

# 確率だ円体の主軸による活性汚泥法 浄化水水質の解析

## PRINCIPLE AXIS ANALYSIS OF ACTIVATED SLUDGE PROCESS EFFLUENT

奥野長晴\*  
By Nagaharu Okuno

### 1. 序 論

活性汚泥法による都市下水の浄化の程度を監視するために、BOD、COD、浮遊物など多くの変量を測定している下水処理場の数は多い。しかし、このように浄化水の水質を多くの変量を用いて記録しておきながら、個々の項目を別々に問題にし、全体的に総合したものを対象にすることはあまり例がなかった。つまり水質をベクトルだとは考えなかったのである。個々の変量をスカラーとするよりはベクトルとした方が、新しい情報やくわしい情報を得られる場合が多いと思われる。

一方、活性汚泥法による浄化水の水質は大きく変動しているにもかかわらず、個々の変動の因果関係が完全に解明できない今日、水質の変動を確率的に取り扱うべきであると考えるが、前述のように水質をベクトルとするならば、多次元確率ベクトルを対象とした解析をするべきである。

以上のような立場から、ある下水処理場のエアレーションタンクの1回路をパイロットプラントに改良して、長期間運転する間に集めたデータをもとにまず水質ベクトルを求めた。この水質ベクトルが定義する多次元空間の点群を表わすよう導いた分布関数が与えるだ円体の形状から、下水処理プラントの運転管理上有用な情報をどのようにしてえられるかを検討してみた。

### 2. 多変量分布と確率だ円体

1つの変量が正規分布する場合の確率密度関数に相当するものとして、 $P$ 次元確率ベクトルの分布関数は次のようになる。

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2P} |\Sigma|^{-1/2}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \dots\dots (1)$$

ここに  $\boldsymbol{\Sigma}$  は分散共分散行列であって、データ行列  $\mathbf{X}$  から次のようにして計算する。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}' \dots\dots\dots (2)$$

位置ベクトル  $\mathbf{x}_{j(j=1\sim N)}$  で表わされる水質  $S_{j(j=1\sim N)}$  が  $P$ 次元空間に分布する密度は式(1)で計算できる。式(1)の  $\exp$  の中を次のように書くと、

$$x^2 = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \dots\dots\dots (3)$$

同じ値の  $x^2$  に対して  $f(\mathbf{x})$  は同一の値になる。式(3)は幾何学的にだ円を表わすから、けっきょく、そのだ円の円周上では、式(1)が同一確率密度を与えることになる。確率ベクトル  $\mathbf{x}$  が多変量正規分布するならば、 $x^2$  はカイ自乗分布するので、任意の確率密度に対する  $x^2$  の値を求めることは容易である。

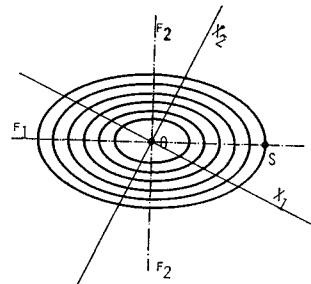


図-1  $P=2$  の場合の等確率だ円体

図-1 は  $P=2$  の場合の確率だ円のスケッチを示したものである。この図ではだ円の中心と原点が一致するように画いてある。

### 3. 確率だ円体の主軸

図-1 に示したような  $P=2$ 、すなわち確率ベクトル  $\mathbf{x}$  が 2次元としたとき、だ円には長軸と短軸との 2本の主軸がある。一般に、 $P$ 次元のだ円体には  $P$ 本の主軸

\* 正会員 東京都下水道局技術開発課

がある。P本の主軸はお互いに直交し、第1主軸が一番長く順次短くなってゆく。

P次元ベクトルで表わされる下水浄化水の水質を含むだ円体の大きさおよびP本の主軸の長さや傾が、エアレーション時間の長さによって、どのように変化するかを明らかにすることが本論文の数学的テーマである。

以下の解析では簡便のために、各変量の測定値は平均値のまわりに分布しているとする。代数的にはすべての測定値をその変量ごとに平均値からの偏差におきかえたことに相当する。幾可学的には、だ円体の中心を座標軸の原点へ移動したことに相当する。図-1はこの状態を示したものである。この場合式(3)は次のように簡単になる。

$$x^2 = x' \Sigma^{-1} x \dots\dots\dots(4)$$

### 4. 主軸の特性

#### (1) 主軸算定式

式(3)で表わされるだ円上(図-1参照)の1点Sを位置ベクトルxで表わすと、原点0からSまでの距離dの自乗はベクトルxのノルムに等しいから、次の式で表わすことができる。

$$d^2 = x'x \dots\dots\dots(5)$$

Sはだ円上にあるから、ベクトルxは次の式を満たさなければならない。

$$x^2 = x' \Sigma^{-1} x \dots\dots\dots(6)$$

第1主軸はすべての主軸中最大の長さをもっている。すなわちdが最大のはずであるから、式(6)の下で式(5)を最大にする位置ベクトルx1を求めればよい。ラグランジュの未定乗数をλとすれば、式(5)を最大にすることは次の式(7)を最大にすることに等しい。

$$Q(x) = x'x - \lambda(x' \Sigma^{-1} x - x^2) \dots\dots\dots(7)$$

xで偏微分して0とおけば、式(8)をえる。

$$\Sigma x = \lambda x \dots\dots\dots(8)$$

式(8)を満たすようなスカラーλとそれに対応するベクトルを見出すこと、すなわち固有値問題に帰着する。分散共分散行列Σの固有値に対する固有ベクトルlを求めると所定の解をえたことになる。固有ベクトルの要素の一つは任意に選ぶことができる。lが特定のスカラーλに対して、式(8)を満足すればkを任意の定数としたときklもやはり式(8)を満足する。ところで第1主軸の点Sの座標成分はx1であり、かつx1=klであるから、第1主軸のもののP本の座標軸に対する方向余弦は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= l_1 / \sqrt{l'l} \\ \cos \theta_2 &= l_2 / \sqrt{l'l} \\ &\vdots \\ \cos \theta_P &= l_P / \sqrt{l'l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

したがって式(10)の条件を満たすようkを決定すれば、

$$l'l = 1 \dots\dots\dots(10)$$

固有ベクトルlは第1主軸の方向余弦を表わす。

式(8)の両辺にx'を乗じて変形すると式(11)になる。

$$x' \Sigma x = \lambda x' x \dots\dots\dots(11)$$

式(6)の関係を用いてさらに式(11)を変形する。

$$x' \Sigma x = \lambda x^2 \dots\dots\dots(12)$$

式(12)を式(5)へ代入すると、主軸の長さを求めることができる。

$$2d = 2\sqrt{\lambda x^2} \dots\dots\dots(13)$$

任意の確率密度に対するx^2の値(自由度P-1)を数表から求めて、それに固有値を乗じ、平方根を求め、2倍すると主軸の実長を求めることができる。

一般にP次の対称行列Σはλ1, λ2, ..., λPというP個の固有値をもつ。これに対応してP組の固有ベクトルl1, l2, ..., lPがある。この場合次の式が成立することが明らかにされている。

$$l_j' l_i = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \dots\dots\dots(14)$$

P組の固有ベクトルはすべて直交していることがわかる。P組の固有ベクトルはだ円体のP本の主軸の方向余弦に相当するわけである。

#### (2) だ円体主軸上の分散

変数の数Pに相当するP次元の座標系に、新たにだ円体のP本の主軸が加わったことになる。もとの座標系とだ円体の主軸を軸にする座標系の関係を考える。

もとの座標系においてxjで定義されたj番目の水質点Wjが新しい座標ではfjになるとすると、両者間に式(15)の関係が成立する。

$$f_j = L' x_j \dots\dots\dots(15)$$

LはP組の方向余弦li(i=1~P)を列ベクトルとするP×Pのマトリックスである。

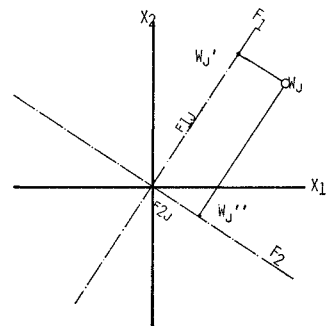


図-2 だ円主軸の座標系もとの座標系との関係



験条件に保つよう努力を払ったけれども、室内の小型パイロットプラントのそれに比較すると、ラフであることは否めない。また水温や原水水質をコントロールすることは不可能である。そのため、誤差をできるだけ小さくするよりも確率化できるようコックスランの実験計画法にしたがって、実験条件を割付けた。こうしてえたデータに基づく解析結果は現実の施設の実状をよく反映していると考えられる。

実験プラントは昭和43年から45年にかけて運転し、数多くのデータを収集した。すべてのデータを磁気テープに記録し、あらゆる解析に利用できるようになっている。その一部を表-1に示した。本節ではその中から、1時間、2時間、3時間の3種類のエアレーション時間に対してえられた処理水の水質として、溶存性炭水化物 (SOL CH), 溶存性蛋白質 (SOL PR), 溶存性COD (SOL COD), 溶存性BOD (SOL BOD), 炭水化物, 蛋白質, COD, BOD, 以上9種類を用いた。

(2) 変量の算術平均と標準偏差

1個の水質サンプルにつき9種類の変量の測定をしたから、この場合水質は各変量を元とする9次元のベクトルである。表-2に9種類の変量の算術平均と分散の平

表-2 エアレーション時間ごとと変量の平均と分散

	1HR エアレーション		2HR エアレーション		3HR エアレーション	
	平均	標準偏差	平均	標準偏差	平均	標準偏差
溶解性炭水化物	6.51	3.442	6.92	2.551	7.16	4.203
溶解性蛋白質	11.63	4.759	9.33	5.037	5.19	2.577
溶解性COD	18.72	4.198	16.27	7.001	13.39	3.584
溶解性BOD	11.68	5.162	9.24	4.480	6.93	3.743
炭水化物	10.69	3.459	8.57	2.325	8.18	2.808
蛋白質	15.47	6.438	11.33	5.205	7.85	3.011
C O D	21.62	4.815	18.03	7.374	14.83	3.964
B O D	16.23	4.004	13.27	4.492	9.69	3.953
浮遊物	12.78	5.694	10.22	5.967	6.63	4.189

方根をエアレーション時間ごとにまとめて記入した。この分散は式(1)および式(3)のΣの主対角線に相当するものである。

一般的に、エアレーション時間が長くなると、算術平均も標準偏差も小さくなるのがわかる。水質自体が良好になるとともに水質の変動も小さくなるのがエアレーション時間を長くしたことの効果である。

(3) だ円体の位置と形状

測定値をエアレーション時間ごとにまとめて、マトリックス X の形に整理し、式(2)を用いて分散共分散行列Σを計算する。次にΣの固有値λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub>, ..., λ<sub>9</sub>を式(18)に代入すれば、だ円体の9本の主軸の長さを計算することができる。分散共分散行列や固有値を求めるために便利なプログラムが各メーカーの電子計算に用意されている。次に3.の各式を用いて主軸の方向余弦, 分散, 分散の比率, 分散の累積などを長い方から4本の主軸に関するものだけを取り上げ、エアレーション時間ごとにまとめて表-3に表わした。表-4にはだ円体の中心から原点までのユークリッド距離を記入してある。すべての変量に対する方向余弦が求められているから、

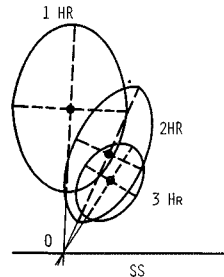


図-3 だ円体のSS軸に対する傾きおよび原点に対する位置

表-4 第一主軸のSS軸に対する角度およびだ円体の中心と原点との距離

	1HR	2HR	3HR
原点からの距離	43.7	36.0	28.2
SS軸に対する第一主軸の角度	88°17'	66°47'	58°37'

表-3 解析結果の総括

オリジナル軸	だ円主軸	1 HR DETENT				2 HR DETENT				3 HR DETENT			
		F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>
方 向 余 弦	SOL. CH	0.092	0.107	0.105	0.116	0.124	0.353	0.5002	0.107	0.3098	-0.2257	-0.477	0.0656
	SOL. PRO	0.194	0.368	0.339	0.239	-0.055	-0.279	0.0346	0.613	-0.1415	-0.0259	-0.017	0.6601
	SOL. COD	0.106	-0.333	-0.083	0.390	-0.146	-0.001	-0.397	-0.137	0.6757	-0.3145	0.224	-0.0351
	SOL. BOD	-0.368	0.174	-0.113	0.726	0.014	0.537	-0.320	0.172	0.3703	0.3030	0.1415	0.1559
	CH	0.401	-0.378	0.009	0.016	0.376	0.102	-0.281	0.576	0.3113	-0.2979	-0.175	-0.1623
	PROTEIN	-0.258	0.022	-0.596	-0.368	0.519	-0.025	0.025	-0.452	-0.2266	-0.0502	-0.4068	-0.0127
	COD	-0.453	-0.238	-0.262	0.195	0.442	-0.476	-0.393	-0.052	0.3502	0.5264	-0.2863	0.4503
BOD	0.446	-0.403	-0.343	0.250	-0.246	0.357	-0.501	-0.157	-0.1279	-0.5636	0.222	0.5525	
	SS	-0.417	-0.589	0.558	-0.109	0.541	0.377	0.055	0.000	-0.0533	0.2674	0.6117	0.0019
固有値λ		193.12	102.68	26.21	22.96	162.72	36.15	16.61	8.14	44.26	28.24	22.35	7.5
固有値の%		53.6	28.8	7.34	6.00	68.7	15.3	7.02	3.42	39.2	24.9	19.7	6.6
累積固有値の%		53.6	82.4	89.7	96.1	68.7	84.0	91.02	94.44	39.2	64.1	83.8	90.4
90%の測定値のはいるだ円の主軸		55.55	40.5	20.46	19.15	50.99	24.03	16.29	11.40	26.59	21.24	18.89	6.5
主軸の比率		1	0.73	0.415	0.345	1	0.47	0.32	0.22	1	0.81	0.71	0.22

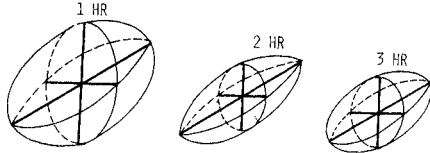


図-4 90%の測定点を含む確率だ円体の形状

だ円体の位置を幾何学的にきめることができる。一例として、図-3に、浮遊物軸と第1主軸とが決定する平面上に、だ円体を射影した状態をエアレーション時間に対応して画いた。

4次元以上の超だ円体は図示のしようがないので図-4では長い方から3本の主軸を抜き出し、三次元のだ円体のスケッチを各エアレーション時間ごとに示した。主軸の長さは表-3に記してある。これはベクトルで定義されるすべての水質点の90%を含むと期待されるだ円体のスケッチであるから、エアレーション時間が長くなるほどだ円体がコンパクトになることは、水質ベクトルが中心付近に分布することを意味する。また図-4からエアレーション時間が長くなるほどだ円体は原点に近づくことがわかる。

以上は、エアレーション時間が長いほど浄化の程度が向上し、処理水質が安定するという従来の常識的事実を幾何学的に表現したものである。

(4) だ円体主軸の意義

前節で求めただ円体の主軸と、蛋白質、BOD…浮遊物など最初に選んだ9つの変量との相互関係を検討してみよう。

たとえば、1時間のエアレーションでえた浄化水のうちj番目のサンプルについて測定された9種類の変量が SOL CH<sub>j</sub>, SOLPR<sub>j</sub>, …, SS<sub>j</sub> であったとすれば、これらを元とするj番目の浄化水ベクトル  $x_j$  が9次元空間に定義される。 $x_j$  で表わされる点  $W_j$  をだ円体の第一主軸上に正射影した点を  $W_j'$  としたとき、原点と  $W_j'$  との距離  $f_{1j}$  は表-3の1HR DETENTIONの欄の方向余弦を式(15)に代入することにより、次の

ようにして求めることができる。

$$f_{1j} = 0.092 \text{ SOL CH}_j + 0.194 \text{ SOL PR}_j + 0.106 \text{ SOL COD}_j + \dots - 0.417 \text{ SS}_j \dots\dots\dots(25)$$

サンプル数は約40個であるから(j=1~40)、式(25)に代入すると、サンプル数に対応して約40個の  $f_{1j}$  を求めることができる。40個の  $f_{1j}$  の分散を式(19)で計算して、表-3の固有値の欄に記入してある。この場合の分散は193.12であり、全分散の53.6%に相当することが読みとれる。浄化水ベクトルの元を式(25)によって一次結合してできた  $f_{1j}$  は9つの変量の全変動の半分以上に相当する53.6%を説明する能力もっている。同様に、第2主軸のそれ102.68、第3主軸26.21、以上3本の軸上の変動の累積百分比は表-3の対応する欄から89.7%であることがわかる。

2時間滞留では3本の軸で全変動の91.02%、3時間で83.8%である。3時間滞留の場合、同数の主軸による変動の説明力の百分比は前2者にくらべてやや落ちるが、全変動自体がかなり小さいので、3本の主軸で説明できない残存変動は前2者よりも小さい。

1,2,3時間エアレーションいずれの場合でも、3本以上主軸の数を増加しても、変動の説明される量はほとんど増えない。直交する3本の主軸によって変動の大半が説明されるという事実は変動の大半が3次元部分空間に所属していることを示すものである。

表-5は式(24)にしたがって、だ円体の3本の主軸上の変動と9変量との相関係数を計算してその結果だけをまとめたものである。この数値が大きいと、対象としている変量と主軸との関係が深い。

1時間エアレーションにおいて第1主軸はすべての変量とかなり高い相関をもち、第2主軸と第3主軸とのそれは急速に小さくなってゆく。このことは第1主軸に全分散の53.6%が乗っていると計算された前述の結果と一致している。このような場合、だ円体の第1主軸は全体の変動を代表するものであるということができよう。

したがって、杉戸<sup>5)</sup>の清澄指標のように、多くの項目を用いて浄化水の水質を、表現する必要があるときに

表-5 主軸と変量との相関係数

	1 HR DETENTION			2 HR DETENTION			3 HR DETENTION		
	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{21}$	$F_{22}$	$F_{23}$	$F_{31}$	$F_{32}$	$F_{33}$
SOL CARBOHYDRATE	0.7584	-0.2409	-0.4286	0.8025	-0.1592	-0.4445	-0.6018	0.0168	0.6494
SOL PROTEIN	0.8416	-0.0193	0.1744	0.9014	-0.2248	0.1777	-0.7463	-0.1408	-0.4395
SOL COD	0.9230	-0.1908	-0.0492	0.9268	0.0908	-0.0295	-0.8193	0.2878	0.4191
SOL BOD	0.5440	0.2722	0.7251	0.2955	0.8542	-0.2790	0.2142	0.8181	-0.4787
CARBOHYDRATE	0.7955	0.3119	-0.3627	0.7278	-0.2623	-0.5680	-0.5251	0.4388	0.3532
PROTEIN	0.9220	-0.1231	0.1508	0.8914	-0.1799	0.3145	-0.6118	-0.3421	-0.3176
COD	0.8671	-0.0163	-0.3813	0.9465	0.1498	0.0760	-0.7892	0.4448	0.3870
BOD	0.7539	0.4862	0.0982	0.0478	0.9373	0.0162	-0.1735	0.7946	-0.4873

は、第1主軸上への射影，すなわち式(25)を用いるのが合理的<sup>9)</sup>であろう。

エアレーションが2時間になると、表-5の2HR. DETENTIONの欄から明らかなように、1HR. DETENTIONの場合といくらか違って来る。すなわちSOL BODと、BODの第1主軸に対する相関が低くなり、第2軸のそれが高くなっている。3時間エアレーションも2時間の場合と同じ傾向にある。エアレーション時間が長くなるとBODの変動の方向が変わったのである。つまりBODの内容が変わってきた、いいかえるとエアレーション時間を長くしてえた浄化水では、短い場合ほどBODはCH, PR, SS…と強い線形関係にないという統計的事実が明らかにされた。

## 5. 主軸の直交回転による変量の分類

### (1) 直交回転の理論

一部の変量がだ円体の第1主軸に、別の一群の変量が第2主軸にそれぞれ高い相関をもつという前章の結果は下水浄化水の水質を表わす変量に関連する因子が一種類でないことを示すものである。同一の主軸に高い相関をもつ変量は同一因子に関連するので、同じ特性をもつ変量と考えられる。本章では主軸によって積極的に変量を分類することを試みたものである。

本節で用いるデータはパイロットプラントと並列運転していた別のエアレーションタンクの浄化水を採水して分析したものである。これはステップエアレーション式活性汚泥法で、約2時間半の滞留時間をもつ大型プラントであるので、運転管理はパイロットプラントよりもさらにラフであった。

約60のサンプルにつき透視度、蒸発残留物、ボラタイルマター、溶存物、浮遊物、BOD、COD、総チッ素、アンモニア性チッ素、有機性チッ素の10項目の水質試験をした。10次元ベクトルで約60個の水質サンプル

を表わそうというわけである。

表-6は3.の諸式を用いて求めた上記10変量とだ円体の主軸との相関係数、および主軸上の分散を記入してある。3本の主軸の分散の総和は全体の83.4%に達することがわかる。直交する3本の主軸を座標軸とする3次元部分空間で10次元の変動のほとんど大部分を記述できる。いいかえると、10種類の変量があるけれども、結局3種類の特性量を異なった立場から表現しているにすぎず、10種類の変量を3つのグループに分類できることを意味する。

次に、ベクトルで表わされる水質サンプルの点群をそのままにして、3本の主軸を原点を中心にして直交回転することを試みる。大部分の変動の属する3次元部分空間の座標系を直交変換しようとする。その直交変換の基準は、第1主軸は10個の変量のうち一部のものとはなるべく高い相関をもつように、他の変量とはなるべく低い相関をもつようにし、そして第2主軸は別の一部の変量と高い相関をもち先の第1主軸と高い相関をもっていた変量とは低い相関をもつようにする。第3主軸は前二者と低い相関をもった変量と高い相関をもつようにする。個々の主軸はそれぞれ高い相関をもつ変量の方向を示すので、その主軸が変量群を代表し、その変量群は同じ特性をもつというわけである。すなわち、10個の変量が3本の主軸によって統計的に分類されたことになる。

### (2) 直交回転の計算式

だ円主軸の回転のための直交変換行列を求めるための数学的手法は次のようになる。

表-6にあげた10個の変量は表-6の相関係数を座標成分にしてだ円体の主軸を座標軸にする空間にプロットすることができる。たとえば、透視度は第1主軸に対して-0.830、第2軸に対して0.053、第3軸に対し、0.19という座標成分をもつと考えるのである。同様に

表-6 だ円体の主軸と変量との相関係数

	$g_1$	$g_2$	$g_3$
透視度	-0.830	0.053	0.019
蒸発残留物	0.714	0.625	0.306
ボラタイルマター	0.555	-0.196	0.576
溶存物	0.608	0.725	0.319
浮遊物	0.803	-0.455	-0.013
BOD	0.596	-0.301	0.427
COD	0.878	-0.314	0.049
総チッ素	0.831	0.056	-0.510
アンモニア性チッ素	0.670	0.476	-0.530
有機性チッ素	0.817	-0.290	-0.342
分散の百分比	53.3%	16.8	13.7
分散の%累積	53.3	70.7	83.8

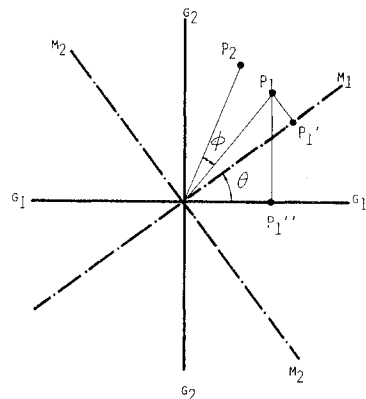


図-5 だ円主軸の直交回転

して、10個の変量が同じ座標系にプロットされる。3次元空間は図示が困難なので、以下説明の簡便のため、第1主軸と第2主軸だけをもつ2次元平面を考える。図-5に示したように2本の主軸  $G_1-G_2$  が決定する平面に  $P_1$  と  $P_2$  との2個の変量があるとすると、もし  $P_1$  が透視度であるとすればその座標は  $(-0.830, 0.053)$  で表わされることになる。

さて両変量の相対位置、すなわち角度  $\theta$ 、を一定のまま、 $G_1-G_2$  軸を直交回転して  $M_1-M_2$  になったとする。 $P_1$  の座標成分が  $G_1-G_2$  座標系に対し  $(b_{11}, b_{12})$  であり、 $M_1-M_2$  座標系に対し  $(a_{11}, a_{12})$  であるとすると、両者の間には式 (26) の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta \\ a_{12} &= -b_{11} \sin \theta + b_{12} \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

一般に

$$(a_{ij} \ a_{ik}) = (b_{ij} \ b_{ik}) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots(27)$$

$M_1$  が一群の変量と高い相関を、ほかの一群と低い相関を、 $M_2$  が他の一群の変量と高い相関をほかとは低い相関をもつよう回転角  $\theta$  を決定することは、 $M_i$  軸上の相関係数  $a_{ij}$  の分散が最大になることに等しい。

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\cdot P} \sum_{j=1}^P \left( a_{ij}^2 - \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P a_{ij}^2 \right)^2 \dots\dots\dots(28)$$

$$\sigma_{Total}^2 = \sum_{i=1}^q \sigma_i \dots\dots\dots(29)$$

$P$ =変量の数 (10),  $q$ =軸の数 (3)。

相関係数が小さいとはマイナスになるということではなく絶対値が小さいという意味であるから式 (28) では相関係数自体の分散ではなく自乗の分散をパラメーターに選んでいる。

式 (27) を式 (28) へ代入し、それを式 (29) へ代入し、 $\sigma_{Total}$  を  $\theta$  で偏微分して0とおけば、 $\sigma_{Total}$  を最大にする回転角  $\theta$  は次の式で計算することができる<sup>2)</sup>。

$$4\theta = \tan^{-1} \frac{D-2AB/V}{C-(A^2-B^2)/V} \dots\dots\dots(29)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } u_i &= b_{ij}^2 - b_{ik}^2 \\ v_i &= 2b_{ij} \times b_{ik} \\ A &= \sum_{j=1}^q u_i \\ B &= \sum_{j=1}^q v_i \\ C &= \sum_{j=1}^q (u_i^2 - v_i^2) \\ D &= 2 \sum_{j=1}^q u_i v_i \end{aligned}$$

このようにして  $\theta$  が計算されると  $G_i-G_2$  座標系を  $M_1-M_2$  座標へ変更するための変換行列  $T$  はただちに求めることができる。

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

以上は2次元の例であるから3次元の場合には  $G_1-G_2$

を直交変換したのち、 $G_2-G_3$  をもう一度直交変換する必要がある。

直交変換行列  $T'$  の数値解を求める手法は心理学の分野で発達してきた Kaiser<sup>7)</sup> のバリマックス法とほとんど同一であるから、富士通の KEMP、日立の SSS、IBM の BMD などに収録されているプログラムの一部を修正すると、ただちにコンピューターの利用が可能である。

(3) 計算結果

表-6 にあげた 10 個の変量につき前節に示した解析をほどこし、結果を表-7 にまとめた。表中の数字は主軸を直交回転してえた新しい座標軸に対する相関係数である。

表-7 直交回転した座標軸と変量との相関係数

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
透視度	-0.707	0.393	-0.113
蒸発残留物	0.242	0.963	0.089
ボラタイルマター	0.274	0.338	0.713
溶存物	0.116	0.990	0.022
浮遊物	0.300	0.830	0.435
BOD	0.423	0.245	0.610
COD	0.806	0.201	0.428
総チッ素	0.896	0.297	0.275
アンモニア性チッ素	0.557	-0.487	-0.456
有機性チッ素	0.947	0.079	0.062

同表の数値の大きさで分類すると、 $M_1$  のグループには透視度、COD、総チッ素、アンモニア性チッ素、有機性チッ素が属する。 $M_2$  グループでは蒸発残留物、溶存物、浮遊物が分類され、 $M_3$  グループにはボラタイルマターと BOD が属する。同じグループ内の変量は同じ特性をもつものであり、お互いに線形関係にある。たとえば  $M_1$  グループで、COD が大になればチッ素類も大きくなる、 $M_3$  グループでは、BOD が大になるとボラタイルマターも大になることが判明する。また  $M_1, M_2, M_3$  はお互いに直交する直線であるから、3つのグループ間の相互関係はグループ内のそれよりも低いといえる。 $M_3$  の BOD が大になっても、必ずしも  $M_1$  の透視度が良好になるものではないというのがその例である。ここで述べたことは多くのデータから導かれた統計的事実であるが、従来経験的に認められていたことと反していない。BOD が COD とよりもボラタイルマターの方により深い線形関係にあるという結果は 4. の 2 および 3 時間エアレーションの結果とともに興味深い。

できるだけ種類の少ない水質試験の項目で、浄化水の特性の多くを把握したい日常の試験に何を選ぶか、全く選択の基準がないとき、表-7 の  $M_1, M_2, M_3$  が参考になる。同一グループは同じ傾向をもつ変量であるから、同じグループに属する変量の重複を避け、各グルー

プから選び出せばよい。たとえば  $M_3$  からボラタイルマターを選べば BOD をやめ、 $M_2$  から蒸発残留物を、 $M_1$  から透視度を選ぶというのが一例である。この3個の変量から残る7種類がかなり正確に推定できる。

## 6. 結論と今後の課題

下水の浄化水の水質を表わす変量はそれぞれ固有の意義をもっている。BOD が放流先の水系の溶存酸素の消費の程度、透視度は見た目の清澄さ、ABS が発泡の程度というのがその例である。下水処理場の放流水が与える影響の範囲が広いので、処理施設の日常の運転管理や浄化水質のモニターがすべての変量に基づいて行なわれればこれに越すものはない。しかしながら限られた時間内に限られたスタッフによって運転を行なっている現実の下水処理施設では、物理的な理由から、変量の測定項目を少なくせざるをえない場合も少なくない。どのような変量の計測をルチンワークに組み入れるかの判断は測定方法の簡便なことのほかになるべく多くの特性を表現するというに基づくべきである。相互に線形関係にある変量をだぶって測定しても、同じ特性量を異なった立場から表現したにすぎないからである。表一6と表一7がこの目的を達するための変量の選択に役立つ。たった1個の変量で10項目全体の傾向を表わしたい場合には、だ円体の第1主軸と最も高い相関を有する透視度が、その測定の簡便さも含めて、第一候補であることが表一6から導かれる。第1主軸はすべての変量を代表する方向に向っているからである。もし3種類の変量の測定をする余裕があるときには、表一7の  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  それぞれのグループから1個ずつ選び出せばよい。全体の変動を表わすためには1個より3個の変量の方がよいことはいうまでもない。以上は選択に何の基準もない場合、改めて基準を設定するためのひとつの方法を示したものである。

下水処理水の BOD は曝気時間によってもちろん変化するが、その変化のし方は透視度や COD など他の変量のそれとは相違することが統計的に検証された。このことは“BOD は透視度や COD ほどエアレーション時間の影響を受けていない”という勝又<sup>9)</sup>らの結果と一致している。BOD<sub>5</sub>の測定結果が判明するのに5日を要するので、これを COD で代用する従来の試みはエアレーション時間が短いときには合理的であることが表一5からわかる。エアレーション時間が短い処理をしたときにえた浄化水の COD と BOD には強い線形関係があるからである。さらに2時間半の滞留時間をもち、パイロットプラントと同一の下水の流入を受けた実物エアレーションタンクによる浄化水の場合、表一7か

ら、ボラタイルマターが BOD の代用としては最上の指標であるといえよう。したがって下水量の変動が激しくエアレーション時間が大幅に変わるような場合、数個の変量を組合せて BOD に代る指標とするのが安全でありまた精度も高い<sup>9)</sup>。

浄化水の水質をベクトルと考え、その分布する確率的な範囲を規定する超だ円体の形状や主軸の変化の状態をエアレーション時間の長短と定量的に結びつける試みは今までなかった。この解析の工学的な応用として浄化水の管理がある。下水処理施設を標準的に運転して、原因のわかっている異常値を除いたデータに基づいて、だ円体とその主軸を求め、これと外的条件との関係を因子分析や回帰分析によって求めておくと、多変量に基づくプラント管理が可能になる。新たにえた水質ベクトルがあらかじめ求めておいただ円体の外側にくることが異常のあることを示し、いずれの方向にはずれたか原因がわかるというわけである。本法を実用化することが今後の課題である。

表一7において、 $M_3$  はボラタイルマターにも、BOD にも高い相関をもっているので、この両者は同じグループに属すると結論したが、COD も  $M_3$  に対して 0.427 という中間の大きさの相関係数をもっているので COD がこのグループに属さないと考えてよいかどうか判断に苦しむところである。だ円体の主軸を回転しても、相関係数が極大と極小に2分されず、中間の値のものが残ったからこのような問題が生じたのである。下水処理水の浄化の程度をあらわす変量相互間に何らの形で関連がないということもありえないにもかかわらず、関連がないとして、直交する座標軸で変量を分類したことがこの問題の原因であると思われる。したがってグループ間の相関を認めてだ円体の主軸を斜交変換するのが変量を分類するという目的のためにはベターであろう。この意味でまだ本論5.で述べた解析法は改良の余地を残している。

この研究でえた結論をまとめると次のようになる。

- (1) 水質ベクトルの90%を含む超だ円体はエアレーション時間が長くなるほどコンパクトになってゆく。
- (2) だ円体の主軸の長さや方向余弦はエアレーション時間によって変わる。
- (3) だ円体の第1主軸は全変量を代表する。
- (4) BOD の内容はエアレーション時間とともに変わってくる。
- (5) 実物エアレーションタンクの運転からえたデータに基づく変量は次のように分類することができる。

第1グループ：透視度、COD、総チッ素、アンモニア性チッ素、有機性チッ素

第2グループ：蒸発残留物、溶存物、浮遊物



## 第3グループ：BOD，ポラタイルマター

## 謝 辞

本研究で取り扱った数値計算は多量の演算を含んでいるので、全面的に IBM 360/40 の電算機を利用した。この使用は 都庁主税局事務機械化 福重主幹のご厚意に負うところが多い。

基本的な解析の手法は多変量解析の一分野として発展してきた因子分析法と主成分分析法を修正改良したものである。本論文に必要な演算のプログラムは約 2000 枚のカードに FORTRAN IV でパンチされている。

文献 1), 2), 3), 4) を教科書的に参照した。

## 参 考 文 献

- 1) 田中良久：“講座心理学 2，計量心理学”，東大出版会，1969.
- 2) 北川敏男：“多変量解析”，共立出版，1969
- 3) 芝 祐順：“相関分析法”，東大出版会，1969
- 4) 原田重春(訳)：“現代ベクトル解析”，岩波書店，1968
- 5) 杉戸 清：“下水道(上)”，技報堂
- 6) 庄司・山本・中村・西田：“淀川水質汚濁の因子分析”，土木学会論文集第 91 号，昭和 38 年
- 7) Harman, H.：“Modern Factor Analysis”，Chicago Press, 1960.
- 8) 勝又保正：“森ヶ崎処理場運転開始時における低濃度下水の活性汚泥処理実験”，下水道協会誌 Vol. 7, No. 73, 6月, 1970
- 9) 奥野長晴：“処理水 BOD をあらわす水質指標”，下水道協会誌，9月号，1970年，

(1970.5.18・受付)