{s_j} \epsilon_j(\varphi, s_j) \cdot \bar{a}_j(s_j) t_j ds_j &= \int_{R_1}^{R_2} \epsilon_u \bar{a}_u t_u dy \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{-h_1}^{h_2} \epsilon_{w,i} \bar{a}_{w,i} t_w dz_0 + \sum_{j=1}^4 \epsilon_j u_j F_j \end{aligned} \right\}$$

したがって、最後の基礎式は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\chi^2 F + F_{f,u}) \frac{d^2 f(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} + h_u A_u \frac{d^2 \psi_y(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} \\ - \frac{8 G t_w R_c}{3 E R_0 b} f(\varphi) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(40)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F_{f,u} &= (1-2\chi) F_u - \frac{2}{b^2} (1-\chi) I_{yu} + \frac{D_{y,u}}{b^4} \\ D_{yu} &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_0}{\rho} y^4 \bar{t}_u d\rho \end{aligned} \right\} \dots\dots(41)$$

(5) $f(\varphi)$ に関する微分方程式

基本式 (28)、および、(32) は、 $d\psi_y(\varphi)/d\varphi$ と $d\psi_z(\varphi)/d\varphi$ に関する連立微分方程式であるので、これに関して解けば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_y(\varphi)}{d\varphi} &= r_y \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \zeta_y M_y(\varphi) \\ \frac{d\psi_z(\varphi)}{d\varphi} &= - \left(r_z \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \zeta_z M_y(\varphi) \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(42)_{1,2}$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} r_y &= \frac{b_u A_u I_{yz} - h_u A_u I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad \zeta_y = \frac{R_0}{E} \frac{I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \\ r_z &= \frac{h_u A_u I_{yz} - b_u A_u I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad \zeta_z = \frac{R_0}{E} \frac{I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(43)$$

とする。式 (42)₁ を式 (40) に代入すると、 $f(\varphi)$ に関して次の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} - \lambda^2 f(\varphi) = \eta \frac{dM_y(\varphi)}{d\varphi} \dots\dots(44)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{8 G R_0 R_c t_u}{3 E F_x b} \\ \eta &= \frac{R_0 h_u A_u I_z}{E F_x (I_y I_z - I_{yz}^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(45)$$

および、

$$F_x = \chi^2 F + F_{f,u} + h_u A_u r_y \dots\dots(46)$$

とする。式 (44) は荷重項として、曲げモーメント $M_y(\varphi)$ が与えられると、容易に解くことができる。

(6) 変形量に関する微分方程式

まず、図-3 を参照して、たわみ w 、断面回転角 β および、ねじり角 θ の関係を求めれば、

$$\frac{w(\varphi)}{R_S} + \beta(\varphi) = \theta(\varphi) \dots\dots\dots(47)$$

である。いま、ねじりに関しては、全断面が有効に働くものとするれば、 θ に関する微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2\theta(\varphi)}{d\varphi^2} - \alpha^2 \frac{d\theta(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{R_0^3}{EC_w} T(\varphi) \dots\dots(48)$$

ここに、

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} \cdot R_0 \dots\dots\dots(49)$$

J : St. Venant のねじり抵抗係数

C_w : 曲げねじり抵抗係数

とする。したがって、ねじりモーメント $T(\varphi)$ が与えられれば、式 (47) は容易に解くことができ、曲げねじりモーメントを M_w 、そり関数を W_S とすれば、ねじりによる垂直応力 $\bar{\sigma}_{w,x}$ は、

$$\bar{\sigma}_{w,x} = EW_S \frac{d^2\theta(\varphi)}{R_0^2 d\varphi^2} = \frac{M_w}{C_w} W_S \dots\dots\dots(50)$$

より求めることができる⁸⁾。

一方、たわみ角 $\psi_y(\varphi)$ とたわみ $w(\varphi)$ 、および、断面回転角 $\beta(\varphi)$ との関係は、周知のとおり次式で与えられる⁸⁾。

$$\frac{1}{R_S} \frac{d^2w(\varphi)}{d\varphi^2} - \beta(\varphi) = \frac{d\psi_y(\varphi)}{d\varphi} \dots\dots\dots(51)$$

したがって、式 (47) と上式よりたわみ $w(\varphi)$ を消去すると、断面回転角 $\beta(\varphi)$ に関して、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2\beta(\varphi)}{d\varphi^2} + \beta(\varphi) = \frac{d^2\theta(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{d\psi_y(\varphi)}{d\varphi} \dots\dots(52)$$

荷重項は、式 (48) の解、および、式 (44) の解と式 (42)₁ により与えられるので、 $\beta(\varphi)$ は容易に求めることができる。

最後に、曲線桁橋のたわみ $w(\varphi)$ は、式 (47) より

$$w(\varphi) = R_S(\theta(\varphi) - \beta(\varphi))$$

として決定することができる。

6. 代表的な荷重状態に対する解

図-8(a), (b) に示すように、単純曲線桁橋に代表的な荷重として、等分布荷重 q_0 、ならびに、集中荷重 P_0 が載荷する場合に対する断面力、ならびに、変形量を求めよう。

(1) 断面力

断面力として曲げモーメント M_y 、せん断力 Q 、および、ねじりモーメント T は、

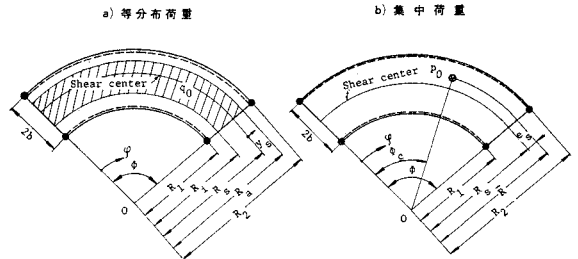


図-8 荷重状態

$$\frac{dQ}{d\varphi} = \begin{cases} -q_0 \int_{R_i}^{R_a} \rho d\rho : \text{等分布荷重} \\ -P_0 \delta(\varphi - \varphi_c) : \text{集中荷重} \end{cases}$$

表-1 断面力 M_y, T, Q, M_w

荷重 断面力	等分布荷重	集中荷重 ($0 \leq \varphi \leq \varphi_c$)
M_y	$q_0 L_1 \left\{ \frac{\sin \varphi + \sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} - 1 \right\}$	$P_0 \bar{R} \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \sin \varphi$
T	$q_0 \left\{ L_1 \frac{\cos(\varphi - \varphi_c) - \cos \varphi}{\sin \varphi} + L_2 \left(\frac{\varphi}{2} - \varphi_c \right) \right\}$	$-P_0 \left\{ \bar{R} \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \cos \varphi - R_S \frac{\varphi - \varphi_c}{\varphi} \right\}$
Q	$q_0 \frac{L_2}{R_S} \left(\frac{\varphi}{2} - \varphi_c \right)$	$P_0 \frac{\varphi - \varphi_c}{\varphi}$
M_w	$q_0 R_0 \left\{ \frac{L_1}{\alpha^2 + 1} \frac{\sin \varphi + \sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} - \left(\frac{L_1}{\alpha^2 + 1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \times \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha(\varphi - \varphi_c)}{\sinh \alpha \varphi} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right\}$	$P_0 R_0 \left\{ \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2 + 1} - \frac{R_S}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\varphi - \varphi_c)}{\sinh \alpha \varphi} \frac{\sinh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \varphi} + \frac{\bar{R}}{\alpha^2 + 1} \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \sin \varphi \right\}$

表-2 $df(\varphi)/d\varphi$ の解

等分布荷重	集中荷重 ($0 \leq \varphi \leq \varphi_c$)
$q_0 L_1 \frac{\gamma}{\lambda^2 + 1} \left\{ \frac{\sin \varphi + \sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} - \frac{\sinh \lambda \varphi + \sinh \lambda(\varphi - \varphi_c)}{\sinh \lambda \varphi} \right\}$	$P_0 \bar{R} \frac{\gamma}{\lambda^2 + 1} \left\{ \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \sin \varphi + \frac{\lambda \sinh \lambda(\varphi - \varphi_c)}{\sinh \lambda \varphi} \sinh \lambda \varphi \right\}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_y}{d\varphi} - QR_S + T &= 0 \\ \frac{dT}{d\varphi} - M_y &= \begin{cases} q_0 \int_{R_i}^{R_a} y_s \rho d\rho : \text{等分布荷重} \\ e_s P_0 \delta(\varphi - \varphi_c) : \text{集中荷重} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

より決定できる。ここで、等分布荷重に対して

$$L_1 = \frac{1}{3} (R_a^3 - R_i^3), L_2 = \frac{R_s}{2} (R_a^2 - R_i^2) \dots\dots (55)$$

を導入する。また、集中荷重に対しては、 δ を Dirac の delta function とする。そして、曲げモーメントに対する境界条件

$$[M_y]_{\varphi=0} = [M_y]_{\varphi=\varphi_c} = 0 \dots\dots\dots (56)$$

のもとに、式 (55) を解けば 表-1 の結果が得られる。

(2) $df(\varphi)/d\varphi$ の解

表-1 の M_y を用いて、微分方程式 (44) を次の境界条件のもとに解けば、表-2 の結果を得る。

$$\left[\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right]_{\varphi=0} = \left[\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right]_{\varphi=\varphi_c} = 0 \dots\dots\dots (57)$$

(3) 変形量 w, β, θ の解

ねじり角 θ についての微分方程式 (48) を、次の境界条件のもとに解く。

$$\left[\frac{d^2\theta(\varphi)}{d\varphi^2} \right]_{\varphi=0} = \left[\frac{d^2\theta(\varphi)}{d\varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_c} = 0 \dots\dots\dots (58)$$

また、断面回転角 β についての微分方程式を、次の境界条件のもとに解く。

$$[\beta(\varphi)]_{\varphi=0} = [\beta(\varphi)]_{\varphi=\varphi_c} = 0 \dots\dots\dots (59)$$

これらの結果を 表-3 に示す。

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A_q &= q_0 L_1 \frac{\eta}{\lambda^2 + 1} r_y \\ B_q &= \frac{q_0 R_0}{GJ} \alpha^2 \left(\frac{L_2}{\alpha^2} - \frac{L_1}{\alpha^2 + 1} \right) \\ C_q &= q_0 L_1 \left\{ \frac{R_0}{GJ} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} - \left(\frac{\eta}{\lambda^2 + 1} r_y - \zeta_y \right) \right\} \\ D_q &= -q_0 \left(\frac{R_0}{GJ} L_2 + L_1 \zeta_y \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_q &= -\frac{R_s}{\lambda^2 + 1} A_q \\ \bar{B}_q &= \frac{q_0 R_0 R_s}{GJ} \left(\frac{L_2}{\alpha^2} - \frac{L_1}{\alpha^2 + 1} \right) - \frac{R_s}{\alpha^2 + 1} B_q \\ \bar{C}_q &= \frac{1}{2} C_q R_s \\ \bar{D}_q &= \bar{A}_q + \bar{B}_q + \bar{F}_q \\ \bar{E}_q &= \frac{q_0 R_0 R_s}{GJ} \frac{L_2}{2} \\ \bar{F}_q &= \frac{q_0 R_0 R_s}{GJ} \left(L_1 - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) - D_q R_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

$$\left. \begin{aligned} A_P &= -P_0 \bar{R} \frac{\eta}{\lambda^2 + 1} \lambda^2 r_y \\ B_P &= \frac{P_0 R_0^3}{EC_w} \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2 + 1} - \frac{R_s}{\alpha^2} \right) \alpha^2 \\ C_P &= P_0 \bar{R} \left\{ \frac{R_0^3}{EC_w} \frac{1}{\alpha^2 + 1} - \left(\frac{\eta}{\lambda^2 + 1} r_y - \zeta_y \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_P &= -\frac{R_s}{\lambda^2 + 1} A_P \\ \bar{B}_P &= \frac{P_0 R_0 R_s}{GJ} \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2 + 1} - \frac{R_s}{\alpha^2} \right) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \end{aligned} \right\}$$

表-3 変形量 w, β, θ

荷重	等分布荷重	集中荷重 ($0 \leq \varphi \leq \varphi_c$)
w	$\bar{A}_q \frac{\sinh \lambda(\varphi - \varphi_c) + \sinh \lambda \varphi}{\sinh \lambda \varphi} + \bar{B}_q \frac{\sinh \alpha(\varphi - \varphi_c) + \sinh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \varphi}$ $- \bar{C}_q \left[\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \left\{ \varphi \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - \varphi \cos \varphi \right\} - (\varphi - \varphi_c) \sin \varphi \right]$ $- \bar{D}_q \frac{\sin(\varphi - \varphi_c) + \sin \varphi}{\sin \varphi} + \bar{E}_q (\varphi - \varphi_c) + \bar{F}_q$	$\bar{A}_P \frac{\sinh \lambda(\varphi - \varphi_c)}{\lambda \sinh \lambda \varphi} \sin \lambda \varphi + \bar{B}_P \frac{\sinh \alpha(\varphi - \varphi_c)}{\alpha \sinh \alpha \varphi} \sinh \alpha \varphi$ $- \bar{C}_P \left[\frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \left(\varphi \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - \varphi \cos \varphi \right) \right]$ $+ \left\{ \sin(\varphi - \varphi_c) - (\varphi - \varphi_c) \cos(\varphi - \varphi_c) \right\} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi}$ $- \bar{D}_P \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \sin \varphi + \bar{E}_P \frac{\varphi - \varphi_c}{\varphi}$
β	$\frac{A_q}{\lambda^2 + 1} \left\{ \frac{\sinh \lambda(\varphi - \varphi_c) + \sinh \lambda \varphi}{\sinh \lambda \varphi} \frac{\sin(\varphi - \varphi_c) + \sin \varphi}{\sin \varphi} \right\}$ $+ \frac{B_q}{\lambda^2 + 1} \left\{ \frac{\sinh \alpha(\varphi - \varphi_c) + \sinh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \varphi} \frac{\sin(\varphi - \varphi_c) + \sin \varphi}{\sin \varphi} \right\}$ $+ \frac{C_q}{2} \left[\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \left\{ \varphi \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - \varphi \cos \varphi \right\} \right]$ $- (\varphi - \varphi_c) \sin \varphi + D_q \left[1 - \frac{\sin(\varphi - \varphi_c) + \sin \varphi}{\sin \varphi} \right]$	$\frac{A_P}{\lambda^2 + 1} \left\{ \frac{\sinh \lambda(\varphi - \varphi_c)}{\lambda \sinh \lambda \varphi} \sinh \lambda \varphi - \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \sin \varphi \right\}$ $+ \frac{B_P}{\lambda^2 + 1} \left\{ \frac{\sinh \alpha(\varphi - \varphi_c)}{\alpha \sinh \alpha \varphi} \sinh \alpha \varphi - \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \sin \varphi \right\}$ $+ \frac{C_P}{2} \left[\frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \left(\varphi \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - \varphi \cos \varphi \right) \right]$ $+ (\sin(\varphi - \varphi_c) - (\varphi - \varphi_c) \cos(\varphi - \varphi_c)) \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi}$
θ	$\frac{q_0 R_0}{GJ} \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2} - \frac{L_1}{\alpha^2 + 1} \right) \frac{\sinh(\varphi - \varphi_c) + \sinh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \varphi} \right.$ $\left. - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} L_1 \frac{\sin \alpha(\varphi - \varphi_c) + \sin \varphi}{\sin \varphi} + L_2 \frac{\varphi - \varphi_c}{2} + L_1 - \frac{L_2}{\alpha^2} \right\}$	$\frac{P_0 R_0}{GJ} \left[\left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2 + 1} - \frac{R_s}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\varphi - \varphi_c)}{\sinh \alpha \varphi} \sinh \alpha \varphi \right.$ $\left. - \bar{R} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\sin(\varphi - \varphi_c)}{\sin \varphi} \sin \varphi + R_s \frac{\varphi - \varphi_c}{\varphi} \right]$

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_P &= \frac{R_S}{2} C_P \\ \bar{D}_P &= \bar{A}_P + \bar{B}_P + \bar{E}_P \\ \bar{E}_P &= \frac{P_0 R_0 R_S^2}{GJ} \end{aligned} \right\} \dots (63)$$

7. 曲線桁橋の有効幅

曲線桁橋の Shear lag を考慮した断面力、および、変形量が以上のように求められたので、桁任意点の曲げによる垂直応力の最終的な解を求めれば、次のようになる。すなわち、式 (15)~(17), (42)_{1,2} により、

デッキプレートに対して；

$$\sigma_u = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{\rho} \left[\left\{ 1 - \chi - \frac{y^2}{b^2} + (h-z)r_y - y_0 r_y \right\} \cdot \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \{ (h_1-z)\zeta_y + y_0 \zeta_z \} M_y \right] \dots (64)$$

ウェブプレートに対して；

$$\sigma_{w,i} = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{R_i} \left\{ -(\chi + z_0 r_y \pm b_i r_z) \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + (z_0 \zeta_y \mp b_i \zeta_z) M_y \right\} \dots (65)$$

($i=1, 2$ に対して複号同順)

などが得られる。ここで、 $df(\varphi)/d\varphi$ 、および、 M_y は表一1~2 の値を用いればよい。このほかに、曲げねじりによる応力 $\bar{\sigma}_{w,x}$ を考慮する際は、式 (64)~(65) に式 (50) の垂直応力を加えればよい。

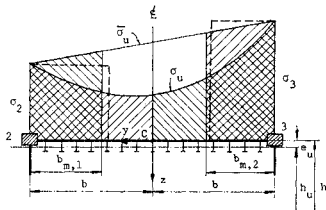


図-9 デッキプレート内の垂直応力分布と有効幅の定義

さて、デッキプレートの垂直応力分布に着目すると、一般に 図-9 に示すような分布をする。隅角部のとこでは、応力が極大となる。この隅角部における応力を曲線桁の理論によって得られる値と一致させるためには、いわゆるデッキプレートの有効幅を求めることができる。文献 7) では、図中点線で示すような矩形の幅を有効幅と定義しているが、曲線桁の理論による垂直応力分布は、一般に図中に示す $\bar{\sigma}_u$ のように勾配を持った直線によって近似することができる。したがって、曲線桁橋の有効幅は、この $\bar{\sigma}_u$ を基準にして定義するほうが合理的であると思われる。

本文では以上のように考え、隅角部 $j=2, 3$, におけ

る垂直応力 σ_2, σ_3 が曲線桁の理論によって求めたものと一致するような有効幅 $b_{m,1}, b_{m,2}$ を図示のように定義する。すなわち、この有効幅は、

曲率中心に対し内側のデッキプレートに対して；

$$\int_{-b}^{-b+b_{m,1}} \bar{\sigma}_u dy = \int_{-b}^0 \sigma_u dy \dots (66)_1$$

曲率中心に対し外側のデッキプレートに対して；

$$\int_b^{-b+b_{m,2}} \bar{\sigma}_u dy = \int_0^b \sigma_u dy \dots (66)_2$$

とする。ここに、 σ_u は異方性板の図心軸に関するものとするので²⁾、

$$\sigma_u = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\rho} \left\{ \left(1 - \chi - \frac{y^2}{b^2} + h_u r_y - y_0 r_z \right) \cdot \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - (h_u \zeta_y + y_0 \zeta_z) M_y \right\} \dots (67)$$

とする。また、 σ_1 と σ_2 とは、次のように置けばよい。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= [\sigma_u]_{y=-b, y_0=-b_1} \\ \sigma_3 &= [\sigma_u]_{y=b, y_0=b_2} \end{aligned} \right\} \dots (68)$$

そして、 $\bar{\sigma}_u$ は近似的に次式より求める。

$$\bar{\sigma}_u = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2b} y + \frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2} \dots (69)$$

式 (66)_{1,2} の積分は、 σ_u が式 (67) に示すように曲率半径 ρ と座標 y_0 、および、 y との関数であるので、有効幅の公式を代数式として表わすのは困難である。それで、有効幅 $b_{m,1}, b_{m,2}$ は数値積分によって求めることにする。

このようにして求められた有効幅 $b_{m,1}, b_{m,2}$ を使用し、図心や断面 2 次モーメント

$$\left. \begin{aligned} I_y &= \int_A \frac{R_0}{\rho} z_0^2 dA, \quad I_z = \int_A \frac{R_0}{\rho} y_0^2 dA, \\ I_{yz} &= \int_A \frac{R_0}{\rho} y_0 z_0 dA \dots (70) \end{aligned} \right\}$$

を求めれば、曲線桁の理論によって垂直応力 σ (式 (31), (36) より誘導できる)

$$\sigma = \frac{R_0}{\rho} \frac{I_z z_0 - I_{yz} y_0}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y \dots (71)$$

を容易に求めることができる。

8. 数値計算例

大阪市によって建設された長柄バイパス曲線桁橋をモデルとして、Shear lag による桁各部の垂直応力がどのように分布し、また有効幅が荷重状態や曲率半径、および、スパン L と腹板間隔の半分 b との比 L/b により、どのように変動するかを調べる。なお、数値計算は大阪市立大学計算センター設置の Facom 270/30 を用いて、Double precision として行なったものである。

(1) 断面定数

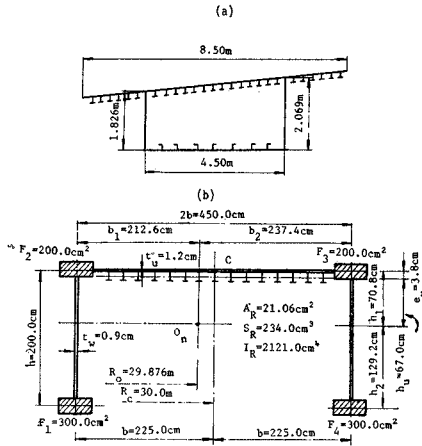


図-10 曲線桁橋断面図

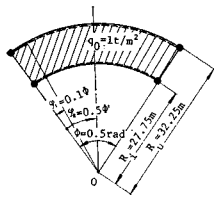


図-11

表-4

F_u	907.8	A_u	605.0
F_w	197.8	$F_{f,u}$	166.2
F	2305.5	F_x	232.2

(単位 cm^2)

表-5

I_w	8.276×10^5	I_{yz}	6.826×10^5
$I_{y,u}$	1.533×10^7	$I_{y,u,0}$	1.535×10^7
I_y	1.774×10^7	J	2.5×10^7
I_z	8.544×10^7		(箱型断面, 仮定)

(単位 cm^4)

表-6

G_w	$-5.770 \times 10^3 \text{ cm}^3$	$D_{y,u}$	$4.654 \times 10^{11} \text{ cm}^6$
$G_{y,u,0}$	$6.189 \times 10^3 \text{ cm}^3$	C_w	$5.0 \times 10^{10} \text{ cm}^6$
$C_{y,u}$	$-1.551 \times 10^8 \text{ cm}^5$		(箱型断面, 仮定)

表-7

χ	0.262	ζ_z	$0.638 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$
γ_y	$-0.228 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$	λ	14.5
τ_z	$-0.459 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$	η	$0.139 \times 10^{-7} \text{ kg}^{-1}$
ζ_y	$0.800 \times 10^{-10} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$	α	41.7

表-8 $M_y, df(\varphi)/d\varphi$ 値

測点	値	$M_y (\times 10^7 \text{ kg cm})$	$df(\varphi)/d\varphi (\times 10^{-2} \text{ cm})$
$\varphi_1 = 0.1\phi$		0.4671	1.4040
$\varphi_2 = 0.5\phi$		1.3019	2.6110

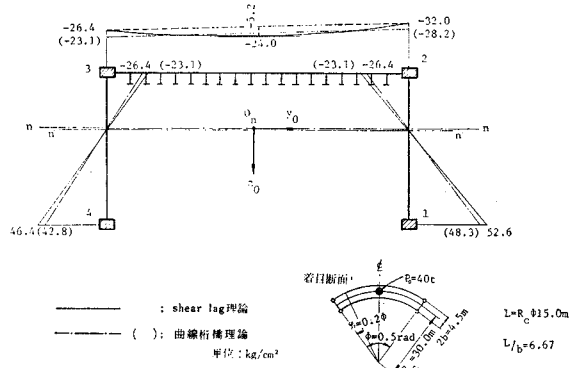


図-12 等分布荷重による垂直応力分布 ($\varphi_1 = 0.2 \phi$)

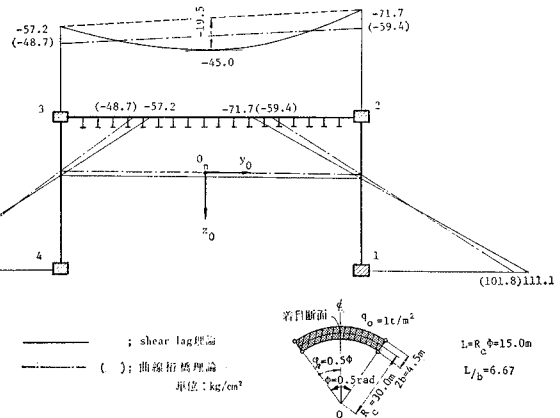


図-13 等分布荷重による垂直応力分布 ($\varphi_2 = 0.5 \phi$)

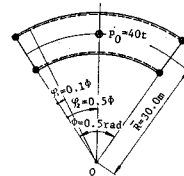


図-14

図-10(a) は、長柄バイパス曲線桁橋の横断面を示すが、図-10(b) に示す断面にモデル化する。

いま、曲率半径 $R_c = 30.0 \text{ m}$, $\phi = 0.5 \text{ rad}$. とした場合の断面定数の計算結果を、表-4~7 に示す。

(2) Shear lag による垂直応力分布

a) 等分布荷重が作用する場合

図-11 に示すように、等分布荷重が満載する際の

表-9 $M_y, df(\varphi)/d\varphi$ 値

測点	値	$M_y (\times 10^7 \text{ kg cm})$	$df(\varphi)/d\varphi (\times 10^{-2} \text{ cm})$
$\varphi_1 = 0.1\phi$		0.3095	0.2605
$\varphi_2 = 0.5\phi$		1.5321	5.8186

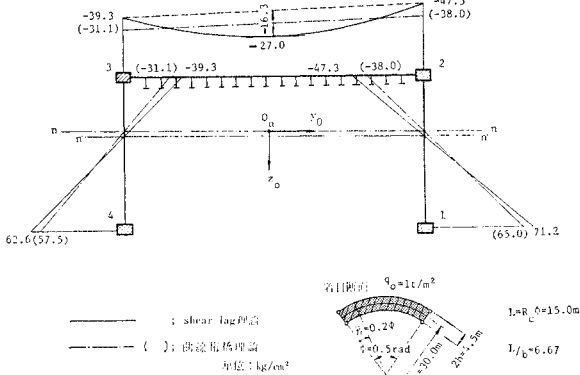


図-15 集中荷重による垂直応力分布 ($\varphi_1=0.2\phi$)

M_y , $df(\varphi)/d\varphi$ 値を求めたものを表-8 に示す。
 また、代表的な断面 φ_1, φ_2 における垂直応力分布を
 図-12~13 に示す。

b) 集中荷重が作用する場合

図-14 に示すように、集中荷重が作用する際の M_y ,
 $df(\varphi)/d\varphi$ 値を表-9 に示す。

また、代表的な断面 φ_1, φ_2 における垂直応力分布を
 図-15~16 に示す。

図-12~13, 15~16 よりも明らかなように、 L/b が
 小さい曲線桁橋では、垂直応力分布が Shear lag の影
 響を受けるために、曲線桁の理論によって得られるもの
 と著しく相違することがわかる。そして、等分布荷重が
 載荷する場合の Shear lag によって減少する垂直応力は、
 全支間にわたりほぼ一定である(図-12,13)。しかし、
 集中荷重が載荷した場合、この減少量は載荷点を離
 れるのに伴って急激に減少する(図-15,16)。これらの
 傾向は、直線桁橋の場合と類似している²⁾。

(3) 曲率半径の Shear lag におよぼす影響

曲線桁橋のスパン L を

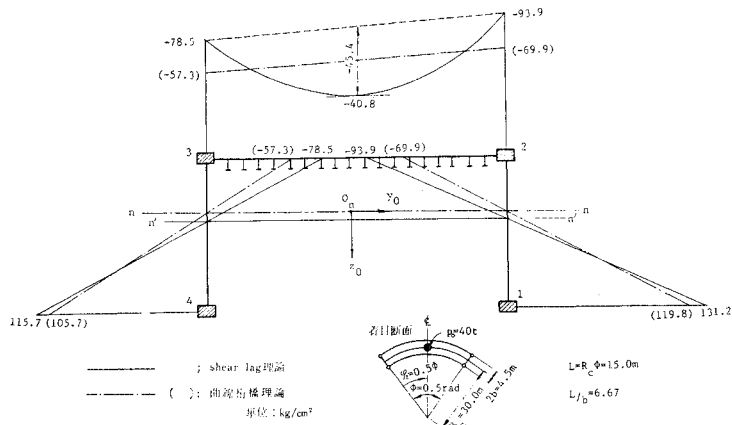


図-16 集中荷重による垂直応力分布 ($\varphi_2=0.5\phi$)

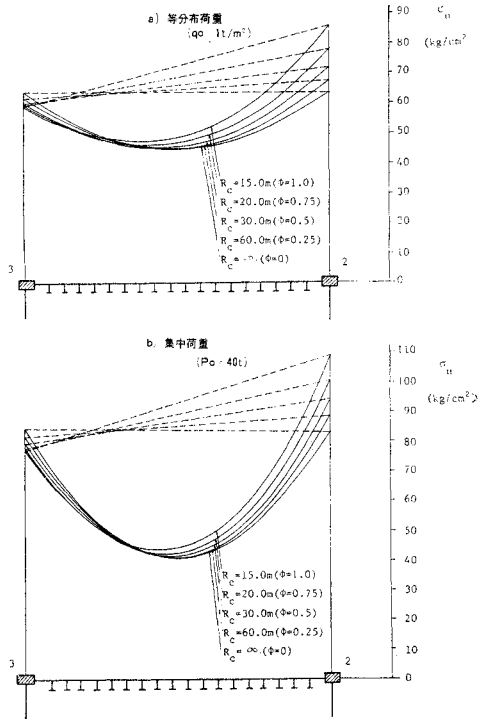
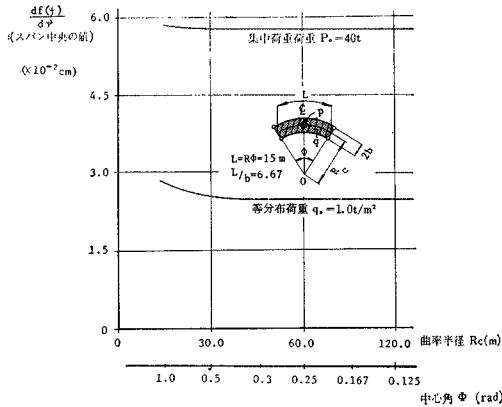


図-17 曲率半径 R_c による垂直応力分布の変化
 $(L=R_c\phi=15\text{ m}, L/b=6.67, \varphi=\phi/2)$

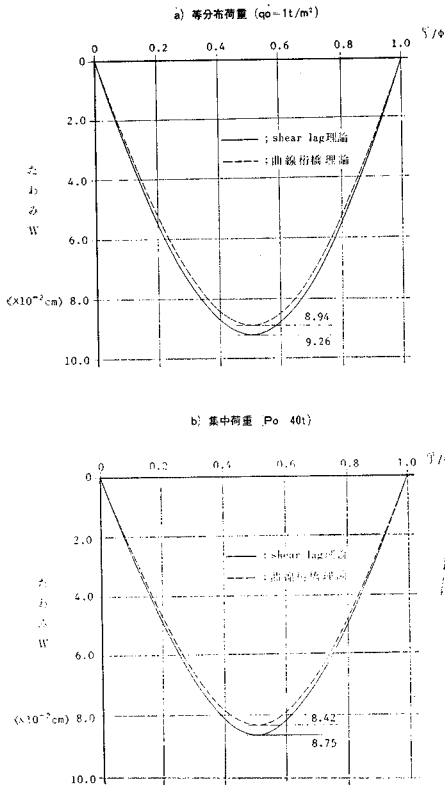
$$L=R_c\phi \dots\dots\dots (72)$$

とみなし、いま $L=15.0\text{ m}$ に固定する。そして、 R_c
 の種々な値に対する垂直応力分布を、図-17(a), (b)
 に示す。

この図より、曲率半径 R_c は垂直応力分布に多少影響
 をおよぼすことがわかるが、これはおもに式 (71) に示
 すように 1 次応力に基因するものである。そして、曲線
 桁橋の Shear lag による垂直応力分布の減少量は、 R_c
 $=\infty$ の直線桁橋の場合とほとんど変わらないように思



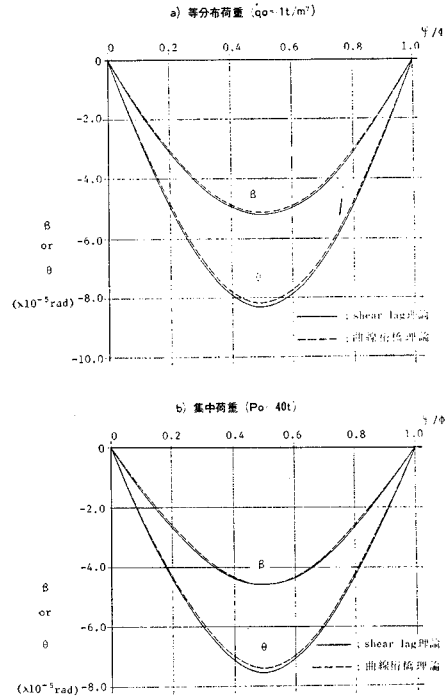
図一18 曲率半径 R_c による $df(\phi)/d\phi$ 値の変化



図一19 スパン方向のたわみの変化

われる。この減少量は、 $df(\phi)/d\phi$ 値によって定まるものであるが、曲率半径 R_c の種々な値に対して、 $df(\phi)/d\phi$ 値をプロットすれば、図一18 が得られる。

この図より、等分布荷重を載荷した場合は、中心角 ϕ が大きいと曲率半径 R_c の影響が若干現われる。しかし、集中荷重の場合には、曲率半径 R_c の影響はほとんどないことがわかる。一般の単純曲線桁橋では、中心角は $\phi < 1$ rad. であるので、曲率半径 R_c が Shear lag におよぼす影響は無視できるほど小さいものと思われる。



図一20 スパン方向の断面回転角およびねじり角 θ の変化

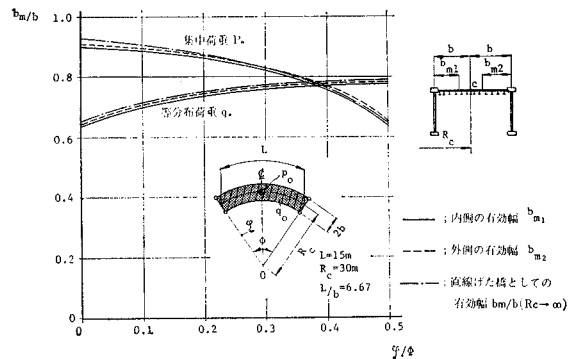
(4) 変形量 w, β, θ

次に、Shear lag を考慮した場合のたわみ w 、断面回転角 β 、および、ねじり角 θ を計算し、プロットしたものを 図一19~20 に示す。Shear lag が変形量におよぼす影響は、垂直応力分布の場合ほど大きくないことが、これらの図よりわかる。

(5) 有効幅

以上に述べた垂直応力分布をもとにして、有効幅を算定した結果を次に示す。

まず、図一21 は有効幅の スパン 方向の変化をプロッ



図一21 有効幅の スパン 方向の変化

表—10 L/b の変化による曲線桁橋の有効幅

(a) 等分布荷重

L/b		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
有効幅											
曲線型橋	$b_{m,1}/b$	0.352	0.593	0.751	0.840	0.890	0.920	0.938	0.951	0.960	0.966
	$b_{m,2}/b$	0.355	0.601	0.760	0.846	0.895	0.923	0.941	0.933	0.962	0.968
直線桁橋 ²⁾	b_m/b	0.356	0.600	0.760	0.848	0.898	0.927	0.946	0.958	0.967	0.972

(b) 集中荷重

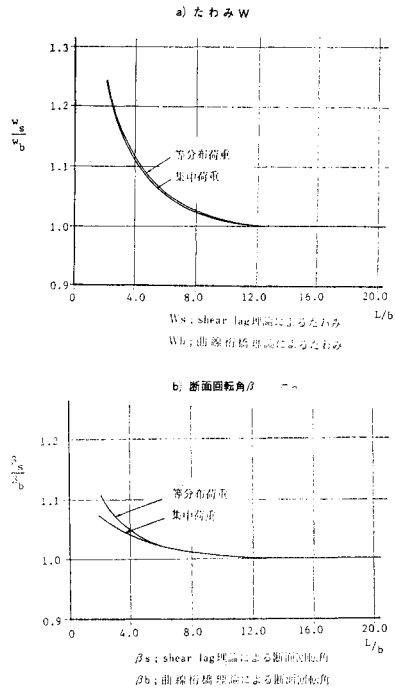
L/b		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
有効幅											
曲線桁橋	$b_{m,1}/b$	0.317	0.494	0.615	0.692	0.745	0.784	0.813	0.837	0.857	0.874
	$b_{m,2}/b$	0.318	0.501	0.623	0.701	0.753	0.791	0.821	0.844	0.863	0.880
直線桁橋 ²⁾	b_m/b	0.320	0.500	0.621	0.697	0.748	0.784	0.811	0.832	0.849	0.863

トしたものである。等分布荷重が載荷する場合には、スパン中央で有効幅は最大となり、橋端で最少となる変化を示すが、その変化は緩慢である。一方、集中荷重が載荷する場合には、載荷点のスパン中央で有効幅は最小となり、橋端に向って有効幅は急激に増大することがわかる。これらの傾向は直線桁橋の場合と同様であり、参考のために $R_c = \infty$ とした直線桁橋の有効幅を文献 2) より求めたものも 図—21 中にプロットした。

本研究では、曲線桁橋の有効幅を、曲率中心に対して内側のものを $b_{m,1}$ 、および、外側のものを $b_{m,2}$ として求めるのが合理的であると思われたので、7. に示した方法によって求めることにしたが、図—21 より $b_{m,1}$ と $b_{m,2}$ との差異はほとんどなく、またこれらの値は直線桁橋の有効幅ともよく一致しているように思われる。

そこで、図—10 に示す実際に設計された曲線桁橋断面を用いて、 L/b を種々変化させたときの有効幅を計算したものを表—10(a), (b) に示す。ただし、曲率半径の影響は、(3) 項で明らかにしたように小さいので、 $R_c = 30\text{ m}$ (一定) とし、スパン中央における有効幅の値とする。

この表からも明らかなように、曲率中心に対して外側のデッキプレートの有効幅のほうが内側に対するものよりわずかに大きい、その差異はほとんどないものと考えてよい。また、表中には $R_c = \infty$ とした直線桁橋の有効幅も示してあるが²⁾、曲線桁橋の有効幅もこれらの値にほぼ等しい。これは、次の理由によるものと思われる。すなわち、直線桁橋の有効幅は、文献 2) によると、(1) 床板を構成する材料ヤリブの寸法などによって定まるパラメーター $\omega = 1/(1-\nu) + A_R(1+\nu)/(a_u t_u)$ 、および、(2) 桁の断面形状を表わすパラメーター $\kappa = A_u/F + 2 A_u(h_1 - e_u)^2/I_y$ によって定まることが明らかにされている。この ω 値は曲線桁橋も直線桁橋も変わらない。また、 κ 値にもほとんど差異はなく、さらに 8. (3) 項で明らかにしたように曲率半径 R_c の影響も顕著に現われないために、表—10 に示したように曲線桁橋と直線桁橋の有効幅は、ほぼ等しくなるものと思われる。



図—22 L/b によるたわみ w 、および、断面回転角 β の変化

る。

したがって、曲線桁橋の有効幅はスパンを $L = R_c \phi$

として、文献 2) に示した各種の実用公式を準用することによって算定してもよいように思われる。

最後に、参考資料として、 L/b による曲線桁橋のたわみ w 、および、断面回転角 β が Shear lag を考慮するとのように変わるかを、Shear lag を考慮しない直線桁の理論による値と比較したものを 図—22 に示す。これらの変形量に関しては L/b が約 12 以下となる場合、Shear lag を考慮する必要があることを示している。

9. 結 論

本文は、以前に著者らが提示した“鋼床板桁橋の有効幅に関する研究”を曲線桁橋に拡張し、まず曲線桁橋の Shear lag を解析したものである。この結果、

(1) Shear lag を考慮した曲線桁橋の垂直応力や変形状態を解析する実用公式を与えた。

(2) この公式には、曲線桁橋を構成する材料の特性や、桁の形状・寸法などの力学的諸因子、ならびに、種々な荷重状態に対する考慮が払われている。

(3) また、本文の解は級数解でないので、数値計算も容易であり、Shear lag の項を無視すると従来の曲線桁の理論とも一致する。

(4) 数値計算例として、実際に建設された曲線桁橋をモデルとして、Shear lag により垂直応力がどのように分布するかを示した。

(5) そして、曲率半径 R_c が Shear lag におよぼす影響は、ほとんどの場合無視できるほど小さいことを明らかにした。

次に、これらの垂直応力分布をもとにして、曲線桁橋の有効幅を求めた結果、以下の結論を導びくことができたと思われる。

(6) 曲線桁橋の有効幅は、図—9 に示すように定義するのが合理的である。

(7) このような定義のもとに、曲線桁橋の有効幅を求め、直線桁橋の有効幅と比較すると、単純曲線橋の有効幅は、そのスパン L を、

$$L = R_c \phi \quad (R_c : \text{桁中心線の曲率半径, } \phi : \text{中心角})$$

とみなし、文献 2) の実用公式を準用して算定してもよい。

(8) また、曲率中心に対し外側のデッキプレートも内側のデッキプレートも、有効幅は等しく取ってもよい。

(9) なお、本文は 図—1 に示す断面を有する単純曲線桁橋を対象として解析したが、種々な断面形状を有する曲線桁橋や、さらに連続曲線桁橋に対しても理論式を拡張することが可能であるが、その近似的な取扱については文献 2) にゆずる。

最後に、この研究は理論的な研究のみに止まったが、今後実験によって種々な検討を加えたいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 小松定夫：連続箱桁の Shear lag について，土木学会論文集，第 58 号，pp. 1~9，(昭.33.9)
- 2) 近藤・小松・中井：鋼床板桁橋の有効幅に関する研究，土木学会論文集，第 86 号，pp. 1~17，(昭.37.10)
- 3) Chwalla, H. : Über des Problem der voll mitragender Breite von Gurt und Rippenplatten, Alfon-Leon-Gedenschrift, Wien, (1951).
- 4) Rüh, H. : Die Mitwirkende Plattenbreite bei Platten Balken, Der Stahlbau, Heft. 1, S. 12~14, (1953).
- 5) Abdel, S.G. : Effective Width of Steel Deck Plate in Bridges, Proc. of ASCE, ST. 7, pp. 1459~1474, (1969 7)
- 6) 伊藤 学：函桁のフランジ有効幅について，第 3 回日本道路会議論文集
- 7) 薄木・菅原：曲線箱桁のフランジ有効幅について，第 23 回土木学会年次学術講演会講演概要，I-81, pp. 235~236, (昭.43.10)
- 8) 小西・小松：単純支持曲線桁橋の立体的解析，土木学会論文集，第 90 号，pp. 11~28, (昭.38.2)

(1970.11.16・受付)